

LOGIKA

Kilencedik téma – bizonyítás predikátumlogikában

Második lecke – az analitikus fa és az azonosság

Az azonossági állítások kezelésére két speciális szabályunk van. Az egyik az, hogy amennyiben valahol a fában feltűnik egy „ $a = b$ ” alakú állítás, bármely predikátumot, amelyet valamely formulában a -hoz rendelve találunk, hozzárendelhetünk b -hez. Erre a Leibniz-törvény feljogosít bennünket. A másik szabály azt teszi lehetővé, hogy bármely a individuális terminus esetén, amely a fában szerepel, szabadon beilleszthetünk a fába egy $a = a$ formulát.

Az utóbbi szabály triviálisnak és feleslegesnek tűnik, azonban nem az. Egy példa segítségével beláthatjuk, miért nem. Nehezen vitatható igazság, hogy minden dolog azonos valamivel. Azonban ennek formális reprezentációja, a $\forall x \exists y (x = y)$, nem pusztán intuitíve igaz, hanem a predikátumlogika egyik tétele. Egy formulát azonban csak akkor nevezhetünk egy logikai rendszer tételének, ha azt bizonyítani is tudjuk az adott rendszeren belül. Egy tételt úgy bizonyíthatunk analitikus fa segítségével, hogy a negációját állítjuk, és amennyiben a negált állítás lezárt fához, azaz ellentmondáshoz juttat minket, akkor az eredeti nem negált állítás logikai igazság, vagyis a formális rendszer tétele.

Tehát az állítás:

$$\vdash \forall x \exists y (x = y)$$

(Amikor premisszák nélkül, a „ $\vdash$ ” jellel kezdődik egy kifejezés, akkor az azt jelenti, hogy az illető kifejezés bármilyen premisszából, vagy akár zéró premisszából is következik. Ez a tételek (logikai igazságok) hagyományos metanyelvi reprezentációja.)

A bizonyítás menete arra is módot ad, hogy betekintsünk a beágyazott kvantifikációt alkalmazó kifejezések analízisébe.

Az első lépés a kifejezés negációjának felvétele a fa tetejére:

$$\sim \forall x \exists y (x = y)$$

Ezután a negált univerzális állítást átalakítjuk egzisztenciális állítássá:

$$\sim \forall x \exists y (x = y)$$

$$\exists x \sim \exists y (x = y)$$

Bevezetünk egy a névterminust az x változó (és az azt kötő kvantor) kiváltására:

$$\sim \forall x \exists y (x = y)$$

$$\exists x \sim \exists y (x = y)$$

$$\sim \exists y (a = y)$$

Az ekként előállt tagadott egzisztenciális állítást átalakítjuk pozitív univerzális állítássá:

$$\sim \forall x \exists y (x = y)$$

$$\exists x \sim \exists y (x = y)$$

$$\sim \exists y (a = y)$$

$$\forall y \sim (a = y)$$

Az univerzális állítást instanciáljuk, azaz az y változót helyettesítjük egy olyan névterminussal, amely már jelen van a fában – ez az a :

$$\sim \forall x \exists y (x = y)$$

$$\exists x \sim \exists y (x = y)$$

$$\sim \exists y (a = y)$$

$$\forall y \sim (a = y)$$

$$\sim (a = a)$$

|

A baj az, hogy nincs tovább. A $\sim (a = a)$ formulát nem tudjuk tovább egyszerűsíteni, a fa azonban nyitott maradt. Ilyenkor van értelme alkalmazni azt a szabályt, hogy $a = a$ bármikor szabadon beilleszthető. Így ugyanis le tudjuk zárni a fa egyetlen ágát:

$$\sim \forall x \exists y (x = y)$$

$$\exists x \sim \exists y (x = y)$$

$$\sim \exists y (a = y)$$

$$\forall y \sim (a = y)$$

$$\sim (a = a)$$

$$(a = a)$$

×

Mivel tagadása ellentmondáshoz vezet, bizonyítottuk, hogy a $\forall x \exists y (x = y)$ a predikátumlogika tétele.

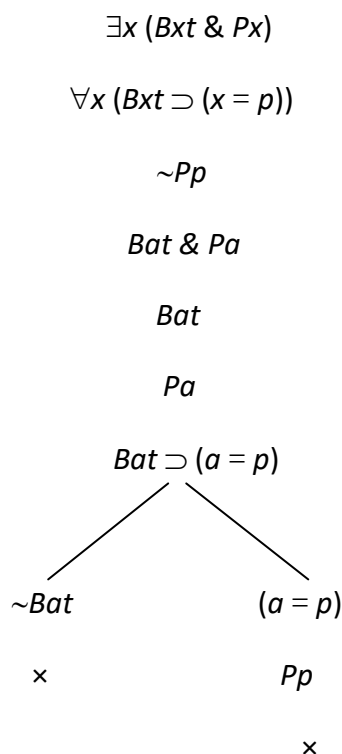
A Leibniz-törvényre támaszkodó másik szabály alkalmazását is példával szemléltetjük, ezúttal kevésbé részletesen kifejtve.

- Tuconak van egy pap bátyja. Tuconak egyetlen bátyja van: Pablo. Tehát Pablo pap.
Szótár: B : „bátyja vki vkinek”; P : „pap”; t : Tuco; p : Pablo

Az állítás:

$$\exists x (Bxt \ \& \ Px), \forall x (Bxt \supset (x = p)) \vdash Pp$$

A fa:



A kulcsmozzanat, hogy miután a fában felbukkant $(a = p)$, a bármely predikátuma p -hez is hozzákapcsolható (ezt mondja ki a Leibniz-törvény), és mivel Pa már szintén szerepelt a fában, Pp beilleszthetővé válik. Amikor pedig ez megtörténik a jobb oldali ág alján, ez lezárja az ágot (hiszen $\sim Pp$ már ott volt a konklúzió negációjaként).

Kérdések és feladatok

Ellenőrizze az alábbi következtetések érvényességét:

- $\exists x ((Fxc \ \& \ \forall y (Fyc \supset (x = y)) \ \& \ Lx) \vdash \sim \forall x \sim Lx$
- $\forall x (Ex \supset \exists y (Ey \ \& \ Rxy)), \exists x (x = a), \exists y (y = b) \vdash Rab$