

LOGIKA

Nyolcadik téma – kvantifikáció

Harmadik lecke – beágyazott kvantorok

Vannak olyan állítások, amelyekben egynél több implicit kvantifikáció működik. Ezek formális ábrázolásakor a formulák felépítése is kifejezi ezt a jellemzőjüket.

- Mindenkinél van gyorsabb.

Az állítás már első pillantásra is univerzálisan kvantifikált kifejezésnek tűnik. A „mindenki” azt sugallja, hogy emberekről van szó, tehát lesz egy „E” predikátumunk, argumentumhelyén az „x” változóval. Ezen kívül szükségünk van egy „G” predikátumbetűre a „vki gyorsabb vkinél” kétargumentumú predikátum jelölésére.

Az első lépések már világosak. Univerzális állítás lévén formulánk így fog kezdődni:

$$\forall x (Ex \supset \dots)$$

De hogyan folytassuk? A G predikátumhelyeit ki kell tölteni valamivel. A G annak felel meg, hogy valaki gyorsabb valakinél (fogadjuk el, hogy a gyorsabb valami szintén ember). Minthogy világos, hogy minden x-ről állítjuk, hogy van nála gyorsabb, G második predikátumhelyére x kerül – G...x. Csakhogy nem tudjuk megnevezni azt, aki gyorsabb x-nél, hiszen az eredeti állítás egyetlen konkrét individuumot sem azonosít, erre a predikátumhelyre is egy változót kell illeszteniünk. Még hozzá új változót, hiszen nem azt mondjuk, hogy mindenki gyorsabb önmagánál, hanem azt, hogy másvalaki gyorsabb nála. De ez a másvalaki nem fejezhető ki ismét csak x-szel, egyrészt mert ez igencsak zavarossá tenné a formulát, másrészt az x változót már köti az univerzális kvantor. Ezért erre a célra egy „y” változót vezetünk be. Azt mondjuk, hogy y gyorsabb x-nél, és ezt a „Gyx” nyitott formulával fejezzük ki. Természetesen azt is hozzátesszük, hogy y is ember, hogy teljesen egyértelmű legyen, miről beszélünk. Eszerint formulánkat így tehetjük teljessé:

$$\forall x (Ex \supset (Ey \& Gyx))$$

Ezzel a megoldással azonban nincs rendben valami. Az x változót köti ugyan az univerzális kvantor, ám az y változó szabadon maradt a formulában. A szabad változót tartalmazó kifejezéseknek azonban, ahogy korábban kiderült, nincs igazságértékük. Ezért y-t is le kell kötni.

A „mindenkinél van gyorsabb” állításnak már a természetes nyelvi formája is azt sugallja, hogy működik benne valahol egy egzisztenciális kvantifikáció is („van gyorsabb”). Ha előállunk egy félformális parafrázissal, világos lesz az is, hol a helye ennek. A parafrázis: „minden x -re: ha x ember, akkor van olyan y , hogy y is ember, és y gyorsabb x -nél”. Ezt kell formálisan ábrázolnunk:

$$\forall x (Ex \supset \exists y (Ey \& Gyx))$$

A zárójelek azt mutatják meg, hogy mi a hatóköre az egyes kvantoroknak. Az univerzális kvantor hatóköre az egész állításra kiterjed, vagyis az x változókat végig ez a kvantor köti le. Az egzisztenciális kvantor hatóköre ezzel szemben a belső zárójelbe tett kifejezésre korlátozódik. Ezen kívül az is látható, hogy az egzisztenciális kvantor (illetve az egzisztenciálisan kvantifikált kifejezés egésze) is az univerzális kvantor hatókörében van. Ezt a viszonyt a következő átfogalmazással szemléltethetjük: „minden x -re van olyan y , hogy...”

Ebből következően a beágyazott kvantor a predikátumlogikában jelentésváltozás nélkül előre hozható. Tehát az, amit az előző formula kifejezett, kifejezhető az alábbi formulával is:

$$\forall x \exists y (Ex \supset (Ey \& Gyx))$$

Mivel azonban az előző elrendezés jobban megjeleníti a formulán belüli „erőviszonyokat”, tartjuk magunkat ahhoz.

Beágyazott kvantifikáció esetén a kvantorok sorrendje és hatóköre nagyon lényeges a kifejezések interpretációja szempontjából. A megváltoztatott sorrend egészen más jelentéseket hordoz. Nézzük az alábbi variációkat (és figyeljünk a változók sorrendjére is):

- Van valaki, aki mindenkinél gyorsabb.

$$\exists x (Ex \& \forall y (Ey \supset Gxy))$$

- Mindenki gyorsabb valakinél

$$\forall x (Ex \supset \exists y (Ey \& Gxy))$$

- Van valaki, akinél mindenki gyorsabb

$$\exists x (Ex \& \forall y (Ey \supset Gyx))$$

Végül nézzünk egy kissé bonyolultabb példát, hogy gyakoroljuk a kvantorok beágyazását:

- Ha mindenki minden munkát elvégez, amiért valaki megfizeti, de valamilyen munkát senki sem végez el, akkor van olyan munka, amiért senki nem fizet senkinek.

Új szótárt rögzítünk. Az M predikátumbetű a „munka” egyargumentumú predikátumot reprezentálja, a V a kétargumentumú „elvégez vki vmit” jelölését szolgálja, az F pedig a „fizet vki vkinek vmiért” háromargumentumú predikátum jelölője.

Formalizálva:

$$(\forall x (Ex \supset \forall y (My \supset \exists z (Ez \ \& \ Fzxy) \supset Vxy)) \ \& \ \exists x (Mx \ \& \ \sim \exists y (Ey \ \& \ Vyx))) \supset$$
$$(\exists x (Mx \ \& \ \sim \exists y (Ey \ \& \ \exists z (Ez \ \& \ Fyxz))))$$

Noha nem fért ki egy sorba, ez egyetlen kifejezés, még hozzá egy kondicionális (amelynek utótagja került új sorba). A hosszú kondicionális előtagja egy konjunkció, amelynek első konjunktja egy univerzálisan kvantifikált formula, utótagja pedig egy egzisztenciálisan kvantifikált formula. Csak az előtag első konjunktját fejtjük itt ki, a többi tag értelmezése jó gyakorlat lehet az olvasónak.

Az első „tagmondat” tehát ez: $\forall x (Ex \supset \forall y (My \supset \exists z (Ez \ \& \ Fzxy) \supset Vxy))$. Hogyan jött ez össze?

A természetes nyelvi kiinduló állítás ez: „mindenki minden munkát elvégez, amiért valaki megfizeti”. Csúnya, de megvilágító átfogalmazásban: „minden, ami ember, mindent, ami munka (ha valaki, aki ember, fizet érte), elvégzi”. Tehát azt akarjuk mondani, hogy „minden x -re: ha x ember, akkor (minden y -ra, ha y egy munka, akkor (ha van olyan z , hogy (z ember, és z megfizeti x -et y -ért), akkor x elvégzi y -t))”. A formula pontosan ezt a kifejezési rendet követi.

De nem okoz-e problémát, hogy az első részformulában az x és a z változókat az „ember” predikátumhoz kapcsoltuk, az y -t pedig a „munka” predikátumhoz, a másodikban pedig az x a „munka” predikátumhoz járul? Nem, mert a kvantorok csak addig kötik le a változókat, ameddig a hatókörük terjed, ezt pedig a zárójelek világosan jelölik a formulákban. Vagyis amint az utolsó zárójelet bezárjuk az első, univerzálisan kvantifikált formula végén, a változók újra „felszabadulnak”, és a következő, egzisztenciálisan kvantifikált formulában már az egzisztenciális kvantor köti le őket.

Csak az a lényeg, hogy egyazon kvantor hatókörén belül ne „vándoroljanak”, az ugyanis reménytelenül összezavarna mindent.

Kérdések és feladatok

Formalizálja a következő állításokat:

- Nem mindenkit kedvel valaki.
- Ha a gepárdok gyorsabbak a gazelláknál, akkor néhány gazella nem éli túl a versenyfutást.
- Van valaki, aki kitervelte az összes bankrablást, amit az idén elkövettek.
- Noha minden eseménynek oka van, olyan ok nincs, amely minden eseményt okozott.
- Mindenki azt kívánja, aki nem kívánja, hogy legyen valaki, akit mindenki kíván.