

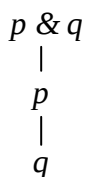
LOGIKA

Hatodik téma – az analitikus fa

Második lecke – konstrukciós szabályok

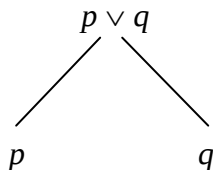
A fa törzsből és elágazásokból áll. Amikor a törzsben elágazás nélkül, egymás alatt tüntetjük fel a proposíciók reprezentánsait (a formulákat), egyfajta grafikai állítást teszünk: azt mondjuk, hogy az egymás alatti proposíciók egyszerre igazak. Ennek feltételei azonosak a konjunkció igazságának feltételeivel: mindkettő szükséges és elégséges feltétele az, hogy mindkét proposíció igaz legyen. Ezért egy konjunkció analízise a fában a konjunkt kifejezések törzsként való egymás alá helyezésével valósul meg.

Tehát ha az elemzendő kifejezés egy konjunkció, akkor az analitikus fában így bontjuk elemeire:



A három formula egymás alatt, azonos úton található, ami azt jelenti, hogy $p \ \& \ q$ akkor és csak akkor igaz, ha p igaz és q is igaz – ami tökéletesen összhangban van a konjunkció definíciójával és igazságtáblázatával.

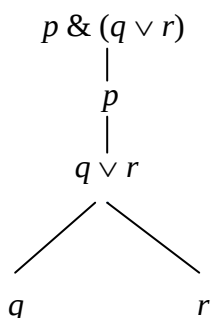
Amikor a fában elágazást hozunk létre, azt fejezzük ki, hogy az elemzett kifejezés vagy akkor igaz, ha egyik elemének igazságértéke az egyik ágon látható módon alakul, vagy akkor, ha másik elemének igazságértéke a másik ágon látható módon alakul (vagy mindkettő). Az elágazás tehát a diszjunkció grafikai megfelelője. Egy diszjunktív formula elemzése tehát egy elágazás segítségével, azaz két elkülönülő út létrehozatalával oldható meg.



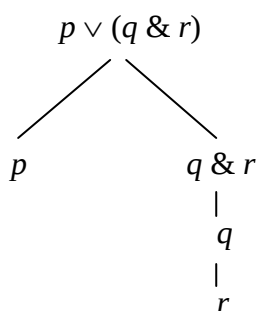
A három formula elhelyezkedése annak az állításnak a grafikus reprezentációja,

hogy $p \vee q$ akkor és csak akkor igaz, ha vagy p , vagy q , vagy mindkettő igaz – ami megfelel a diszjunkció definíciója igazságtáblázatának.

Egy összetett formula analízise mindig a vezető konnektívumánál kezdődik, tehát például a $p \& (q \vee r)$ formulát először konjunkcióként elemzünk, majd a második konjunktját, a diszjunkciót az annak megfelelő módon bontjuk tovább:



Ha az elemzendő formula a $p \vee (q \& r)$, akkor a fa ekként alakul:

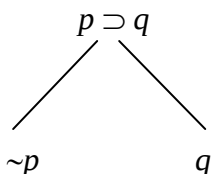


Egy fa esetében csak két haladási lehetőség van: vagy függőlegesen felülről lefelé, azaz törzsként, vagy pedig elágazásként. Mint láttuk, a törzs a konjunkciót, az elágazás a diszjunkciót reprezentálja. Összetett formulánk viszont nyolcféle lehet: konjunkció, diszjunkció, kondicionális, bikondicionális, illetve ezek negált verziója. Ha a nyolcféle lehetőséget mind meg akarjuk jeleníteni a fán, akkor olyan szabályokra van szükségünk, amelyek lehetővé teszik, hogy mindegyiküket konjunkcióként vagy diszjunkcióként ábrázoljuk. Szerencsére már tudjuk, hogy a konnektívumok kifejezhetők egymás segítségével – most alkalmaznunk kell néhány korábban tárgyalt összefüggést.

Lesznek tehát *törzsképző* és *elágazásképző* szabályaink; az első esetben függőlegesen lefelé, a második esetben két elkülönülő úton haladunk. Most egyenként bemutatjuk ezeket az eseteket.

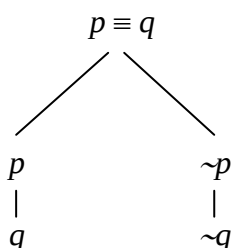
Kondicionális – elágazásképző szabály

Egy kondicionális akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis, vagy ha utótagja igaz, vagyis fennáll a $(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$ összefüggés. Ennek megfelelően egy kondicionális kifejezés analízise a fában így fest:



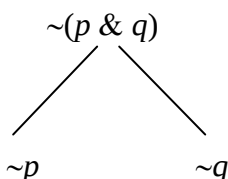
Bikondicionális – elágazásképző szabály

Egy bikondicionális akkor és csak akkor igaz, ha tagjainak igazságértéke megegyezik, azaz akkor, ha mindkettő igaz, vagy ha mindkettő hamis. A következő összefüggésre támaszkodunk: $(p \equiv q) \equiv ((p \& q) \vee (\sim p \& \sim q))$.



Negált konjunkció – elágazásképző szabály

Az egyik De Morgan azonosság így szól: $\sim(p \& q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$. Ebből kiindulva egy negált konjunkció rajzolata ilyen:



Negált diszjunkció – törzsképző szabály

Itt a másik De Morgan törvényre támaszkodunk: $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \ \& \ \sim q)$:

$$\begin{array}{c} \sim(p \vee q) \\ | \\ \sim p \\ | \\ \sim q \end{array}$$

Negált kondicionális – törzsképző szabály

Egy kondicionális abban az egy esetben hamis, ha előtagja igaz, utótagja hamis. Vagyis $\sim(p \supset q) \equiv (p \ \& \ \sim q)$. Ábrázolása tehát:

$$\begin{array}{c} \sim(p \supset q) \\ | \\ p \\ | \\ \sim q \end{array}$$

Negált bikondicionális – elágazásképző szabály

Egy bikondicionális hamis, ha tagjainak igazságértéke eltér egymástól. Az alapul vett összefüggés eszerint: $\sim(p \equiv q) \equiv ((p \ \& \ \sim q) \vee (\sim p \ \& \ q))$.

$$\begin{array}{cc} & \sim(p \equiv q) \\ & / \quad \backslash \\ p & \quad \quad \sim p \\ | & \quad \quad | \\ \sim q & \quad \quad q \end{array}$$

Immár az összes konstrukciós szabály a rendelkezésünkre áll. Ezzel már képesek vagyunk arra, hogy következtetések érvényességét vagy érvénytelenségét bizonyítsuk.

Kérdések és feladatok

1. Analizálja a következő formulákat analitikus fa segítségével:

- $\sim(p \vee q) \supset r$
- $p \& (q \equiv r)$
- $(p \vee q) \supset (q \vee r)$
- $(p \& \sim(q \& \sim r)) \supset \sim(q \supset p)$