

LOGIKA

Nyolcadik téma – kvantifikáció

Első lecke – az egzisztenciális kvantor

Mi a teendő, amikor olyan állítással van dolgunk, amelyben valamelyik individuumot nem tudjuk egyértelműen azonosítani? Ilyen például a következő:

- Valaki rálőtt a Csúfra.

Az világos, hogy a „rálőtt vki vkire” kétargumentumú predikátum. Jelöljük L -lel. Az is világos, hogy a második argumentumhelyen a c fog állni, hiszen a Csúfra lőttek rá. Tehát a kész formula valami ilyesmi lesz: $L...c$. De mi kerüljön a kipontozott helyre?

Megkerülhetnénk a problémát a predikátum értelmezésének módosításával. Ha az L -t úgy értenénk, hogy „valaki rálőtt ...-ra”, akkor a fenti állítást formalizálhatnánk így: Lc . Csakhogy egyrészt túl sokszor alkalmazzuk a „valaki” vagy „valami” kifejezéseket ahhoz, hogy elégedettek legyünk ezzel, másrészt pedig ilyen módon nehézséget okozna az olyan proposíciók megjelenítése, mint a „valaki rálőtt a Csúfra, és megbilincselte”. Ha ugyanis a „megbilincselte” kifejezést is egyargumentumú predikátumként fognánk fel (mint „valaki megbilincselte ...-t”), és mondjuk B -vel ábrázolnánk, akkor a „valaki rálőtt a Csúfra és megbilincselte” proposíciót az $Lc \ \& \ Bc$ formulával kellene kifejezni. Ám ez a kifejezés nem volna képes egyértelműsíteni, hogy vajon ugyanaz a valaki lőtt-e rá a Csúfra, mint aki megbilincselte, vagy az másvalaki volt.

Bevezethetnénk egy nevet is a „valaki” jelölésére, például a v névterminust, és egyszerűen Lvc -ként formalizálhatnánk a szóban forgó állítást. Ez megoldaná az előbbi nehézséget is, hiszen ekkor az $Lvc \ \& \ Bvc$ egyértelműen azt jelentené, hogy ugyanaz lőtt rá a Csúfra, aki megbilincselte. Azonban a „valaki” nem név. Pontosan olyan körülmények között használjuk, amikor nem tudjuk vagy nem akarjuk meghatározni, hogy melyik egyedi individuumról állítunk valamit. A „valaki” használata általános, de nagymértékben szabályozott. Ezt az általánosságot és szabályozottságot meg kell őriznünk a logikai használatban.

Ezért egy olyan fogáshoz folyamodunk, amely a matematikai nyelvhasználatban már bevált: a **változók** használatához. Amikor azt a kifejezést látjuk, hogy „ $3 + x = 8$ ”, akkor értjük, hogy abban az „ x ” egy változó, vagyis egy olyan kifejezés, amelynek értéke valamilyen szám, de amíg nem oldjuk meg az egyenletet, meghatározatlan, hogy melyik. Azt is tudjuk, hogy egy másik példában az „ x ”

más értéket is felvehet, például a „ $3 + (7 - x) = 8$ ” esetében x nyilvánvalóan más számot jelenít meg, mint az előzőben.

Kézenfekvő tehát ezt a kifejezési formát átvenni a matematika nyelvéből, kiegészítve természetesen azzal, hogy az elsőrendű logikában az x, y, z (stb.) változók értékei nem csak számok lehetnek, hanem a világon bármi.

Egy változó nem név, hiszen nem tapadnak egyetlen individuumhoz – éppen attól változók, hogy változnak értékeik. Úgy látszik, megfelelő eszközre leltünk ahhoz, hogy a „valaki rálőtt a Csúfra” állítás formáját kifejezzük. A kifejezés tehát ez volna:

Lxc

Azonban ez nem elegendő. Voltaképpen még nem dőlt el, hogy mit állítunk. A változók különféle értékeket vehetnek fel, az x lehet hol ez, hol az, hol egyszerre több dolog, hol egyik dolog sem. Ilyenkor x -et **szabad változó**nak nevezzük. Ám x túlságosan is szabadon viselkedik ahhoz, hogy tartalmaz állítás szubjektuma legyen.

Olyan ez, mintha valaki minden előkészítés és egyértelműsítő gesztus nélkül csak annyit mondana: „rálőtt a Csúfra”. Joggal kezdenénk firtatni, hogy hát ezt meg hogy érti, hányan lőttek rá, ki lőtt rá. Úgy gondolnánk, ezeknek a kérdéseknek a megválaszolása nélkül ez a „rálőtt a Csúfra” kifejezés befejezetlen, hiányos állítás, amit ki kell még pótolni valamivel ahhoz, hogy értelmes legyen.

Rögvest látjuk, mennyire híján van az egyértelműségnek az „ Lxc ” forma, ha a negációját vesszük, és azt megpróbáljuk természetes nyelvünkön értelmezni. Mit jelentene tehát $\sim Lxc$, ha Lxc azt jelenti, hogy „valaki rálőtt a Csúfra”? Két dolgot is jelenthet:

- Valaki nem lőtt rá a Csúfra.
- Nem igaz, hogy valaki rálőtt a Csúfra.

Csak hogy az első állítás akkor igaz, ha néhányan rálőttek a Csúfra, de volt olyan, aki nem, a második viszont akkor, ha senki nem lőtt rá. Ezek nagyon különböző igazságfeltételek. Szükségünk van egy olyan eszközre, amely elég kötötté teszi az x használatát ahhoz, hogy egyértelmű legyen, hogy a fenti helyzetekben mit állítunk (vagy mit tagadunk).

Ez az eszköz a **kvantifikáció**. Az Lxc kifejezést úgy egyértelműsítjük, hogy az elejére egy „ $\exists$ ” szimbólumot (úgynevezett egzisztenciális kvantort) illesztünk, amelynek kiolvasása „van olyan..., hogy...” vagy „néhány ...-re igaz, hogy...”. Az első kipontozott helyen rögzítjük, hogy milyen változó viselkedését kötjük le az **egzisztenciális kvantorral** (jelen esetben ez x), a második kipontozott helyre maga a kvantifikált proposíció kerül (Lxc). Tehát a teljes kifejezés így fog kinézni:

$\exists x Lxc$

Ezt a szimbólumsort tehát így értjük: „van olyan x , hogy Lxc ”, azaz „van olyan

x , amely az L kétargumentumú predikátum első argumentumhelyén, ha L második argumentumhelyét a c névkonstans tölti ki, igaz proposíciót eredményez”. És mivel már rögzítettük, hogy az L jelentése az, hogy „rálőtt ... -re”, a c pedig a Csúf megnevezésére szolgál, kifejezésünket így értjük: „van olyan x , hogy x rálőtt a Csúfra”.

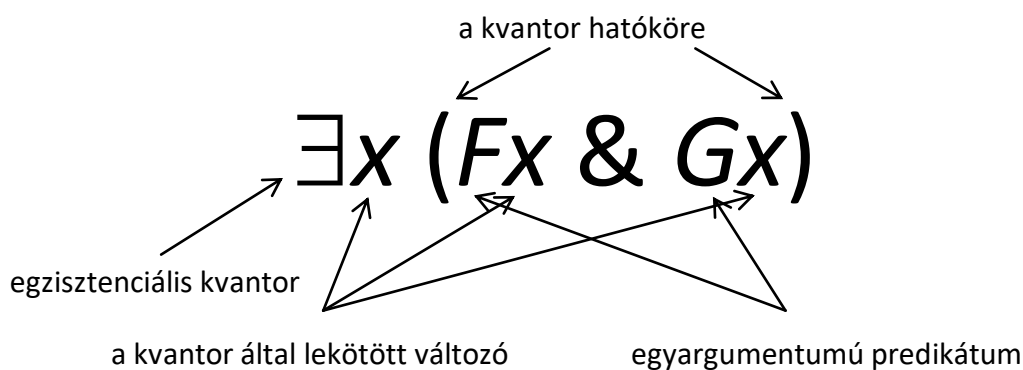
Egyetlen kiegészítésre van még szükség. Mivel az „ $\exists x$ ” kifejezés nem szűkíti le az x lehetséges értékeit emberi személyekre, miközben a „valaki rálőtt a Csúfra” állításban a „valaki” határozatlan névmás alakja egyértelműen erre az interpretációra ösztönöz, az állítás formalizálása során nekünk kell kikötnünk ezt a korlátozást. Ezért bevezetjük az „... ember” egyargumentumú predikátumot – jelölése E lesz – annak az implicit tulajdonságnak az explicitté tétele érdekében, amely a „valaki” kifejezésben benne rejlik. A formalizált proposíció végső alakja tehát ez lesz:

$$\exists x (Ex \& Lxc)$$

amelynek kiolvasása: „van olyan x , hogy x ember, és x rálőtt a Csúfra”, vagy a lehető legegyszerűbben: „valaki rálőtt a Csúfra”.

Nézzük meg ennek a formulának a legáltalánosabb alakját: $\exists x (Fx \& Gx)$. Az egzisztenciális kvantifikáció leggyakrabban ebben a formában fordul elő, vagyis hatókörében egy konjunkció jelenik meg. Azt mondjuk vele, hogy egy F tulajdonságú dolog egyben G tulajdonságú is. Ezen a módon tudunk új információt adni egy már ismert dologról.

A kifejezés részletes felépítése a következő:



EGZISZTENCIÁLIS KVANTOR

Az egzisztenciális kvantifikáció értelmét onnan is megközelíthetjük, hogy feltesszük a kérdést: mikor hamis az állítás? (Ha meg tudjuk mondani egy állításról, hogy mikor hamis, akkor megértettük az állítást – tisztában vagyunk az igazságfeltételeivel.) Ha egyvalaki rálőtt a Csúfra, az állítás nem hamis. Ha egynél többen lőttek rá, akkor sem – ha több valaki rálőtt, akkor ebből következik, hogy lőttek rá, tehát hogy valaki rálőtt. Ha az égvilágon mindenki rálőtt, akkor is ez a helyzet. Az állítás kizárólag akkor hamis, ha egyetlen ember sem lőtt rá a Csúfra. Tehát a „valaki rálőtt a Csúfra” propozíció logikailag ekvivalens azzal, hogy „legalább egy ember rálőtt a Csúfra”, vagy hogy „nem igaz, hogy egyetlen ember sem lőtt rá a Csúfra”, vagy (ha nagyon precízek akarunk lenni) azzal, hogy „azoknak a személyeknek a halmaza, akik rálőttek a Csúfra, nem üres”. Tehát a „valaki rálőtt a Csúfra” állításban van egy implicit mennyiségi tényező: azt mondjuk, hogy a Csúfra lövöldözők száma nagyobb, mint nulla. Egyszersmind egy implicit ontológiai tényező működését is tetten érhetjük. Az, hogy „nem igaz, hogy egyetlen ember sem lőtt rá a Csúfra”, egyenértékű azzal, hogy „nem igaz, hogy senki nem lőtt rá a Csúfra”, vagyis hogy „nem igaz, hogy nincs olyan ember, aki rálőtt a Csúfra”, vagy – a legtermészetesebb megfogalmazásban – „van olyan ember, aki rálőtt a Csúfra”.

Ez a mennyiségi és ontológiai faktor tehát implicit a természetes nyelvhasználatban. A logikai nyelvhasználatnak azonban explicitté kell tenni azt, amit a beszédünkbe többnyire hallgatólagosan beleértünk, hiszen formális és nem tartalmi alapon működik. Az *egzisztenciális kvantor* egyszerre jeleníti meg ezt a kétrétegű implikációt. *Kvantor*, azaz *számlál*, amennyiben azt mondja, hogy legalább egy dologra igaz az, amit állítunk, és *egzisztenciális*, azaz létezés tulajdonít, amennyiben azt mondja, hogy van olyan dolog, amelyre igaz az, amit állítunk.

A zárójelek a hatókört rögzítik: arra szolgálnak, hogy egyértelműen megmutassák, hogy mi az a terjedelem, amelyen belül az x -ek ugyanarra az individuumra vonatkoznak. Ez nagyon lényeges mind a formula értelmezhetőségének, mind logikai tulajdonságainak szempontjából. Például egy $\exists x (Fx \& Gx) \& Hx$ formájú kifejezésben a H utáni x -et már nem köti a kvantor (úgy mondjuk, hogy „ x szabadon fordul elő a Gx formulában”), ezért egyáltalán nem biztos, hogy az állítás csakis akkor lesz igaz, ha van olyan individuum, amelyre F , G és H tulajdonságok egyaránt teljesülnek. A predikátumlogika nyelvtana értelmében a nem kvantifikált Hx kifejezés jól formált ugyan, de hiányos: önmagában nem rögzít igazságfeltételeket, vagyis nem lehet igaz vagy hamis.

A változókkal kapcsolatban a következő meghatározásokat kell észben tartani:

A változók (x, y, z stb.) a formulákon belül az individuális terminus szintaktikai pozíciójában, azaz a predikátumok argumentumhelyein találhatók. Előfordulásuk lehet szabad, vagy kötött. Egy változó kötött, ha egzisztenciális vagy univerzális kvantor hatóköre alatt áll. Ha nem áll kvantifikáció hatóköre alatt, akkor a változó szabad. A szabad változókat tartalmazó formulákat *nyitott* formuláknak, a csak kötött változókat tartalmazó formulákat *zárt* formuláknak nevezzük.

A kvantifikáció nem igazságfüggvény (értékei nem tüntethetők fel igazságtáblázatban), hanem logikai *operátor*. Nem a kifejezések igazságértékét befolyásolja az egyszerűbb kifejezések értékeinek függvényében, hanem arra ad módot, hogy a kifejezések egyáltalán rendelkezzenek igazságértékkel. Ugyanakkor – mint látni fogjuk – szerepet játszik a kifejezések logikai tulajdonságaiban, vagyis abban, hogy miből mi következik.

Most már világosan reprezentálhatjuk a különbséget a korábban említett kétféle tagadó állítás között:

- Valaki nem lőtt rá a Csúfra.

Azt állítjuk, hogy van olyan x , akire nem igaz, hogy rálőtt a Csúfra. Formálisan:

$$\exists x (Ex \ \& \ \sim Lxc)$$

Ez egy egzisztenciális állítás, amelynek az egyik komponense egy konjunkció, és a konjunkció egyik tagja egy negált állítás. Akkor igaz, ha létezik legalább egy ember, aki nem lőtt rá a Csúfra. Érdemes figyelni a negáció elhelyezkedésére. Értelmes állítást kapunk akkor is, ha a negáció a zárójelen kívülre kerül: $\exists x \sim (Ex \ \& \ Lxc)$. Noha az előző formula által reprezentált propozícióból következik az utóbbi, fordítva ez nem áll fenn. Az utóbbi állítás a konjunkció egészét tagadja, ezért mások az igazságfeltételei (*emlékeztető: De Morgan azonosság!*). Akkor is igaz, ha a létező összes ember rálőtt a Csúfra, de valamilyen nem emberi lény is megtette ugyanezt.

A másik tagadó állítás ez volt:

- Nem igaz, hogy valaki rálőtt a Csúfra.

Ez akkor igaz, ha senki emberfia nem lőtt rá a Csúfra. Azaz:

$$\sim \exists x (Ex \ \& \ Lxc)$$

A negáció jele az egzisztenciális kvantor elé kerül, tehát ez az állítás egy negáció, egy negált egzisztenciális állítás.

Természetesen attól, hogy a negáció jele a kvantor előtt van, magának a kvantornak a működése nem szenved csorbát: továbbra is leköti az x változók minden előfordulását a zárójelen belül. Máskülönben nem épülhetne fel a tartalmas egzisztenciális állítás. De itt felépül, és éppen ez a tartalom kerül negáció alá.

Kérdések és feladatok

1. Formalizálja a következő állításokat:
 - Vannak erszényes emlősök.
 - Némely természetes szám nem osztható 2-vel.
 - Valaki figyel engem, de nem a személyi figyelőm.
 - Senki nem jött el a logikatanár temetésére.