

LOGIKA

Hetedik téma – a predikátumlogika alapjai

Első lecke – a propozicionális logika korlátai

A propozicionális logika egyszerű, gazdaságos, megbízható logikai rendszer. Vannak azonban korlátai. Némely természetes nyelven előadott következtetés, amelyet intuitíve minden további nélkül érvényesnek fogadunk el, a propozicionális logika eszközeivel érvénytelennek mutatkozik. Itt van például az a nevezetes következtetési alakzat, amelyet Arisztotelész óta az érvényes következtetés iskolapéldájaként szokás emlegetni:

1. Minden ember halandó
2. A görögök emberek.
3. A görögök halandók.

Az érv érvényes kell hogy legyen. Amennyiben elfogadjuk azt, hogy minden ember halandó, és elfogadjuk azt is, hogy a görögök emberek, nincs más választásunk, mint annak elfogadása, hogy a görögök halandók. Nem tudunk elgondolni olyan esetet, amelyben az első két állítás igaz, de a harmadik nem az. Tehát a következtetés mindenben eleget tesz az érvényesség elfogadott definíciójának.

Ugyanakkor a propozicionális logika nem tud mit kezdeni ezzel a belátással. Akárhogy nézzük is, három különböző állításunk van. Ha készítünk egy szimbolizációs szótárt, akkor annak valahogy így kell kinéznie:

- p : minden ember halandó
- q : a görögök emberek
- r : a görögök halandók

Ha pedig megpróbáljuk formálisan kifejezni azt, amit állítunk, a következőt kapjuk:

$$p, q \vdash r$$

Csak hogy önmagából p -ből és q -ből sehogyan sem következik r , még igazságtáblázatra vagy analitikus fára sincs szükségünk, hogy belássuk ezt.

Lehet, hogy Arisztotelész tekintélye félrevisz bennünket, és a híres szillogizmus valójában érvénytelen? Sok mindent kellene feladnunk józan észhasználatunkból ahhoz, hogy erre jussunk. De hagyjuk is a szillogizmusokat, nézzünk egy még egyszerűbb alakzatot:

1. Clint Eastwood a városban van.
2. Tehát van valaki a városban.

A helyzet hasonló az előzőhöz. Tegyük fel, hogy igaz az, hogy Clint Eastwood a városban van. Ha ez igaz, akkor ez szavatolja azt, hogy valaki van a városban; nem lehet igaz az, hogy Clint Eastwood a városban van, anélkül, hogy valaki lenne a városban; annak állítása, hogy Clint Eastwood a városban van, nem fér össze annak tagadásával, hogy valaki van a városban. Ennek az egypremisszás következtetésnek érvényesnek kell lennie, különben értelmetlen lenne az érvényesség és az érvénytelenség megkülönböztetése.

Mégis, a formalizálás ugyanoda vezet, mint az imént. Két különböző propozíciónk van, és ezt a szótárunknak tiszteletben kell tartania:

- *s*: Clint Eastwood a városban van
- *t*: valaki van a városban

A következtetés reprezentációja pedig:

$s \vdash t$

És ez megint csak kétségbevonhatatlanul érvénytelen.

A következtetések érvényességének bevezető tárgyalásakor szó esett *tartalmilag* érvényes következtetésekről, vagyis olyanokról, amelyek igazságmegőrzőek ugyan (a konklúzió megőrzi a premisszák igazságát), de nem logikai formájuk okán, hanem valami olyan körülmény miatt, amely a kontextusban, vagy a természetes nyelvi kifejezések jelentésében rejlik. Ám a jelen esetben nem erről van szó.

Könnyen megmutatható, hogy miért nem. Az alább felsorolt állítaspárok más kifejezéseket tartalmaznak, mint az előző, és nagy valószínűséggel eltérő kontextusban használnák őket, mégis nyilvánvalóan van bennük valami közös, egymással is és a Clint Eastwoodos példával is:

- 1.)
 - i.) A Platón-összes a polcon van.
 - ii.) Tehát van valami a polcon.
- 2.)
 - i.) A telefonom a zsebemben van.
 - ii.) Tehát van valami a zsebemben.
- 3.)
 - i.) A Real Madrid csapata az öltözőben van.
 - ii.) Tehát van valaki az öltözőben.

Ha mind a három (illetve az előzővel együtt négy) következtetés érvényes, akkor a formájukban van valami, ami miatt érvényesek. És mivel minden esetben egy-egy proposíció lép fel a premissza, illetve a konklúzió szerepében, a releváns formai jegyek a proposíciókon *belül* kell megjelenni. Ám ezt a formális sajátosságot a propozicionális logika nyelve nem tudja kifejezni. Ezért szükség van a propozicionális logika nyelvének kibővítésére.

Kérdések és feladatok

1. Miért nem fejezhető ki propozicionális logikában az alábbi érvényes következtetés:
 - A városban mindenki sarkantyút visel. Clint Eastwood a városban van. Tehát Clint Eastwood sarkantyút visel.
2. Mondjon három olyan következtetést, amelynek logikai formája megegyezik a klasszikus szillogizmussal!