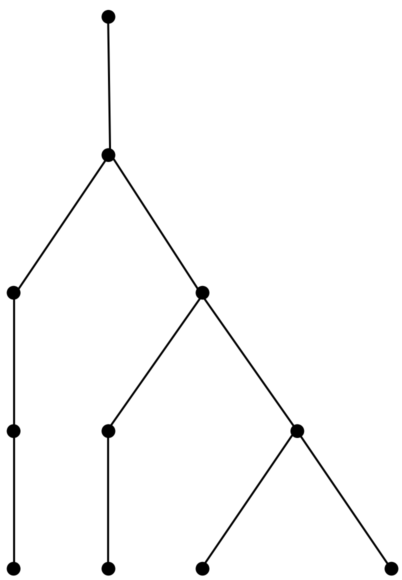
LOGIKA

Hatodik téma – analitikus fa

Első lecke – az analitikus fa alapeszméje

Az analitikus fa egy egyszerű, elegáns, vizuálisan is könnyen áttekinthető bizonyítási eljárás. Előnye még, hogy néhány alapvető grafikai szabály elsajátításával egy olyan szerkezet birtokába jutunk, amely mechanikusan alkalmazható, algoritmikus és minimálisra csökkenti a hibák lehetőségét. Ezen felül elég rugalmas is ahhoz, hogy bővíthető legyen, amikor a propozicionális logikáról áttérünk a predikátumlogika tárgyalására.

Az analitikus fa képileg egy efféle struktúra:



A fa ***csomópontokból*** és ***élekből*** áll. Egy-egy él mindig egy csomópontból indul ki, amelyet összeköt egy vagy két másik csomóponttal (a minket érdeklő struktúrában egy csomópontot az élek legfeljebb két másik csomóponttal köthetnek össze). Az élek kétfélék lehetnek aszerint, hogy egy adott csomópontot egyetlen másikkal, vagy pedig két másikkal kötnek össze: vannak

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

törzsvonalak, és vannak ***elágazás***ok. Mivel az általunk használatos fa felülről lefelé építkezik, törzsvonalnak azt a függőleges élt nevezzük, amely egy csomópontból egy alatta lévő egyedi csomóponthoz vezet. Az elágazás egy csomópontot és az alatta található csomópontpárt összekötő élpár. Egy befejezett fa esetében (amelynek legalsó csomópontjaiból nem indulnak további élek) azokat a bejárási lehetőségeket, amelyek révén a legfelső csomópontból a legalsó csomópontokig eljuthatunk, ***út***nak nevezzük. Az analitikus fa struktúrájában egy elágazás véglegesen elválasztja egymástól az utakat, nincs tehát olyan csomópont, amely fentebb már elágazott utakat újra egyesítene (felülről két él nem találkozhat ugyanabban a csomópontban). Ezért ennek a fajta fának az esetében pontosan annyi út létezik, ahány csomópont a fa legalján található. A fenti ábrán olyan fa látható, amelyet 11 csomópont, 10 él (mindig eggyel kevesebb él van, mint ahány csomópont), köztük 4 törzsvonal és 3 elágazás, valamint 4 út jellemez.

Pedagógiai javaslat: mivel az analitikus fa működési elveit leíró szövegrész meglehetősen absztrakt, javasoljuk, hogy az olvasó olvassa el figyelmesen ezt a szakaszt, de ne akadjon el, ha valami nem világos belőle. Az elvi kifejtést követő példákból sokkal áttekinthetőbbé válik mindaz, amit itt elmondunk. Miután a példák (és a begyakorlás!) után már képesek vagyunk működtetni az analitikus fa mint bizonyítási eljárás mechanizmusát, érdemes visszatérni ehhez az elméleti bevezetőhöz, és újraolvasni azt. Akkor láthatóvá válik, hogy az elv és a gyakorlat minként harmonizál egymással.

Az analitikus fában a csomópontok jól formált formulák. Az utak, amelyeken a formulák előfordulnak, azokat lehetőségeket reprezentálják, amelyekben az adott formula igaz lehet. Amikor az egyes formulákat egyazon törzsvonal köti össze, akkor a formulák lehetnek együttesen igazak; amikor egy formula alatt az élek elágaznak, akkor két különböző út jön létre, és az elágaztatott formula az egyiken vagy a másikon lehet igaz, azaz két eltérő lehetőség van az igazságára. Felülről lefelé haladva az összetett formulákat az alattuk lévő formulák az elemeikre bontják, vagyis *analizálják*, tehát a fa azt mutatja meg, hogy az összetett formulák egyszerű formulákra bontása során milyennek kell lennie az egyszerű formuláknak ahhoz, hogy megőrizzék az összetett formula igazságát. Egyszerű formulának egy atomi propozíciót reprezentáló mondatbetű, vagy annak negációja számít. Minden más formula – vagyis az olyan formulák, amelyekben legalább egy kétargumentumú konnektívum szerepel – összetett formula. Az analitikus fa akkor teljes, ha minden összetett propozíció analízise megtörtént.

Egy teljes fa összes útját egyenként végigjárva kétféle utat kaphatunk. Az egyik lehetőség az, hogy valahol az úton felbukkan két olyan propozíció, amelyek közvetlen ellentmondásban állnak egymással (tehát p és $\sim p$ formájúak). Ilyenkor ezt az utat ***lezárt***nak mondjuk. A másik lehetőség pedig nyilván az, hogy az úton sehol nem ütközünk ellentmondásba. Ilyenkor az út ***nyitott***.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Egy teljes fa megmutatja, hogy egy formulahalmaz konzisztens-e. Ha az analízis végére értünk, vagyis már minden összetett formulát egyszerű formulákra bontottunk, és van olyan út, amely nem zárul le (nem jelenik meg rajta két egymásnak ellentmondó kifejezés), akkor ez azt jelenti, hogy az elemzett formulák lehetnek egyszerre igazak. Ha ellenben az analízis végén az összes út lezártnak bizonyul, akkor ez azt bizonyítja, hogy nincs arra mód, hogy a kiinduló formulahalmaz összes eleme igaz legyen, tehát az elemzett formulahalmaz logikailag ellentmondásos.

Hogyan működtetjük mindezt következtetések érvényességének bizonyításakor? Az elgondolás a következő. Egy következtetés felfogható propozíciók halmazaként, amely halmaz elemei a premisszák és a konklúzió. Mivel a propozíciók igazságértékkel rendelkező entitások, minden propozícióhalmaz vagy konzisztens, vagy inkonzisztens, azaz vagy lehetséges, hogy az összes propozíció egyszerre igaz legyen, vagy nem lehetséges. A propozicionális logika nyelvében a propozíciókat jól formált formulák reprezentálják. Ebből következően egy inkonzisztens propozícióhalmaz esetében az őket reprezentáló formulák analízisekor megjelenik egy közvetlenül ellentmondásos formulapár, azaz két olyan formula, amelynél az egyik a másik negációja. Ha a propozícióhalmaz konzisztens, az elemzés nem mutat fel ellentmondást.

Az érvényesség definíciójából tudjuk, hogy egy következtetés csakis akkor érvényes, ha nincs olyan lehetőség, hogy a premisszák egytől egyig igazak, a konklúzió viszont hamis. Ez átfogalmazható úgy, hogy nem lehetséges az, hogy a premisszákból és a konklúzió negációjából képzett formulahalmaz konzisztens legyen. Az analitikus fa pontosan ennek lehetőségét vizsgálja. Ha a teljes fában az elemzés végén nem marad nyitott út, vagyis minden egyes úton ellentmondás jelenik meg, akkor a premisszákból és a konklúzió tagadásából álló formulahalmaz logikailag ellentmondásos, amiből az következik, hogy amennyiben a premisszák mind igazak, a konklúziónak is igaznak kell lennie. Ez pedig bizonyítja, hogy a következtetés érvényes.

Ezzel szemben, ha a teljes fa valamelyik útja nyitott marad, akkor ez azt mutatja, hogy van legalább egy olyan lehetőség, amelyben egyszerre igaz a premisszák állítása és a konklúzió tagadása. Ilyenkor a következtetés érvénytelen, hiszen a konklúzió lehet hamis igaz premisszák esetén.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Kérdések

1. Mikor teljes egy analitikus fa?
2. Milyen viszonyban vannak egymással a „nyitottság” és az „ellentmondásosság” fogalmai az analitikus fa szerkezetében?
3. Miért a konklúzió negációját csatoljuk a premisszák halmazához, ha analitikus fával kívánjuk ellenőrizni a következtetés érvényességét?