

LOGIKA

Ötödik téma – igazságtáblázat és bizonyítás

Első lecke – a proposíciók igazságstátusza

Most már minden együtt van ahhoz, hogy működésében is bemutathassuk a propozicionális logikát, azaz ne pusztán *állítsuk*, hogy bizonyos összefüggések fennállnak, hanem *bizonyítsuk* is a szóban forgó összefüggések fennállását. Ehhez a rendelkezésünkre áll egy sokoldalú eszköz, az igazságtáblázat.

Igazságtáblázat segítségével az alábbi műveleteket tudjuk a propozicionális logikában végrehajtani:

1. A konnektívumok jelentésének reprezentációja;
2. Propozíciók igazságstátuszának megállapítása (kontingens proposíciók, tautológiák, inkonzisztens proposíciók);
3. Logikai ekvivalenciák megállapítása;
4. Következtetések érvényességének vizsgálata.

A konnektívumok jelentését egyenként részletesen megvizsgáltuk. Most, összegzésképpen, álljon itt újra az összes konnektívum összesített igazságtáblázata:

A	B	$\sim A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1

Propozíciók igazságstátusza

Logikai szempontból a proposíciók három kategóriába tartozhatnak: vannak **kontingens proposíciók**, amelyek bizonyos esetekben igazak, más

esetekben hamisak; vannak **tautológiák** (vagy logikai igazságok), amelyek minden esetben igazak; vannak **inkonzisztens proposíciók** (vagy ellentmondások), amelyek minden esetben hamisak. *Eset* alatt most a kifejezéseket alkotó atomi proposíciók igazságértékének egy kiosztását értjük, amelyet az igazságtáblázat egy-egy vízszintes sora reprezentál.

Nézzünk egy tetszőleges jól formált formulát (amely tehát egy proposíciót fejez ki a propozicionális logika formális nyelvén):

$$a.) (p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$$

Azt akarjuk megtudni, hogy ez a kifejezés milyen igazságstátuszú. Ehhez igazságtáblázatot szerkesztünk. Mivel látjuk, hogy három különböző propozicionális változónk van, táblázatunknak a fősor alatt 2^3 azaz nyolc sort kell tartalmaznia, hogy az igazságértékek eloszlásának összes kombinációja megjelenhessen benne.

p	q	r	$(p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$
1	1	1	
0	1	1	
1	0	1	
0	0	1	
1	1	0	
0	1	0	
1	0	0	
0	0	0	

Látjuk, hogy a legszélesebb hatóköre a formula közepén található $\supset$ -nak van, vagyis a vezető konnektívum, egyben a kifejezés logikai típusa kondicionális. A kifejezés igazságstátuszát a vezető konnektívum alatti oszlopban szereplő értékek jelölik ki. Hogy oda eljussunk, először a legszűkebb hatókörrel rendelkező konnektívumok alatti sorokat kell kitöltenünk, és belülről kifelé haladunk. Először tehát megnézzük a bal oldali diszjunkciót $(p \vee q)$. A releváns oszlopok természetesen a p és a q alattiak. Mindössze annyit kell tennünk, hogy a diszjunkció igazságtáblázata értelmében beírjuk $p \vee q$ alá a megfelelő értékeket:

p	q	r	$(p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	0

Ezután a jobb oldali összetett propozícióra koncentrálunk. Ez egy negált konjunkció, amely utóbbinak az egyik tagja szintén negáció. A legszűkebb hatókörű konnektívum a zárójelen belüli negáció (hiszen az egyetlen mondatbetűt, az r -t tartja a hatókörében). A következő lépés tehát az lenne, hogy ez alá a negáció alá beírjuk az r alatti oszlop értékeinek fordítottját, de most mi kihagyjuk ezt a lépést a rekonstrukcióból (de persze fejben tartjuk). Ehelyett közvetlenül a p és $\sim r$ konjunkciójához fordulunk, és kitöltjük a megfelelő oszlopot a konjunkció igazságtáblázata alapján:

p	q	r	$(p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	0

Mivel a jobb oldali kifejezés egy tagadott konjunkció, és a konjunkció tagadás nélküli értékei már a rendelkezésünkre állnak, csupán az ellentétükbe kell azokat fordítani, hogy a zárójeleken kívüli negáció értékeit megkapjuk:

p	q	r	$(p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$
1	1	1	1 1 0
0	1	1	1 1 0
1	0	1	1 1 0
0	0	1	0 1 0
1	1	0	1 0 1
0	1	0	1 1 0
1	0	0	1 0 1
0	0	0	0 1 0

Most már csak a vezető konnektívum, a középső kondicionális értékei vannak hátra. Mivel ennek a kondicionálisnak az előtagja $p \vee q$, az utótagja $\sim(p \& \sim r)$, vagyis előtagja egy diszjunkció, utótagja pedig egy negáció, azt a két oszlopot kell összevetnünk egymással a kondicionális igazságtáblázatának alapján, amely a bal oldali diszjunkció, illetve a jobb oldali negáció alatt található. Ha ezt megtesszük, a következő kész igazságtáblázatot kapjuk:

p	q	r	$(p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$
1	1	1	1 1 1 0
0	1	1	1 1 1 0
1	0	1	1 1 1 0
0	0	1	0 1 1 0
1	1	0	1 0 0 1
0	1	0	1 1 1 0
1	0	0	1 0 0 1
0	0	0	0 1 1 0

Látható, hogy a vezető konnektívum alatt sorakozó értékek két esetben 0-nak bizonyultak, a többi esetben 1-nek. Tehát a $(p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$ kifejezés hamis, ha p igaz, q igaz és r hamis, valamint ha p igaz, q hamis és r hamis; az összes többi esetben igaz. A $(p \vee q) \supset \sim(p \& \sim r)$ ezek szerint kontingens propozíció.

A továbbiakban nem rekonstruáljuk lépésről lépésre az igazságtáblázat kitöltésének menetét. A művelet mindig ugyanezt a receptet követi.

Lássunk most egy tautológiát, azaz logikai igazságot:

$$(p \vee q) \supset (\sim q \supset p)$$

Két különböző propozíciónk van, tehát négysoros táblázatra van szükség, amelynek értékei:

p	q	$(p \vee q) \supset (\sim q \supset p)$		
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	0	0	1	0

Nincs sok hozzáfűznivaló. A vezető konnektívum alatt az összes érték 1.

Végezetül egy inkonzisztens proposíció, azaz egy logikai ellenmondás:

$$((p \supset q) \& \sim q) \& p$$

p	q	$((p \supset q) \& \sim q) \& p$		
1	1	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	1	0

A vezető konnektívum (a jobb oldali konjunkció) alatt csupa 0-t látunk.

(A leckéhez tartozó kérdések és feladatok a következő lecke végén találhatók.)