LOGIKA

Nyolcadik téma – kvantifikáció

Második lecke – az univerzális kvantor

Az előbb láttuk, hogy kvantifikáció segítségével képesek vagyunk kifejezni azt, hogy egyetlen *x*-re sem teljesül valamilyen predikátum. Annak a kifejezésére is vannak ezáltal eszközeink, hogy minden *x*-re igaz valami.

Legyen a következő állítás ez:

- A Rossz mindig elvégzi azt, amiért megfizetik.

Először a predikátumokat kell azonosítanunk és megjelölnünk. Az „elvégez vki vmit” kétargumentumú predikátumot jelölje a *V* predikátumbetű; a „megfizetnek vkit vmiért”szintén kétargumentumú predikátumot pedig az *F*. Tehát „a Rossz elvégzi *x*-et” kifejezést a „*Vrx*” nyitott formula, „a Rosszat megfizetik *x*-ért” kifejezést az „*Frx*” nyitott formula fogja reprezentálni.

Az, hogy „a Rossz mindig elvégzi azt, amiért megfizetik”, akkor igaz, ha nincs olyan dolog, amelyért a Rosszat megfizetik, és ő mégsem végzi el. Az előbbi példa alapján ezt így formalizáljuk:

$$\sim\exists x\ (Frx\ \&\ \sim Vrx)$$

De miért kellene tagadással kifejeznünk egy olyan állítást, amely egyébként nem tagadó formájú? A predikátumlogika nyelvében a rendelkezésünkre áll egy pozitív lehetőség erre, méghozzá az úgynevezett ***univerzális kvantor***. Az univerzális kvantor éppen a mindennapi nyelv olyan kifejezéseinek reprezentálására szolgál, mint a „minden”, „összes”, „mindig” stb. Az univerzális kvantor jele a $\forall$, grammatikája és szintaxisa megegyezik az egzisztenciális kvantoréval (ugyanott helyezkedik el, ugyanúgy leköti a változókat, a hatókörét ugyanúgy a zárójelek jelzik). Az a kifejezés tehát, hogy $\forall$***x Fx***, azt mondja, hogy egy bizonyos F jellemző minden egyes individuumra teljesül. Kiolvasása: „minden *x*-re teljesül *F*”, vagy „minden *x F*”, vagy „*F* minden *x*-szel igaz állítást képez”.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

A szóban forgó „a Rossz mindig elvégzi azt, amiért megfizetik" állítással azt akarjuk mondani, hogy a Rossz minden kifizetett megbízása együtt jár annak teljesítésével. Az egzisztenciális kvantifikáció esetében az ilyen együttjárást konjunkcióval fejeztük ki. Ezért az első gondolatunk az lehet, hogy itt is ugyanezt a formát kell alkalmaznunk:

$\forall x\ (Frx\ \&\ Vrx)$

Ám így nem azt mondanánk, amit szeretnénk. Ha a fenti kifejezést a megadott szimbolizációs szótár segítségével visszafordítjuk a természetes nyelvünkre, valami olyasmit kapunk, hogy „a Rosszat mindenért megfizetik, és ő el is végez mindent" – ez pedig nyilván nem ugyanaz. Valójában azt kívánjuk formálisan reprezentálni, hogy a Rossz *azokat* a feladatokat végzi el, *amikért* megfizetik, vagyis hogy *ha* egyszer megfizetik valamiért, *akkor ő* azt el is végzi. Ez pedig nem konjunkció, hanem kondicionális állítás. Tehát helyes ábrázolása a következő:

$\boldsymbol{\forall x\ (Frx \supset Vrx)}$

Általánosságban is elmondható: az univerzális kvantor leggyakrabban olyan esetekben használatos, amelyekben azt állítjuk, hogy egy bizonyos típusba vagy fajtába tartozó dolgok mindegyike rendelkezik valamilyen sajátossággal. A klasszikus szillogizmus példáját felidézve ilyen eset az, amikor azt mondjuk, hogy „minden ember halandó". Ezzel azt állítjuk, hogy minden olyan individuum, amely az emberi fajhoz tartozik, a halandóság tulajdonságával bír, vagyis azt, hogy ha valami ember, akkor az a valami halandó. Amennyiben az „*F*" az „embernek lenni" tulajdonságát, a „*G*" pedig a „halandónak lenni" tulajdonságát fejezi ki, a „minden ember halandó" propozíció formális kifejezése ez: $\forall x\ (Fx \supset Gx)$. Ez az univerzális tulajdonság-tulajdonítás sztenderd formája.

Az egzisztenciálisan és az univerzálisan kvantifikált állítások feszes logikai viszonyban állnak egymással. Ha van olyan valami, ami rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal, akkor nem igaz, hogy minden dologból hiányozna az a tulajdonság; ha minden dolog rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal, akkor nem igaz, hogy van olyan dolog, amely nem rendelkezik az illető tulajdonsággal. Más szóval, az egzisztenciális és az univerzális kvantor egymás ***duális***ai.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Az egzisztenciális és az univerzális kvantifikáció dualitása

Az egzisztenciális és az univerzális kvantorra igaz, hogy kölcsönösen kifejezhetők egymással. Tehát, tetszőleges *F* predikátum esetén:

$$\exists x\ Fx \equiv \sim\forall x \sim Fx$$

$$\forall x\ Fx \equiv \sim\exists x \sim Fx$$

Vagy, metanyelvi változó használatával

$$\mathbf{\exists x\ A \equiv \sim\forall x \sim A}$$

$$\mathbf{\forall x\ A \equiv \sim\exists x \sim A}$$

(ahol A egy olyan kifejezés, amelyben *x* szabadon fordul elő).

A dualitás alapján világossá válik „a Rossz mindig elvégzi azt, amiért megfizetik” állítás egzisztenciálisan és univerzálisan kvantifikált reprezentációja közötti viszony. Kétféle formulát fogadtunk el az állítás adekvát formalizálásaként:

- $\sim\exists x\ (Frx\ \&\ \sim Vrx)$
- $\forall x\ (Frx \supset Vrx)$

Mivel a dualitás miatt „$\exists$” kifejezhető „$\sim\forall\sim$”-ként, a felső formula a következő alakban is megjeleníthető:

- $\sim\sim\forall x \sim(Frx\ \&\ \sim Vrx)$,

amely a kettős negáció eliminálhatósága miatt egyenértékű ezzel:

- $\forall x \sim(Frx\ \&\ \sim Vrx)$

Azt viszont még a propozicionális logikából tudjuk, hogy $\sim$(A & $\sim$B) logikailag ekvivalens A $\supset$ B-vel, ezért a fenti formula logikailag ekvivalens az alábbi formulával:

- $\forall x\ (Frx \supset Vrx)$

Tehát az állítás egzisztenciális és univerzális reprezentációja logikailag ekvivalens egymással, vagyis pontosan ugyanakkor igazak, ugyanazt mondják.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

KVANTOROK ÉS KONNEKTÍVUMOK

A kvantifikációt sokszor felfoghatjuk úgy, hogy individuumok véges sokaságával van dolgunk, amelyben minden egyes individuum elvben azonosítható. A hétköznapi nyelvhasználatban gyakran ez a helyzet, a kontextus és a nyelven kívüli viselkedés implicit módon rögzíti, hogy a világ tárgyainak milyen köre releváns egy adott közlés megértésében. A tárgyaknak ezt a releváns körét „értelmezési tartománynak" nevezzük. Ilyenkor az egzisztenciális kvantor úgy viselkedik, mint egy hosszú diszjunkció. Tehát egy egzisztenciálisan kvantifikált állítás, például „$\exists x\ Fx$" (amelyben *F* legyen egy tetszőleges tulajdonság jelölője) akkor igaz, ha az értelmezési tartomány valamelyik *a* **vagy** *b* **vagy** *c*… stb. elemével *F* igaz állítást eredményez – vagyis ha $Fa \vee Fb \vee Fc \vee \ldots$ igaz. Az univerzális kvantor viszont az értelmezési tartomány elemeinek segítségével képzett állítások konjunkciójaként értelmezhető. $\forall x\ Fx$ akkor igaz, ha $Fa\ \&\ Fb\ \&\ Fc\ \&\ldots$ igaz.

<u>Kérdések és feladatok</u>

1. Formalizálja a következő állításokat:

- Minden tücsök ciripel.
- Ebben a házban mindenki néma.
- Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
- Ha Martin Scorsese-nek igaza van, akkor egyetlen szuperhős-mozi sem valódi film

2. A kvantorok dualitása alapján fejezze ki a következő egziszenciális állításokat univerzális kvantorral és *vice versa*.

- $\exists x \sim Fx$
- $\sim\forall x\ (Fx \supset Gxa)$
- $\exists x \sim(Fx\ \&\ (Gxa \vee Hxa))$

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu