LOGIKA

Kilencedik téma – bizonyítás predikátumlogikában

Első lecke – következtetések érvényességének bizonyítása

Az analitikus fa módszere az elsőrendű logika formuláira is használható. Az összes olyan elv és szabály, amelyet a propozicionális logika tárgyalása során megismertünk, továbbra is érvényben marad. Néhány új szabályt azonban be kell vezetnünk a kvantifikált formulák kezelésére.

A nem kvantifikált formulák pontosan ugyanúgy kezelhetők, mint a propozicionális logika kifejezései, vagyis analízisük a bennük szereplő konnektívumok révén valósul meg. További magyarázat helyett álljon itt egy példa egy kvantorokat és változókat nem tartalmazó elsőrendű következményviszony ellenőrzésére.

Az ellenőrzendő állítás legyen:

$Fa \supset Gab, \sim(Hb \vee Gab) \vdash \sim(Fa \,\&\, Gb)$

A fa így néz ki:

$Fa \supset Gab$

$\sim(Hb \vee Gab)$

$\sim\sim(Fa \,\&\, Gb)$

Fa

Gb

$\sim Hb$

$\sim Gab$

$\sim Fa$	Gab
×	×

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Ebben semmi újdonság nincs, leszámítva, hogy nem *p* és *q* mondatbetűk, hanem *F* és *G* predikátumbetűk, valamint *a* és *b* névkonstansok szerepelnek a formulákban. És mivel a nem kvantifikált formulák nem okoznak gondot az analitikus fa használatával kapcsolatban, a kvantifikált formulák esetén az a cél, hogy megszabaduljunk a kvantoroktól és változóktól, azaz hogy csak predikátumbetűt és individuális terminust (és konnektívumokat) tartalmazó formulákká alakítsuk őket. Ehhez néhány új konstrukciós szabályra van szükség.

Mivel a kvantifikáció kiküszöböléséhez arra van szükség, hogy az elemzendő kifejezés a kvantorral kezdődjön, a negált kvantifikált kifejezések esetében meg kell fordítani a negáció és a kvantor sorrendjét. Ezt az egzisztenciális és univerzális kvantor dualitása révén lehet megtenni. A gyakorlatban arról van szó, hogy amennyiben a fában szerepel egy $\sim\exists x$ A alakú kifejezés (ahol A egy olyan formula, amelyben *x* szerepel változóként), akkor azt át kell alakítani $\forall x \sim$A alakú kifejezéssé, amennyiben pedig $\sim\forall x$ A alakú kifejezéssel van dolgunk, azt $\exists x \sim$A alakúvá kell átalakítani. Ez valójában csupán átfogalmazás, hiszen a kvantorok dualitása értelmében a $\exists x$ A ekvivalens $\sim\forall x \sim$A-val, ezért $\sim\exists x$ A ekvivalens $\sim\sim\forall x \sim$A-val, ami, a kettős negáció elhagyhatósága miatt, ugyanaz, mint $\forall x \sim$A.

Tehát amikor egy fa törzsében (vagy valamelyik ágán) a $\sim\exists x\, Fx$ kifejezés tűnik fel, analízise így kezdődik:

$\sim\exists x\, Fx$

|

$\forall x \sim Fx$

Ha pedig egy $\sim\forall x\, Fx$ az alapkifejezés, akkor annak átalakítása:

$\sim\forall x\, Fx$

|

$\exists x \sim Fx$

Az így nyert kvantifikált formulát kell átalakítanunk kvantifikáció nélküli formulává. Amennyiben a fában bárhol egy $\exists x$ A formájú kifejezés jelenik meg (tekintet nélkül arra, hogy A negáció-e vagy pozitív állítás), azt az eljárást követjük, hogy az *x* változó helyére bevezetünk egy tetszőleges új névterminust (például azt, hogy *a*). Az elgondolás az, hogy egy egzisztenciálisan kvantifikált állítás akkor igaz, ha az értelmezési tartomány *valamelyik* individuumára igaz. Ezért adunk egy nevet, amelynek referenciája valójában: „az az individuum, amelyre az állítás igaz”, még ha nem tudjuk is, *melyik* individuum az. Ezért ebben a névadási procedúrában olyan individuumnevet kell választanunk, amely még nem szerepelt a fában.

Tegyük fel tehát, hogy a fában szerepel egy $\exists x\ Fx$ állítás. Átalakítása a következőképpen történik:

$$
\begin{array}{c}
Gb \\
\exists x\ Fx \\
| \\
Fa
\end{array}
$$

A *Gb* formulát annak illusztrálása céljából szerepeltettük, hogy a kvantifikált kifejezés átalakítása során kapott formulában olyan névbetű jelenik meg, amely a fa korábbi formuláiban nem bukkant fel.

Ha a feladat egy univerzálisan kvantifikált formula átalakítása, szintén névterminust illesztünk a változó helyére, ám ez esetben olyan nevet célszerű választani, amely valahol már megjelent a fában. Az eljárás elvi magyarázata az, hogy egy univerzálisan kvantifikált állítás akkor igaz, ha a tárgyalási univerzum minden egyes individuumával behelyettesítve igaz. Amennyiben a fában korábban nem szerepelt individuális terminus, akkor ugyanúgy újat vezetünk be, mint az előbbi esetben.

$$
\begin{array}{c}
Gb \\
\forall x\ Fx \\
| \\
Fb
\end{array}
$$

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Nézzünk néhány egyszerű esetet. Először egy olyan séma instanciáját, amely az *egzisztenciális általánosítás* nevet viseli: egy konkrét individuummal kapcsolatos állításból egy egzisztenciálisan kvantifikált állításra következtetünk.

- Clint Eastwood a városban van. Tehát van valaki a városban.

Szótár: *V*: „a városban van”; *c*: Clint Eastwood

Az állítás:

$$Vc \vdash \exists x\, Vx$$

A fa:

$$Vc$$

$$\sim\exists x\, Vx$$

$$\forall x \sim Vx$$

$$\sim Vc$$

$$\times$$

Akárcsak a korábbi fejezetekben, a függőleges törzsvonal megrajzolásától eltekintettünk.

Rövid áttekintés: felvettük egymás alá a premisszát és a konklúzió negációját. Utóbbi egy negált egzisztenciális kifejezés lett. Ezt átalakítottuk pozitív univerzális kifejezéssé, hatóköre alatt egy negációval. Az így megjelenő univerzális állítás változóját behelyettesítettük egy olyan névterminussal, amely már szerepelt a fában (*c*-vel). Az ezáltal kapott $\sim Vc$ kifejezés ellentmondásban áll a premisszával. Tehát nem lehetséges, hogy a premissza igaz, de a konklúzió hamis. A következtetés érvényes.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Az egzisztenciális általánosítás tükörképe az *univerzális általánosítás*. Ha egy feltétel minden individuumra teljesül, akkor bármelyik konkrét individuumra is teljesül. Vagyis:

- Mindenki a városban van. Tehát Clint Eastwood a városban van.

A szótár ugyanaz. Az állítás:

$\forall x\ Vx \vdash Vc$

A fa:

$$\forall x\ Vx$$

$$\sim Vc$$

$$Vc$$

$$\times$$

Igazság szerint figyelmen kívül hagytunk valamit, éspedig azt, hogy a „valaki” és a „mindenki” kifejezések azt implikálják, hogy emberi személyekről beszélünk. Azaz hallgatólagosan leszűkítettük a tárgyalási univerzumot emberekre. Noha jelen esetben ez védhető, érdemes megnézni azt is, hogyan alakul ez a következtetés, ha nem alkalmazzuk a kontextuális megszorítást.

A szótárba felvesszük az *E* predikátumbetűt az „ember” predikátum jelölésére.

Az állítás a következő:

$\forall x\ (Ex \supset Vx) \vdash Vc$

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

A fa:

$$\forall x\,(Ex \supset Vx)$$

$$\sim Vc$$

$$Ec \supset Vc$$

$$\sim Ec \qquad\qquad Vc$$

$$\qquad\qquad\qquad \times$$

A bal oldali ág nyitott maradt, a fa tehát azt mutatja, hogy a következtetés érvénytelen. Mit csináltunk rosszul?

A fa tökéletesen rendben van; ez a következtetés ebben a formában valóban érvénytelen. A probléma az, hogy még mindig túl sokat bíztunk a természetes nyelvi érzékünkre, és nem ügyeltünk a logikai formára. Tudjuk, hogy Clint Eastwood ember, ám ezt nem szerepeltettük explicit módon sehol. Márpedig az, hogy Clint Eastwood ember a világ egy empirikus ténye, nem pedig logikai igazság. Ezért állításunknak így kellett volna kinéznie.

$$\forall x\,(Ex \supset Vx),\ Ec \vdash Vc$$

Ez a következtetés már érvényes lesz. Ellenőrzése legyen az olvasó feladata.

Nézzük meg a klasszikus szillogizmus analitikus fáját:

- Minden ember halandó. A görögök emberek. Tehát a görögök halandók.

Szótár: *H*: „halandó”; *E*: „ember”; *G*: „görög”

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Az állítás:

$$\forall x\,(Ex \supset Hx),\ \forall x\,(Gx \supset Ex) \vdash \forall x\,(Gx \supset Hx)$$

A fa:

$$\forall x\,(Ex \supset Hx)$$

$$\forall x\,(Gx \supset Ex)$$

$$\sim\forall x\,(Gx \supset Hx)$$

$$\exists x \sim(Gx \supset Hx)$$

$$\sim(Ga \supset Ha)$$

$$Ga$$

$$\sim Ha$$

$$\begin{array}{ccc} \sim Ga & & Ea \\ \times & \sim Ea & & Ha \\ & \times & & \times \end{array}$$

A negált konklúzió egy tagadott univerzális állítást eredményezett. Ezt átalakítottuk egzisztenciális állítássá. Bevezettük az *a* névbetűt a kvantifikáció kiváltására, később ugyanezt alkalmaztuk a premisszák univerzális kifejezéseinek instanciálására. Az összes ág lezárt lett; a következtetés érvényes.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Kérdések és feladatok

Ellenőrizze az alábbi következtetések érvényességét:

- $\forall x\ (Ex \supset Vx),\ Ec \vdash Vc$
- $\exists x\ (Fx\ \&\ Gx),\ \forall x\ (Gx \supset Hx) \vdash \exists x\ Hx$
- $\forall x\ (Fx \supset Gx),\ \forall x\ (Gx \supset Hx),\ \exists x\ (Fx\ \&\ {\sim}Hx) \vdash \exists x\ {\sim}Gx$
- $\exists x\ (Fx \vee Gx),\ \forall x\ {\sim}((Gx\ \&\ Lx) \supset \forall y\ Rxy) \vdash \exists x \exists y\ Rxy$

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu