

LOGIKA

Nyolcadik téma – kvantifikáció

Negyedik lecke – azonosság

Volt korábban egy olyan állítás, amelyet félretettünk, mondván, nincsenek még eszközeink adekvát ábrázolásához. Az állítás ez volt:

- Nem a Csúf találja meg az elásott 200 000 dollárt.

Nyilván azt akarjuk mondani, hogy ha egyáltalán megtalálja is valaki az elásott pénzt, az nem a Csúf lesz. Amikor a kifejezés felbukkant, nem tudtuk még formalizálni, hiszen a kvantifikáció még nem állt a rendelkezésünkre. Most már viszont a rendelkezésünkre áll; nézzük, mire megyünk vele.

A parafrázis most is segít. Az állítás tartalma tehát az, hogy ha van olyan ember, aki megtalálja az elásott 200 000 dollárt, akkor az nem a Csúf. Ezt azonban a kétféle kvantorral felszerelve kétféleképpen is kifejezhetjük:

- Ha van olyan x , hogy x ember, és x megtalálja az elásott 200 000 dollárt, akkor x nem azonos a Csúffal.
- Minden x -re: ha x ember, akkor ha x megtalálja az elásott 200 000 dollárt, akkor x nem azonos a Csúffal.

Két kérdés merül fel: az egyik, hogy melyik lehetőséget válasszuk (azaz egzisztenciálisan, vagy univerzálisan kvantifikáljunk). A másik, hogy miként ábrázoljuk az utolsó tagmondatot („ x nem azonos a Csúffal”).

Az első kérdés eldöntéséhez pillanatnyilag nem kell foglalkoznunk a másodikkal. A szótárunk ehhez szükséges fragmentuma már kész: E : „ember”; M : „megtalál vki vmit”, c : a Csúf; d : az elásott 200 000 dollár. Az alternatíva félformálisan így jeleníthető meg:

- $\exists x ((Ex \ \& \ Mxd) \supset (x \text{ nem azonos a Csúffal}))$
- $\forall x (Ex \supset (Mxd \supset (x \text{ nem azonos a Csúffal})))$

Melyik a megfelelő opció? Az első kicsit jobban illeszkedik a proposíció természetes nyelvi megfogalmazásához, a második viszont jobban kifejezi azt, hogy a „nem a Csúf találja meg az elásott 200 000 dollárt” állításban eldöntetlen, hogy valaki megtalálja-e a kérdéses

dolgot. Mi most a másodikat választjuk, de nem múlik sok ezen a döntésen. A két formula ugyanis kölcsönösen a logikai következménye a másiknak, tehát logikai pozíciójuk megegyezik.

Az azonosság jelölésére bevezethetünk egy új predikátumot. Például legyen A a predikátumbetűje az „azonos vmi vmivel” predikátumnak. Ekkor a formulánk így nézne ki:

$$\bullet \quad \forall x (Ex \supset (Mxd \supset \sim Axc))$$

Voltaképpen nincs is semmi gond ezzel a megoldással, de a predikátumlogika nyelvén adott egy specifikusan az ilyen állítások formalizálására beállított lehetőség, az **azonosságpredikátum**. Az azonosság kifejezése ugyanis olyan gyakran nélkülözhetetlen természetes nyelvi állításaink logikai szerkezetének megvilágításakor, és az azonosságnak olyan speciális logikai tulajdonságai vannak, hogy érdemes azt egy sztenderd *predikátumkonstanssal* jelölni. Olyan kifejezéssel tehát, amely szimbolikusan mindig ugyanúgy jelenik meg, és logikai operátorként mindig ugyanazok a jellemzői (amelyeket így nem kell mindig újra kikötni, ahogy *ad hoc* predikátumbetűk esetén kellene).

Az azonosságpredikátum szimbóluma az ismert „=” jel. Tehát amikor azt akarjuk mondani, hogy „ a azonos b -vel”, akkor ezt így írjuk le: „ $a = b$ ”. Ha tagadni kívánjuk ugyanezt, azt megtehetjük a negáció szimbólumának alkalmazásával, így: „ $\sim(a = b)$ ”, vagy a nem-azonosság konstans jelével: „ $a \neq b$ ”.

A „nem a Csúf találja meg az elásott 200 000 dollárt” propozíció formálisan tehát így fejezhető ki:

$$\forall x (Ex \supset (Mxd \supset (x \neq c)))$$

És, mivel ha történetesen nem ember, hanem egy prérifarkas találja meg az elásott 200 000 dollárt, akkor az biztosan nem lesz azonos a Csúffal, sőt, valójában teljesen mindegy, hogy mi találja meg a pénzt (a lényeg, hogy az nem a Csúf), a kifejezés egyszerűsíthető:

$$\forall x (Mxd \supset (x \neq c))$$

Az azonosság **reflexív**, **szimmetrikus** és **transzitiv** viszony, vagyis a azonos önmagával, ha a azonos b -vel, akkor b is azonos a -val, és ha a azonos b -vel, b pedig azonos c -vel, akkor a azonos c -vel.

HATÁROZOTT LEÍRÁS

Az azonosságpredikátum használati lehetőségeit példázza Russell híres dilemmája. „A jelenlegi francia király kopasz” állítás értelmes kijelentésnek tűnik. Ha egy kijelentés értelmes, akkor vagy igaz, vagy hamis. Ez az állítás nyilvánvalóan nem igaz. Ugyanakkor hamis sem lehet, hiszen tagadása, „A jelenlegi francia király nem kopasz”, szintén nem igaz. Amennyiben viszont sem igaz, sem hamis, akkor mégiscsak értelmetlen. De milyen alapon lehetne értelmetlennek minősíteni egy olyan kifejezést, amely nyelvtanilag jól formált, ráadásul minden további nélkül megértjük, mi a tartalma?

Russell megoldása az, hogy különbséget tesz a kifejezés felszíni és logikai grammatikája között. A szóban forgó mondat logikailag egy egzisztenciális állítás, amely egy határozott leírást tartalmaz. A határozott leírás olyan nyelvi eszköz, amellyel éppúgy egyetlen konkrét individuumot azonosítunk, mint egy tulajdonnévvel, miközben nyelvtanilag nem használunk tulajdonnevet. „A jelenlegi francia király kopasz” logikailag a következőképpen analizálható: „van olyan x , hogy x a jelenlegi francia király, egyetlen ilyen dolog van, és ez az x kopasz”. Tehát, ha F : „jelenlegi francia király” és K : „kopasz”, akkor formálisan az állítás így reprezentálható: $\exists x (Fx \& \forall y (Fy \supset (x = y)) \& Kx)$. A leírás határozottságáért, vagyis azért, hogy egy meghatározott dologról beszélünk „a jelenleg francia király” kifejezés esetében, a beágyazott univerzálisan kvantifikált kondicionális felel, amely kimondja, hogy ha bármire a világon igaz, hogy az a jelenlegi francia király, akkor az a valami x -szel azonos.

Az így elemzett állítás értelmes, és minden további nélkül hamisnak nyilvánítható, hiszen egészében véve egy hamis egzisztenciális állításnak bizonyul.

Az azonosságpredikátum a segítségünkre van olyankor, amikor egy konkrét individuumról megállapítjuk, hogy egy adott jellemzőnek ő a hordozója (vagy relátuma). Példák következnek:

- Pablo Ramirez atya nem más, mint a Csúf fivére.

Szótár: F : „fivére vki vkinek”; c : a Csúf, p : Pablo Ramirez atya

$$\exists x (Fxc \& (x = p))$$

- Az *Iliász* és az *Odüsszeia* szerzője nem ugyanaz a személy.

Szótár: I : „az *Iliász* szerzője”; O : „az *Odüsszeia* szerzője”

$$\exists x (Ix \& \exists y (Oy \& (x \neq y)))$$

- Ugyanaz küldte a halálba Petroniust, aki Rómát is felgyújtatta: Nero császár.

Szótár: H : „halálba küld vki vkit”; G : „felgyújtat vki vmit”; p : Petronius; r : Róma; n : Nero császár

$$\exists x (Hxp \& \exists y (Gyr \& (x = y) \& ((x = n) \& (y = n))))$$

Azonosságpredikátum használatával fejezhetők ki olyan tények, amelyek az érintett individuumok számával kapcsolatosak:

- Legalább ketten túléltek a lövöldözést.

Szótár: T : „túléli a lövöldözést”

$$\exists x \exists y ((Tx \& Ty) \& (x \neq y))$$

- Legfeljebb ketten éltek túl a lövöldözést.

$$\forall x \forall y ((Tx \& Ty) \supset (x \neq y) \supset \forall z (Tz \supset (x = z) \vee (y = z)))$$

- Pontosan ketten éltek túl a lövöldözést.

$$\exists x \exists y ((Tx \& Ty) \& (x \neq y)) \& \forall x \forall y ((Tx \& Ty) \supset (x \neq y) \supset \forall z (Tz \supset (x = z) \vee (y = z)))$$

A felsőfokú predikátumot használó állítások is azonosságpredikátummal fejezhetők ki formálisan.

- A Jó ránt fegyvert a leggyorsabban.

Szótár: F : „fegyvert ránt”; G : „gyorsabb vki vkinél”; j : a Jó

$$\forall x ((Fx \& (x \neq j)) \supset (Fj \supset Gjx))$$

Az azonossági viszony fontos logikai tulajdonsága a Leibniz-törvény. A törvény azt mondja ki, hogy amennyiben a és b individuum azonos egymással, akkor a bármely tulajdonsága egyben b -nek is a tulajdonsága. Tehát tetszőleges F tulajdonság esetén: $(a = b) \supset (Fa \supset Fb)$.

Az azonosságpredikátum néhány logikai tulajdonsága

reflexivitás

$$\forall x (x = x)$$

szimmetria

$$\forall x \forall y ((x = y) \equiv (y = x))$$

transzitivitás

$$\forall x \forall y \forall z (((x = y) \& (y = z)) \supset (x = z))$$

Leibniz-törvény

$$\forall x \forall y ((x = y) \supset (Fx \supset Fy))$$

Kérdések és feladatok

Formalizálja a következő állításokat:

- Mindenkinek van egy álma; az enyém te lettél.
- Legalább ketten túléltek a lövöldözést, és most mindenki őket üldözi.
- Ha a mikrohullámú sütő feltalálója gondolt volna a macskákra, akkor valami mást talált volna fel.
- Én vagyok én, te vagy te, és ha én vagyok a hülye, akkor te nem.