

Fizika Intézet példatár (2019)

Szerzők:

**Dr. Dömötör Piroska,
Dr. Fábián László,
Dr. Kun Emma,
Péter Viktória,
Dr. Horváth Zoltán,**

Szerkesztő: Péter Viktória

Lektor: Dr. Kovács Attila Pál

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



I.fejezet: **Matematika**
szerző: **Dr. Dömötör Piroska**

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



Tartalomjegyzék

1. Tantárgyleírás	2
2. Algebrai átalakítások	6
3. Egyszerű egyenlőtlenségek:	13
4. Formulák használata, behelyettesítés	16
5. Szumma jel és indexek használata	19
6. Pontok és egyenesek kapcsolata	26
7. Deriválás	29
8. Integrálás	33

1. Tantárgyleírás

Felzárkóztató kurzus fizikából (matematika rész)	Kreditértéke: 2×1
A tantárgy képzési karaktere: gyakorlat 90% , elmélet 10%	
A tanóra típusa: gyakorlat és a matematika rész óraszám: 2×8 óra a tavaszi és az őszi félévben is. Az ismeret átadása elsődlegesen a hallgatói aktivitásra épít. A kitűzött feladatokat a hallgatók oldják meg az oktató irányításával.	
A számonkérés módja: gyakorlati jegy.	
A tantárgy tantervi helye: 2. és 3. félév	
Előtanulmányi feltételek: nincsenek	

A tantárgy matematika része a fizikában megjelenő jelenségek és problémák matematikai leírásához szükséges előismereteket igyekszik átismételni. Célja a középiskolából hozott és az egyetemi matematika kurzusokon részben megszerzett tudáselemek átmozgatása, följavítása és összerendezése, ezzel segítve a lemaradó egyetemi hallgatók tudásának megfelelő szintre emelését. Az órán megoldandó feladatok a fizika alap szakon való boldoguláshoz elengedhetetlen számítási készségeket járják körbe.

A kurzus matematika részének tematikája:

1. Algebrai átalakítások
2. Egyszerű egyenlőtlenségek fölírása átalakítása és értelmezése
3. Formulák használata, formulákba való behelyettesítés
4. Szumma jel és indexek használata
5. Pontok és egyenesek kapcsolata
6. Deriválás és integrálás egyszerű esetekben és ezek jelentése

Kötelező irodalom:

- Dömötör P.; Kun E.; Fábíán L.; Péter V.; Horváth Z.: Fizika Intézet Felzárkóztató Feladatgyűjteménye (2019) [ezen jegyzet]

Ajánlott irodalom:

- Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit (2005): Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. és II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Csordás Mihály, Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János Dr., Vincze István: Sokszínű matematika 9. - 12. Mozaik Kiadó, Szeged

Az előírt szakmai kompetenciák, kompetencia-elemek, amelyek kialakításához a tantárgy jellemzően, érdemben hozzájárul

a) Tudás

- Ismeri a fizika összefüggései és törvényszerűségei megértéséhez nélkülözhetetlen matematikai eljárásokat.
- Rendelkezik természettudományos alapismeretekkel és az erre épülő gyakorlat elemeinek ismeretével, és megszerezni tudja azokat.
- Birtokában van annak a tudásnak, amelynek alkalmazása szükséges természeti folyamatok, természeti erőforrások, élő és élettelen rendszerek szakterületéhez tartozó alapvető gyakorlati problémáinak megoldásához.

b) Képesség

- Képes a fizikai megismerés során gyűjtött adatok feldolgozására, értelmezi a feldolgozáshoz szükséges formulákat.
- Ismeretei alapján rendelkezik a természettudományos alapokon nyugvó érvelés képességével.
- Képes tudásának gyarapítására és tanulmányainak magasabb szinten történő folytatására.

c) Attitűd

- Hitelesen képviseli a természettudományos világnézetet.
- Elkötelezett új kompetenciák elsajátítására és világképének bővítésére, fejleszti, mélyíti szakterületi ismereteit.
- Kritikusan szemléli az elé kerülő algebrai kifejezéseket és formulákat.
- Munkájában törekszik a precíz matematikai levezetésekre.

d) Autonómia

- Önállóan végiggondolja az alapvető szakmai kérdéseket, és adott források alapján megválaszolja azokat.
- Saját munkájának eredményét reálisan értékeli.
- Tisztában van a tudományos kijelentések jelentőségével és következményeivel.

A tantárggyal kialakítandó konkrét tanulási eredmények:			
Tudás	Képesség	Attitűd	Autonómia
Ismeri az egyenlet és egyenlőtlenség rendezés szabályait.	Képes adott egyenletből/formulából adott ismeretlent kifejezni.	Követhetően írja le az átrendezés lépéseit.	A kapott eredményeket igyekszik ellenőrizni.
Ismeri a matematikai formulákban tipikusan előforduló műveleti jeleket és a műveletek végrehajtásának sorrendjével is tisztában van.	Képes matematikai formulába a megadott értékeket behelyettesíteni és a végeredményt kiszámítani.	Precízen számol mind betűs mind számot tartalmazó kifejezésekkel.	A kapott eredményeket igyekszik ellenőrizni (nagyságrendi becslés, dimenzió ...).
Ismeri a hatványozás és a gyökvonás azonosságait.	Az azonosságokat alkalmazva biztonsággal elvégzi az egyszerűsítéseket.	Precízen számol betűs kifejezésekkel.	Ráismer arra ha egy algebrai kifejezés egyszerűsíthető a hatványozás és a gyökvonás azonosságait alkalmazva.
Ismeri a szuma jelet.	Képes szuma jellel fölírt összegek kiértékelésére.	Figyelmesen áttekinti a jelölésrendszert.	Önállóan beazonosítja az összegzés futó indexét.
Ismeri az egyenes egyenletének különböző megadási módjait.	Képes adott pontokra egyenest illeszteni. Pontokról ellenőrzi, hogy rajt vannak-e az egyenesen. Ki tudja számolni az egyenes meredekségét.	Összekapcsolja az egyenes különböző megadási módjait: pontthalmaz, algebrai egyenlet, lineáris függvény, grafikon.	Magabiztosan ábrázolja az egyenlettel adott egyenest a koordináta-rendszerben.

Ismeri a deriválási szabályokat, a deriválás műveletének különböző jelöléseit.	Meghatározza polinomfüggvény deriváltját.	Átlátja a derivált fogalom fontosságát a fizikában.	Önállóan elmagyarázza a derivált és a szélsőérték közötti kapcsolatot.
Ismeri a határozatlan és a határozott integrál kiszámítási szabályait és tisztában van a szokásos jelölésekkel.	Meghatározza polinomfüggvény primitív függvényét vagy határozott integrálját.	Átlátja az integrál fogalom fontosságát a fizikában.	Önállóan elmagyarázza a görbe alatti terület és a határozott integrál közötti kapcsolatot.

2. Algebrai átalakítások

2.1. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik fejezi ki helyesen az y ismeretlent a $2x + 5y = 4$ lineáris egyenletből?

(A) $y = 4 - \frac{2x}{5}$.

(C) $y = 4 + \frac{2x}{5}$.

(B) $y = \frac{4 + 2x}{5}$.

(D) $y = \frac{4 - 2x}{5}$.

A helyes válasz: (D)

Megoldás: Lépésről lépésre haladva próbáljuk meg kifejezni az y ismeretlent, ugyanazokat az átalakításokat végrehajtva az egyenlet mindkét oldalán. [Mérleg elv]

Először vigyük át a másik ismeretlent tartalmazó tagot – azaz $2x$ -et – a jobb oldalra, hogy az y -t tartalmazó tag magában álljon a bal oldalon:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y = 4 & & \backslash \quad - 2x \\ 5y = 4 - 2x & & \end{array}$$

Innen már látjuk, hogy az y -t úgy kapjuk meg, ha 5-tel elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{array}{rcl} 5y = 4 - 2x & & \backslash \quad \div 5 \\ y = \frac{4 - 2x}{5} & & \end{array}$$

2.2. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik fejezi ki helyesen az y ismeretlent az $ab + c + adx - cx - bey - y = 0$ lineáris egyenletből?

(A) $y = ab + c + adx - cx - bey$.

(C) $y = \frac{ab + c + adx - cx}{be + 1}$.

(B) $y = \frac{ab + c + adx - cx - y}{be}$.

(D) A megadottak közül egyik sem.

A helyes válasz: (C)

Megoldás: Ismét lépésről lépésre haladva próbáljuk meg kifejezni az y ismeretlent.

Figyeljük meg, hogy az y ismeretlen a bal oldalon szereplő kifejezés utolsó 2 tagjában jelenik meg:

$$ab + c + adx - cx - be\boxed{y} - \boxed{y} = 0$$

Először vigyünk át az y -t tartalmazó tagokat a jobb oldalra, a többi tagot pedig hagyjuk a bal oldalon.

$$\begin{aligned} ab + c + adx - cx - bey - y &= 0 & \quad \quad \quad \backslash + bey + y \\ ab + c + adx - cx &= bey + y \end{aligned}$$

Kiemelve a keresett y ismeretlent a jobb oldalon látjuk, hogy $(be + 1)$ -gyel kell elosztanunk az egyenlet mindkét oldalát, ahhoz, hogy y -t megkapjuk:

$$\begin{aligned} ab + c + adx - cx &= (be + 1)y & \quad \quad \quad \backslash \div (be + 1) \\ \frac{ab + c + adx - cx}{be + 1} &= y \end{aligned}$$

2.3. Feladat: Válasszuk ki az összes helyes szorzattá alakítást az alábbi lehetőségek közül!

Figyelem: Többszörös választás!

- (A) $13x^2y^3 - 9x^3y^2 = x^2y^2(13 - 9y)$
- (B) $xy + x^2y - xy^2 = xy(x - y)$
- (C) $2byc + 4bc - 8abc = 2bc(y + 2 - 4a)$
- (D) $18n^3m^2 - 12n^2m = 6n^2m(3nm - 2)$

A helyes válasz(ok): (C) és (D)

Megoldás: Bontsuk fel a zárójelet a jobb oldalon és nézzük meg, hogy vissza kapjuk-e a bal oldalt.

- (A) $x^2y^2(13 - 9y) = 13x^2\boxed{y^2} - 9x^3y^2 \neq 13x^2\boxed{y^3} - 9x^3y^2$
 (B) $xy(x - y) = x^2y - xy^2 \neq \boxed{xy} + x^2y - xy^2$
 (C) $2bc(y + 2 - 4a) = 2byc + 4bc - 8abc$ Helyes.
 (D) $6n^2m(3nm - 2) = 18n^3m^2 - 12n^2m$ Helyes.

2.4. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik a $63x^2 \div (7x^5)$ kifejezés helyes egyszerűsítése?

- (A) $9x^3$, (B) $9x^7$, (C) $9x^{-3}$, (D) $56x^{-3}$.

A helyes válasz: (C)

Megoldás: $63x^2 \div (7x^5)$ kifejezésben a $\div$ jel osztást jelent, így a kifejezést akár törtként is fölírhatjuk, ekkor talán az egyszerűsítések is szembeötlőbbek.

$$63x^2 \div (7x^5) = \frac{63x^2}{7x^5} = \frac{63}{7} \cdot \frac{x^2}{x^5} = 9 \frac{x^2}{x^5} = 9 \frac{1}{x^3} = \frac{9}{x^3} = 9x^{-3}$$

- A nevező és a számláló is osztható 7-tel, hisz $63 = 7 \cdot 9$. $\Rightarrow \frac{63}{7} = 9$.
- A nevező és a számláló is osztható x^2 -tel. $\Rightarrow \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$.
- Végül kihasználjuk, hogy az osztás negatív kitevős hatványt jelent, azaz $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

2.5. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik az $\frac{y^6\sqrt{y^3}}{y}$ kifejezés helyes egyszerűsítése?

- (A) $6\sqrt{y^3}$, (B) $\sqrt{y^{13}}$, (C) $y^{\frac{15}{2}}$, (D) y^5 .

A helyes válasz: (B)

Megoldás: A nevező és a számláló is osztható y -nal, így először végezzük el ezt az egyszerűsítést: $\frac{y^6 \sqrt{y^3}}{y} = y^5 \sqrt{y^3}$. Innen két lehetőségünk is van:

1. lehetőség: beviszünk mindent a gyökjel alá

$$y^5 \sqrt{y^3} = \sqrt{y^{10}} \cdot \sqrt{y^3} = \sqrt{y^{10} \cdot y^3} = \sqrt{y^{10+3}} = \sqrt{y^{13}} = y^{\frac{13}{2}}.$$

2. lehetőség: a gyökös részt átírjuk tört hatványkitevőre

$$y^5 \sqrt{y^3} = y^5 \cdot y^{\frac{3}{2}} = y^{5+\frac{3}{2}} = y^{\frac{10}{2}+\frac{3}{2}} = y^{\frac{13}{2}} = \sqrt{y^{13}}.$$

2.6. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik fejezi ki helyesen az y ismeretlent a $2x - 7y + 3 = 0$ lineáris egyenletből?

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|---|
| (A) $y = 3 - \frac{2x}{7}$. | (C) $y = 3 + \frac{2x}{7}$. | (E) $y = -\frac{3+2x}{7}$. |
| (B) $y = \frac{3+2x}{7}$. | (D) $y = \frac{3-2x}{7}$. | (F) $y = -\frac{3}{7} + \frac{2x}{7}$. |

A helyes válasz: (B)

2.7. Feladat: Az $\frac{x - \mu}{\sigma} = y$ egyenletből kiindulva kifejezzük az x ismeretlent. Melyik a helyes megoldás?

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| (A) $x = \mu + \sigma y$. | (C) $x = \frac{y - \mu}{\sigma}$. |
| (B) $x = \mu - \sigma y$. | (D) $x = \sigma(y + \mu)$. |

A helyes válasz: (A)

2.8. Feladat: Az alábbi összefüggésből kiindulva, melyik kifejezés adja meg helyesen n -et?

$$e = x \sqrt{\frac{\lambda^2}{n}}$$

$$(A) \quad n = x \sqrt{\frac{\lambda^2}{e}}$$

$$(B) \quad n = \frac{x\lambda^2}{e}$$

$$(C) \quad n = \left(\frac{x\lambda}{e}\right)^2$$

$$(D) \quad n = \left(\frac{e}{x\lambda}\right)^2$$

A helyes válasz: (C)

2.9. Feladat: Az alábbi összefüggésből kiindulva, melyik kifejezés adja meg helyesen λ -át?

$$y = \frac{z - \eta}{\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}$$

$$(A) \quad \lambda = \frac{z - \eta}{y}.$$

$$(B) \quad \lambda = \frac{(z - \eta)\sqrt{n}}{y}.$$

$$(C) \quad \lambda = \frac{\eta y - z}{\sqrt{n}}.$$

$$(D) \quad \lambda = \frac{z}{y}\sqrt{n} - \eta.$$

A helyes válasz: (B)

2.10. Feladat: Az alábbi összefüggésből kiindulva, melyik kifejezés adja meg helyesen n -et?

$$y = \frac{z - \eta}{\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}$$

$$(A) \quad n = \frac{\lambda y}{(z - \eta)^2}.$$

$$(B) \quad n = \frac{\lambda y^2}{z^2 - \eta^2}.$$

$$(C) \quad n = \left(\frac{z - \eta}{\lambda y}\right)^2.$$

$$(D) \quad n = \left(\frac{\lambda y}{z - \eta}\right)^2.$$

A helyes válasz: (D)

2.11. Feladat: Az alábbi összefüggésből kiindulva, melyik kifejezés adja meg helyesen N -et?

$$e = z\sqrt{\frac{q(1-q)}{N}}$$

(A) $N = \frac{zq(1-q)}{e}$.

(C) $N = \frac{z^2q(1-q)}{e^2}$.

(B) $N = \frac{e^2}{z^2q(1-q)}$.

(D) $N = z\sqrt{\frac{q(1-q)}{e}}$.

A helyes válasz: (C)

2.12. Feladat: Az alábbi szorzattá alakított tagokat tartalmazó kifejezések közül, melyik adja vissza helyesen az $5x^2y+2x-4y+3xy+8$ kifejezést?

(A) $xy(5x+3)+4(2-y)+2x$. (C) $y(5x^2+3x-4)+2x+8$.

(B) $x(5xy+2)+y(3x-4)+8$. (D) Az összes eddigi.

A helyes válasz: (D)

2.13. Feladat: Válasszuk ki az összes helyes szorzattá alakítást az alábbi lehetőségek közül!

Figyelem: Többszörös választás!

(A) $6xy^2 - 3x^2y^3 = 3xy^2(2 - xy)$

(B) $xy - x^2y + xy^2 = xy(1 + x - y)$

(C) $6b^2yc + 3abc - 9bc = 3bc(2by + a - 3)$

(D) $-4n^2m^3 - 5n^3m^2 = -n^2m^2(4m - 5n)$

(E) $9a^2bc - 3a^2bc = 3a^2bc(3c - 1)$

(F) $-2x^2y^3z + x^3y^4z = -x^2y^3z(2 + xy)$

A helyes válasz(ok): (A) és (C)

2.14. Feladat: Igaz-e az alábbi összefüggés?

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{\sqrt{N-1}}$$

(A) Igaz.

(B) Hamis.

A helyes válasz: (B)

2.15. Feladat: Igaz-e az alábbi összefüggés?

$$\sqrt{\frac{\prod_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \frac{\prod_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{\sqrt{N-1}}$$

(A) Igaz.

(B) Hamis.

A helyes válasz: (A)

3. Egyszerű egyenlőtlenségek:

3.1. Feladat: Oldja meg a $5 - 4t \geq 21 - 2t$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. Az alábbi lehetőségek közül melyik a helyes megoldás?

- (A) $t \leq -13$. (B) $t \geq -13$. (C) $t \leq -8$. (D) $t \geq -8$.

A helyes válasz: (C)

Megoldás: Lépésről lépésre haladva próbáljuk meg csak az egyik oldalra rendezni a t ismeretlent, ugyanazokat az átalakításokat végrehajtva az egyenlőtlenség mindkét oldalán. [Mérleg elv]

Először rendezzük az ismeretlent tartalmazó tagokat a jobb oldalra – azaz $4t$ -t adjunk hozzá mindkét oldalhoz:

$$\begin{aligned} 5 - 4t &\geq 21 - 2t & \quad \quad \quad \backslash \quad + 4t \\ 5 &\geq 21 + 2t \end{aligned}$$

Majd vigyünk át a konstans tagokat a másik (most a bal oldalra) – azaz vonjunk ki mindkét oldalból 21-et:

$$\begin{aligned} 5 &\geq 21 - 2t & \quad \quad \quad \backslash \quad - 21 \\ 5 - 21 &\geq 2t \\ -16 &\geq 2t \end{aligned}$$

Most már csak a t ismeretlen előtti szorzó tényezővel kell leosztani – azaz osszuk el mindkét oldalt 2-vel:

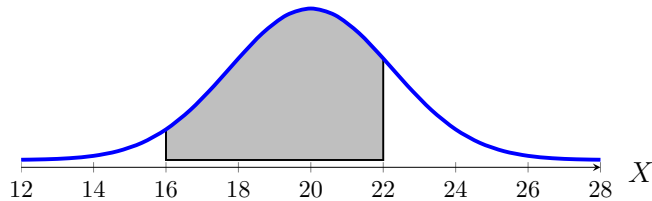
$$\begin{aligned} -16 &\geq 2t & \quad \quad \quad \backslash \quad \div 2 \\ -8 &\geq t & \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t \leq -8} \end{aligned}$$

3.2. Feladat: Oldja meg a $3x + 2 \leq 8$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. Az alábbi lehetőségek közül melyik a helyes megoldás?

- (A) $x \leq 2$. (B) $x \geq 2$. (C) $x \leq 6$. (D) $x \geq 6$.

A helyes válasz: (A)

3.3. Feladat: Figyelje meg a grafikont!



Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a satírozott terület határait?

(A) $22 \geq X \leq 16$.

(C) $22 \geq X \geq 16$.

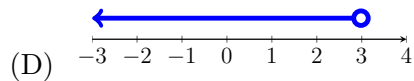
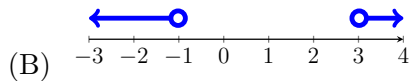
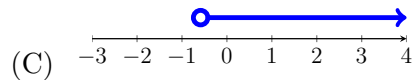
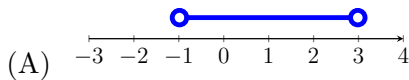
(B) $16 \geq X \geq 22$.

(D) $22 \leq X \leq 16$.

A helyes válasz: (C)

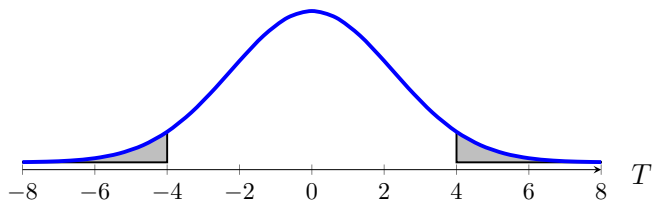
3.4. Feladat: Az alábbi ábrák közül melyik jelöli be helyesen az egyenlőtlenségnek megfelelő számokat a számegyenesen?

$$-1 < t < 3$$



A helyes válasz: (A)

3.5. Feladat: Figyelje meg a grafikont!



Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a satírozott terület határait?

(A) $-4 \leq T \leq 4$.

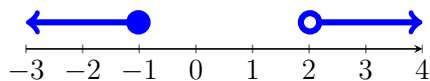
(C) $|T| \leq 4$.

(B) $-4 \leq T \geq 4$.

(D) $|T| \geq 4$.

A helyes válasz: (D)

3.6. Feladat: Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik feleltethető meg a számegyenesen bejelölt számoknak?



(A) $-1 \leq x < 2$.

(C) $x < -1$ vagy $x \geq 2$.

(B) $-1 < x \leq 2$.

(D) $x \leq -1$ vagy $x > 2$.

A helyes válasz: (D)

4. Formulák használata, behelyettesítés

4.1. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $xy^{-1} + yz^{-1}$ kifejezés értékét, ha $x = -1$, $y = 2$ és $z = \frac{1}{2}$?

- (A) $xy^{-1} + yz^{-1} = \frac{7}{2}$. (C) $xy^{-1} + yz^{-1} = 2$.
(B) $xy^{-1} + yz^{-1} = -1$. (D) $xy^{-1} + yz^{-1} = \frac{1}{2}$.

A helyes válasz: (A)

Megoldás: Először idézzük fel a negatív egész kitevő jelentését:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

Ez alapján: $y^{-1} = \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ és $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$\text{Így } xy^{-1} + yz^{-1} = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 = -\frac{1}{2} + 4 = -\frac{1}{2} + \frac{8}{2} = \frac{8-1}{2} = \frac{7}{2}.$$

4.2. Feladat: Az $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ számok mértani közepe definíció szerint:

$$\overline{x}_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_N)^{\frac{1}{N}}$$

Az alábbi értékek közül melyik adja meg két tizedesjegy pontosan az $\{5, 3, 2, 7\}$ számok mértani közepét?

- (A) 52.50, (B) 3.81, (C) 62.80, (D) 38.07.

A helyes válasz: (B)

Megoldás: 4 elem estén a formula alapján a 4 elem szorzatából kell 4. gyököt vonni, azaz:

$$\overline{x_G} = \sqrt[4]{\prod_{i=1}^4 x_i} = \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)^{\frac{1}{4}}$$

Behelyettesítve:

$$\overline{x_G} = \sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = \sqrt[4]{210} = 3.80675 = \underline{\underline{3.81}}$$

4.3. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $x^{-1} + y^{-2}$ kifejezés értékét, ha $x = 2$ és $y = 3$?

- | | |
|---|--|
| (A) $x^{-1} + y^{-2} = -\frac{11}{18},$ | (C) $x^{-1} + y^{-2} = \frac{11}{18},$ |
| (B) $x^{-1} + y^{-2} = -11,$ | (D) $x^{-1} + y^{-2} = \frac{2}{11}.$ |

A helyes válasz: (C)

4.4. Feladat: Az $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ számok négyzetes közepe definíció szerint:

$$\overline{x_N} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Az alábbi értékek közül melyik adja meg két tizedesjegy pontosan az $\{2, 1, 3, 5\}$ számok négyzetes közepét?

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 2.34, | (B) 9.75, | (C) 5.50. | (D) 3.12, |
|-----------|-----------|-----------|-----------|

A helyes válasz: (D)

4.5. Feladat: Tudjuk, hogy $P(B) = 0.7$ és $P(A \cup B) = 0.3$. Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$ értékét két tizedesjegy pontossággal?

- (A) $P(A|B) = 0.43$, (C) $P(A|B) = 2.33$,
 (B) $P(A|B) = 0.42$, (D) $P(A|B) = 0.4$.

A helyes válasz: (A)

4.6. Feladat: Tudjuk, hogy $x = 5$, $y = -2$ és $z = 4$. Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg $\sqrt{xy^2z}$ értékét három tizedesjegy pontossággal?

- (A) $\sqrt{xy^2z} = 35.777$, (D) Egyik sem helyes, hisz negatív számból nem lehet négyzetgyököket vonni.
 (B) $\sqrt{xy^2z} = 8.944$,
 (C) $\sqrt{xy^2z} = 8.945$,

A helyes válasz: (B)

4.7. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg a $P(B)$ értékét két tizedesjegy pontossággal? Ha tudjuk, hogy $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$, és $P(A|B) = 0.6$ illetve $P(A \cup B) = 0.5$?

- (A) $P(B) = 1.20$, (D) Egyik sem helyes, mert $P(A|B)$ -nek $P(A \cup B)$ -nél szükségképp kisebbnek kell lennie.
 (B) $P(B) = 0.83$,
 (C) $P(B) = 0.08$,

A helyes válasz: (B)

5. Szumma jel és indexek használata

5.1. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen

a $\sum_{k=1}^4 2k$ összeget?

(A) $\sum_{k=1}^4 2k = 2 + 4.$

(C) $\sum_{k=1}^4 2k = 2 + 4 + 6 + 8.$

(B) $\sum_{k=1}^4 2k = 2 + 3 + 4 + 5.$

(D) $\sum_{k=1}^4 2k = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots$

A helyes válasz: (C)

Megoldás: A $\sum_{k=1}^4$ szumma jel azt kódolja, hogy a mögötte lévő k futó indextől függő kifejezést kell $k = 1, 2, 3, 4$ -re kiértékelni és a kapott eredményeket összeadni:

k	$2k$
1	$2 \cdot 1 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$2 \cdot 3 = 6$
4	$2 \cdot 4 = 8$

Tehát $\sum_{k=1}^4 2k = \underline{\underline{2 + 4 + 6 + 8.}}$

Megjegyzés: Gyakorlásként érdemes elgondolkodni, hogy miként tudnánk $\sum$ jel segítségével fölírni a helytelen válaszokat.

(A) $2 + 4 = \sum_{k=1}^2 2k$ vagy $2 + 4 = \sum_{k=1}^2 2^k.$

(B) $2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=2}^5 k$ vagy $2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^4 (k + 1).$

$$(D) \ 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 2k.$$

5.2. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen

a $\sum_{k=2}^4 3^k$ összeget?

$$(A) \sum_{k=2}^4 3^k = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4. \quad (C) \sum_{k=2}^4 3^k = 2^2 + 3^3 + 4^4.$$

$$(B) \sum_{k=2}^4 3^k = 3^2 + 3^4. \quad (D) \sum_{k=2}^4 3^k = 3^2 + 3^3 + 3^4.$$

A helyes válasz: (D)

Megoldás: A $\sum_{k=2}^4$ szumma jel azt kódolja, hogy a mögötte lévő k futó indextől függő kifejezést kell $k = 2, 3, 4$ -re kiértékelni és a kapott eredményeket összeadni:

k	3^k
2	3^2
3	3^3
4	3^4

$$\text{Tehát } \sum_{k=2}^4 3^k = \underline{\underline{3^2 + 3^3 + 3^4}}.$$

5.3. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg az

$\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2$ kifejezés helyes kifejtését, ha tudjuk, hogy $N = 4$?

$$(A) \left(\frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + (x_4 - \bar{x})}{3} \right)^2.$$

- (B) $\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{4}$.
- (C) $\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{3}$.
- (D) $\frac{(x_1 - \bar{x})^2}{1} + \frac{(x_2 - \bar{x})^2}{2} + \frac{(x_3 - \bar{x})^2}{3} + \frac{(x_4 - \bar{x})^2}{4}$.

A helyes válasz: (C)

Megoldás: Először helyettesítsük be a N értékét, azaz a $N = 4$ -et:

$$\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{4-1} \sum_{j=1}^4 (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^4 (x_j - \bar{x})^2$$

Majd bontsuk ki a $\sum$ összegzést, amiben a $j = 1, 2, 3, 4$ -hez tartozó tagok szerepelnek:

$$\sum_{j=1}^4 (x_j - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2$$

Ezt szorozza meg a (globális) $\frac{1}{3}$ szorzótényező, ami a $\sum$ jel előtt szerepel, így:

$$\frac{1}{3} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2]$$

5.4. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen

a $\sum_{t=1}^4 3t^2$ összeget?

- (A) $\sum_{t=1}^4 3t^2 = 3 + 4 + 9 + 16$. (C) $\sum_{t=1}^4 3t^2 = 9 + 36 + 81 + 144$.
- (B) $\sum_{t=1}^4 3t^2 = 3 + 1 + 4 + 9 + 16$. (D) $\sum_{t=1}^4 3t^2 = 3 + 12 + 27 + 48$.

A helyes válasz: (D)

5.5. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg a $\sum_{j=1}^4 5^{j+1}$ kifejezést helyesen?

(A) $\sum_{j=1}^4 5^{j+1} = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5.$

(B) $\sum_{j=1}^4 5^{j+1} = 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5.$

(C) $\sum_{j=1}^4 5^{j+1} = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4.$

(D) $\sum_{j=1}^4 5^{j+1} = 5^2 + 5^3 + 5^4.$

A helyes válasz: (B)

5.6. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 x_j$ összeget?

(A) $\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 x_j = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5.$

(B) $\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 x_j = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{5}x_5.$

(C) $\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 x_j = \frac{1}{5}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$

(D) $\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 x_j = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

A helyes válasz: (A)

5.7. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a $\sum_{i=3}^m \frac{i}{i+1}$ összeget?

(A) $\sum_{i=3}^m \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{m}{m+1}.$

(B) $\sum_{i=3}^m \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{m}{m+1}.$

(C) $\sum_{i=3}^m \frac{i}{i+1} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{m}{m+1}.$

(D) $\sum_{i=3}^m \frac{i}{i+1} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{m+4}{m+5}.$

A helyes válasz: (C)

5.8. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg a $\sum_{j=1}^3 \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$ kifejezés helyes kifejtését?

(A) $\frac{(O_1 - E_1)^2 + (O_2 - E_2)^2 + (O_3 - E_3)^2}{E_1 + E_2 + E_3}.$

(B) $\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \frac{(O_3 - E_3)^2}{E_3}.$

(C) $\frac{((O_1 - E_1) + (O_2 - E_2) + (O_3 - E_3))^2}{E_1 + E_2 + E_3}.$

(D) $\left(\frac{(O_1 - E_1)}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)}{E_2} + \frac{(O_3 - E_3)}{E_3} \right)^2.$

A helyes válasz: (B)

5.9. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg a $2 \sum_{t=2}^n \frac{t-1}{t+1}$ kifejezést helyesen?

- (A) $\frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{6}{5} + \dots + \frac{2(n-1)}{n+1}$. (C) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n-1}{n+1}$.
 (B) $\frac{3}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{5} + \dots + \frac{2n-1}{n+1}$. (D) $\frac{1S}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n-1}{n+1}$.

A helyes válasz: (A)

5.10. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a $\sum_{i=1}^n 3x_i$ kifejezés értékét, ha $x_0 = 3, x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = -3, x_4 = 5$ és $n = 3$?

- (A) $\sum_{i=1}^n 3x_i = 51$. (C) $\sum_{i=1}^n 3x_i = 9$.
 (B) $\sum_{i=1}^n 3x_i = 27$. (D) $\sum_{i=1}^n 3x_i = 19$.

A helyes válasz: (B)

5.11. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3}$ összeg kifejtését?

- (A) $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \frac{-2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{4}{8} + \frac{6}{9} + \dots + \frac{2(n-2)}{n+4}$.
 (B) $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \frac{2}{7} + \frac{4}{8} + \frac{6}{9} + \dots + \frac{2(n-3)}{n+3}$.

$$(C) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \frac{2}{7} + \frac{4}{8} + \frac{6}{9} + \dots + \frac{2(n-2)}{n+4}.$$

$$(D) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \frac{-2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{4}{8} + \frac{6}{9} + \dots + \frac{2(n-3)}{n+3}.$$

A helyes válasz: (A)

5.12. Feladat: A $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3}$ összegzésben a k összegzési indexet szeretnénk úgy lecserélni, hogy az eddigi $k = 2$ helyett 1-től induljon az összegzés. Melyik a helyes az alábbi lehetőségek közül?

$$(A) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2(i-2)}{i+4}. \quad (C) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \sum_{i=1}^n \frac{2(i-2)}{i+4}.$$

$$(B) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \sum_{i=1}^n \frac{2(i-4)}{i+2}. \quad (D) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2(k-3)}{k+3} = \sum_{i=1}^n \frac{2(i-3)}{i+3}.$$

A helyes válasz: (C)

5.13. Feladat: Válassza ki a helyes állítást az alábbiak közül!

$$(A) \sum_{j=1}^5 (ja + (j-1)b) = 5a + 4b.$$

$$(B) \sum_{j=1}^5 (ja + (j-1)b) = 15a + 10b.$$

$$(C) \sum_{j=1}^5 (ja + (j-1)b) = 15a + 14b.$$

$$(D) \sum_{j=1}^5 (ja + (j-1)b) = 29ab.$$

A helyes válasz: (B)

6. Pontok és egyenesek kapcsolata

6.1. Feladat: Melyik pontpár fekszik rajta az $2x + 3y = 8$ egyenletű egyenesen?

(A) $(1, 2); \left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

(C) $(2, 1); (4, 0)$.

(B) $(1, 2); (4, 0)$.

(D) $(-2, 4); (0, 4)$.

A helyes válasz: (B)

Megoldás: Egyszerű behelyettesítéssel győződhetünk meg róla, hogy a pont rajta fekszik-e az egyenesen. Ha egy pont (x, y) koordinátájára teljesül az egyenlet, akkor az a pont az egyenesen fekszik:

• $(1, 2) \Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = \boxed{8}$

• $\left(\frac{8}{3}, 0\right) \Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot \frac{8}{3} + 3 \cdot 0 = \frac{16}{3} \neq 8$

• $(4, 0) \Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = \boxed{8}$

• $(2, 1) \Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7 \neq 8$

• $(-2, 4) \Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = -4 + 12 = \boxed{8}$

• $(0, 4) \Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 \neq 8$

Ez alapján a B válaszban szerepel 2 olyan pont, ami az egyenesen fekszik.

6.2. Feladat: Milyen meredekségű és tengelymetszetű a $3x - 4y = 12$ egyenletű egyenes?

(A) $m = -\frac{3}{4}$ és $b = 3$.

(C) $m = \frac{3}{4}$ és $b = -3$.

(B) $m = \frac{4}{3}$ és $b = -4$.

(D) $m = 3$ és $b = 12$.

A helyes válasz: (C)

Megoldás: A meredekséget és a tengelymetszetet úgy tudjuk meghatározni, ha az egyenletet $y = mx + b$ alakra hozzuk, ahol m a meredekség és b a tengelymetszet:

$$\begin{aligned} 3x - 4y = 12 &\Rightarrow 3x = 12 + 4y \Rightarrow 3x - 12 = 4y \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3}{4}x - \frac{12}{4} = y &\Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{4}x - 3} \Rightarrow \underline{\underline{m = \frac{3}{4}, b = -3.}} \end{aligned}$$

6.3. Feladat: Milyen meredekségű és tengelymetszetű az $(1, 2)$ és $(8, -1)$ pontokat összekötő egyenes?

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad m &= -\frac{3}{7} \text{ és } b = \frac{17}{7}. & \text{(C)} \quad m &= -\frac{3}{7} \text{ és } b = -\frac{31}{7}. \\ \text{(B)} \quad m &= \frac{7}{3} \text{ és } b = -\frac{59}{3}. & \text{(D)} \quad m &= \frac{3}{7} \text{ és } b = -\frac{17}{7}. \end{aligned}$$

A helyes válasz: (A)

Megoldás: Először határozzuk meg az egyenes *irányvektorát*, azaz az $\underline{\mathbf{r}}_1 = (1, 2)$ helyvektorú pontból az $\underline{\mathbf{r}}_2 = (8, -1)$ helyvektorú pontba mutató vektort (vagy ennek ellentettjét). Ezt éppen a két helyvektor különbsége szolgáltatja:

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{r}}_2 - \underline{\mathbf{r}}_1 = (8, -1) - (1, 2) = (7, -3)$$

A koordinátákat megcserélve és az egyik koordináta ellentettjét véve megkapjuk az irányvektorra merőleges *normálvektort*:

$$\underline{\mathbf{v}} = (7, -3) \Rightarrow \underline{\mathbf{n}} = (3, 7)$$

A skaláris szorzás segítségével meggyőződhetünk róla, hogy ez tényleg merőleges $\underline{\mathbf{v}}$ -re:

$$\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = (7, -3) \cdot (3, 7) = 7 \cdot 3 + (-3) \cdot 7 = 0.$$

Tetszőleges $\underline{\mathbf{r}} = (x, y)$ helyvektorú pontnak megvan az a tulajdonsága, hogy az $\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}_1$ merőleges $\underline{\mathbf{n}}$ -re, azaz

$$\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}_1 \perp \underline{\mathbf{n}} \Rightarrow (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}_1) \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \boxed{\underline{\mathbf{r}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{r}}_1 \cdot \underline{\mathbf{n}}}$$

Behelyettesítve megkapjuk az $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ helyvektorú pontokon áthaladó egyenes *normálvektoros egyenletét*:

$$(x, y) \cdot (3, 7) = (1, 2) \cdot (3, 7) \Rightarrow 3x + 7y = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 3 + 14 = 17$$

Tehát a normálvektoros egyenlet: $3x + 7y = 17$. Ahonnan y -ra való átrendezéssel le tudjuk olvasni a meredekséget és tengelymetszetet (lásd előző feladat):

$$3x + 7y = 17 \Rightarrow 7y = 17 - 3x \Rightarrow y = \frac{17}{7} - \frac{3}{7}x \Rightarrow \underline{\underline{m = -\frac{3}{7}, b = \frac{17}{7}}}.$$

6.4. Feladat: Milyen meredekségű a $(-1, 7)$ és $(4, 3)$ pontokat összekötő egyenes?

(A) $m = -\frac{4}{5}$. (B) $m = \frac{4}{5}$. (C) $m = -\frac{5}{4}$. (D) $m = 4$.

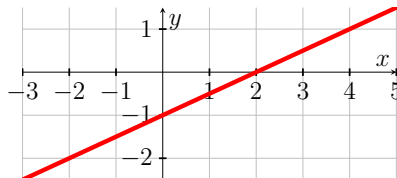
A helyes válasz: (A)

6.5. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül, melyik adja meg helyesen az $(1, 5)$ és $(4, -3)$ pontokat összekötő egyenes egyenletét?

(A) $y = \frac{23}{3} + \frac{8}{3}x$. (C) $y = \frac{23}{8} - \frac{8}{3}x$.
(B) $8x + 3y = 23$. (D) $8x - 3y = 41$.

A helyes válasz: (B)

6.6. Feladat: Figyelje meg a grafikont!



Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a grafikonon szereplő egyens egyenletét?

(A) $y = 2x + 1$

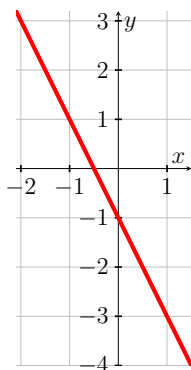
(C) $2x - y = 0.$

(B) $x - 2y = 2$

(D) $y = \frac{1}{2}x + 1.$

A helyes válasz: (B)

6.7. Feladat: Figyelje meg a grafikont! Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a grafikonon szereplő egyenes meredekségét?



(A) $m = -1.$

(B) $m = -\frac{1}{2}.$

(C) $m = -2.$

(D) $m = 2.$

A helyes válasz: (C)

7. Deriválás

7.1. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $y = x^3 + 9$ kifejezés deriváltját?

(A) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 9$

(C) $\frac{dy}{dx} = 3x^3$

(B) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

(D) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^4 + c$

A helyes válasz: (B)

7.2. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $y = 5x^2 + 3$ kifejezés deriváltját?

(A) $\frac{dy}{dx} = 10x + 3$

(C) $\frac{dy}{dx} = 10x$

(B) $\frac{dy}{dx} = 10x^2$

(D) $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}x^3 + c$

A helyes válasz: (C)

7.3. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $y = x^3 + 3x^2 - 7$ kifejezés deriváltját?

(A) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 7$

(C) $\frac{dy}{dx} = 3x^3 + 6x^2$

(B) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x$

(D) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{4} + 2x^3 - 7x$

A helyes válasz: (B)

7.4. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a $g(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény deriváltját?

(A) $g'(x) = \sqrt[3]{1}$.

(C) $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

(B) $g'(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$.

(D) $g'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}$.

A helyes válasz: (C)

7.5. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a $f(t) = \sqrt[5]{t}$ függvény deriváltját?

(A) $f'(t) = \sqrt[5]{1}$.

(B) $f'(t) = \frac{5}{6} \sqrt[5]{t^6}$.

(C) $f'(t) = \frac{4}{5} \sqrt[5]{t^4}$.

(D) $f'(t) = \frac{1}{5 \sqrt[5]{t^4}}$.

A helyes válasz: (D)

7.6. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen a $\psi(x) = \sqrt{x}$ függvény deriváltját?

(A) $\psi'(x) = 1$.

(B) $\psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(C) $\psi'(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$.

(D) $\psi'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x^2}$.

A helyes válasz: (B)

7.7. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $y = \frac{1}{x^2}$ kifejezés deriváltját?

(A) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$

(B) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3}$

(C) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$

(D) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x}$

A helyes válasz: (A)

7.8. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $x = \frac{1}{t^3}$ kifejezés deriváltját?

(A) $\frac{dx}{dt} = -\frac{4}{t^2}$

(B) $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3t^2}$

(C) $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{t^4}$

(D) $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{t^4}$

A helyes válasz: (C)

7.9. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $y = \frac{1}{x}$ kifejezés deriváltját?

(A) $\frac{dy}{dx} = \ln x$

(C) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

(B) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$

(D) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2}$

A helyes válasz: (C)

7.10. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $f(x) = 4x^3 - 7x^2 - 12x + 17$ függvény *második* deriváltját?

(A) $f''(x) = 12x^2 - 14x - 12.$

(C) $f''(x) = 24x - 14.$

(B) $f''(x) = 12x - 14.$

(D) $f''(x) = 4x - 7.$

A helyes válasz: (C)

7.11. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $f(t) = 2t^{-3} - 3t^{-2} - 9$ függvény *második* deriváltját?

(A) $f''(t) = 24t^{-5} + 18t^{-4}.$

(C) $f''(t) = 12t^{-1} - 6.$

(B) $f''(t) = -6t^{-4} + 6t^{-3}.$

(D) $f''(t) = 24t^{-5} - 18t^{-4}.$

A helyes válasz: (D)

7.12. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $\psi(t) = -4t^4 + 3t^{-2} + 16$ függvény *második* deriváltját?

(A) $\psi''(x) = -16t^3 - 6t^{-3}.$

(C) $\psi''(x) = -48t^2 - 18t^{-4}.$

(B) $\psi''(x) = -48t^2 + 18t^{-4}.$

(D) $\psi''(x) = -16t^2 + 18.$

A helyes válasz: (B)

7.13. Feladat: x mely értékei esetén lesz az $y = x^2 - 6x + 5$ görbe meredeksége zérus?

(A) $x = 5$ és $x = 1$.

(C) $x = 5$.

(B) $x = 3$.

(D) $\frac{dy}{dx} = 2x - 6$.

A helyes válasz: (B)

7.14. Feladat: x mely értékénél van az $y = 2x^3 - 12x^2 - 30x + 15$ görbének helyi maximuma?

(A) $x = 5$.

(C) $x = -1$.

(B) $x = 2$.

(D) $x = 3$.

A helyes válasz: (C)

7.15. Feladat: x mely értékénél van az $y = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 6$ görbének helyi minimuma?

(A) $x = 2$.

(C) $x = 1$.

(B) $x = \frac{3}{2}$.

(D) $x = -1$.

A helyes válasz: (A)

8. Integrálás

8.1. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $x^3 + 9$ kifejezés primitív függvényét?

- (A) $\int x^3 + 9 \, dx = 3x^2 + c$ (C) $\int x^3 + 9 \, dx = x^4 + 9x$
 (B) $\int x^3 + 9 \, dx = \frac{1}{3}x^4 + 9x + c$ (D) $\int x^3 + 9 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + 9x + c$

A helyes válasz: (D)

8.2. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $x^{\frac{1}{3}}$ kifejezés határozatlan integrálját?

- (A) $\int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$ (C) $\int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$
 (B) $\int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$ (D) $\int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + c$

A helyes válasz: (A)

8.3. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $\frac{3}{t^2}$ kifejezés határozatlan integrálját?

- (A) $\int \frac{3}{t^2} \, dt = -\frac{3}{t} + c$ (C) $\int \frac{3}{t^2} \, dt = -\frac{9}{t^3} + c$
 (B) $\int \frac{3}{t^2} \, dt = \frac{3}{t} + c$ (D) $\int \frac{3}{t^2} \, dt = \frac{9}{t^3} + c$

A helyes válasz: (A)

8.4. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $\int_1^3 (t^3 - 3t + 2) \, dt$ határozott integrál értékét?

- (A) 24. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 12. (D) $\frac{28}{3}$.

A helyes válasz: (C)

8.5. Feladat: Az alábbi lehetőségek közül melyik adja meg helyesen az $\int_1^2 (t^{-2} - 3t^{-3} + 2) dt$ határozott integrál értékét?

- (A) $\frac{11}{8}$. (B) $\frac{51}{8}$. (C) $-\frac{107}{16}$. (D) $\frac{34}{9}$.

A helyes válasz: (A)

II.fejezet: **Hőtan**
szerző: **Dr. Fábián László**

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



HŐTAN

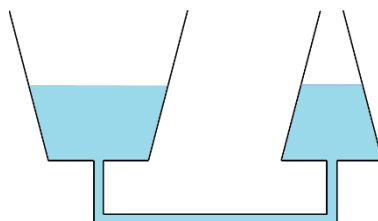
A fejezetben közzétett feladatok megoldása és a megoldási útmutatók tanulmányozása során a hallgató

- *megismeri a termodinamika alapvető törvényeit, a kondenzált anyagok hőtágulására és az ideális gázok állapotváltozásaira érvényes alapvető összefüggéseket,*
- *elsajátítja a különböző hőtani feladatok megoldási módszereit, a termodinamika törvényeinek alkalmazását, felismeri a problémák mögött rejlő folyamatokat és önállóan old meg típusfeladatokat,*
- *a feladatok megoldása során szerzett tapasztalatait – szakmai segítséggel – bonyolultabb termodinamikai problémák esetén hasznosítja*

Hőmérséklet, hőtágulás

1. Előregedett Celsius-hőmérőnk olvadó jégben a , forró víz gőzében b hőmérsékletet mutat. Mekkora a valódi hőmérséklet, ha a hőmérő c fokot mutat?
2. Celsius-hőmérő t hőmérsékleten A , $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on B értéket mutat. Milyen hőmérsékletet jelez olvadó jégben?
3. Fahrenheit-hőmérőnk $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on a , $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on b értéket jelez. Mennyi a hőmérséklet $^{\circ}\text{C}$ -ban, amikor c értéket mutat?
4. Egy higanyos hőmérőbe $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on 200 mm^3 higanyt töltünk, a cső átmérője 0.15 mm . Mekkora távolságra kell felrajzolni az egyes fokbeosztásokat a hőmérő skáláján? A higany térfogati hőtágulási együtthatója $\beta = 1.8 \times 10^{-4}\text{ }1/^{\circ}\text{C}$
5. Alkoholos hőmérőnk kapillárisának átmérője 1 mm . Ha a hőmérséklet 283 K -ről 313 K -re emelkedik, a folyadékoszlop magassága 2 cm -rel emelkedik. Mennyi a hőmérőben levő alkohol térfogata 283 K -en, ha hőtágulási együtthatója $1.1 \times 10^{-4}\text{ }1/^{\circ}\text{C}$? Az üveg hőtágulásától eltekinthetünk.
6. Egy vasúti sín hossza $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on hitelesített mérőszalaggal mérve $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on 24 m . Mekkora a sín tényleges hossza, ha a mérőszalag anyagának lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}\text{ }1/^{\circ}\text{C}$

7. Egy β térfogati hőtágulású anyag sűrűsége 0°C -on ρ_0 . Mekkora a sűrűsége t fokon?
8. Mekkora hőmérsékleten lenne egy rézgolyó térfogata 0.15% -kal több, mint 20°C -on? A réz lineáris hőtágulási együtthatója: $\alpha_{\text{Cu}} = 1.62 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$
9. Egy 1 kg -os és egy 2 kg -os, kezdetben azonos hőmérsékletű vaskockával azonos mennyiségű Q hőt közlünk. Melyiknek lesz nagyobb a térfogatváltozása? A hőtágulási együttható hőmérsékletfüggése elhanyagolható.
10. Egy A alapterületű, függőleges tengelyű alumínium hengerben szobahőmérsékleten $h = 5\text{ cm}$ magasságig víz van. Mennyivel változik a hidrosztatikai nyomás az edény alján, ha a rendszer hőmérsékletét 40°C -ra emeljük? Az edény hőtágulásától tekintsünk el. Hogyan változik a hidrosztatikai nyomás az edény alján, ha az edény hőtágulását is figyelembe vesszük?
11. Alumínium kocka élhossza 50°F -on 5 cm . Hány százalékkal lesz nagyobb a térfogata 68°F -on, ha a lineáris hőtágulási együttható $\alpha = 2.4 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$?
12. 10 cm sugarú alumínium golyó 80°C hőmérsékletű. A golyót 80°C -os vízbe merítjük úgy, hogy a víz teljesen ellepje és erőmérővel megmérjük a súlyát. Ezután a testet hideg vízben 20°C -ra hűtjük és ismét megmérjük a súlyát a 20°C -os vízben. Melyik esetben és mennyivel mutat többet az erőmérő? A 20°C -os és a 80°C -os víz sűrűségét vegyük táblázatból, az alumínium sűrűsége 18°C -on 2702 kg/m^3 , lineáris hőtágulási együtthatóját vehetjük a hőmérséklettől függetlenül $\alpha = 2.4 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$ -nak. $g = 10\text{ m/s}^2$
13. Az ábrán látható közlekedőedényben víz van. Melyik irányba kezd folyni a víz, ha felmelegítjük? Az edény hőtágulásától eltekinthetünk.



14. Két különböző anyagból készült rúd hőtágulását vizsgáljuk. Az A jelű rúd hossza negyede, hőtágulási együtthatója $3/2$ -szerese, hőmérsékletváltozása pedig

3/4-szerese a B jelű rúd megfelelő paramétereinek. Az hosszváltozások összege 2.05 cm . Határozzuk meg az egyes rudak hosszváltozását!

15. Rézből és vasból bimetál hőkapcsolót készítünk. A vékony és keskeny, 0 °C -on 20 cm hosszú fémlemezket egymással párhuzamosan összeragasztjuk és egyik közös végüket rögzítjük. A lemezek közti állandó távolság 3 mm . Mekkora távolsággal hajlik le a bimetál másik vége, ha a rendszert 500 °C -ra melegítjük?
 $\alpha_{Cu} = 1.62 \times 10^{-5} 1/\text{°C}$, $\alpha_{Fe} = 1.17 \times 10^{-5} 1/\text{°C}$

16. 10 °C -on tele tankoltuk az 55 l -es üzemanyagtartályt, de elfelejtettük visszarakni a tanksapkát. Mennyi benzin folyik ki a tartályból, ha a hőmérséklet napközben 30 °C -ra emelkedik?

$$\beta_{benzin} = 9.5 \times 10^{-4} 1/\text{°C}, \beta_{tartály} = 3.5 \times 10^{-5} 1/\text{°C}$$

17. Mekkora feszítőerő lép fel egy 10 cm^2 keresztmetszetű acélrúdban, ha 1 °C lehűléskor megakadályozzuk az összehúzódását? Az acél Young-modulusa $Y = 200\text{ GPa}$, lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} 1/\text{°C}$.

18. Ezüst dobozon levő, 50 mm átmérőjű lyukon szeretnénk átejteni egy réz golyót, melynek átmérője 50.1 mm . Ha csak a dobozt melegítjük, hány fokkal kell megemelni a hőmérsékletét, hogy a réz golyó beleessen a lyukba? Mekkora hőmérsékletváltozásra van szükség, ha a doboz és a golyó hőmérsékletét egyforma mértékben növeljük?

$$\alpha_{Ag} = 1.8 \times 10^{-5} 1/\text{°C}, \alpha_{Cu} = 1.7 \times 10^{-5} 1/\text{°C}$$

19. Egy 0 °C -on 5 m kerületű acél kerék 100 km -es úton mennyivel fordul többet -10 °C -on, mint $+30\text{ °C}$ -on? Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} 1/\text{°C}$.

20. Higannyal töltött nyomásmérőnket 0 °C -on kalibráltuk. Mekkora a légnyomás valódi értéke, ha 25 °C -on a barométer 767 torr nyomást mutat? A sárgaréz skála lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1.84 \times 10^{-5} 1/\text{°C}$, a higany térfogati hőtágulási együtthatója $\beta = 1.8 \times 10^{-4} 1/\text{°C}$.

21. Matematikai ingánk egy acélhuzalon függő pontszerű, m tömegű golyó. Az ingát 15 °C -on készítjük el. Mekkora acélhuzalra van szükségünk, ha azt szeretnénk, hogy a lengésidő 1 s legyen? Naponta mennyit siet/késik az inga

$0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on, ill. $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on? A nehézségi gyorsulás: $g = 10\text{ m/s}^2$, az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}\text{ }1/^{\circ}\text{C}$

22. Ingánk egy m tömegű kiterjedt test, mely $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on a tömegközéppontjától d_0 távolságra levő tengely körül leng. A forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték Θ_0 , a lengésidő T_0 . Mekkora lesznek ezek az értékek $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on, ha az inga anyagának lineáris hőtágulási együtthatója α ?
23. Az *invar* egy speciális vas-nikkel ötvözet, melynek hőtágulási együtthatója kicsi, alkalmazása nagy pontosságú műszerekben és extrém hőmérsékleti körülmények (pl. űrkutatás) között elterjedt. Vizsgáljuk meg az előző feladatokban szereplő matematikai és fizikai ingák viselkedését, ha acél helyett invar ötvözetet használunk, melyre a hőtágulási együttható $\alpha = 1.2 \times 10^{-6}\text{ }1/^{\circ}\text{C}$! Mennyi idő alatt siet/késik az invarból készült matematikai, ill. fizikai inga $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on 1 s -ot $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -hoz képest?

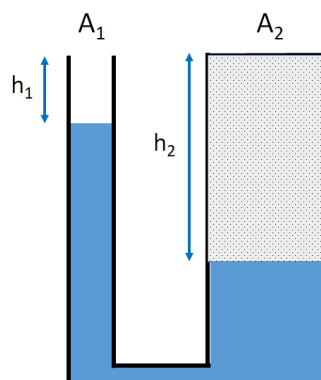
Ideális gázok állapotváltozásai, I. főtétel

24. Bizonyítsuk be, hogy ideális gáz *izobár* állapotváltozása esetén nem lehetséges, hogy a rendszerrel közölt hő fele-fele arányban térfogati munkára ill. a belső energia változására fordítódik!
25. Egy edényben 14 g nitrogén és 9 g hidrogén van, a hőmérséklet $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, a nyomás 10 atm . Mekkora az edény térfogata?
26. Gömb alakú léggömbünkben 5.374 g He van. Mekkora a léggömb sugara, ha a hőmérséklet $27\text{ }^{\circ}\text{C}$, a nyomás 10^5 Pa ?
27. Mennyi a Kr atomsúlya (moláris tömege), ha normál állapotban a sűrűsége 3.749 g/l ?
28. Héliummal töltött léggömbjeink a rossz elkötés miatt idővel leeresztenek. A He hány százaléka szabadult ki, ha állandó külső nyomás és hőmérséklet mellett egy léggömb sugara 40 cm -ről 35 cm -re csökkent?
29. Egy tó felszínén a hőmérséklet $30\text{ }^{\circ}\text{C}$, a légköri nyomás 10^5 Pa . Egy felszálló buborék átmérője itt 3 mm . Mekkora volt a buborék sugara 10 m -es mélységben, $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on?
30. Felül nyitott, alul zárt, A keresztmetszetű üvegcsőben h hosszúságú higanyszál zár el h hosszúságú levegőoszlopot. A légköri nyomás $p_k = 10^5\text{ Pa} = 76\text{ Hgcm}$.

Mekkora a higanyszál hossza, ha a csövet nyitott végével lefele fordítva a levegőoszlop hossza másfélszeresére változik? A folyamat közben a hőmérséklet nem változik.

31. Ideális gáz két állapotáról a következőket tudjuk: a második állapotban a nyomás kétszerese az első állapotbeli nyomásnak, a térfogat másfélszerese az első állapotbeli térfogatnak. Az anyagmennyiségek aránya megegyezik a térfogatok arányának reciprokával. Mennyi a gáz hőmérséklete az első állapotban, ha a második állapotban $T = 450\text{ K}$?

32. Egy közlekedőedényben az ábrán látható módon higany zárja el az oxigén gázt. Mekkora a gáz nyomása? Hány százalékkal nőhet a gáz térfogata, hogy a higany ne csorduljon ki a nyitott végen? Hányszorosára kell emelni a hőmérsékletet, hogy a higany a bal oldali cső tetejéig érjen? Hogyan változik a feladat megoldása, ha oxigén helyett hélium van a tartályban? Adottak az ábrán jelölt mennyiségek, a higany sűrűsége és a külső légnyomás értéke.

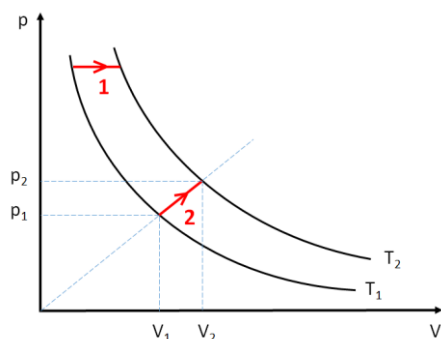


33. Gázkeverékünk 12 g héliumból és 28 g nitrogénből áll. Mennyivel csökken a keverék belső energiája, ha lehűtjük 15 °C -kal?
34. Héliumból és hidrogénből álló gázkeverékünk állandó nyomáson tágul, a belső energia változása 1.8 -szorosa a tágulási munkának. Határozzuk meg a keverék összetételét!
35. 2 mol egyatomos gázzal 5 kJ hőt közlünk, eközben a gáz 7.5 kJ munkát végez. Mennyi lesz a gáz hőmérséklete a végállapotban, ha a kezdeti állapotban 500 K volt?
36. Bizonyos mennyiségű ideális gázzal állandó térfogaton 12 J hőt közlünk, melynek hatására hőmérséklete 5 °C -kal emelkedik. Ugyanezt a gázt állandó nyomáson melegítve 40 J szükséges ahhoz, hogy a hőmérsékletet 10 °C -kal emeljük. Milyen és mennyi gáz lehet a tartályban?
37. Ideális gázt állandó nyomáson melegítve a gáz által végzett munka 100 J . A gázt visszavisszük eredeti állapotába, majd állandó térfogaton melegítjük

ugyanarra a vég hőmérsékletre. A két folyamat során közölt hő összesen 600 J . Mennyi a gáz szabadsági fokainak száma?

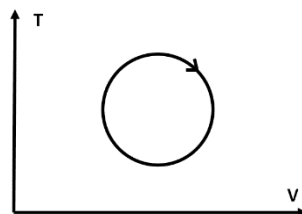
38. 1 mol hidrogéngáz kezdeti hőmérséklete 320 K . A gázzal olyan folyamatot végeztetünk, mely során térfogata kétszeresére nő úgy, hogy a folyamatot a p - V diagramon egy egyenes szakasszal ábrázolhatjuk. A folyamat végén a gáz hőmérséklete 240 K . Mennyi a folyamat során felvett/leadott hőmennyiség?

39. 1 mol , egyatomos ideális gáz két izoterma közt az 1-es izobár és a 2-es folyamatot végzi, ahol a nyomás egyenesen arányos a térfogattal. Határozzuk meg az egyes folyamatokra a gáz mólhőjét!



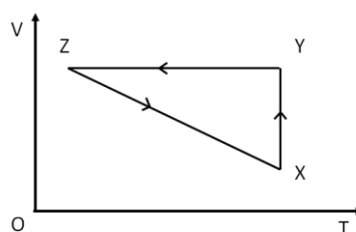
40. 20 l -es, jól zárható tartályban hélium van, melynek hőmérséklete 20°C , nyomása 10^5 Pa . A tartályban egy 200 W -os fűtőszál nyúlik be, melynek hatásfoka 70% . A fűtőszálat 1 percre bekapcsoljuk. Mekkora lesz a gáz nyomása és hőmérséklete a melegítés után? Mennyiben változik a feladat megoldása, ha hélium helyett nitrogén van a tartályban?
41. A keresztmetszetű, felül nyitott tartályban egy m tömegű dugattyú V_0 térfogatú, T_0 hőmérsékletű gázt zár el, a külső nyomás $p_k = 10^5\text{ Pa}$. Mennyi a gáz anyagmennyisége? Mennyivel emelkedik fel a dugattyú, ha a hőmérsékletet az eredeti hőmérséklet kétszeresére növeljük?
42. 1 l térfogatú gázkeverék hidrogénből, oxigénből és héliumból áll. 300 K -en az egyes összetevők parciális nyomásai: $p_{\text{H}_2}=935\text{ torr}$, $p_{\text{O}_2}=187\text{ torr}$, $p_{\text{He}}=374\text{ torr}$. Mennyi az egyes gázok tömegaránya?
43. Egy $4\times4\times2.5\text{ m}$ -es, tökéletesen szigetelt szobában a hőmérséklet 20°C , a nyomás 10^5 Pa . Mennyivel nő a nyomás, ha 1 l vizet elektrolízissel hidrogénre és oxigénre bontunk?
44. Hidrogén és argon keverékével állandó nyomáson 13 kJ hőt közlünk, a gáz eközben 4 kJ munkát végez. Mekkora a két gáz mennyiségének aránya?

45. Ideális gáz az ábrán látható körfolyamatot végzi. A körfolyamat melyik részén nő és melyik részén csökken a nyomás?

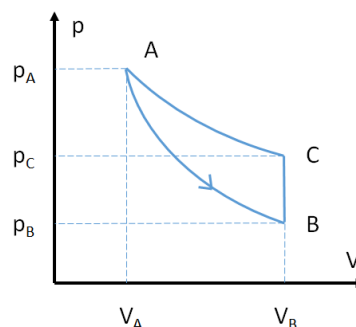


46. 30 l-es tartályban 25 °C hőmérsékletű, 3×10^5 Pa nyomású levegő van. Mekkora lesz a nyomás, ha hozzáadunk 0.25 kg levegőt? A rendszerrel 15 kJ hőt közlünk. Mekkora lesz a hőmérséklet és a nyomás? A levegő moláris tömege 29 g/mol.
47. Kétatomos gáz nyomása 600 kPa. Mennyi lesz a nyomása, ha térfogatát a) izotermikusan, b) adiabatikusan háromszorosára növeljük?

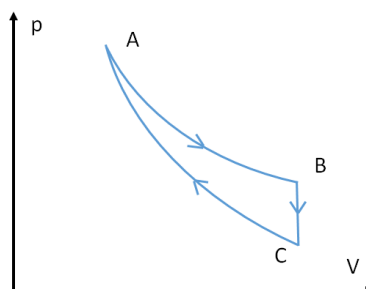
48. Ideális gáz az ábrán látható körfolyamatot végzi. A ZX szakasz milyen hőmérsékletű pontjában lesz a gáz nyomása ugyanakkora, mint az Y állapotban? Adatok: $T_x = 373$ K, $V_x = 5$ dm³, $T_z = 273$ K, $V_z = 12$ dm³.



49. Egyatomos gáz térfogata kezdeti állapotában (A) 1 m³, nyomása 250 kPa. A gázzal az ábrán látható körfolyamatot végeztetjük. A gáz először adiabatikusan térfogatának háromszorosára tágul, majd állandó térfogaton melegítve hőmérsékletét ismét az eredeti értékre növeljük. A harmadik szakaszban a gáz izotermikusan visszajut eredeti állapotába. Mekkora a gáz nyomása a B és C pontokban? Mennyi munkát végzett a gáz és mennyi a felvett hőmennyiség a körfolyamat során?

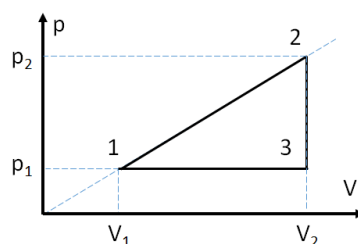


50. 1 mol egyatomos gáz az ábrán látható körfolyamatot végzi. Az $A \rightarrow B$ szakasz izotermikus, a $B \rightarrow C$ izochor, a $C \rightarrow A$ folyamat pedig adiabatikus. A hőmérsékletkülönbség a B és C állapotok közt ΔT . Mennyi a hasznos munka, ha a körfolyamat hatásfoka η ?

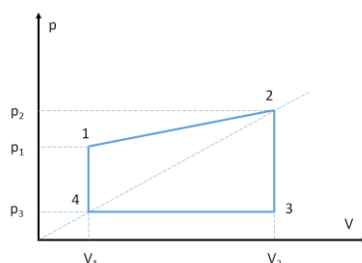


51. Egy 20 l térfogatú, 50 cm magasságú tartályban $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletű O_2 van. Az oxigén sűrűsége ezen a hőmérsékleten és légköri nyomáson $\rho = 1.43\text{ kg/m}^3$. A tartályt egy 100 kg tömegű fedő zárja le, amit még $F = 11\text{ kN}$ erővel is nyomunk. A gázt felmelegítjük $273\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra, ekkor épp megemeli a fedőt. Mennyi O_2 van a tartályban?

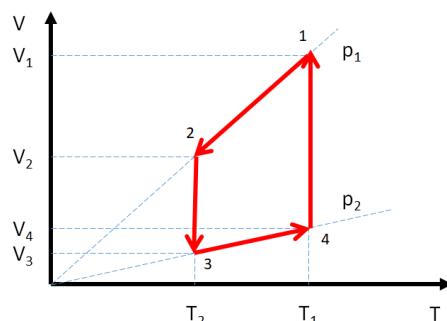
52. Egyatomos gáz az ábrán látható körfolyamatot végzi. Az 1-2 szakaszon a gáz nyomása egyenesen arányos a térfogatával, A 2 állapotban a térfogat kétszerese az 1 állapotban levő térfogatnak. Mennyi a körfolyamat hatásfoka?



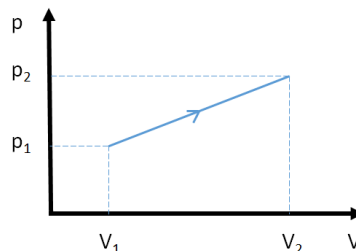
53. Az ábrán látható körfolyamatra az 1-2-4-1 útvonalon a hatásfok η_1 , a 2-3-4-2 útvonalon η_2 . A 2-es és 4-es állapotok egy, az origón átmenő egyenesen helyezkednek el. Mennyi a körfolyamat hatásfoka az 1-2-3-4 útvonalra számolva?



54. Egyatomos gáz az ábrán látható körfolyamatot végzi. Az 1-es állapotban a térfogat kétszer akkora, mint a 2-es állapotban. Ábrázoljuk a körfolyamatot a p - V diagramon!

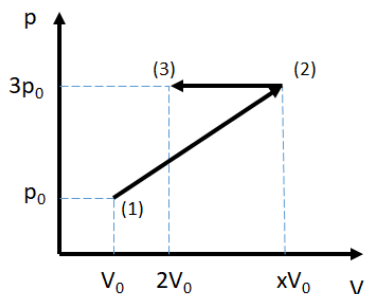


55. Egy 3 kg tömegű ólomgolyó 3 m hosszú, súlytalan fonálon függ. Egy m tömegű, v_0 vízszintes sebességgel haladó, a nagy golyóval azonos hőmérsékletű ólomlövedék pontosan közepén találja el a golyót és befűródik. A fonál 8.71° -kal kilendül és az ólom 1.597°C -kal felmelegszik. Mekkora a lövedék tömege és kezdeti sebessége? Az ólom fajhője 130 J/(kg K) , $g = 10\text{ m/s}^2$.
56. $2V$ térfogatú hőszigetelő tartályt egy rögzített, hőszigetelő fal oszt két egyforma térfogatú részre. A tartály egyik felében p_1 nyomású, T_1 hőmérsékletű, a másik felében p_2 nyomású, T_2 hőmérsékletű egyatomos gáz van. Mekkora lesz az egyensúlyi nyomás és hőmérséklet, ha kivesszük a falat?
57. Bizonyos mennyiségű He gáz az ábrán látható folyamatot végzi. Mennyi hőt vesz fel a gáz?



58. $2V$ térfogatú hőszigetelő tartályt egy rögzített, hőszigetelő fal oszt két egyforma térfogatú részre. A tartály egyik felében p_1 nyomású, T_1 hőmérsékletű, n_1 anyagmennyiségű He, a másik felében p_2 nyomású, T_2 hőmérsékletű, n_2 anyagmennyiségű H_2 gáz van. Mekkora lesz az egyensúlyi nyomás és hőmérséklet, ha kivesszük a falat?
59. 1 mol egyatomos gázzal 100 J hőt közlünk. A tágulási folyamat során a gáz nyomása arányos a térfogatával. Mennyi munkát végez a gáz és mennyi a belső energia változása?

60. 0.5 mol kétatomos gáz hőközlés hatására tágul, a folyamat közben nyomása arányos a térfogatával. Mennyi a gáz által végzett munka és a közölt hő hányadosa?
61. Függőleges tengelyű, $A = 50 \text{ cm}^2$ alapterületű hengerünkben 0.1 mol egyatomos gáz van, melyet egy könnyen mozgó, súlytalan dugattyú zár el a külvilágtól. A dugattyút egy $D = 1000 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugó kapcsolja az edény aljához. A rugó $T_0 = 273 \text{ K}$ hőmérsékleten nyújtatlan, a külső légnyomás $p_k = 10^5 \text{ Pa}$. Mennyi hőt kell közölnünk a gázzal, hogy hőmérsékletét 260 K -ről 300 K -re emeljük?
62. 1 mólnyi ideális gáz térfogatát m -szeresére növeljük úgy, hogy az állapotváltozás során a gáz nyomására mindvégig érvényes a $p = \alpha / V^2$ összefüggés, ahol α állandó. Mennyi a belső energia változásának és a leadott hőnek az aránya?
63. Ideális gáz nyomásának térfogattól való függése $p(V) = p_0 - aV$, ahol p_0 pozitív, a pedig tetszőleges valós szám. Mekkora a maximális hőmérséklet a folyamat során?
64. Ismeretlen, 1 mol anyagmennyiségű, 450 K hőmérsékletű ideális gáz térfogatát kétszeresére növeljük úgy, hogy nyomása az előző feladathoz hasonlóan térfogata négyzetével fordítottan arányos. A folyamat közben a gáz belső energiája 4677 J -al csökken. Milyen gázzal van szó? Mennyi munkát végez a gáz a tágulás során?
65. Ideális gázt úgy nyomunk össze V_0 -ról V_1 térfogatra, hogy közben a nyomás és térfogat közti kapcsolatra érvényes a $pV^\alpha = \text{állandó}$ összefüggés. Mekkora lehet az α állandó kétatomos gázra, ha a folyamat során a gáz hőt ad le, miközben hőmérséklete emelkedik?
66. Egyatomos ideális gáz az ábrán látható folyamatokat végzi. Az 1-2-3 úton a felvett/leadott hőmennyiségek előjeles összege $\sum Q = 15/2 \cdot p_0 V_0$. Határozzuk meg x értékét!

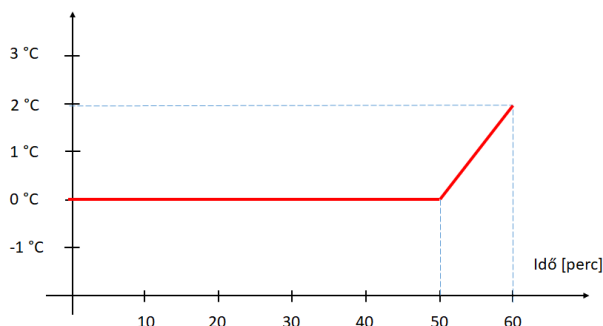


67. Két, egyenként V_0 térfogatú ideális gázt tartalmazó tartályunkat egy elhanyagolható térfogatú cső köti össze. Kezdetben mindkét tartály $T_0 = 300\text{ K}$ hőmérsékletű. Hogyan változik az egyik tartályban levő gáz mennyisége, ha a másik tartály hőmérsékletét $T_1 = 450\text{ K}$ -re emeljük, miközben az első tartály hőmérséklete nem változik?
68. Hány százalékkal változik a gáz nyomása az előző feladatban?
69. Zárt tartályban levő, kezdetben 300 K hőmérsékletű, 105 Pa nyomású kétatomos gázt 1200 K -re melegítünk. A gáz 10% -a disszociál, azaz atomjaira bomlik. Mekkora lesz a végső nyomás, ha kezdetben 1 mol kétatomos gáz volt a tartályban?
70. T_0 hőmérsékletű tartályunkban egyatomos és kétatomos gázok keveréke van. Kezdetben a kétatomos gáz anyagmennyisége kétszerese az egyatomosénak. Az edényt egy olyan porózus membrán választja el a külvilágtól, melyen csak az egyatomos gázok tudnak átjutni. Mekkora hőmérsékleten távozik az összes egyatomos gáz a tartályból? Mekkora hőmérsékleten van a tartályban az egyatomos gáz eredeti mennyiségének már csak 40% -a?

Kalorimetria, halmazállapot-változások

71. $1\text{ kg } 0^\circ\text{C}$ -os jeget teszünk $2\text{ l } 30^\circ\text{C}$ -os vízbe. Mi lesz az állapot az egyensúly beállta után? A víz fajhője $4.18\text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, sűrűsége $1\text{ kg}/\text{dm}^3$, a jég olvadáshője $333.4\text{ kJ}/\text{kg}$.
72. Elhanyagolható hőkapacitású kaloriméterben 100 g jég van. Ráöntünk 150 g , 50°C -os vizet. Mennyi lesz a végső hőmérséklet?
73. 20°C -os laborban álló kaloriméterbe $100\text{ g } 60^\circ\text{C}$ -os vizet és egy 10 g tömegű, 0°C -os jégdarabot teszünk. Az egyensúlyi hőmérséklet 45°C lesz. Mennyi a kaloriméter vízértéke?
74. 2 l vizet melegítünk egy 1500 W -os vízforralóval, melynek hatásfoka 0.8 . Mennyi idő alatt forr fel a víz, ha kezdeti hőmérséklete 25°C ?
75. Melyik esetben változik többet a víz térfogata? Ha 3°C -ról, vagy ha 6°C -ról hűtjük 0°C -ra?

76. Vödörben levő $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os víz-jég keverék tömege 10 kg . A vödört bevisszük a meleg szobába és folyamatosan mérjük a keverék hőmérsékletét. A mérés eredményét az ábrán láthatjuk. Mekkora volt kezdetben a jég tömege? A szükséges adatokat vegyük az 53. feladatból.



77. $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os szobában levő kaloriméterünkben már 1 napja 100 g víz van. Ha a kaloriméterbe 60 g , $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os vizet öntünk, a kialakuló egyensúlyi hőmérséklet $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ lesz. Mennyi a kaloriméter vízértéke?
78. Azonos tömegű, T_1 , T_2 , T_3 hőmérsékletű vízmennyiségeket összeöntünk. Mennyi lesz a kialakuló egyensúlyi hőmérséklet?
79. Oldjuk meg az 78. feladatot n számú, azonos tömegű, azonos fajhőjű folyadéokra!
80. Mi lesz az egyensúlyi hőmérséklet, ha n darab, m_i tömegű, T_i hőmérsékletű, azonos fajhőjű folyadékot összeöntünk? ($i = 1, \dots, n$)
81. Bizonyos mennyiségű energia befektetésével $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os jeget $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra melegítünk. Ezután még 20-szor ugyanennyi energiát kell befektetnünk, hogy az összes jég elolvadjon. Mennyi a jég olvadáshője, ha a fajhője $2.1\text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$?

Megoldások, megoldási útmutatók

Hőmérséklet, hőtágulás

1. Hőmérőnkön az olvadó jég és a forró víz gőzének hőmérséklete közti $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ különbség $b-a$. Egyszerű megfontolásból adódik, hogy

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{t}{100^{\circ}\text{C}} \Rightarrow t = 100^{\circ}\text{C} \frac{c-a}{b-a}$$

2. Az előzőhöz hasonlóan kapható, hogy

$$C = \frac{A \cdot 100 - B \cdot t}{100 - t}$$

3. $t_c = 50^{\circ}\text{C} \cdot \frac{c-a}{b-a}$

4. A fokbeosztások távolságát megkapjuk, ha az $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérséklet-emelkedés hatására létrejövő térfogatváltozást osztjuk a cső keresztmetszetével:
 $\Delta h = 2.037\text{ mm}$

5. A folyadék térfogatváltozása a hőtágulás hatására:

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T,$$

ahol β a térfogati hőtágulási együttható, V_0 pedig a keresett térfogat. Ugyanez a térfogatváltozás megegyezik a kapilláris keresztmetszetének és az emelkedés magasságának (Δh) szorzatával, tehát

$$V_0 \beta \Delta T = \frac{d^2 \pi}{4} \Delta h$$

A feladatban megadott adatokkal $V_0 = 4.76\text{ cm}^3$ adódik.

6. A sín valódi hossza az a méret, amelyre a mérőszalag 24 m -es hossza $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérséklet-emelkedés hatására megnyúlik: $l = 24.0072\text{ m}$
7. Az anyag tömege nem változik, ezért a két hőmérsékleten felírt térfogatból a keresett sűrűség:

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}$$

8. A feladat szövege szerint a relatív térfogatváltozás:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha\Delta T = 0.0015,$$

amiből

$$\Delta T = \frac{0.0015}{3\alpha} = 30.9^\circ\text{C}$$

tehát kb. 51°C -on.

9. A Q hőmennyiség hatására létrejövő hőmérséklet-emelkedés:

$$Q = cm\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{cm},$$

ahol c a vas fajhője, m pedig a tömege. A térfogatváltozás ΔT hőmérsékletváltozás hatására:

$$\Delta V = V_0\beta\Delta T = V_0\beta \frac{Q}{cm} = \frac{V_0}{m} \frac{\beta Q}{c} = \rho_0 \frac{\beta Q}{c},$$

ahol β a térfogati hőtágulási együttható, ρ_0 pedig a test kezdeti sűrűsége. Látható, hogy a térfogatváltozás nem függ a vasdarabok tömegétől.

10. A feladat megoldásához semmiféle számolásra nincs szükség. A V térfogatú, h magasságú folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása:

$$p = \rho gh = \frac{m}{V} g \frac{V}{A} = \frac{mg}{A}$$

A melegítés során mind a térfogat, mind a sűrűség változik, viszont ezek a változások kiegyenlítik egymást. Mivel sem a folyadék tömege, sem az edény alapterülete nem változik, a fentiek miatt az edény alján a nyomás sem változik.

Ha az edény hőtágulását is figyelembe vesszük, akkor a fenti összefüggés nevezője nő az alumínium hőtágulása miatt, így az edény alján mérhető hidrosztatikai nyomás csökken.

11. $\Delta V/V_0 = 0.072\%$

12. A vízbe mártott alumínium gömb súlya megegyezik a rá ható nehézségi erőnek a felhajtóerővel csökkentett értékével:

$$S = mg - F_{\text{fel}} = \rho_{\text{Al}} V_{\text{Al}} g - \rho_{\text{víz}} V_{\text{Al}} g = (\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{víz}}) V_{\text{Al}} g$$

Táblázatból a 20°C -os és 80°C -os víz sűrűsége:

$$\rho_{\text{v}\acute{\text{z}},20} = 998.23 \text{ kg / m}^3$$

$$\rho_{\text{v}\acute{\text{z}},80} = 971.83 \text{ kg / m}^3$$

Az alumínium sűrűségét 20 és 80 °C-on a 18 °C-os sűrűségből kiszámolhatjuk, hiszen tömege változatlan, így:

$$\rho_T = \frac{m}{V_T} = \frac{m}{V_0(1+3\alpha(T-T_0))} = \frac{\rho_0}{(1+3\alpha(T-T_0))}$$

ami alapján

$$\rho_{\text{Al},20} = 2701.61 \text{ kg / m}^3$$

$$\rho_{\text{Al},80} = 2689.99 \text{ kg / m}^3$$

Feltehetjük, hogy a feladatban szereplő sugár a 80 °C-os állapotra vonatkozik, tehát 80 °C-on a golyó súlya:

$$S_{80} = (\rho_{\text{Al},80} - \rho_{\text{v}\acute{\text{z}},80}) \frac{4\pi r_{80}^3}{3} g = 71.970 \text{ N}$$

20 °C-ra hűtve a golyó térfogata is csökken, amit egyszerűbben a sugár lineáris hőtágulásából számolhatunk:

$$r_{20} = r_{80}(1 - \alpha\Delta T) = 0.099856 \text{ m} = 9.9856 \text{ cm}$$

20 °C-on tehát a golyó súlya

$$S_{20} = (\rho_{\text{Al},20} - \rho_{\text{v}\acute{\text{z}},20}) \frac{4\pi r_{20}^3}{3} g = 71.043 \text{ N}$$

A test súlya tehát a 80 °C-os állapotban nagyobb.

13. Melegítés hatására a folyadék tágul, mindkét edényben megemelkedik a vízszint. Mivel azonos térfogatváltozás a jobb oldali edényben magasabb vízszintemelkedést okoz, ezért ott nagyobb lesz az edény alján a hidrosztatikai nyomás, mint a bal oldali edényben. A víz egy része tehát a jobb oldali edényből a bal oldali felé fog elindulni.
14. Az egyes rudakra vonatkozó adatokat A és B indexekkel jelöljük. Írjuk fel az A rúd hosszváltozását:

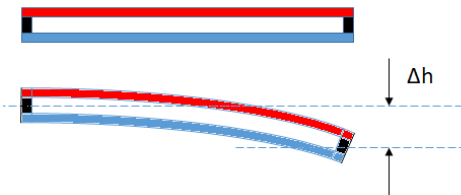
$$\Delta l_A = l_A \alpha_A \Delta T_A = \frac{1}{4} l_B \frac{3}{2} \alpha_B \frac{3}{4} \Delta T_B = \frac{9}{32} l_B \alpha_B \Delta T_B = \frac{9}{32} \Delta l_B$$

Tudjuk, hogy a hosszváltozások összege 2.05 cm , tehát

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B = \Delta l_B \left(1 + \frac{9}{32} \right) = \frac{41}{32} \Delta l_B = 2.05 \text{ cm},$$

amiből $\Delta l_B = 1.6 \text{ cm}$, majd $\Delta l_A = 0.45 \text{ cm}$ adódik.

15. A hőtágulás miatt a rézlemezke hossza nagyobb mértékben változik, mint a vasé, ezért a bimetál körív alakban meggörbül. Felmelegítés után a két lemez egy-egy körívet alkot, melyek sugarai



különbsége 3 mm lesz. Számoljuk ki a lemezek hosszát 500°C hőmérsékleten:

$$l_{Cu} = l_0 (1 + \alpha_{Cu} \Delta T) = 20 \text{ cm} \cdot (1 + 1.62 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C} \times 500^\circ\text{C}) = 20.162 \text{ cm}$$

$$l_{Fe} = l_0 (1 + \alpha_{Fe} \Delta T) = 20 \text{ cm} \cdot (1 + 1.17 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C} \times 500^\circ\text{C}) = 20.117 \text{ cm}$$

Ez a két hossz megfelel egy r_{Cu} és r_{Fe} sugarú kör azonos φ középponti szögéhez tartozó ívhossznak:

$$l_{Cu} = r_{Cu} \cdot \varphi \quad \text{és} \quad l_{Fe} = (r_{Cu} - 0.3 \text{ cm}) \cdot \varphi, \text{ amiből}$$

$$r_{Cu} = 0.3 \text{ cm} \cdot \frac{1 + \alpha_{Cu} \Delta T}{(\alpha_{Cu} - \alpha_{Fe}) \Delta T} = 134.413 \text{ cm}$$

$$r_{Fe} = r_{Cu} - 0.3 \text{ cm} = 134.113 \text{ cm}$$

$$\varphi = \frac{l_{Cu}}{r_{Cu}} = 0.15 \text{ rad}$$

értékek adódnak. Egyszerűen látható, hogy a bimetál végének lehajlása:

$$\Delta h = \frac{r_{Cu} + r_{Fe}}{2} (1 - \cos \varphi) = (r_{Fe} + 0.15 \text{ cm}) (1 - \cos \varphi) \approx 1.5 \text{ cm}$$

16. $\Delta V = 1.0065 \text{ l}$

17. Az összehúzódni igyekvő rudat egy akkora F erővel tudjuk ellensúlyozni, ami ugyanakkora relatív hosszváltozást okoz a rúdban, mint a hőtágulás, de

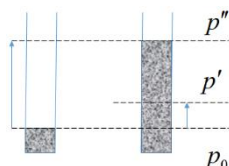
ellentétes irányban. A hőtágulásból és a mechanikai húzásból származó relatív hosszváltozásokat egyenlővé téve:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} \Rightarrow F = YA \cdot \alpha \Delta T = 2400 \text{ N}$$

18. $\Delta T_1 = 111.1 \text{ }^\circ\text{C}$ és $\Delta T_2 = 2070.4 \text{ }^\circ\text{C}$

19. $\Delta n = 9.6$

20. Számoljuk ki azt, amit most pontatlanul tudunk, amikor pedig pontosan tudhattuk volna, nem tudtuk... A folyamat során a nyomás nem változik, csak a hőmérséklet. A higanyszint magassága $0 \text{ }^\circ\text{C}$ -on p_0 , a skála ekkor pontos. Hőtágulás miatt a skála p_0 szintje p' , a higanyszint pedig p'' szintre emelkedik, ez a leolvasott érték. Mi a p' értéket keressük, ami eredetileg a nyomás értékének felelt meg. Írjuk fel ezeket a hőtágulási törvénnyel:



$$p' = p_0 (1 + \alpha_{Cu} \Delta T)$$

$$p'' = p_0 (1 + \beta_{Hg} \Delta T)$$

A második egyenletből $p_0 = \frac{p''}{1 + \beta_{Hg} \Delta T}$, ezt beírva az elsőbe kapjuk, hogy

$$p' = p'' \frac{1 + \alpha_{Cu} \Delta T}{1 + \beta_{Hg} \Delta T} = 763.9 \text{ torr}$$

21. A matematikai inga lengésideje $15 \text{ }^\circ\text{C}$ -on (kis kitérésekre; a periódusidőt T -vel jelöltük, nem tévesztendő össze a hőmérséklettel!):

$$T_{15} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{15}}{g}}, \text{ amiből } l_{15} = 25.33 \text{ cm adódik az acélhuzal hosszára. Mivel a}$$

lengéside 1 s , $15 \text{ }^\circ\text{C}$ -on 86400 lengés ideje felel meg egy napnak.

$0 \text{ }^\circ\text{C}$ -on a lengéside a hőtágulás miatt (a hőmérsékletet most kis t -vel jelölve):

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_{15}(1 - \alpha \Delta t)}{g}} = T_{15} \sqrt{1 - \alpha \Delta t}, \text{ ebből } 86400 \text{ lengés idejére}$$

86392.22365 s-ot kapunk. Ingaóránk tehát $0 \text{ }^\circ\text{C}$ -on 86400-86392.22365 = 7.77635 s-ot *siet*. Hasonlóan kapható, hogy $30 \text{ }^\circ\text{C}$ -on 7.77565 s-ot *késik*.

22. Két pont közti távolság lineárisan nő a hőtágulás miatt, így a tömegközéppont és a felfüggesztési pont közti távolság t hőmérsékleten

$$d_t = d_0 (1 + \alpha t)$$

A forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték definíció szerint az egyes infinitezimális dm tömegek és ezek forgástengelytől való távolságnégyzete szorzatának integrálja, tehát 0°C -on:

$$\theta_0 = \int_V r_0^2 dm$$

A kiterjedt test egyes pontjainak a felfüggesztési ponttól való távolsága szintén lineárisan nő a hőmérséklettel, tehát $r_t = r_0 (1 + \alpha t)$, amiből t hőmérsékleten a tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta_t = \int_V r_t^2 dm = \int_V r_0^2 (1 + \alpha t)^2 dm = (1 + \alpha t)^2 \int_V r_0^2 dm = \theta_0 (1 + \alpha t)^2$$

A fizikai inga lengésideje 0°C -on:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_0}{mgd_0}}$$

ahol d_0 a tömegközéppont és a felfüggesztési pont távolsága, θ_0 pedig a felfüggesztési pontra (forgástengelyre) vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték. A t hőmérsékleten kapott értékeket beírva:

$$T_t = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_t}{mgd_t}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_0 (1 + \alpha t)^2}{mgd_0 (1 + \alpha t)}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_0}{mgd_0}} \sqrt{1 + \alpha t} = T_0 \sqrt{1 + \alpha t}$$

23. Mivel mind a matematikai, mind a fizikai inga lengésideje azonosan változik a hőmérséklettel, így 30°C -on mindkettő *15.43 óra* alatt fog késni *1 s*-ot. A *21. feladat* megoldásából az acélból készült matematikai inga *24 óra* alatt késik majdnem *8 s*-ot.

Ideális gázok állapotváltozásai, I. főtétel

24. Ha lehetséges a folyamat, mennyi a gáz szabadsági foka?
25. $V = 11.76 \text{ dm}^3$
26. $r = 0.2 \text{ m}$
27. Normálállapotban a nyomás $p = 101.325 \text{ kPa}$, a hőmérséklet $T = 273.15 \text{ K}$. Számolásainkban gyakran csak 100 kPa -t és 273 K -t használunk, de most

alkalmazzuk a pontos értékeket. A sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa, a tömeg pedig felírható a mólszámmal (n) és a moláris tömeggel (M):

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$$

Az anyagmennyiséget megkaphatjuk az állapotegyenletből, amiből:

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{M}{V} \frac{pV}{RT} \Rightarrow M = \frac{\rho RT}{p} = 0.084 \text{ kg / mol}$$

28. Az állapotegyenletet felírva a léggömbök kezdő- és végállapotára, azt kapjuk, hogy a lufikban levő He mennyisége a térfogatokkal arányos, tehát

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3$$

A relatív változás

$$\frac{n_2 - n_1}{n_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3 - 1 = -0.33,$$

tehát kb. a gáz harmada távozott a léggömbből.

29. Mélyen a víz alatt a buborékban levő levegő nyomása egyensúlyt tart a rá ható légköri nyomás és a hidrosztatikai nyomás összegével. Tudjuk, hogy 10 m magas vízoszlop nyomása (ρgh) megegyezik a normál légköri nyomással, tehát ilyen mélységben a buborékra ható nyomás kétszerese a vízfelszínen ható légköri nyomásnak.

Jelöljük a vízfelszíni állapotot 1-es, a víz alatti állapotot 2-es indexekkel, így a buborék két állapotára felírva az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_1}{T_1} \frac{4\pi}{3} \frac{d_1^3}{8} = \frac{2p_1}{T_2} \frac{4\pi}{3} r_2^3,$$

amiből a keresett r_2 sugár:

$$r_2 = \frac{d_1}{2} \sqrt[3]{\frac{T_2}{2T_1}} = 1.5 \text{ mm} \cdot \sqrt[3]{\frac{288}{2 \cdot 303}} = 1.17 \text{ mm}$$

30. A bezárt levegő nyomása a külső nyomással és a hidrosztatikai nyomással tart egyensúlyt. Abban az esetben, amikor a cső nyitott vége van felül:

$$p = p_k + \rho gh$$

Amikor a cső nyitott vége alul van, a gáz térfogata másfélszeresére nő. A higany hossza nem változik. Mivel a hőmérséklet állandó, ezért ebben az állapotban a nyomás $2/3$ -a az eredeti nyomásnak, így:

$$\frac{2}{3} p = p_k - \rho gh$$

A két egyenletből a gáz nyomása

$$p = \frac{6}{5} p_k$$

a higanyszál hidrosztatikai nyomása pedig

$$\rho gh = \frac{p_k}{5}$$

Mivel $p_k = 76 \text{ Hgcm}$, ezért a higanyszál hossza $h = 76/5 \text{ cm} = 15.2 \text{ cm}$.

31. Írjuk fel az állapotegyenletet a gáz egyes állapotaira, felhasználva a feladat szövegében említett arányokat! Az első állapotban

$$p_1 V_1 = n_1 R T_1,$$

a második állapotban

$$2 p_1 \frac{3}{2} V_1 = n_1 \frac{V_1}{V_2} R T_2 = \frac{2}{3} n_1 R T_2$$

$$\frac{9}{2} p_1 V_1 = n_1 R T_2$$

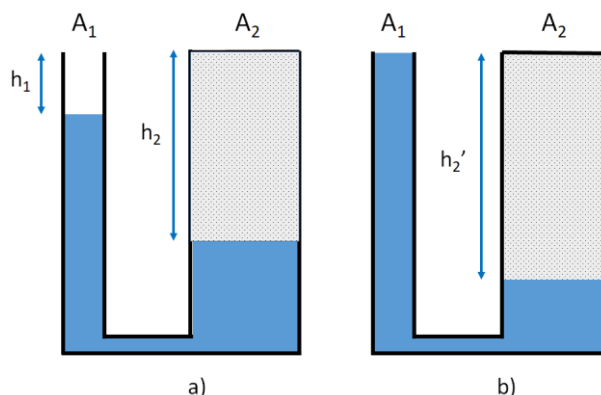
A két állapotra vonatkozó egyenleteket elosztva egymással:

$$T_1 = \frac{2}{9} T_2 = 100 \text{ K}$$

32. A gáz nyomása egyszerűen kiszámolható, hiszen ez egyensúlyt tart a $(h_2 - h_1)$ magasságú higanyoszlop hidrosztatikai nyomása és a külső légnyomás összegével:

$$p_0 = \rho g (h_2 - h_1) + p_k$$

Mivel a Hg gyakorlatilag összenyomhatatlan, a gáz tágulása során a jobb oldali térrészben a Hg térfogatcsökkenése megegyezik a bal oldali csőben a térfogatnövekedéssel. Az *a)* ábra a kezdeti, a *b)* ábra a végállapotot szemlélteti.



Mivel a közlekedőedény szárainak keresztmetszete állandó, a bezárt gáz térfogata arányos a gázoszlop magasságával:

$$V' = V_0 \frac{h_2'}{h_2}$$

Az ábrák jelöléseit használva a maximális térfogatváltozás abban az állapotban van, amikor a bal oldali szárnban a higanyszint eléri a cső tetejét. Ekkor a térfogatváltozás:

$$\Delta V = h_1 A_1 = (h_2' - h_2) A_2,$$

amiből a feladat kiírásában keresett *relatív* térfogatváltozás:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{h_1 A_1}{h_2 A_2}$$

A fentiekből kiszámolható az új higanyszint edény tetejétől mért távolsága is:

$$h_2' = \frac{h_1 A_1 + h_2 A_2}{A_2}$$

A feladat kicsit nehezebb része annak a hőmérsékletnek a meghatározása, amelyen a higanyszint eléri a bal oldali szár tetejét, legyen ez T' , a kezdeti hőmérséklet pedig T_0 . A kezdő- és végállapotban a gázra felírva az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p' V'}{T'}$$

A hőmérsékletek aránya

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{p'}{p_0} \frac{V'}{V_0} = \frac{p'}{p_0} \frac{h_2'}{h_2}$$

A végállapotban a gáz nyomása h_2' magasságú higanyoszloppal és a külső nyomással tart egyensúlyt:

$$p' = p_k + \rho g h_2',$$

a keresett hőmérséklet-arány tehát

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{p_k + \rho g h_2'}{p_k + \rho g (h_2 - h_1)} \frac{h_2'}{h_2}$$

amibe beírva a fentebb kiszámolt h_2' értékét kapjuk, hogy

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{p_k + \rho g \frac{h_1 A_1 + h_2 A_2}{A_2}}{p_k + \rho g (h_2 - h_1)} \cdot \frac{h_1 A_1 + h_2 A_2}{h_2 A_2}$$

Mivel a feladat megoldása során sehol nem használtuk ki, hogy az oxigén kétatomos gáz, a fenti megoldás változtatás nélkül érvényes akkor is, ha a közlekedőedénybe hélium van bezárva.

33. Keverékünk 12 g hélium $= 3 \text{ mol}$ egyatomos és 28 g nitrogén $= 1 \text{ mol}$ kétatomos gázból áll. A belső energia változása a szabadsági fokok számától függ:

$$\Delta E = \frac{f}{2} n R \Delta T$$

Esetünkben

$$\Delta E = \left(\frac{3}{2} n_{\text{He}} + \frac{5}{2} n_{\text{N}_2} \right) R \Delta T = \frac{9+5}{2} R \Delta T = -872.97 \text{ J}$$

34. Legyen a keverékben $n_1 \text{ mol}$ hélium (egyatomos) és $n_2 \text{ mol}$ hidrogén (kétatomos). Jelöljük a kezdő- és végállapothoz tartozó térfogatot és hőmérsékletet rendre az 1-es ill. 2-es indexekkel. A nyomás az egyes gázok parciális nyomásának összege, ami a kezdőállapotra felírt állapotegyenletből:

$$p = p_1 + p_2 = (n_1 + n_2) R \frac{T_1}{V_1}$$

A belső energia teljes megváltozása:

$$\Delta E = \frac{3}{2} n_1 R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} n_2 R (T_2 - T_1) = \frac{3n_1 + 5n_2}{2} R (T_2 - T_1)$$

A tágulás során a gáz által végzett térfogati munka:

$$W_g = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = pV_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

Ide beírva a nyomás előzőleg kiszámolt értékét:

$$W_g = (n_1 + n_2) R (T_2 - T_1)$$

Felhasználva a belső energia változásának és a gáz munkájának adott arányát, kapjuk, hogy

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{7}{3}$$

Amiből azt kaphatjuk, hogy a gázkeverék 70 mol% héliumot és 30 mol% hidrogént tartalmaz.

35. Az első főtétel szerint a belső energia változása megegyezik a rendszerrel közölt hő és a környezet által a rendszeren végzett munka összegével:

$$\Delta E = Q + W = Q - W_g$$

Jelen esetben a gáz végez munkát, tehát a környezet által végzett munka negatív, tehát a belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{3}{2} n R \Delta T = -2500 \text{ J}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta E}{\frac{3}{2} R} = -100.2 \text{ K},$$

tehát a végállapotban a gáz hőmérséklete kb. 400 K lesz.

36. Ha a gázt állandó térfogaton melegítjük, akkor a közölt hő teljes egészében a belső energia növelésére fordítódik, hiszen térfogati munkavégzés nincs. Jelölje f a gáz szabadsági fokainak számát, ekkor állandó térfogaton:

$$Q_1 = \Delta E_1 = \frac{f}{2} n R \Delta T_1 \Rightarrow f = \frac{2Q_1}{n R \Delta T_1}$$

Állandó nyomáson melegítve a gázt a közölt hőmennyiség munkavégzésre és a belső energia növelésére fordítódik:

$$Q_2 = \Delta E_2 + W_{gáz} = \frac{f}{2} n R \Delta T_2 + n R \Delta T_2 = \frac{f+2}{2} n R \Delta T_2$$

A két egyenletet elosztva egymással:

$$\frac{f+2}{2} = \frac{Q_2}{Q_1} \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow f = 3$$

A tartályban tehát egyatomos gáz van, melynek mennyisége bármelyik egyenletből meghatározható:

$$n = \frac{2Q_1}{3R\Delta T_1} = 0.192 \text{ mol}$$

37. A gázt állandó nyomáson melegítve a ΔT hőmérsékletváltozáshoz szükséges hőmennyiség:

$$Q_1 = \Delta E_1 + W_g = \frac{f}{2} nR\Delta T + p\Delta V = \frac{f+2}{2} nR\Delta T,$$

ahol

$$W_g = p\Delta V = nR\Delta T = 100 \text{ J}$$

Állandó térfogaton melegítve a gáz nem végez térfogati munkát, a közölt hő teljes egészében a belső energia növelésére fordítódik:

$$Q_2 = \Delta E_2 = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

A két hőmennyiség összege:

$$Q_1 + Q_2 = (f+1)nR\Delta T = (f+1)W_g,$$

tehát a gáz szabadsági fokainak száma:

$$f = \frac{Q_1 + Q_2}{W_g} - 1 = \frac{600 \text{ J}}{100 \text{ J}} - 1 = 5$$

38. Írjuk fel a kezdő és végállapotra az egyesített gáztörvényt és fejezzük ki a végállapot nyomását:

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} \frac{T_2}{T_1} = p_1 \frac{1}{2} \frac{240}{320} = \frac{3}{8} p_1$$

A gáz által felvett/leadott hőt az I. főtétele alapján határozhatjuk meg. Ehhez szükségünk van a belső energia változására és a gáz által végzett munkára. A belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{5}{2} \left(\frac{3}{8} p_1 \cdot 2V_1 - p_1 V_1 \right) = -\frac{5}{8} p_1 V_1$$

A gáz munkája számértékiekkel megegyezik a p - V diagramon ábrázolt folyamatot jelképező görbe (esetünkben egy egyenes szakasz) alatti területtel, azaz egy trapéz területével (a folyamat egyszerűsége miatt az ábrázolást mellőzzük):

$$W_{gáz} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} \frac{11}{8} p_1 V_1 = \frac{11}{16} p_1 V_1$$

Végül a keresett hőmennyiség:

$$Q = \Delta E + W_{gáz} = -\frac{5}{8} p_1 V_1 + \frac{11}{16} p_1 V_1 = \frac{1}{16} p_1 V_1 = \frac{1}{16} nRT_1 = 166.28 \text{ J}$$

A hőmennyiség pozitív, tehát a folyamat során a gáz *hőt vesz fel*.

39. Az 1-es folyamat izobár, tehát a *gáz munkája*:

$$W_{g,1} = p\Delta V = R(T_2 - T_1)$$

Egyatomos gáz belső energiájának változása:

$$\Delta E_1 = \frac{3}{2} R(T_2 - T_1),$$

tehát az első főtétel alapján

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta T} = \frac{\Delta E_1 + W_{g,1}}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{5}{2} R(T_2 - T_1)}{T_2 - T_1} = \frac{5}{2} R$$

A 2-es folyamat közben a *gáz által végzett munka* a p - V diagramon számértékiekkel a grafikon alatti területtel egyenlő (esetünkben egy trapéz területe):

$$W_{g,2} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_1 V_2 - p_1 V_1 + p_2 V_2 - p_2 V_1)$$

Itt használjuk ki, hogy a 2-es folyamat során $p/V = \text{állandó}$, azaz $p_1 V_2 = p_2 V_1$,
tehát

$$W_{g,2} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{2} = \frac{R}{2} (T_2 - T_1)$$

Mivel a belső energia változása csak a hőmérsékletváltozástól függ, ezért az megegyezik a feladat első részében kapott eredménnyel:

$$\Delta E_2 = \frac{3}{2} R(T_2 - T_1)$$

A folyamat során a gáz

$$Q_2 = \Delta E_2 + W_{g,2} = 2R(T_2 - T_1)$$

hőt vesz fel, amiből a folyamatra vonatkozó mólhő:

$$C_2 = \frac{Q_2}{\Delta T} = 2R$$

40. A tartály térfogata állandó, tehát a gáz nyomásának és hőmérsékletének hányadosa is állandó, $p/T = \text{állandó}$. Mivel térfogatváltozás nincs, a melegítés során a fűtőszál által a gázzal közölt hőmennyiség csak a gáz belső energiáját növeli:

$$Q = \Delta E \Rightarrow \eta Pt = \frac{3}{2} nR \Delta T$$

amiből a gáz hőmérsékletváltozása:

$$\Delta T = \frac{2\eta Pt}{3nR} = \frac{2\eta Pt}{3p_0 V_0} T_0$$

A melegítés végén a gáz hőmérséklete

$$T' = T_0 \left(1 + \frac{2\eta Pt}{3p_0 V_0} \right) = 3.8 \cdot T_0 = 1113.4 \text{ K} \approx 840^\circ \text{C},$$

nyomása pedig

$$p' = p_0 \frac{T'}{T_0} = p_0 \left(1 + \frac{2\eta Pt}{3p_0 V_0} \right) = 3.8 \cdot p_0 = 3.8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Ha a tartályban hélium helyett nitrogén van, akkor a belső energia kifejezésében a szabadsági fokok száma 5, tehát a megfelelő hőmérséklet- és nyomásértékek:

$$T' = T_0 \left(1 + \frac{2\eta Pt}{5p_0 V_0} \right) = 2.68 \cdot T_0 = 785.24 \text{ K} \approx 512.24^\circ \text{C}$$

$$p' = p_0 \frac{T'}{T_0} = p_0 \left(1 + \frac{2\eta Pt}{5p_0 V_0} \right) = 2.68 \cdot p_0 = 2.68 \times 10^5 \text{ Pa}$$

41. Kezdetben a gáz nyomása a dugattyú súlyából származó nyomással és a külső légnyomással tart egyensúlyt:

$$p_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = p_k + \frac{mg}{A} \Rightarrow n = \frac{V_0}{RT_0} \left(p_k + \frac{mg}{A} \right)$$

A melegítés során a gáz nyomása nem változik. Feltételezve, hogy az állapotváltozás kvázisztatikus, – azaz a gáz nyomása minden pillanatban a

külső nyomást és a dugattyúra ható nehézségi erőből származó nyomást kompenzálja – a folyamat izobár, melyre $V/T = \text{állandó}$.

$T' = 2T_0$ hőmérsékleten tehát a térfogat is kétszeresére nő, azaz a dugattyú magassága az eredeti magasság értékével növekszik.

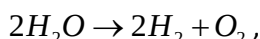
42. $1 \text{ torr} = 101325 \text{ Pa} / 760 = 133.32 \text{ Pa}$. Az egyes gázok parciális nyomásából megkaphatjuk azok anyagmennyiségét, ezek aránya megegyezik a parciális nyomások arányával:

$$p_{H_2} : p_{O_2} : p_{He} = n_{H_2} : n_{O_2} : n_{He} = 5 : 1 : 2$$

A tömegarányok az anyagmennyiségek és az egyes moláris tömegek szorzataként adódnak:

$$m_{H_2} : m_{O_2} : m_{He} = n_{H_2} M_{H_2} : n_{O_2} M_{O_2} : n_{He} M_{He} = 5 \cdot 2 : 1 \cdot 16 : 2 \cdot 4 = 5 : 8 : 4$$

43. Az elektrolízis során a következő kémiai reakció játszódik le:



tehát 2 mol vízből keletkezik 2 mol hidrogén és 1 mol oxigén. A víz moláris tömege 18 g/mol , sűrűségét az egyszerűség kedvéért vegyük 1 kg/dm^3 -nek. Így 1 l víz anyagmennyisége

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1000 \text{ g}}{18 \text{ g/mol}}$$

A szobában a nyomásnövekedés megegyezik a keletkező gázok parciális nyomásának összegével. Ha $n \text{ mol}$ vízből keletkezik $n \text{ mol}$ hidrogén és $n/2 \text{ mol}$ oxigén, akkor a parciális nyomások összege:

$$\Delta p = p_{H_2} + p_{O_2} = \frac{\left(n + \frac{n}{2}\right)RT}{V} = \frac{3nRT}{2V} = \dots = 5.075 \text{ kPa}$$

44. Legyen n_1 az egyatomos argon, n_2 a kétatomos hidrogén anyagmennyisége. Az első főtételből

$$Q - W_{gáz} = \Delta U = \frac{3}{2} n_1 R \Delta T + \frac{5}{2} n_2 R \Delta T, \text{ az állapotegyenletből}$$

$W_{gáz} = p \Delta V = (n_1 + n_2) R \Delta T$ adódik. Utóbbiból kifejezve $R \Delta T$ -t és visszaírva az előzőbe:

$$\Delta U = \frac{3}{2} \frac{n_1}{n_1 + n_2} W_{gáz} + \frac{5}{2} \frac{n_2}{n_1 + n_2} W_{gáz} = W_{gáz} \frac{3n_1 + 5n_2}{2(n_1 + n_2)}, \text{ amiből}$$

$Q = \frac{5n_1 + 7n_2}{2(n_1 + n_2)} W_g$ adódik. A feladatban megadott értékeket felhasználva

$$\frac{n_H}{n_{Ar}} = 3$$

45. Az állapotegyenletből adódóan a T - V diagramon a nyomás egyenesen arányos egy, az origóból induló egyenes meredekségével. A körfolyamat során a legnagyobb nyomás a kör legmeredekebb érintőjének, a legkisebb nyomás pedig a leglaposabb érintőnek felel meg, a folyamat során a két érintő közt a folyamat irányának megfelelően csökken, ill. nő a nyomás.

46. A levegő hőmérséklete 356.9 K , nyomása $1.212 \times 10^6\text{ Pa}$.

47. Izoterm állapotváltozásra érvényes a Boyle – Mariotte-törvény, azaz

$$pV = \text{állandó},$$

amiből

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{3} = 200\text{ kPa}$$

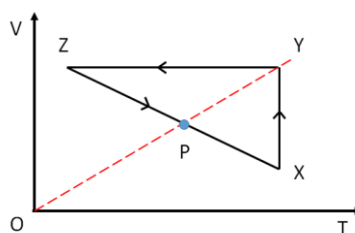
Adiabatikus állapotváltozásra a Poisson-féle egyenletek érvényesek, esetünkben a legcélravezetőbb a

$$pV^\kappa = \text{állandó}$$

egyenlet használata, ahol $\kappa = C_p / C_v$ az adiabatikus kitevő, amely kétatomos gázra $7/5$. Ezt felhasználva

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa = \frac{p_1}{3^{7/5}} = 128.88\text{ kPa}$$

48. A V - T diagramon az azonos nyomású állapotok egy origóból induló egyenesen helyezkednek el, hiszen az állapotegyenletből $V/T = nR/p$, azaz a nyomás fordítottan arányos az egyenes meredekségével. A keresett P pont tehát az OY és ZX egyenesek metszéspontja lesz, ahogy azt az ábrán láthatjuk.



Az OY egyenes egyenlete

$$V = T \cdot \frac{V_Z}{T_X}$$

a ZX egyenesé pedig

$$V = V_Z + \frac{V_X - V_Z}{T_X - T_Z} (T - T_Z)$$

A metszéspontban a T_P hőmérséklet:

$$T_P = T_X \cdot \frac{T_X V_Z - T_Z V_X}{T_X (2V_Z - V_X) - T_Z V_Z} = 304.5 \text{ K}$$

49. Az AB szakasz adiabatikus tágulás, melyre $pV^\kappa = \text{állandó}$, ahol $\kappa = 5/3$ az egyatomos gázra vonatkozó adiabatikus kitevő. Ez alapján a B állapotban a nyomás

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\kappa = \frac{p_A}{3^\kappa} = 40.06 \text{ kPa}$$

Az állapotegyenlet segítségével levezethető a másik Poisson-összefüggés, mely szerint $TV^{\kappa-1} = \text{állandó}$, tehát a B állapotban a hőmérséklet

$$T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\kappa-1} = \frac{T_A}{3^{\kappa-1}} = T_A \cdot 3^{1-\kappa}$$

Ezek után már vizsgálhatjuk a BC izochor szakaszt, melyre a $p/T = \text{állandó}$ összefüggés érvényes. Az A és C pontok egy izotermán vannak, tehát $T_C = T_A$.

A C pontban a nyomás

$$p_C = p_B \frac{T_C}{T_B} = \frac{p_A}{3^\kappa} \cdot \frac{T_A}{T_B} = \frac{p_A}{3^\kappa} 3^{\kappa-1} = \frac{p_A}{3} = 83.33 \text{ kPa}$$

Most nézzük az egyes szakaszokon történő hőfelvételt/leadást és a munkát. Az AB folyamat adiabatikus, hőfelvétel és hőleadás nem történik, a gáz munkáját a belső energia csökkenése fedezi:

$$\Delta E = W = -W_{\text{gáz}}$$

A belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{3}{2} nR (T_B - T_A) = \frac{3}{2} nRT_A (3^{1-\kappa} - 1) = \frac{3}{2} p_A V_A (3^{1-\kappa} - 1) = -W_{\text{gáz}}$$

A BC szakasz izochor, munkavégzés nem történik. A gáz hőmérséklete emelkedik, tehát *hőfelvétel* történik, amely teljes egészében a gáz belső energiáját növeli:

$$Q = \Delta E = \frac{3}{2} nR(T_A - T_B) = \frac{3}{2} nRT_A(1 - 3^{1-\kappa}) = \frac{3}{2} p_A V_A(1 - 3^{1-\kappa})$$

Az izoterm CA folyamat közben a belső energia nem változik, így az első főtétel szerint a gáz által *leadott hő* megegyezik a környezet által a gázon végzett munkával:

$$-Q = W = -\int_{V_2}^{V_1} p dV = -nRT_A \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = p_A V_A \ln \frac{V_2}{V_1} = p_A V_A \ln 3$$

Körfolyamatról lévén szó, a belső energia változásainak összege zérus. A gáz által végzett munka megegyezik az AB szakaszon végzett munkával:

$$W_{gáz} = \frac{3}{2} p_A V_A(1 - 3^{1-\kappa}) = 194.72 \text{ kJ} ,$$

a gáz által felvett hőmennyiség pedig a BC szakaszon felvett hő, ami ugyanennyi.

50. Az AB szakasz izoterm tágulás, a gáz által felvett hő fedezi a gáz által végzett munkát, $Q_1 = W_g$. A BC szakasz izochor, munkavégzés nem történik, és mivel a hőmérséklet csökken, a gáz hőt ad le:

$$Q_2 = \frac{3}{2} nR\Delta T < 0$$

A CA szakasz adiabatikus, tehát $Q = 0$.

A hatásfok:

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{3}{2} \frac{R|\Delta T|}{W_g}$$

amiből a körfolyamat közben végzett munka:

$$W_g = \frac{3R|\Delta T|}{2(1-\eta)}$$

51. Legyen az oxigén kezdeti hőmérséklete és nyomása T_0 ill. p_0 , a gáz állapotjelzői a fedő megemelkedésének pillanatában pedig T_1 és p_1 . Mivel a fedő megemelkedéséig a térfogat állandó, ezért

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}$$

A feladat adataival a kísérlet végén a gáz nyomása kétszerese az eredeti nyomásnak. A végső nyomás kiszámolható, hiszen ekkor a gáz nyomása pontosan megegyezik a légköri nyomás (10^5 Pa), ill. a fedő súlyából és a külső nyomóerőből származó nyomások összegével:

$$p_1 = p_k + \frac{F + Mg}{A} = p_k + \frac{h}{V}(F + Mg)$$

A megadott adatokkal $p_1 = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$, tehát kezdetben a nyomás $p_0 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$. A gáz sűrűsége légköri nyomásra van megadva, de változatlan egyéb állapotjelzők mellett nyilván 2-szer akkora nyomáshoz kétszer akkora sűrűség tartozik, tehát az oxigén tömege:

$$m = 2\rho V = 2.86 \text{ kg} / \text{m}^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 57.2 \text{ g}$$

52. Az 12 szakaszon $p = aV$, az állapotegyenletből ez alapján kaphatjuk, hogy a hőmérsékletek aránya:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2$$

Az 12 szakaszon a belső energia változása:

$$\Delta E_{12} = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} nRT_1 \frac{V_2^2 - V_1^2}{V_1^2}$$

A gáz által végzett munka:

$$W_g = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{a}{2} (V_2^2 - V_1^2),$$

tehát az 12 szakaszon felvett hőmennyiség:

$$Q_{12} = \Delta E_{12} + W_g = \dots = 2a(V_2^2 - V_1^2)$$

A 23 szakaszon nincs munkavégzés és a gáz hőt ad le, tehát ez a szakasz a határfok szempontjából érdektelen. A 3-as állapotban a gáz hőmérséklete:

$$T_3 = T_2 \frac{p_1}{p_2} = T_2 \frac{aV_1}{aV_2} = T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \frac{V_1}{V_2} = T_1 \frac{V_2}{V_1}$$

A 31 szakaszon szintén hőleadás történik. A körfolyamat során végzett hasznos munka a gáz munkája és a környezetnek a gázon végzett munkájának a különbsége, mely számértékileg az 123 háromszög területével egyezik meg:

$$W_h = W_g - W_{31} = \frac{a}{2}(V_2^2 - V_1^2) - p_1(V_2 - V_1) = \dots = \frac{a}{2}(V_2 - V_1)^2$$

A körfolyamat hatásfoka a hasznos munka és a felvett hőmennyiség hányadosa:

$$\eta = \frac{W_h}{Q_{12}} = \frac{\frac{a}{2}(V_2 - V_1)^2}{2a(V_2^2 - V_1^2)} = \frac{1}{4} \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

53. Nézzük először az 1-2-4-1 útvonalat. Az 12 szakaszon a gáz tágul, felvesz Q_1 hőt. A 24 szakaszon hőleadás történik, legyen ennek mértéke Q_2 . A 41 szakaszon ismét hőt vesz fel a gáz, legyen ez Q_3 . A körfolyamat során a hasznos munka a görbe (az 124 háromszög) által bezárt terület, jelöljük ezt W_1 -gyel. A körfolyamat hatásfoka:

$$\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1 + Q_3} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1 + Q_3},$$

amiből

$$|Q_2| = (1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)$$

Tekintsük most a 2-3-4-2 körfolyamatot! A 23 szakaszon legyen Q_4 , a 34 szakaszon Q_5 mértékű hőleadás. A 42 szakaszon a gáz hőt vesz fel, ami ugyanakkora, mint az előző körfolyamatban Q_2 , de ellentétes előjelű. A körfolyamat során végzett hasznos munkát jelöljük W_2 -vel, ekkor a hatásfokra felírhatjuk, hogy

$$\eta_2 = \frac{W_2}{|Q_2|} = \frac{W_2}{(1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)}$$

A teljes 1-2-3-4 útvonalon a hasznos munka a trapéz által körbezárt terület, ami az előzőek alapján $W_1 + W_2$. Hőfelvétel szintén csak ott történik, ahol az 1-2-4-1 körfolyamatban, tehát a felvett hőmennyiség $Q_1 + Q_3$. A körfolyamat hatásfoka:

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1 + Q_3} = \frac{\eta_1(Q_1 + Q_3) + \eta_2(1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)}{Q_1 + Q_3},$$

tehát

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2$$

54. Az 12 és 34 szakaszok egy-egy origóból induló egyenesen vannak, tehát itt a nyomás állandó, hiszen az állapotegyenletből

$$p = nR \frac{T}{V},$$

amiből az is látszik, hogy az ábrán p_1 -gyel jelölt, meredekebb egyenesen kisebb a nyomás, mint a p_2 -n. A következőkben meghatározzuk az egyes pontokhoz tartozó, hiányzó állapotváltozók értékét, majd ábrázoljuk a körfolyamatot a p - V diagramon. Az 1-es állapot állapotváltozóit vesszük referenciának.

Az 12 szakasz tehát izobár, melyre

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_1}{2}$$

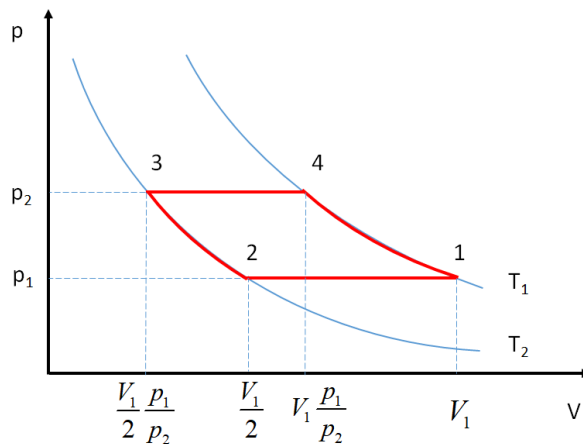
A 23 szakasz izoterm:

$$p_1 V_2 = p_2 V_3 \Rightarrow V_3 = V_2 \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{2} \frac{p_1}{p_2}$$

A 34 szakasz ismét izobár p_2 nyomáson:

$$\frac{V_3}{T_2} = \frac{V_4}{T_1} \Rightarrow V_4 = V_3 \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{2} \frac{p_1}{p_2} \cdot 2 = V_1 \frac{p_1}{p_2}$$

Ismertek tehát a gáz állapotváltozóit minden pontban, ábrázolhatjuk a körfolyamatot. A p_1/p_2 arányról csak azt tudjuk, hogy kisebb, mint 1. A körfolyamat a fentiek alapján a p - V diagramon az alábbi ábrán látható:



55. Tekintsük át a folyamatot lépésről-lépésre! Az m tömegű, v_0 sebességű ólomlövedék rugalmatlanul ütközik a fonálon függő M tömegű, eredetileg nyugalomban levő nagy golyóval, belefűródik, majd közös v kezdősebességgel tovább mennek, ahogy az inga kilendül. Az ütközésre érvényes az impulzusmegmaradás törvénye:

$$mv_0 = (m + M)v$$

A most már $m+M$ tömegű inga kilendül, a v kezdősebességből származó kinetikai energiája a maximális szögű kitérésnél teljesen helyzeti energiává alakul. Könnyű belátni, hogy az α szögű maximális kitérésnél

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gl(1 - \cos \alpha), \text{ amiből } v^2 = 2gl(1 - \cos \alpha).$$

A rugalmatlan ütközés előtti és utáni mozgási energia különbsége az a hő, ami az $m+M$ tömegű ólomgolyót ΔT -vel felmelegíti:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)v^2 = c(m + M)\Delta T$$

Ennek az egyenletnek egy egyszerű megoldási módja, ha v^2 helyére beírjuk a fentebb kapott összefüggést, valamint mindkét oldalt osztjuk $(m+M)$ -mel:

$$\frac{1}{2} \frac{m}{m + M} v_0^2 - gl(1 - \cos \alpha) = c\Delta T$$

A bal oldal első tagját egyszerűen felírhatjuk:, ha észrevesszük, hogy az első egyenlet négyzetre emelésével

$$\frac{1}{2} \frac{m}{m + M} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{m + M} \left(\frac{m + M}{m} \right)^2 v^2 = \frac{m + M}{m} gl(1 - \cos \alpha), \text{ tehát}$$

$$\left(\frac{m + M}{m} - 1 \right) gl(1 - \cos \alpha) = \frac{M}{m} gl(1 - \cos \alpha) = c\Delta T, \text{ amiből}$$

$$m = \frac{Mgl(1 - \cos \alpha)}{c\Delta T} = 5g \text{ és}$$

$$v_0 = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 500 \text{ m/s}$$

56. Ha kivesszük a két gázt elválasztó hőszigetelő falat, a nagyobb sebességű (magasabb hőmérsékletű) molekulák az ütközések során energiát adnak át az alacsonyabb hőmérsékletűeknek egészen addig, amíg be nem áll a termikus egyensúly. Mivel a tartály hőszigetelt, energiacsere csak a két gáz közt jöhet létre. A gázkeverék hőmérséklete abból határozható meg, hogy a melegebb gáz belső energiájának csökkenése meg kell egyezzen a hidegebb gáz belső energiájának növekedésével. Jelöljük a kialakuló közös hőmérsékletet T -vel és tegyük fel, hogy $T_2 > T_1$. Ekkor a belső energiák változása:

$$\frac{3}{2} n_1 R (T - T_1) = \frac{3}{2} n_2 R (T_2 - T)$$

amiből az egyensúlyi hőmérséklet:

$$T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$$

A nyomást vagy a parciális nyomások összegéből, vagy az egyensúlyi állapotra alkalmazott állapotegyenletből számolhatjuk ki. Tekintsük a végállapotra felírt állapotegyenletet:

$$p = \frac{(n_1 + n_2) RT}{2V} = \frac{RT}{2V} \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{T} = \dots = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

ahol a köztes lépéseknél felhasználjuk az eredeti állapotra vonatkozó állapotegyenletből kapható

$$n_i T_i = \frac{p_i V}{R}$$

összefüggéseket.

57. A gáz által felvett hőmennyiséget az I. főtételből számíthatjuk ki. Ehhez ismernünk kell a gáz belső energiájának a változását és a gáz által végzett térfogati munkát, melyeket egyszerűen megkaphatunk. A kezdő és végállapotra felírhatjuk az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

amiből a második állapotbeli hőmérséklet

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1},$$

tehát a hőmérsékletváltozás:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_1 \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{p_1 V_1}$$

A He egyatomos gáz, szabadsági fokainak száma 3, tehát a belső energia megváltozása:

$$\Delta E = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} n R T_1 \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{p_1 V_1} = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

Itt felhasználtuk a kezdőállapotra felírt állapotegyenlet is. A gáz által végzett térfogati munkát (W_g) a p - V diagramon a görbe alatti terület szolgáltatja, ami jelen esetben egy trapéz területének a kiszámítására redukálódik:

$$W_g = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{1}{2} (p_1 V_2 - p_2 V_1)$$

A belső energia megváltozása és a gáz munkája ismeretében most már kiszámíthatjuk a felvett hőmennyiséget:

$$Q = \Delta E + W_g = 2(p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{1}{2} (p_1 V_2 - p_2 V_1)$$

58. Most is, mint a 44. feladatnál, feltehetjük, hogy $T_2 > T_1$. Az energiaváltozások egyenlőségéből a közös hőmérséklet most

$$T = \frac{3n_1 T_1 + 5n_2 T_2}{3n_1 + 5n_2}$$

A közös nyomást szintén a végső állapotra vonatkozó állapotegyenletből kaphatjuk meg:

$$p = \frac{n_1 + n_2}{3n_1 + 5n_2} \cdot \frac{3p_1 + 5p_2}{2}$$

59. Legyen a nyomás és a térfogat közti arányossági tényező a , azaz a gáz minden állapotára érvényes a $p = aV$ összefüggés. Az egyesített gáztörvényt felírva a gáz kezdő- és végállapotára:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2$$

A folyamat során a belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} nRT_1 \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 - 1 \right) = \frac{3}{2} a(V_2^2 - V_1^2)$$

A gáz által végzett térfogati munka:

$$W_g = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{a}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

A gáz által felvett 100 J hőmennyiség tehát $3:1$ arányban oszlik meg a belső energia változása és a gáz által végzett munka közt, így $\Delta E = 75 \text{ J}$, a munka pedig $W_g = 25 \text{ J}$.

60. Legyen a folyamat során $p = aV$, ekkor az állapotegyenlet a kezdeti állapotban:

$$aV_1^2 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{a}{nR} V_1^2,$$

a végállapotban pedig

$$aV_2^2 = nRT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{a}{nR} V_2^2$$

A folyamat során a belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} nR \frac{a}{nR} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{5a}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

A gáz által a tágulás során végzett munka:

$$W_g = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{a}{2} (V_2 + V_1)(V_2 - V_1) = \frac{a}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

A keresett hányados az első főtételből kapható:

$$\frac{W_g}{Q} = \frac{W_g}{\Delta E + W_g} = \dots = \frac{1}{6}$$

61. Tudjuk, hogy a rugó $T_0 = 273 \text{ K}$ -en nyújtatlan, ekkor, mivel a dugattyú súlytalan, a gáz nyomása megegyezik a külső nyomással. Az állapotegyenletből meghatározható a rugó nyújtatlan hossza:

$$l_0 = \frac{nRT_0}{p_k A} = 45.4 \text{ cm}$$

$T_1 = 260 \text{ K}$ -en a gáz nyomása a külső nyomásnál kisebb, térfogata csökken, ezáltal összenyomja a rugót, ami egy felfele ható nyomást fejt ki a dugattyúra. Legyen ezen a hőmérsékleten a gáz nyomása p_1 , a gázoszlop magassága (ami egyben a rugó hossza is) pedig l_1 . A gáz nyomása és a rugóerőből származó

nyomás tart egyensúlyt a légköri nyomással. A gáz nyomását ismét az állapotegyenletből kaphatjuk meg:

$$p_1 = \frac{nRT_1}{Al_1} = p_k + \frac{D(l_1 - l_0)}{A}$$

Ez egy l_1 -ben másodfokú egyenletre vezet:

$$l_1^2 + l_1 \left(\frac{p_k A}{D} - l_0 \right) - \frac{nRT_1}{D} = 0,$$

melynek egyetlen fizikailag értelmes megoldása $l_1 = 44.25 \text{ cm}$.

$T_2 = 300 \text{ K}$ -en legyen a rugó hossza l_2 . A gáz nyomásának meghatározására ismét az állapotegyenletet használjuk:

$$p_2 = \frac{nRT_2}{Al_2} = p_k + \frac{D(l_2 - l_0)}{A}$$

Egyenletünk ugyanúgy néz ki, mint az alacsonyabb hőmérséklet esetén. Azt, hogy a rugóerőből származó nyomás a légköri nyomást vagy a gáz nyomását „segíti”, a rugó hosszváltozásának iránya befolyásolja. Az l_2 -re vonatkozó másodfokú egyenlet:

$$l_2^2 + l_2 \left(\frac{p_k A}{D} - l_0 \right) - \frac{nRT_2}{D} = 0,$$

melynek megoldása $l_2 = 47.69 \text{ cm}$.

A folyamat során felvett hőmennyiséget az első főtételből számolhatjuk ki. A belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{3}{2} nR \Delta T = 49.88 \text{ J}$$

Mivel a folyamat során a gáz nyomása egyenesen arányos a térfogattal, ezért a gáz által a tágulás során végzett munka:

$$W_g = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \dots = \frac{nR}{2} (l_2 - l_1) \left(\frac{T_1}{l_1} + \frac{T_2}{l_2} \right) = 17.4 \text{ J}$$

A folyamathoz szükséges hőmennyiség tehát:

$$Q = \Delta E + W_g = 67.28 \text{ J}$$

62. Legyenek a kezdeti állapotban a gáz állapotjelzői p_0 , V_0 , T_0 , a végállapotban pedig p_1 , V_1 , T_1 , a gáz szabadsági foka f . A végállapotban a gáz nyomása:

$$p_1 = \frac{\alpha}{V_1^2} = \frac{\alpha}{(mV_0)^2} = \frac{p_0}{m^2},$$

amiből a végső hőmérséklet az egyesített gáztörvény alapján most már meghatározható:

$$T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = \frac{T_0}{m}$$

A belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{f}{2} R (T_1 - T_0) = \frac{f}{2} R T_0 \left(\frac{1}{m} - 1 \right) < 0$$

A gáz által a tágulás során végzett térfogati munkát a következőképpen kapjuk:

$$W_g = \int_{V_0}^{V_1} p dV = \alpha \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^2} dV = \dots = \frac{\alpha}{V_0} \left(1 - \frac{1}{m} \right)$$

A gáz nyomására érvényes kifejezés és az állapotegyenlet alapján:

$$\frac{\alpha}{V_0} = \frac{\alpha}{V_0^2} V_0 = p_0 V_0 = R T_0,$$

tehát

$$W_g = R T_0 \left(1 - \frac{1}{m} \right)$$

A gáz által leadott hőmennyiséget az I. főtétel alapján számíthatjuk ki:

$$Q = \Delta E + W_g = R T_0 \left[\frac{f}{2} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right] = R T_0 \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{f}{2} - 1 \right) < 0$$

A keresett arány tehát:

$$\frac{\Delta E}{Q} = \frac{\frac{f}{2}}{\frac{f}{2} - 1} = \frac{f}{f - 2},$$

ami nem függ a tágulás mértékétől, csakis a gáz anyagi minőségére jellemző.

63. A feladatra két megoldást is adunk, hogy lássuk, nem mindig a „brute force” módszer a célravezető. Kezdjük a bonyolultabb megoldással.

1. megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy a különböző értékeire milyen megoldások lehetségesek! Ha $a \leq 0$, akkor a térfogat növelésével egyenesünk végtelen

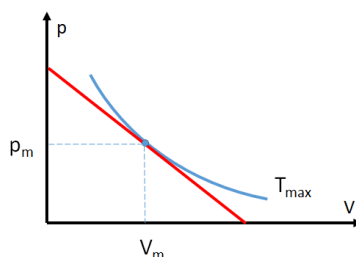
számú hőmérséklethez tartozó hiperbolát metsz, tehát elvileg bármekkora hőmérséklet lehetséges. Így a csak pozitív valós szám lehet.

A feladatunk annak a pontnak a megtalálása, ami egy adott egyenes és egy izoterma (hiperbola) érintési pontja. Legyenek az egyenes és a hiperbola egyenletei rendre:

$$p_1(V) = p_0 - aV$$

$$p_2(V) = \frac{nRT}{V} = \frac{c}{V}$$

A második egyenlet a hőmérsékletet, mint paramétert tartalmazza, tehát egy hiperbolaseregbeől kell kiválasztanunk a nekünk megfelelőt. A mellékelt ábrán láthatjuk a keresett megoldást. A T_{max} hőmérsékletű hiperbola (kék) a keresett V_m térfogatértéknél érinti a feladatban megadott egyenest (piros). Ennek a feltétele, hogy az adott érintési pontban



megadott egyenest (piros). Ennek a feltétele, hogy az adott érintési pontban (V_m, p_m) mind a görbék meredeksége, mind a függvényértékek megegyezzenek:

$$a = \frac{c}{V_m^2}$$

$$p_0 - aV_m = \frac{c}{V_m}$$

Az elsőből:

$$c = aV_m^2,$$

ezt beírva a második egyenletbe kapjuk, hogy az a térfogat, ahol a hőmérséklet maximális:

$$V_m = \frac{p_0}{2a}$$

Ennél a térfogatnál a nyomás:

$$p_m = p_0 - aV_m = p_0 - a \frac{p_0}{2a} = \frac{p_0}{2}$$

A maximális hőmérséklet ezek után az állapotegyenletből kapható:

$$T_{\max} = \frac{p_m V_m}{nR} = \frac{1}{nR} \frac{p_0}{2} \frac{p_0}{2a} = \frac{p_0^2}{4anR}$$

2. megoldás: Célszerű kifejezni az állapotegyenletből a hőmérsékletet:

$$T(V) = \frac{p(V) \cdot V}{nR} = \frac{(p_0 - aV)V}{nR}$$

Ez $T(V)$ -re egy V -ben másodfokú egyenletet eredményez, melynek zérushelyei $V = 0$ és $V = p_0/a$. Ha a másodfokú egyenlet főegyütthatója pozitív, akkor csak minimumot kapunk, tehát maximális hőmérséklet létezésének feltétele ismét csak az $a > 0$. Ebben az esetben a maximum a két zérushely közt „félúton” van, azaz

$$V_m = \frac{p_0}{2a},$$

amiből az előző megoldás alapján kiszámolható a maximális hőmérséklet is.

64. Az egyesített gáztörvényből és a gáz nyomására vonatkozó inverz négyzetes összefüggésből megkaphatjuk a gáz hőmérsékletét a végállapotban:

$$T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \dots = \frac{T_0}{2}$$

A belső energia megváltozása:

$$\Delta E = \frac{f}{2} nR \Delta T = -\frac{f}{4} nRT_0,$$

amiből megkapható a gáz szabadsági fokainak száma:

$$f = \frac{4|\Delta E|}{nRT_0} = 5,$$

tehát a folyamatot *kétatomos* gázzal végezzük. Mivel a gáz a folyamat során lehűl, belső energiájának változása negatív, emiatt írtunk a fenti képletben abszolút értéket. Számértékileg a gáz munkája definíció szerint a folyamatot reprezentáló görbe alatti terület:

$$W_g = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{\alpha}{V^2} dV = \dots = \frac{\alpha}{2V_0}$$

A kezdőállapotra érvényes

$$p_0 = \frac{\alpha}{V_0^2}$$

összefüggésből kaphatjuk, hogy

$$W_g = \frac{\alpha}{2V_0} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{V_0^2} V_0 = \frac{1}{2} p_0 V_0 = \frac{1}{2} nRT_0 = 1870 \text{ J}$$

65. Legyen a folyamat során $pV^\alpha = c$, ahol c állandó. A kompresszió során a környezet által a gázon végzett munka:

$$W = - \int_{V_0}^{V_1} p dV = -c \int_{V_0}^{V_1} V^{-\alpha} dV = \frac{c}{\alpha-1} (V_1^{1-\alpha} - V_0^{1-\alpha})$$

Bár ebben a feladatban nem szükséges ismernünk a gáz végső hőmérsékletét, a teljesség kedvéért kiszámoljuk. A végállapot hőmérsékletét az egyesített gáztörvényből és a nyomásra vonatkozó összefüggésből kaphatjuk:

$$T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = T_0 \frac{\frac{c}{V_1^\alpha} V_1}{\frac{c}{V_0^\alpha} V_0} = T_0 \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{1-\alpha},$$

amiből a hőmérsékletváltozás

$$\Delta T = T_1 - T_0 = \dots = T_0 \frac{V_1^{1-\alpha} - V_0^{1-\alpha}}{V_0^{1-\alpha}}.$$

Az egyes állapotokat jellemző $V_i^{1-\alpha}$ térfogatok kifejezhetők az állapotegyenlet segítségével, mert

$$V_i^{1-\alpha} = \frac{V_i}{V_i^\alpha} = \frac{1}{c} p_i V_i = \frac{1}{c} nRT_i,$$

tehát a munka:

$$W = \frac{c}{\alpha-1} \frac{1}{c} nR(T_1 - T_0) = \frac{nR\Delta T}{\alpha-1}$$

Mivel a gáz kétatomos, ezért a folyamat során a belső energia megváltozása

$$\Delta E = \frac{5}{2} nR\Delta T$$

A folyamat során felvett/leadott hőmennyiséget most már megkaphatjuk az I. főtétel alapján. A feladat szövege szerint ez a gáz által leadott hő, tehát negatív előjellel szerepel az I. főtétel matematikai megfogalmazásában:

$$Q = \Delta E - W < 0$$

A munkára és a belső energia megváltozására kapott összefüggésekkel:

$$\frac{5}{2} nR\Delta T - \frac{1}{\alpha - 1} nR\Delta T = nR\Delta T \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\alpha - 1} \right) < 0$$

Ennek az egyenlőtlenségnek egyetlen fizikailag (és matematikailag) értelmes megoldása $\alpha < 7/5$.

66. Legyen a gáz hőmérséklete az 1 állapotban T_0 . Ekkor az egyesített gáztörvényből a 2 állapot hőmérséklete:

$$T_2 = T_0 \frac{3p_0 \cdot xV_0}{p_0V_0} = T_0 \cdot 3x$$

A folyamat során felvett hőt az első főtételből számolhatjuk ki. A gáz által az 1-2 szakaszon végzett munka a görbe (trapéz) alatti területből számolható ki:

$$W_{g,12} = p_0V_0 \cdot 2(x-1)$$

A belső energia változása:

$$\Delta E_{12} = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_0) = \frac{3}{2} p_0V_0 (3x - 1)$$

Az 1-2 folyamat során felvett hőmennyiség tehát

$$Q_{12} = \Delta E_{12} + W_{g,12} = p_0V_0 \left[\frac{3}{2} (3x - 1) + 2(x - 1) \right] = p_0V_0 \left(\frac{13}{2} x - \frac{7}{2} \right)$$

A 2-3 folyamat izobár, tehát a 3 állapotban a hőmérséklet:

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = T_0 \cdot 3x \cdot \frac{2}{x} = 6T_0$$

A belső energia változása ebből:

$$\Delta E_{23} = \frac{3}{2} nR(T_3 - T_2) = \frac{3}{2} nRT_0 (6 - 3x)$$

A környezet által végzett munka a folyamatot jelképező görbe alatti területből:

$$W_{23} = -3p_0(V_3 - V_2) = -3p_0V_0(2 - x)$$

A folyamat során leadott hőmennyiség ebből:

$$Q_{23} = \Delta E_{23} - W_{23} = \dots = p_0V_0\left(-\frac{15}{2}x + 15\right)$$

A feladat feltételét felhasználva a hőmennyiségek előjeles összegére:

$$\frac{15}{2} = \frac{23}{2} - x$$

$$x = 4$$

67. A termodinamikai egyensúly feltétele, hogy mindkét V_0 térfogatú tartályban levő gáz nyomása megegyezik, hiszen ekkor nem történik anyagtranszport a két tartály közt. Kezdetben nyilván mindegyik tartályban egyenlő anyagmennyiségű (n) gáz van. Melegítés hatására a melegebb tartályból Δn anyagmennyiségű gáz áramlik át a hidegebb tartályba, amíg a termodinamikai egyensúly be nem áll. Jelöljük a rendszer végső (közös) nyomását p' -vel, ekkor az állapotegyenlet szerint

$$p'V_0 = (n + \Delta n)RT_0 = (n - \Delta n)RT_1$$

Ebből megkapható az anyagmennyiség relatív változása:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0} = \frac{1}{5},$$

tehát a melegített tartályból a gáz 20 %-a áramlik át a hidegebb tartályba.

68. A kezdő hőmérsékleten egy tartályban a gáz nyomása

$$p_0 = \frac{nRT_0}{V_0}$$

Az állandó hőmérsékletű tartályban (amelybe Δn anyagmennyiségű gáz áramlott át) az egyensúly beállta után a (közös) nyomás:

$$p' = (n + \Delta n)R\frac{T_0}{V_0},$$

tehát a relatív nyomásváltozás:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p' - p_0}{p_0} = \frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{5},$$

azaz a gáz nyomása 20 %-kal nő a melegítés hatására.

69. Jelölje x a gáz mennyiségének disszociáló hányadát. Ekkor a végállapotban $(1-x)$ mol kétatomos és $2x$ mol egyatomos gáz lesz a tartályban. A teljes nyomás ezen gázok parciális nyomásainak összege lesz. A térfogat kiszámítható a kezdeti állapotra vonatkozó állapotegyenlet alapján, ez a folyamat során nem változik.

$$V = \frac{RT_0}{p_0}$$

A gáz nyomása a végső (T_1 hőmérsékletű) állapotban:

$$p = \frac{RT_1}{V} [(1-x) + 2x] = (1+x) \frac{RT_1}{V} = \dots = p_0 (1+x) \frac{T_1}{T_0}$$

A feladatban szereplő adatokkal tehát a végső nyomás 4.4×10^5 Pa lesz.

70. A membránon keresztül az edény kapcsolatban van a környezettel, tehát az edényben a nyomás mindig megegyezik a p_k külső nyomással. A nyomást az egyes összetevők parciális nyomásának összege adja meg. Mivel a térfogat állandó, az állandó nyomás fenntartásához az egyatomos gáz egy részének távoznia kell a membránon keresztül. Legyen a V térfogatú edényben n_1 mol egyatomos és n_2 mol kétatomos gáz. A kezdőállapotra felírt állapotegyenletből:

$$p_k = p_1 + p_2 = (n_1 + 2n_2) \frac{RT_0}{V}$$

Tegyük fel, hogy T hőmérsékleten már csak $n_1 - \Delta n_1$ mol egyatomos gáz van a tartályban. A parciális nyomások összege ekkor is megegyezik a külső nyomással, tehát

$$p_k = (n_1 - \Delta n_1 + 2n_2) \frac{RT}{V} = \dots = p_k \frac{T}{T_0} \frac{3n_1 - \Delta n_1}{3n_1} = p_k \frac{T}{T_0} \left(1 - \frac{\Delta n_1}{3n_1} \right),$$

amiből

$$\Delta n_1 = 3n_1 \left(1 - \frac{T_0}{T} \right)$$

Az összes egyatomos gáz akkor távozik, amikor $\Delta n_1 = n_1$, tehát

$$T = \frac{3}{2} T_0$$

A kezdeti egyatomos gáz mennyiségének 40 %-a akkor van a tartályban, ha 60 % távozott, tehát $\Delta n_1 = 0.6 \cdot n_1$:

$$T = \frac{5}{4} T_0$$

Kalorimetria, halmazállapot-változások

71. Számoljuk ki, mennyi a leadott hőmennyiség, miközben a 30 °C-os víz lehűl 0 °C-ra:

$$Q_1 = c_v m_v \Delta T = 4.18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 30 \text{ K} = 250.8 \text{ kJ}$$

Az összes (1 kg) jég felolvasztásához szükséges hőmennyiség

$$Q_2 = L_o m_j = 333.4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 1 \text{ kg} = 333.4 \text{ kJ}$$

Látható, hogy $Q_2 > Q_1$, tehát a víz által leadott hőmennyiség nem elegendő az összes jég megolvasztásához, így a végállapot mindenképpen víz és jég 0 °C-os keveréke lesz. A lehűlő víz által leadott Q_1 hőmennyiség m_j tömegű jég felolvasztására elegendő:

$$m_j = \frac{Q_1}{L_o} = 0.752 \text{ kg}$$

Az egyensúly beállta után tehát a 0 °C-os keverékünk 2.752 kg vízből és 0.248 kg jégből fog állni.

72. Hűtsük le a vizet 0 °C-ra, ekkor a felszabaduló hőmennyiség:

$$Q_{le} = c_v m_v (0^\circ\text{C} - 50^\circ\text{C})$$

Jelenleg van 0 °C-os víz-jég keverékünk. A hőmérséklet addig nem változik, amíg az összes jég el nem olvad. Számoljuk ki, hogy a lehűlő víz által leadott hőmennyiség felvétele során mennyi jég olvad meg:

$$|Q_{le}| = Q_{fel} = m_j L_o = 50 \cdot c_v m_v,$$

amiből

$$m_j = \frac{50 \cdot c_v m_v}{L_o} = 94.5 \text{ g}$$

Kaptuk, hogy a 100 g-ból csak 94.5 g jég olvad el, tehát a végállapot szintén 0 °C-os víz-jég keverék lesz.

73. Jelöljük a labor hőmérsékletét T_k -val, a kaloriméterbe öntött víz hőmérsékletét pedig T_v -vel. A kaloriméter vízértéke számszerűleg megegyezik annak a víznek a tömegével, amely hőmérséklete 1°C -os emeléséhez ugyanannyi hő szükséges, mint a kaloriméter hőmérsékletének 1°C -os emeléséhez. Először gondolatban hűtsük le a vizet és a kalorimétert 0°C -ra, ekkor a felszabaduló hőmennyiség abszolútértéke:

$$Q = c_v (m_v T_v + m_c T_k)$$

Itt értelemszerűen c_v a víz fajhője, m_v a tömege, m_c pedig a kaloriméter vízértéke.

Jelenleg van 0°C -os vizünk, jegünk és kaloriméterünk. A fenti hőmennyiség egy része a jég felolvasztására, a maradék pedig a vízből és a kaloriméterből álló rendszer melegítésére fordítódik:

$$Q = m_j L_{olv} + c_v (m_v + m_j + m_c) T,$$

ahol T az egyensúlyi hőmérséklet.

A leadott és felvett hőmennyiségek egyenlőségéből a kaloriméter vízértéke:

$$m_c = \frac{m_v (T_v - T) - m_j T}{T - T_k} - \frac{m_j L_{olv}}{c_v (T - T_k)} = \dots \approx 10.2 \text{ g}$$

74. A vízforraló teljesítményének csak 80% -a fordítódik a víz melegítésére. A t idő alatt leadott hőmennyiség melegíti a vizet:

$$\eta P t = c m \Delta T,$$

amiből

$$t = \frac{c m \Delta T}{\eta P} = 261.25 \text{ s} \approx 4.5 \text{ perc}$$

75. Ismeretes, hogy a víz sűrűsége 4°C -on a legnagyobb. Közelítsük a $V(T)$ függvényt egy olyan parabolával, melynek minimuma 4°C -nál van:

$$V(T) = a(T - 4^\circ\text{C})^2 + b,$$

ahol b a 4°C -on mért térfogat.

Ebből a víz térfogata 0°C , 3°C és 6°C hőmérsékleteken:

$$V_0 = 16a + b$$

$$V_3 = a + b,$$

$$V_6 = 4a + b$$

az egyes különbségek pedig

$$V_0 - V_3 = 15a$$

$$V_0 - V_6 = 12a'$$

tehát a térfogatváltozás nagyobb, ha a víz 3 °C-ról hűl 0 °C-ra.

76. A víz-jég keverék hőmérséklete 50 percig nem változik, eközben a hőátadás a jég olvadására fordítódik. Amikor az összes jég elolvadt, a 0 °C-os, 10 kg tömegű víz hőmérséklete 10 perc alatt 2 °C-kal emelkedik. Eközben a víz a meleg szobából

$$Q = cm\Delta T = 4.18 \frac{kJ}{kg \cdot ^\circ C} \cdot 10 kg \cdot 2^\circ C = 83.6 kJ$$

hőt vesz fel. Feltételezhetjük, hogy a hőátadás egyenletes, tehát a jég teljes elolvadásáig eltelt 50 perc alatt a rendszer ötször ekkora hőt vett fel. Ebből a jég kezdeti tömege:

$$m_{jég} = \frac{5Q}{L_{olv}} \approx 1.25 kg$$

77. Mivel hasonló típusú feladattal gyakran találkozhatunk, paraméteresen oldjuk meg, majd a feladat adatait felhasználva kiszámoljuk a megoldást. Legyen az egyensúly beállta után a víz hőmérséklete T , ez nyilván a szoba és a meleg víz hőmérséklete közti érték. Jelöljük a hideg ill. meleg víz paramétereit rendre 1 és 2 indexekkel.

A meleg víz T_2 -ről lehűl az egyensúlyi T hőmérsékletre, a folyamat közben felszabaduló (leadott) hőmennyiség:

$$Q_{le} = cm_2(T - T_2),$$

ahol c a víz fajhője. Ez a hőmennyiség (pontosabban ennek abszolútértéke) a hideg vizet és a kalorimétert is a közös hőmérsékletre melegíti.

Mivel a kaloriméterről nem tudunk semmit, jelöljük a hőkapacitását C -vel, ez számértékileg megegyezik azzal a hőmennyiséggel, amely a kaloriméter hőmérsékletét 1 °C-kal emeli.

Így a hideg víz és a kaloriméter által felvett hőmennyiség, miközben az egyensúlyi hőmérsékletre melegsznek:

$$Q_{fel} = (C + cm_1)(T - T_1)$$

Ha egyéb hőveszteségektől eltekintünk, akkor a leadott hő abszolútértéke megegyezik a felvett hőmennyiséggel:

$$cm_2(T_2 - T) = (C + cm_1)(T - T_1),$$

amiből a kaloriméter hőkapacitása

$$C = c \left[m_2 \frac{T_2 - T}{T - T_1} - m_1 \right]$$

A kaloriméter vízértéke (m_v) definíció szerint annak a víznek a tömege, mely hőmérsékletének 1°C -os növeléséhez ugyanakkora hőmennyiség szükséges, mint a kaloriméter hőmérsékletének 1°C -os növeléséhez. Mivel feladatunkban a kaloriméter vizet tartalmazott, ez most egyszerűen a hőkapacitás és a víz fajhőjének hányadosa:

$$m_v = \frac{C}{c} = m_2 \frac{T_2 - T}{T - T_1} - m_1 = 20 \text{ g}$$

78. A keveréses feladatok igen bonyolultak lehetnek, ezért célszerű a következőkben ismertetett módszert elsajátítani.

Ha biztosak vagyunk benne, hogy fázisátalakulás nem történik az egyensúly beálltáig, akkor a közös hőmérséklet valahol a legalacsonyabb és legmagasabb hőmérséklet közt lesz. Először az összes összetevőt lehűtjük a legalacsonyabb hőmérsékletére, majd az így felszabaduló hőt használjuk az összes összetevő egyszerre való melegítésére.

Feladatunkban azonos tömegű vízmennyiségek szerepelnek, tegyük fel, hogy $T_1 \leq T_2 \leq T_3$. A T_2 és T_3 hőmérsékletű víz T_1 hőmérsékletre való lehűlése során felszabaduló (leadott) hőmennyiség:

$$Q_{le} = cm \left[(T_1 - T_2) + (T_1 - T_3) \right]$$

A folyamat végén van $3m$ tömegű, T_1 hőmérsékletű víz. A leadott hőmennyiség abszolútértéke ezt a vizet melegíti a T hőmérsékletre:

$$Q_{fel} = c \cdot 3m \cdot (T - T_1),$$

amiből

$$T = T_1 - \frac{2T_1 - T_2 - T_3}{3} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$$

Tehát a végső hőmérséklet a kezdeti hőmérsékletek számtani közepe. Hangsúlyozzuk, hogy ez csak *azonos tömegű* folyadékok esetén érvényes, fázisátalakulás nélkül.

79. Legyen az i -edik folyadék hőmérséklete T_i , a végső hőmérséklet T . Az egyes folyadékadagok által leadott hő, miközben azok a legalacsonyabb (T_1) hőmérsékletre hűlnek:

$$Q_{le} = cm \left[(T_1 - T_1) + (T_1 - T_2) + \dots + (T_1 - T_n) \right] = cm \left[nT_1 - \sum_{i=1}^n T_i \right]$$

Most van nm tömegű, T_1 hőmérsékletű folyadékunk, amit a leadott hőmennyiség T fokra melegít:

$$-Q_{fel} = cnm(T_1 - T)$$

A leadott és felvett hőmennyiségek egyenlőségéből:

$$cm \left[nT_1 - \sum_{i=1}^n T_i \right] = cnm(T_1 - T)$$

$$nT_1 - \sum_{i=1}^n T_i = nT_1 - nT$$

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}$$

Tehát azonos tömegű, azonos fajhőjű folyadékok egyensúlyi hőmérséklete az összeöntés után a kezdeti hőmérsékletek számtani közepe.

80. Az előző feladatokhoz hasonlóan az összes vízmennyiséget lehűtjük a legalacsonyabb T_1 hőmérsékletre. Ekkor a felszabaduló hőmennyiség:

$$\begin{aligned} |Q_{le}| &= -c \left[m_1 (T_1 - T_1) + m_2 (T_1 - T_2) + \dots + m_n (T_1 - T_n) \right] = \\ &= -c \left[T_1 \sum_i m_i - \sum_i m_i T_i \right] \end{aligned}$$

A teljes, T_1 hőmérsékletű víz által felvett hőmennyiség, miközben a közös hőmérsékletre melegszik:

$$Q_{fel} = c(T - T_1) \sum_i m_i$$

A felvett és a leadott hőmennyiségek egyenlőségéből a kialakuló egyensúlyi hőmérséklet:

$$T = \frac{\sum_i m_i T_i}{\sum_i m_i},$$

ami az egyes folyadékrészek hőmérsékletének a megfelelő tömeggel való súlyozott átlaga.

81. Jelöljük Q -val azt a hőmennyiséget, ami ahhoz szükséges, hogy a $T_0 = -10\text{ °C}$ -os jeget $T_1 = -2\text{ °C}$ -ra melegítsük:

$$Q = c_j m_j (T_1 - T_0)$$

A további hőközlés a T_1 fokos jég 0 °C -ra való melegítésére, majd a jég megolvasztására fordítódik:

$$20Q = c_j m_j (0 - T_1) + m_j L_o$$

A két egyenletből kifejezhető az L_o olvadáshő:

$$L_o = c_j (21T_1 - 20T_0) = 331.8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

III.fejezet: **Elektromosságtan**

szerző: **Dr. Kun Emma**

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



III. Fejezet ELEKTROMOSSÁGTAN

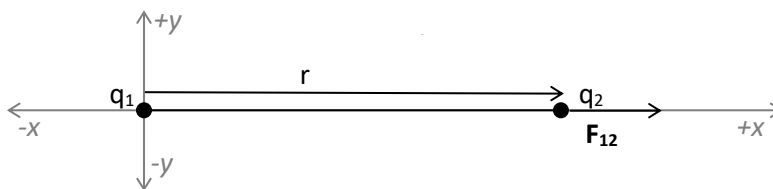
A fejezetben közölt feladatok megoldása, ill. a mellékelt megoldási útmutatók tanulmányozása után a hallgató

- megismeri az alapvető elektrosztatikai, egyenáramú és mágneses jelenségekkel kapcsolatos számolási feladatok megoldási módszereit,
- felismeri az adott feladat háttérében álló elektromágneses jelenségeket és a feladatmegoldás során önállóan alkalmazza a tanult módszereket,
- a kiadott megoldásvázlatok alapján önellenőrzésre, részletesebb szakmai útmutatás alapján összetettebb, elektromágnességgel kapcsolatos feladatok megoldására képes

1. Elektrosztatika

1. Mekkora Coulomb-erővel hat egy 10^{-3} C nagyságú ponttöltés egy tőle 1 m-re levő 10^{-4} C nagyságú ponttöltésre? Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a második töltéstől 0,5 m-re, ha tőle az első töltést szigeteljük?
Adatok: $q_1=10^{-3}$ C, $q_2=10^{-4}$ C, $r=1$ m, $l=0,5$ m.

a., Vegyünk fel egy 2 dimenziós Descartes koordináta-rendszert, amelynek az origójában a q_1 ponttöltés helyezkedik el. Legyen tőle $r=\mathbf{r}_{12}/\mathbf{e}_x$ távolságra az x tengely-en a q_2 töltés, az alábbi ábra szerint ($\mathbf{e}_x$ az x -irányú egységvektor):



A q_1 által q_2 -re ható Coulomb-erő vektoros alakban:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2} \mathbf{e}_x,$$

ahol ϵ_0 a vákuum dielektromos állandója, vagy más néven permittivitása. A q_1 által q_2 -re kifejtett Coulomb-erő skaláris alakban, behelyettesítve a feladatban szereplő mennyiségeket:

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}} \frac{10^{-3} \text{C} \cdot 10^{-4} \text{C}}{(1\text{m})^2} \approx 884 \text{ N}.$$

b., Az **E** elektromos térerősség **E** nagysága a q_2 töltéstől $l=0,5$ m-re, ha tőle a q_1 töltést tökéletesen elszigeteljük:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{l^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}} \frac{10^{-4} \text{C}}{(0,5 \text{ m})^2} \approx 3,5 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

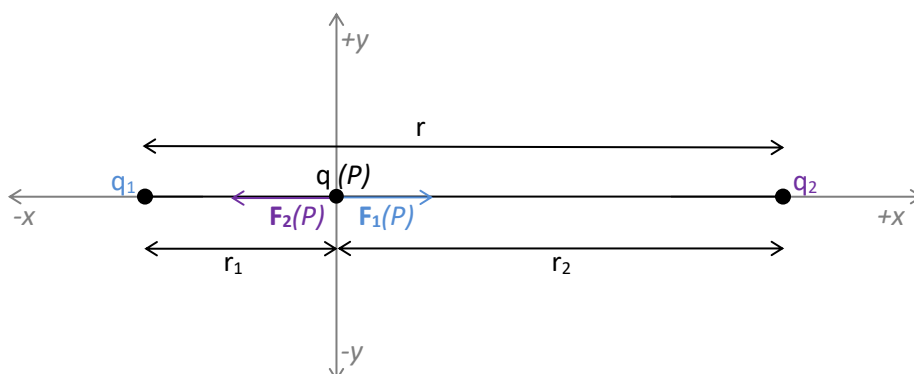
Az elektromos térerősség erővonalai a pozitív töltéstől kifelé mutatnak. Mivel az erővonalak minden pontjában az elektromos térerősség vektora érintőirányú, a tér azonos erősségű pontjait összekötő vonalak a töltés körüli koncentrikus körök.

2. Két ponttöltés 50 cm-re van egymástól. A töltések értéke 1nC és 2nC. Van-e olyan P pont a környezetükben, amibe egy q próbatöltést téve a próbatöltés nyugalomban marad? Ha van, akkor hol van ez a pont?

Adatok: $q_1=1 \text{ nC}=10^{-9} \text{ C}$, $q_2=2 \text{ nC}=2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $r=50 \text{ cm}=0,5 \text{ m}$.

a., Az elektromos tér egy P pontjában a térerősség nagysága és iránya megegyezik az adott pontba helyezett egységnyi q pozitív elektromos töltésre ható erő nagyságával és irányával. A q értékű töltésre az **E** elektromos tér által kifejtett **F** erő vektoros alakban **F = Eq**.

A szuperpozíció elve szerint az eredő elektromos térerősség az adott pontban keltett elektromos térerősségek előjeles össze. Ha q próbatöltést a q_1 és q_2 ponttöltések által létrehozott elektromos tér olyan pontjába tesszük, ahol azok ugyanolyan nagyságú és ellentétes irányú Coulomb erővel hatnak a q ponttöltésre, akkor egyéb ható külső erők hiányában q nyugalomban marad. Ezt az alábbi ábrán szemléltetjük, ahol a P pontot az xy Descartes koordináarendszer origójának választottuk:



A q_1 és q ponttöltések között ható Coulomb erő vektoros alakban:

$$\mathbf{F}_1(q_1, q, P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1,$$

valamint a q_2 és q ponttöltések között ható Coulomb erő vektoros alakban:

$$\mathbf{F}_2(q_2, q, P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2,$$

ahol $-\mathbf{r}_1 = -r_1 \hat{\mathbf{r}}$ a q_1 és q , az $\mathbf{r}_2 = r_2 \hat{\mathbf{r}}$ a q_2 és q ponttöltések közötti helyvektorok a választott koordinátarendszerben. Vegyük észre a két helyvektor ellentétes irányítású, amit az $\mathbf{r}_1$ helyvektor mínusz előjele mutat. P pontba helyezve q nyugalomban van, ha $F_1(q_1, q, P) = F_2(q_2, q, P)$ teljesül. Ebből:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r_1^2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q}{r_2^2} \\ \frac{q_1}{r_1^2} &= \frac{q_2}{r_2^2} \\ \frac{r_2^2}{r_1^2} &= \frac{q_2}{q_1} \rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 \end{aligned}$$

Felírjuk a két ponttöltés távolságát:

$$r = r_1 + r_2 = r_1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 = r_1 \left(1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right),$$

amit kissé átrendezve felírhatjuk r_1 -et a feladatban megadott mennyiségek segítségével:

$$r_1 = r \left(1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{-1} = 0,5 \text{ m} \left(1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{10^{-9} \text{ C}}} \right)^{-1} \approx 0,2 \text{ m}.$$

Vagyis $r_2 = r - r_1 = 0,5 \text{ m} - 0,2 \text{ m} \approx 0,3 \text{ m}$.

Tehát az a P pont, amibe helyezve a q ponttöltést az nyugalomban marad, az a q_1 és q_2 töltéseket összekötő vonalon helyezkedik el, körülbelül 0,2 m-re a q_1 és körülbelül 0,3 m-re a q_2 ponttöltésektől.

3. Egy $3\mu\text{C}$ és egy $4\mu\text{C}$ nagyságú pontszerű töltés egy 2 méter oldalhosszúságú

egyenlő oldalú háromszög két csúcsán helyezkedik el.

a., Számítsuk ki a φ potenciált a háromszög harmadik csúcsában. Tegyük fel $\varphi_{\infty}=0$ a végtelenben.

b., Mekkora munkavégzés szükséges ahhoz, hogy a végtelenből egy $5 \mu\text{C}$ töltést vigyünk a háromszög harmadik csúcsára.

c., Számítsuk ki a három töltésből álló rendszer teljes potenciális energiáját.

Adatok: $q_1=3 \mu\text{C}=3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $q_2=4 \mu\text{C}=4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $q_3=5 \mu\text{C}=5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $l=2 \text{ m}$.

a., A q_1 töltéstől származó $\varphi(q_1, P)$ potenciál a harmadik csúcsban (P):

$$\varphi(q_1, P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{l}.$$

A q_2 származó potenciál a harmadik csúcsban, a végtelenhez képest:

$$\varphi(q_2, P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{l}.$$

A teljes potenciál ebben a pontban a kettő szuperpozíciója:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{l} + \frac{q_2}{l} \right) = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \left(\frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2 \text{ m}} + \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2 \text{ m}} \right) = 3,15 \cdot 10^4 \text{ V}.$$

b., Az a W munka, ami ahhoz szükséges, hogy a q töltést a végtelenből a $\varphi(P)$ potenciálú P csúcsba vigyük, megegyezik a ponttöltés U potenciális energiájának a megváltozásával :

$$W = U(P) - U(\infty) = q_3[\varphi(P) - \varphi(\infty)] = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C} (3,15 \cdot 10^4 \text{ V} - 0) = 0,16 \text{ J}.$$

c., A három töltésből álló rendszer teljes potenciális energiája az egyes töltéspárok potenciális energiájának az összege:

$$U_{\text{teljes}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{l} + \frac{q_2 q_3}{l} + \frac{q_1 q_3}{l} \right) = 0,21 \text{ J}.$$

4. Síkkondenzátor 40 cm^2 -es lemezeit $0,5 \text{ mm}$ vastag $\epsilon_r=2$ relatív permittivitású dielektrikum választja el egymástól. Számítsuk ki a kondenzátor kapacitását.

Adatok: $A=40 \text{ cm}^2=4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $d=0,5 \text{ mm}=5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\epsilon_r=2$.

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ F}.$$

5. Mekkora és milyen polaritású feszültséget kell kapcsolni vákuumban két

vízszintesen egymástól 1 cm-re elhelyezett párhuzamos sík lemez közé, hogy közöttük lebegjen egy 10^{-7} g tömegű, 1pC nagyságú pontszerű töltés? (nehézségi gyorsulás $g=9,81\text{m/s}^2$)

6. Két kicsiny sugarú fémgolyó közül az egyiknek $+10^{-7}\text{C}$, a másiknak $+2 \times 10^{-8}\text{C}$ töltése van. Összeérintés után központjaikat 1 m távolságra helyezzük el egymástól. Mekkora F erő hat a golyókra?

7. Egy 1 cm oldalhosszúságú négyzet 3 csúcsában elhelyezünk 1-1 1nC töltésű pozitív ponttöltést. Milyen irányú és nagyságú erővel hat e töltések tere a négyzet negyedik csúcsában levő elektronra és mekkora e pontban a télerősség.

8. Egy 4 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóján levő 2 csúcsában egy-egy 8 nC töltésű pozitív ponttöltés van. Milyen irányú és mekkora az elektromos télerősség a háromszög 3. csúcsában? Ha egy elektront helyezünk a csúcsba, milyen nagyságú és irányú erő hat rá?

9. Számítsuk ki egymástól $r=0,5\text{m}$ távolságra levő két pontszerű töltésből $q_1=100\text{ }\mu\text{C}$ és $q_2=1\text{pC}$ pontszerű töltésekből álló rendszer U elektromos potenciális energiáját.

10. Vákuumban, $v=2 \cdot 10^4$ km/s sebességgel kilövünk egy protont egy tőle igen messze levő $Q=1$ C ponttöltés irányába. Milyen közel jut a proton a Q töltéshez?

11. Egy 12 V-os akkumulátor két, egymástól 4 mm-re lévő nagy, párhuzamos fémlemezhez csatlakozik. Számítsuk ki a lemezek közötti elektromos télerősséget.

12. Tekintsünk egy A felületű síkkondenzátort, melyben a lemezek közötti erőteret két különböző vastagságú dielektrikum tölti ki. Elhanyagolva a szélek hatását, számítsuk ki a kondenzátor kapacitását. (Tipp: a dielektrikumok határfelületére két nagyméretű, sík fémlemez csúsztatva az így létrejövő kondenzátorok soros kapcsolásúak.)

13. Egy 500 pF és egy 2 nF kapacitású kondenzátort párhuzamosan kapcsolunk. A rendszerre 5 μC töltést juttatunk. Mekkora az egyes kondenzátorok feszültségei, töltései illetve energiái? Mekkora a teljes rendszer energiája?

2. Az elektromos egyenáram, vezetési jelenségek

1. Egy 2 mm^2 -es egyenletes keresztmetszetű szénrúdból ellenállást készítünk. Mekkora a szénrúd ellenállása és hossza, ha a két vége közé kapcsolt 5 V -os feszültség hatására $4 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ erősségű áram átfolyik át rajta?

Adatok: $A=2 \text{ mm}^2=2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, $U=5 \text{ V}$, $I=4 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.

Ohm törvényét alkalmazva a rúd ellenállása:

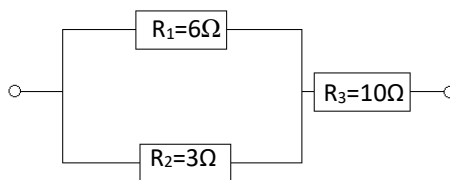
$$R = \frac{U}{I} = \frac{5 \text{ V}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 1250 \Omega.$$

A rúd l hossza:

$$l = \frac{R \cdot A}{\rho} = \frac{1250 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{1,4 \cdot 10^{-5} \Omega \text{ m}} \approx 1786 \text{ m},$$

ahol ρ a szén fajlagos ellenállása.

2. Számítsuk ki az alábbi ábrán látható ellenállás-hálózat eredő ellenállását.



Az első és második fogyasztók párhuzamosan vannak kapcsolva. Így azok közös ellenállása:

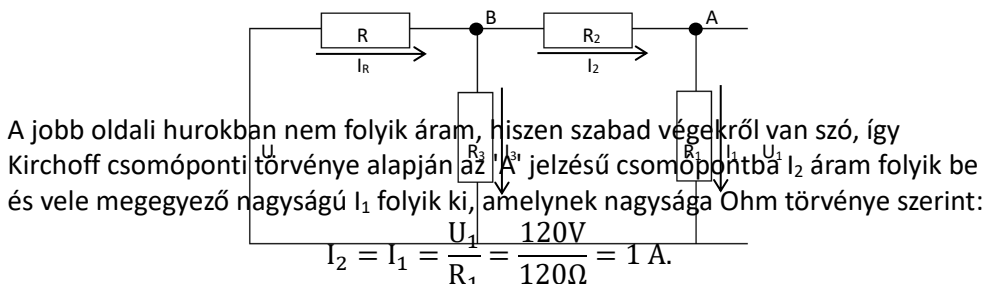
$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \Omega \cdot 3 \Omega}{6 \Omega + 3 \Omega} = 2 \Omega.$$

Az R_{12} eredő ellenállás és a harmadik ellenállás fogyasztó sorosan van kapcsolva, így a teljes rendszer eredő ellenállása:

$$R_e = R_{12} + R_3 = 2\Omega + 10\Omega = 12\Omega.$$

3. Mekkora értéknek válasszuk az alábbi ábrán látható kapcsolásban R és U értékét ahhoz, hogy $U_1=120\text{ V}$ és a teljes felvett teljesítmény $P=240\text{ W}$ legyen?

Az ellenállások értéke: $R_1=120\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=250\Omega$.



Jobbról balra haladva meghatározzuk az egyes ellenállásokon eső feszültséget.

Az R_2 ellenálláson eső feszültség:

$$U_2 = I_2 R_2 = 1\text{ A} \cdot 20\Omega = 20\text{V}.$$

Kirchhoff huroktörvénye alapján a középső hurokban az R_3 ellenálláson eső feszültség:

$$U_3 = U_1 + U_2 = 120\text{V} + 20\text{V} = 140\text{V}.$$

A rajta átfolyó áramerősség az Ohm-törvény szerint:

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{140\text{V}}{250\Omega} = 0,56\text{ A}.$$

Az I_R áram az R és R_2 ellenállások közötti B csomópontban kétfelé oszlik, így Kirchhoff csomóponti törvénye alapján:

$$I_R = I_2 + I_3 = 1\text{ A} + 0,56\text{ A} = 1,56\text{ A}.$$

Az egyes ellenállások fogyasztásai:

$$P_1 = U_1 I_1 = 120\text{V} \cdot 1\text{ A} = 120\text{W}$$

$$P_2 = U_2 I_2 = 20\text{V} \cdot 1\text{ A} = 20\text{W}$$

$$P_3 = U_3 I_3 = 140\text{V} \cdot 0,56\text{ A} = 78,4\text{W}$$

Vagyis a három ellenállás együttes fogyasztása:

$$P_{123} = P_1 + P_2 + P_3 = 120\text{W} + 20\text{W} + 78,4\text{W} = 218,4\text{ W}.$$

Az összes fogyasztás a feladat szövege szerint $P=250\text{W}$ kell legyen, azaz a negyedik ellenállás, R fogyasztása az összes fogyasztás és a három számozott ellenállás

fogyasztásának különbsége:

$$P_R = P - P_{123} = 250\text{W} - 218,4\text{W} = 31,6\text{ W}.$$

Így az R ellenállás értéke:

$$R = \frac{P_R}{I_R^2} = \frac{31,6\text{W}}{(2,4\text{A})^2} \approx 5,5\ \Omega,$$

és a rajta eső feszültség:

$$U_R = R \cdot I_R = 5,5\Omega \cdot 1,4\text{A} = 7,7\text{ V}.$$

Az U feszültség értéke a bal oldali hurokra felírt huroktörvény alapján:

$$U = U_3 + U_R = 140\text{V} + 7,7\text{V} = 147,7\text{ V}.$$

4. Hány darab $5\ \Omega$ -os ellenállást kell sorba kapcsolni ahhoz, hogy az ellenállásokon átfolyó áram 1 A nagysága mellett az ellenállásrendszer feszültsége 15 V legyen?

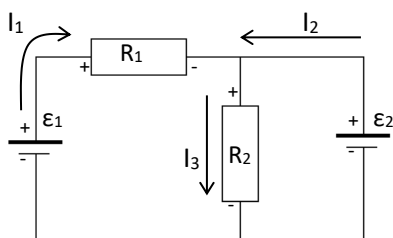
5. Egymással párhuzamosan kapcsolunk egy $240\ \Omega$ és egy $360\ \Omega$ -os ellenállású fogyasztót egy 120 V -os feszültségű telepre. Mekkora az eredő ellenállás? Mekkora erősségű áram folyik a főágban? Mekkora erősségű áram halad át az egyes fogyasztókon? Mekkora a rajtuk disszipált teljesítmény?

6. Kapcsoljunk egy izzólámpát 12 V feszültségre. A lámpa fogyasztása ekkor $5,6\text{ W}$. Mekkora lesz az izzólámpa teljesítménye, ha azt egy 18 V -os feszültségre kapcsoljuk? A lámpa ellenállása változatlan.

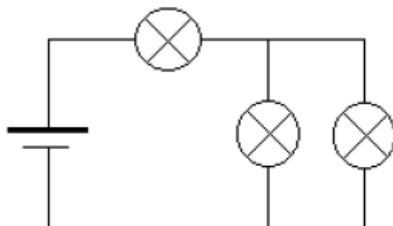
7. Legyen egy fogyasztó teljesítménye 60 W , amikor rajta $1,8\text{ A}$ erősségű áram folyik át. Mekkora lesz a teljesítménye akkor, ha az áramerősséget $2,4\text{ A}$ -ra növeljük és a fogyasztó ellenállása változatlan?

8. Számítsuk ki az alábbi áramkör egyes ágain átfolyó áram erősségét.

Adatok: $R_1=5\Omega$, $R_2=2\Omega$, $\varepsilon_1=5\text{V}$, $\varepsilon_2=2\text{V}$.

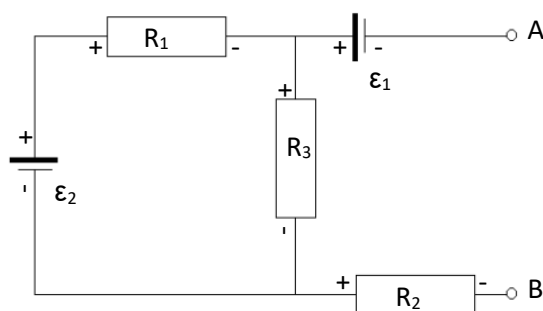


9. Három 40W-os, 120V-os izzólámpát csatlakoztatunk 120 V-os feszültségforráshoz az alábbi módon. Számítsuk ki a három izzólámpa fogyasztását és az egyes izzólámpákon eső feszültséget.



10. Számítsuk ki az alább látható áramkör A és B pontja közötti feszültséget, és állapítsuk meg, hogy melyik pont potenciálja nagyobb.

Adatok: $R_1=2\Omega$, $R_2=6\Omega$, $R_3=8\Omega$, $\varepsilon_1=10V$, $\varepsilon_2=6V$.



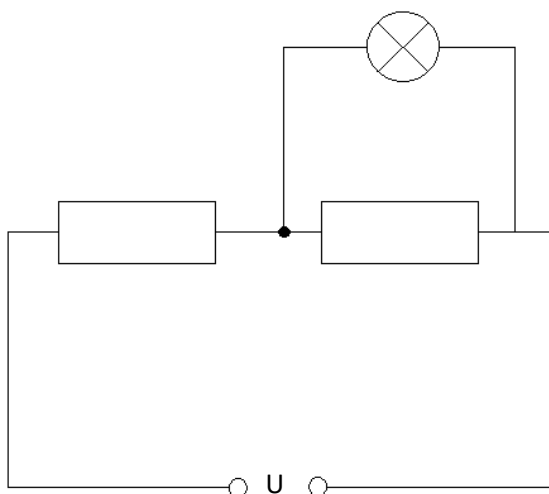
11. R toló-ellenállást épp úgy állítjuk be, hogy az alábbi ábrán látható áramkör jöjjön létre. Mekkora legyen az R ellenállás értéke, hogy az áramkörhöz kapcsolt izzólámpa üzemi feszültségen égjen?

Adatok $U=220V$, $U_i=12V$, $P_i=40W$.

U_i , P_i

$R/2$

$R/2$



12. Sorba kapcsolt RC áramkörben a kapacitás $4 \mu\text{F}$. Mekkora az R ellenállás, ha az áramkör időállandója 2 ms ? A $t=0$ időpontban az áramkört 9 V -os feszültségforráshoz kapcsoljuk. Mennyi idő múlva éri el a feszültsége a 8 V -ot?

3. A mágneses mező, elektromágneses indukció

1. Egy elektronnyaláb sebességszűrőn halad át. Az egymásra merőleges mágneses és elektromos erőter nagysága $2 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ és $4 \cdot 10^4 \text{ V/m}$. Mekkora a sebességszűrő apertúráján kilépő elektronok mozgási energiája?

Adatok: $E=4 \cdot 10^4 \text{ V/m}$, $B=2 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

A sebességszűrőn v sebességgel áthaladó e töltésű részecskékre ható Lorentz erő homogén erőter esetén:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Ebből látszik, hogy az olyan sebességű elektronok haladnak át a sebességszűrőn, amelyekre az elektromos tér illetve a mágneses tér által kifejtett erőkomponensek éppen kiegyenlítik egymást, azaz $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Ez olyan elektronokra valósul meg, amelyeknek a sebességük iránya $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ és a nagysága:

$$E = vB \rightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{4 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ T}} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 1,82 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

2. Mekkora erővel hat a $0,4 \text{ T}$ indukciójú homogén mágneses mező az egyenes

vezető 2 m hosszú szakaszára a következő esetekben, ha a vezetőben 25 A áram folyik?

- a., A vezető merőleges az indukció vonalakra,
- b., a vezető párhuzamos az indukció vonalakkal,
- c., a vezető 30°-os szöget zár be az indukció vonalakkal?

Adatok: $B=4 \cdot 10^{-1} \text{ T}$, $I=25 \text{ A}$, $l=2 \text{ m}$, $\theta=30^\circ$.

A B indukciójú mágneses térbe helyezett I áram járta l hosszúságú vezetőre ható erő nagysága ($\hat{l}$ a vezető irányával párhuzamos egységvektor):

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} = I l \hat{l} \times \mathbf{B} = I l B \cdot \sin\theta.$$

Ebből a képletből látszik, hogy az áramjárta vezetőre ható erő függ attól, hogy a vezető milyen θ szöget zár be az indukcióvonalakkal (ismétlés: **a** és **b** vektorok vektoriális szorzata $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin\theta$).

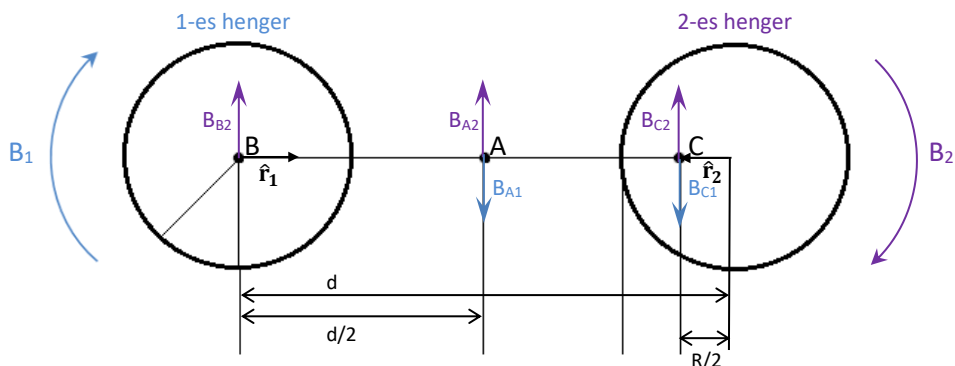
Az a) esetben $\theta = 90^\circ$, a b) esetben $\theta = 0^\circ$ és a c) esetben $\theta = 30^\circ$. Ezeknek megfelelően rendre a ható erők:

a., $F = I l B \cdot \sin\theta = 25 \text{ A} \cdot 2 \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-1} \text{ T} \cdot \sin 90^\circ = 20 \text{ N}$,

b., $F = I l B \cdot \sin\theta = 25 \text{ A} \cdot 2 \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-1} \text{ T} \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ N}$,

c., $F = I l B \cdot \sin\theta = 25 \text{ A} \cdot 2 \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-1} \text{ T} \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ N}$.

3. Két egymással párhuzamos, végtelen hosszú R sugarú hengeres vezetőben I erősségű áram folyik azonos irányban, az ábra síkjára merőlegesen befelé (a vezetők nem üregesek). A hengerek tengelytávolsága d. Az áramsűrűség a vezetők keresztmetszetén állandó. Mekkora a B mágneses indukció az ábrán jelölt A, B, C és pontokban?



A fenti ábra a 1-es (bal oldali) és 2-es számú (jobb oldali) hengeres vezetőket mutatja, illetve a körülöttük kiépülő mágneses mező szerkezetét. Az egyenes

hengeres vezetők által keltett mágneses tér az óramutató járásával azonos irányban, körkörösen veszi körbe a hengerek tengelyét.

A jobbkezes-szabály értelmében az indukált mágneses mező irányát P pontban (középső ujj) az I nagyságú áram $\hat{l}$ iránya (hüvelykujj), illetve az áramvezetőtől a P pontba mutató $\hat{r}$ helyvektor (mutatóujj) iránya határozza meg. Ezt a Biot-Savart törvény fejezi ki, amit általános esetben is felírhatunk nem homogén tér és/vagy nem egyenes vezető esetére.

A mágneses indukció nagysága a vezetők belsejében, a vezetőtől való r távolság függvényében:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}.$$

A mágneses indukció nagysága a vezetők kívül:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

B_A mágneses indukció az 'A' pontban: a fentiek által belátható, hogy az 1-es és 2-es hengerek tengelyétől azonos távolságra levő A pontban a két henger által keltett B_{A1} és B_{A2} mágneses indukciók nagysága a megegyező nagyságú áramok miatt egyenlő, illetve az egymással éppen szembe mutató egységnyi hosszúságú ($|\hat{r}| = 1$) $\hat{r}_1$ és $\hat{r}_2$ helyvektorok miatt éppen ellentétes irányúak, azaz

$$\mathbf{B}_A = \mathbf{B}_{A1} + \mathbf{B}_{A2} = B_{A1}|\hat{r}_1| + B_{A2}(-|\hat{r}_2|) = 0.$$

B_B mágneses indukció az 'B' pontban: a B pont az 1-es számú hengernek éppen a tengelyén helyezkedik el, tehát mágneses teret ott csak a tőle d távolságban a másik hengerben folyó áram kelthet. Vagyis a mágneses indukció nagysága B-ben:

$$B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}.$$

B_C mágneses indukció az 'C' pontban: a C pontban az 1-es számú henger lefelé irányuló B_{C1} nagyságú teret kelt, ami figyelembe véve, hogy a C pont az 1-es hengeren kívül található:

$$B_{C1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(d - \frac{R}{2}\right)}.$$

A C pontban az 2-es számú henger felfelé irányuló B_{C2} nagyságú teret kelt, ami figyelembe véve, hogy a C pont az 2-es hengeren belül található:

$$B_{C2} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \left(\frac{R}{2}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Vagyis

$$B_C = B_{C1} + B_{C2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(d - \frac{R}{2}\right)} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{2}{2d - R} - \frac{1}{2R}\right).$$

4. Homogén, 0,02 T indukciójú mágneses térben egy 10 cm hosszúságú egyenes vezető mozog, aminek a sebesség 60 fokot zár be az indukcióvonalakkal. Adjuk meg az indukált feszültséget, ha a vezető 10 m/s állandó sebességgel mozog.

Adatok: $B=2 \cdot 10^{-2}$ T, $l=10^{-1}$ m, $\alpha=60^\circ$, $v=10$ m/s.

Az l hosszúságú vezető B indukciójú mágneses térben való v sebességű mozgása során létrejövő U_i indukált feszültség nagysága:

$$U_i = Blv \sin \alpha = 2 \cdot 10^{-2} \text{T} \cdot 10^{-1} \text{m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 60^\circ \approx 0,017 \text{V}.$$

A mozgás által indukált feszültség iránya mindig olyan, hogy a zárt vezetőben az általa létrehozott áram körül keletkező mágneses terével akadályozni igyekszik az őt létrehozó indukáló folyamatot (Lenz-törvény).

5. Számítsuk ki az 1 cm² keresztmetszetű, 10 cm hosszú és 1000 menetű szolenoid öninduktivitását. Mekkora az indukált ellenfeszültség, ha a tekercsen átfolyó áram erőssége egyenletesen, 15 A/s sebességgel nő?

Adatok: $A=10^{-4}$ m², $l=10^{-1}$ m, $N=1000$, $dI/dt=15$ A/s.

A megadott adatok szerint a szolenoid sűrűn tekercselt és hossza az átmérőjéhez képest nagy, így a végeinek hatását elhanyagolhatjuk. A szolenoid öninduktivitása:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1000^2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2}{10^{-1} \text{m}} \approx 1,26 \cdot 10^{-3} \text{H}.$$

Így az indukált ellenfeszültség:

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt} = -1,26 \cdot 10^{-3} \text{H} \cdot 15 \frac{\text{A}}{\text{s}} = -1,89 \cdot 10^{-2} \text{V}.$$

6. Homogén, $4 \cdot 10^{-3}$ T indukciójú mágneses erőterbe helyezett egyenes dróton 8A erősségű áram folyik. A mágneses erővonalak a huzallal 36 fokos szöget zárnak be. Mekkora erővel hat a mágneses tér az áramvezetőre?

7. Homogén mágneses térben, amelynek mágneses indukciója 0,02 T az indukcióvonalakkal 30 fokot bezáró merőleges síkban egy 5 cm hosszúságú egyenes vezető mozog. Adjuk meg az indukált feszültséget az idő függvényében, ha a vezető 10 m/s állandó sebességgel mozog.

8. Hány menetű legyen az 10 cm^2 keresztmetszetű, 20 cm hosszú szolenoid, amin áram erőssége egyenletesen, 15 A/s sebességgel nő, ahhoz, hogy az indukált ellenfeszültség abszolút értéke 10^2 V legyen?

9. Egy $l=30$ cm hosszú, $A=6 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű, $N_1=500$ menetű szolenoidra egy másik $N_2=20$ menetű tekercset csévélünk szorosan, a másik tekercs közepe körül. Számítsuk ki a két tekercs közötti kölcsönös indukciót. (Tipp: a szoros csévélés miatt a két szolenoid geometriája megegyezik, azaz $l_1=l_2=l$ és $A_1=A_2=A$.)

IV.fejezet: **Rezgésstan és geometriai optika**
szerző: **Péter Viktória**

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



Témakör: rezgésstan, geometriai optika

Tanulási eredmények

Tudás: Ismeri ezen témakör alapvető törvényszerűségeit, ismeri ezen témakör szaknyelvet. Ismeri ezen témakör összefüggéseit, törvényszerűségeit, és az ezekre alkalmazott matematikai eljárásokat.

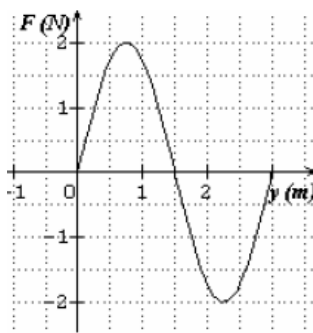
Képesség: Jó gyakorlati érzékkel rendelkezik. Alkalmazza, használja ezen témakör definícióit, képleteit, elméletét. Kiválasztja az egyszerű feladatok megoldásához szükséges módszereket, képleteket.

Attitűd: Munkáját önkritikusan értékeli. Fontosnak tartja ezen témakörhöz kapcsolódó műveltségének bővítését.

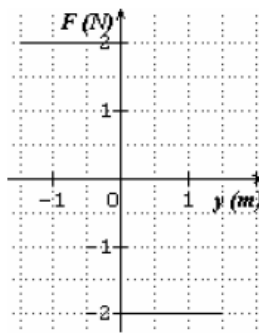
Autonómia/felelősség: Felelősséggel oldja meg a rábízott feladatokat. Hallgatóként képes együttműködni a kurzus hallgatóival, oktatóival.

Feladatok

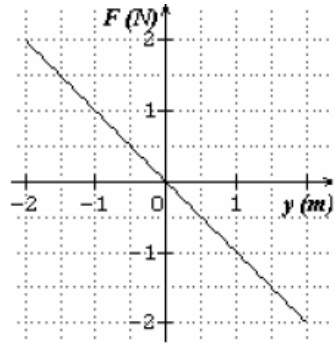
1. A kitérés mindig egyenesen arányos az azt létrehozó erővel?
2. Az alábbi grafikonok különböző testekre ható eredő erőt ábrázolnak a kitérés függvényében. Melyik erő hatására jön létre harmonikus rezgőmozgás?



(A)



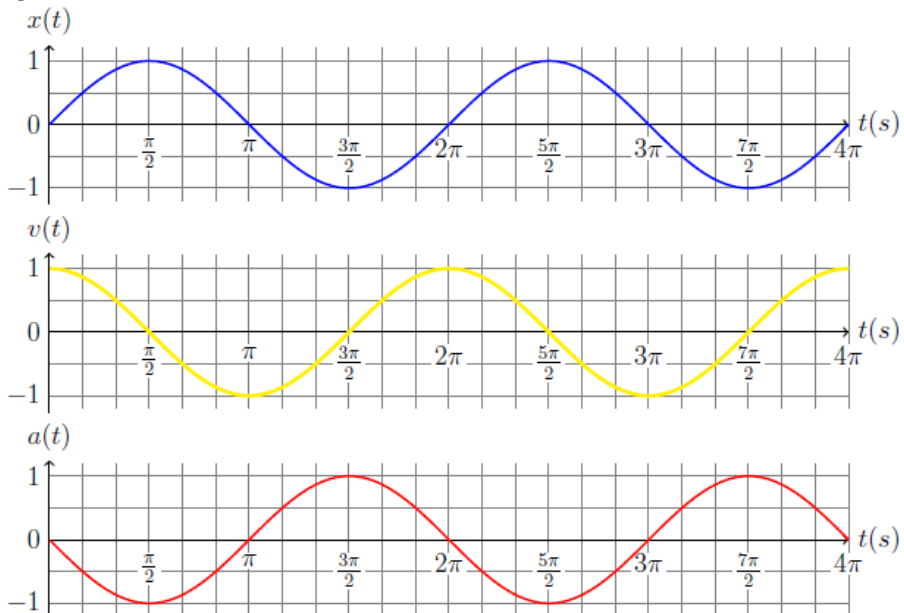
(B)



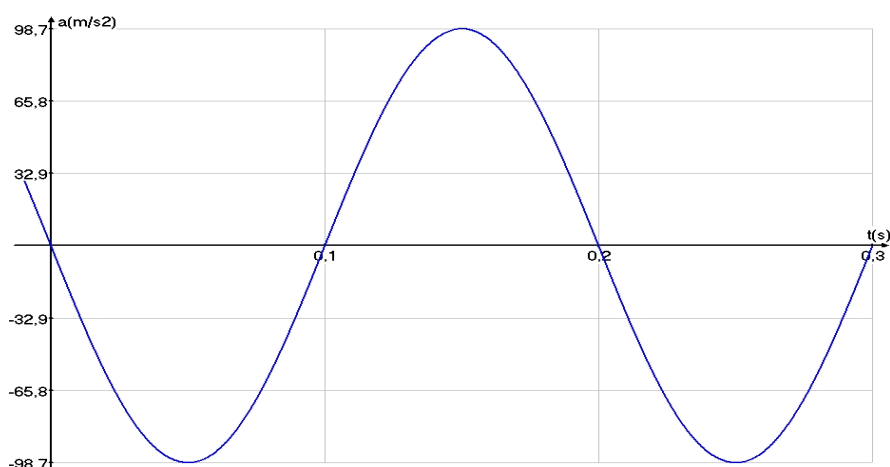
(C)

3. Függ-e a rezgésidő az amplitúdótól? Mi az, ami biztos, hogy függ az amplitúdótól?
4. Harmonikus rezgést végző testet vizsgálunk. Mikor nulla a sebesség illetve a gyorsulás? Mely időpillanatokban maximális a sebesség és a gyorsulás? Hol van ilyenkor a test?

Megoldás



5. Egy 25 dkg tömegű testet 2 N/m rugóállandójú rugóra akasztunk, majd függőlegesen kitérítve rezgésbe hozzuk. Mekkora frekvenciával fog rezegni a rendszer?
6. Egy 5 dkg-os tárgyat rugóra akasztunk, hagyjuk rezegni. Az ábra rezgő tárgy gyorsulását ábrázolja idő függvényében. Az idő értékek szekundumban, a gyorsulás értékek m/s^2 -ben vannak megadva.



Határozzátok meg:

- a. a frekvenciát,
 - b. a rezgések amplitúdóját,
 - c. a rugóállandót.
 - d. Mekkora a rezgő tárgy kitérése abban a pillanatban mikor a gyorsulása a lehető legnagyobb?
 - e. Mekkora a rezgő tárgy kitérése abban a pillanatban mikor a rezgő tárgy sebessége
 - f. Ábrázoljátok a tárgy sebességet idő függvényében!
7. Milyen hosszú a másodperc inga?

8. Egy 2kg tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez. Határozzuk meg a körfrekvenciát, kezdőfázist és amplitúdót, ha a kezdőpillanatban a test kitérése 1m és 4 m/s sebességgel távolodik az egyensúlyi helyzettől, és ekkor a visszatérítő erő 8N

Megoldás:

ω - keressük, tudjuk, hogy $D=m \omega^2$, ahonnan a keresett mennyiség: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

De nem tudjuk, mekkora a D!!

A harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele: $F=-D x$, innen D nagysága $D=F/x$

$$\text{Vagyis } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{F/x}{m}} = \sqrt{\frac{8N/1m}{2kg}} = 2s$$

A $t=0s$ időpillanatban

$$x(0s)=A \sin(0+\varphi_0) \text{ és } v(0s)=A \omega \cos(0+\varphi_0),$$

$$\text{vagyis } 1m = A \sin(\varphi_0), \text{ és } 4m/s = A 2s \cos(\varphi_0).$$

$$\text{A kettő hányadosából: } \frac{x}{v} = \frac{1m}{4m/s} = \frac{1}{2s} = \tan(\varphi_0), \text{ ahonnan } \varphi_0 = 0,46rad$$

Ezt visszaírva az $1m = A \sin(\varphi_0)$ egyenletbe kapjuk, hogy $A = 2,23m$

9. Egy a harmonikus rezgőmozgást végző kitérése az amplitúdó fele. Mekkora a test mozgási és rugalmas energiáinak aránya ebben a pillanatban?

Megoldás:

Ha a rezgőmozgást végző test kitérése az amplitúdó fele:

$$x=A/2 : A \sin \varphi = A/2 \quad (\text{ahol } \varphi \text{ a fázist jelenti, vagyis } \varphi = \omega t + \varphi_0)$$

$$\text{innen: } \sin \varphi = \frac{1}{2}$$

Az egyes energiák hányadosa:

$$\begin{aligned} \frac{E_m}{E_r} &= \frac{\frac{1}{2} m v^2}{\frac{1}{2} D x^2} = \frac{m (A \omega \cos \varphi)^2}{D (A/2)^2} = \frac{m (A \omega \cos \varphi)^2}{m \omega^2 (A/2)^2} = \frac{m A^2 \omega^2 (\cos \varphi)^2}{m \omega^2 A^2 (1/2)^2} = \frac{(\cos \varphi)^2}{(1/2)^2} \\ &= \frac{1 - (\sin \varphi)^2}{(1/2)^2} = \frac{3/4}{1/4} = 3 \end{aligned}$$

10. Egy vízszintes lapon hasáb nyugszik. Mekkora amplitúdónál nem csúszik meg a test, ha $\mu_0=0.4$, és a lap $T=3s$ periódusidővel vízszintes harmonikus rezgésbe hozzuk?

Megoldás.:

A dinamika alapegyenletéből: a test nyugalomban marad a lapon, ha a rá ható erők kiegyenlítik egymást, vagy előjeles összegük nulla.

A testre két vízszintes erő hat: a súrlódás, és a lap gyorsulásából származó:

$$F_{\text{lap}} = a_{\text{lap}} m_{\text{hasáb}},$$

ahol a lap gyorsulását a harmonikus rezgőmozgásból megismert sinusos összefüggés adja, és maximuma $a_{\text{max}} = A \omega^2$.

Ha ennél az F_{max} -nál sem csúszik meg a lap, vagyis $F_{\text{max}} = F_{\text{tap, max}}$, akkor nem fog egyáltalán megcsúszni a lap rezgése során.

$$F_{\text{max}} = F_{\text{tap, max}} \quad \text{–t kifejtve:}$$

$$a_{\text{max}} m_{\text{hasáb}} = \mu_0 m_{\text{hasáb}} g,$$

a tömeggel egyszerűsítve:, és beírva $a_{\text{max}} = A \omega^2$, kapjuk:

$$A \omega = \mu_0 g,$$

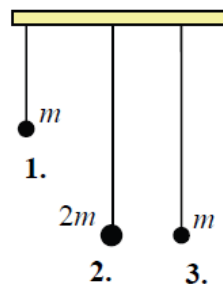
már csak ω –t kéne kiszámolni: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ahonnan

$$A \frac{2\pi}{T} = \mu_0 g,$$

beírva az ismert adatokat: $A \left(\frac{2\pi}{3s} \right)^2 = 0,4 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2$, kapjuk, hogy $A = 0,911 \text{ m}$

11. Egy motor dugattyúja 3000 1/min fordulatszámon jár és 10 cm-es lökethosszon. Mekkora a 10 dkg tömegű dugattyú rezgési energiája?

12. Három fonálingát egyensúlyi helyzetéből ugyanakkora kis szöggel, azonos irányban kitérítjük, majd egyszerre elengedjük azokat. Az ingatestek tömege m , illetve $2m$. Melyik két ingatest ér egyszerre a szemközti szélső helyzetbe, ha a légellenállást elhanyagoljuk?



13. Mekkora az 1m-es fonálinga lengésideje, körfrekvenciája a Holdon, ahol a nehézségi gyorsulás a földi érték hatodrésze?
Ha a maximális oldalkitérésnek 5cm, akkor mekkora a maximális sebesség és a legnagyobb gyorsulás?

Megoldás:

A fonálinga lengésideje a Holdon:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{\text{Hold}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\frac{g_{\text{Föld}}}{6}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1\text{m}}{\frac{9,8\text{ m/s}^2}{6}}} = \mathbf{4,92\text{s}}$$

a körfrekvenciája: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \mathbf{1,28\text{ 1/s}}$

A mechanikai energia megmaradás tétele a maximális kitérésű és a maximális

sebességű (függőleges) helyzetre: $mgh = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2$

innen: $v_{\text{max}} = \sqrt{2gh}$

Az ábráról: $h = L - L \cos\Phi_0$

és a szaggatott, a maximális oldalkitérés:

$$5\text{cm} = 1\text{m} \sin\Phi_0$$

tudjuk, hogy $\cos\Phi_0 = \sqrt{1 - \sin^2\Phi_0}$

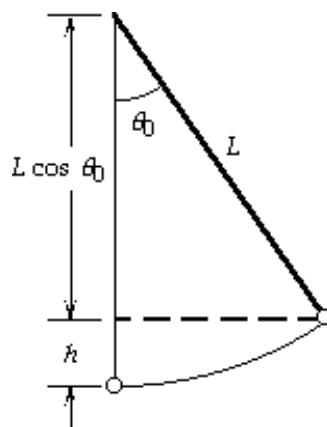
Összegezve:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2g(L - L \sqrt{1 - \sin^2\Phi_0})} = \mathbf{0,16\text{ m/s}}$$

Még kérdés az $a_{\text{max}} = A \omega^2 = ?$

Tudjuk, hogy $v_{\text{max}} = A \omega = 0,16\text{ m/s}$

A v_{max} -t beírva a_{max} -ba, kapjuk: $a_{\text{max}} = v_{\text{max}} \omega = 0,16\text{ m/s} \cdot 1,28\text{ 1/s} = \mathbf{0,2048\text{ m/s}^2}$



14. Egy rugós játékpisztolyban 3 cm-rel nyomjuk össze a rugót és 5 grammos lövedéket lövünk ki vele. A rugóállandó 300 N/m. Mekkora munkával tudjuk a pisztolyt felhúzni? Mekkora sebességgel lövi ki a golyót a pisztoly?

Megoldás:

A mi munkánk, nagyságrendileg megegyezik a rugónak átadott, a rugóban tárolt energiával, ennek képlete:

$$W_r = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} 300\text{N/m} (0,03\text{m})^2 = 0,135\text{J}$$

Anikor a golyó a kilövés során, eléri a maximális sebességét, akkor a rudó a teljes energiáját átadta, és mozgási energia lett belőle:

$$W_r = E_{\text{kin, max}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2$$

$$0,135\text{J} = \frac{1}{2} 0,005\text{kg} v_{\text{max}}^2$$

$$v_{\text{max}} = \mathbf{7,35\text{m/s}}$$

15. Dóri megmérte az autójuk lengéscsillapítójának süllyedését, mikor az egész család beül az autóba, 1 cm-nek adódott.

A család együttes tömege 300 kg, az üres autó tömege 3 tonna.

Amikor kiszállnak, akkor harmonikus rezgőmozgást végez az autó. Mekkora ennek a rezgésideje?

Megoldás:

A rezgésidőt a következő összefüggés adja meg rugó-test rendszer esetén.:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

A tömegről vannak adataink, amikor beindul a rezgés, akkor már csak az autó tömege rezeg: $M=3$ tonna

$D=?$

Ezt pedig a kezdeti összenyomódásból tudjuk megadni, mert $F_{\text{rugó}} = Dx$ (most csak a nagyságokkal számolunk, az iránnyal nem)

$F_{\text{rugó}} = mg$, mivel a kocsi egyensúlyban van a kiszállás pillanata előtt

így: $mg = Dx$

Behelyettesítve az ismert adatokat: $3300\text{kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = D \cdot 1\text{cm}$

Innen $D=3237300 \text{ N/m}$

$$\text{Vagyis } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{3000\text{kg}}{D}} = 0,19\text{s}$$

16. Az úttest 18 m-es betonlapokból van összerakva, melyek között kicsi hézag van. Az autóban lévő rugós játék rugóállandója 10 N/m és a figura tömege $0,23 \text{ kg}$. Mekkora sebesség esetén kezd intenzív rezgésbe a játék?

Megoldás:

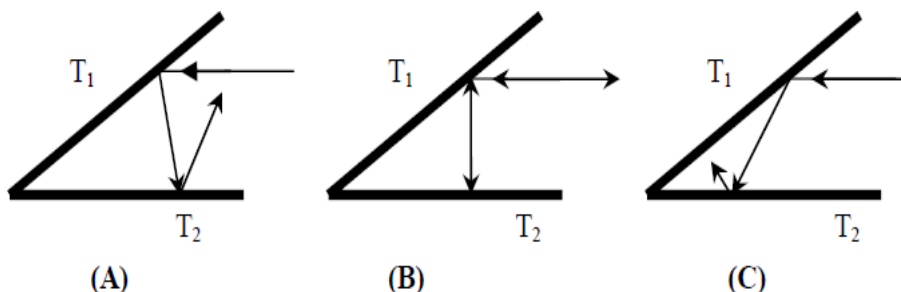
Amikor a sebességből adódó rendszeres zötytyenés ($t=s/v$), éppolyan ütemben jön,

mint a rugóra akasztott játék rezgésideje ($T = \frac{2\pi}{\omega}$, és $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$)

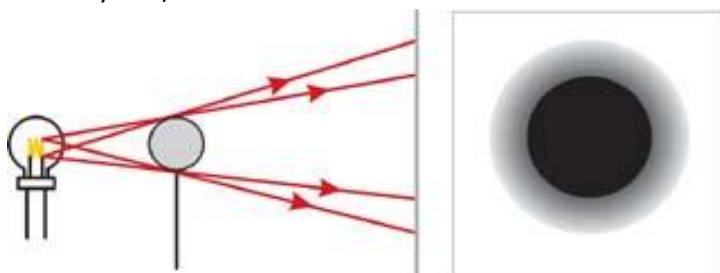
$$\text{Vagyis } \frac{s}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \text{ átrendezve: } v = \frac{s}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\text{beírva az ismert mennyiségeket: } v = \frac{18\text{m}}{2\pi} \sqrt{\frac{10\text{N/m}}{0,23\text{kg}}} = 18,89 \text{ m/s} = 68\text{km/h}$$

17. Két, egymással 30° -os szöget bezáró tükörre fénysugarat irányítunk T₂-vepárhuzamosan az ábra szerint. Melyik ábrán látható a helyes sugármenet a kétszeri visszaverődés során?



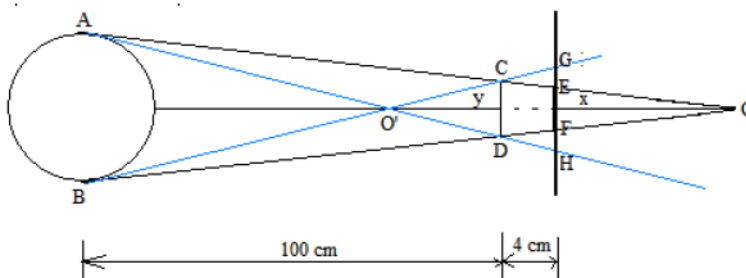
18. Egy 10 cm átmérőjű fényforrás középpontjától 1 m távolságra állítjuk az 2 cm átmérőjű lapos fémkorongot, amely mögött 4 cm-re van az ernyő. Mekkora az ernyőn a teljes árnyék, és a félaránykos terület?
(A fényforrás és a korong középpontját összekötő egyenes merőleges az ernyőre!)



Megoldás:

Az árnyék kör alakú, és a félaránykos körgyűrű alakú területéhez sugarak kellenek!

Készítsünk egy vázlatot:



Az ábrán a sugarakat az EF és GH átmérőkből tudjuk kiszámolni.

ABO, EFO háromszögek hasonlóak, ezért a megfelelő oldalak aránya megegyezik

$$\frac{AB}{CD} = \frac{104cm+x}{4cm+x}, \text{ ebből } x=21cm$$

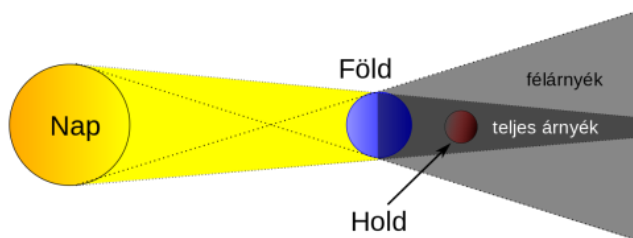
CDO és EFO hasonló háromszögekből megkapjuk a teljes árnyék EF átmérőjét:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{4cm+x}{x} \text{ innen } EF = 1,68cm \text{ vagyis } r_{\text{árnyék}} = 0,84cm$$

ABO', CDO' és a GFO' háromszögek hasonlóságát felhasználva kapjuk a gyűrű alakú félárnyék külső szélét határoló kör GH átmérőjét.:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{100cm-y}{y}, \text{ innen } y = 16,67cm$$

$$\frac{GH}{CD} = \frac{4cm+y}{y}, \text{ innen } GH = 2,48 \text{ cm, vagyis } r_{\text{félárnyék}} = 1,24cm$$



19. A nap sugarai 80° beesési szögben érkeznek a vízszintes talajra. Egy síktükörrel egy kút alját szeretnénk bevilágítani. Hogyan kell elhelyezni a tükröt?
20. Zsuzsi 1.65m magas. Szemei a talajtól 1.55m-re vannak. Egy függőleges síktükörben nézegeti magát, amely a szemeitől d távolságra található. Legalább mekkora tükröt vegyen,
21. A hanghullám terjedési sebessége levegőben 340 m/s , vízben 1490 m/s . Mekkora szögben törik meg az a hanghullám, ha 10° fokos beesési szögben érkezik?

Megoldás:

A Snellius-Descartes egyenlet:
$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Ebből kifejezve a kérdéses szöget:
$$\sin \beta = \frac{c_1}{c_2} \sin \alpha = \frac{340 \text{ m/s}}{1490 \text{ m/s}} \sin 10^\circ$$

22. Egy medencében nyakig vízben állva figyelünk egy tőlünk öt méterre lévő embert, aki szintén nyakig merül a kristálytiszt vízbe. Megpróbáljuk megállapítani, milyen színű fürdőnadrág van a másikon, de ez nehézséget okoz. Miért?

Megoldás:

Mert a fénytörés jelensége miatt változik a hullámhossz, és a terjedési sebesség a közeghatárnál.

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Vagyis a másik fürdőnadrágjától induló fény megváltoztatja a hullámhosszát, mikor átlép a víz-levegő határon, és a hullámhosszal együtt megváltozik a látható fény színe.

Megjegyzés: Ellenben, ha a megfigyelő lebukik a víz alá, akkor már az eredeti színt fogja látni!

23. Az új közegbe 30°-os beesési szöggel érkező hullám hullámhossza 12%-kal nagyobb lesz. Hogyan változik meg a hullám terjedési sebessége? Mekkora a törési szög?
24. A tengervízben 1500 m/s-mal halad a hang. Egy 30 kHz-es ultrahanghullám 3 másodperc alatt ér vissza a tengerfenékről. Milyen mély a tenger? Mekkora idő alatt érne vissza a hullám, ha a hajó 36 km/h-val halad?
25. Egy medve lazacra vadászik. Hova nyúljon a folyóba, hogy el is kapja a halat?

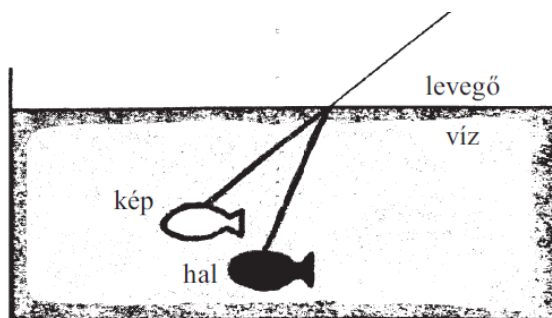
Megoldás

Kecsit elé, és lentebb, mint ahol a hal látszik.

Megjegyzés:

Ellenben ha lézerpisztollyal lövünk halat, akkor épp oda kell célozni, ahol a hal van, mivel a fény útja megfordítható.

(A medvék egyébként nagyon okosan a vízből ki-ki ugró halakat kapják el!!!)



26. Fénynél a víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója $n_{\text{víz:levegő}} = 1$; 33.

Lehetséges-e, hogy a fény nem jut ki a vízből, mert a közegetárral párhuzamosan halad tovább a fénytörés során?

Megoldás:

A közegetárral párhuzamos haladás matematikailag megfogalmazva: $\beta = 90^\circ$

A Snelius_Descartes törvényt használva úgy, hogy a víz az első közeg, onnan érkezik a fény.

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$n_{\text{levegő: víz}} = \frac{n_{\text{levegő}}}{n_{\text{víz}}} = \frac{1}{n_{\text{víz:levegő}}} = \frac{1}{1.333} = \frac{3}{4} = \frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \sin \alpha$$

$$\frac{3}{4} = \sin \alpha \quad \text{Innen: } \alpha = 48,59^\circ$$

27. A halász szélmentes időben csónakjáról horgonyt dobott a vízbe. A tó partján álló megfigyelő azt tapasztalta, hogy a horgony becsapódásakor keletkező hullám 27 s idő alatt ért el a partig, 12 s alatt 20 hullám érte a partot, és a hullámtarajok távolsága 1m. Milyen messze volt a halász csónakja a parttól?

Megoldás:

Kérdés: 27s alatt hány méternyi hullám ér partot?

Tudjuk, hogy

12s alatt 20db 1m-es hullám ér partot, az 20m

1 s alatt: (20m/12)

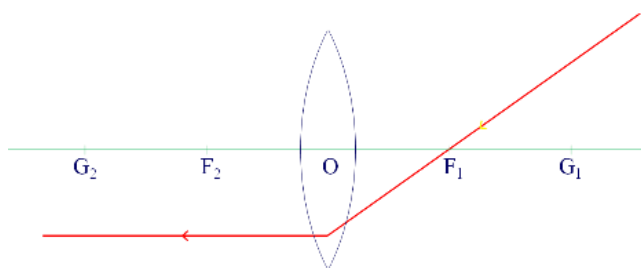
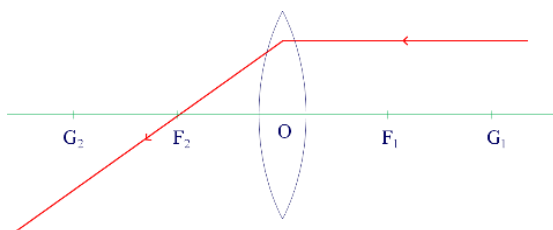
27s alatt: 27(20m/12)= 45m

28. Mekkora a borotválkozó tükör fókusztávolsága, ha arcunkról a tisztánlátás távolságában (25 cm) kétszeres nagyítású képet alkot?

29. Szerkessze meg egy 5 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse által egy 2 cm magas tárgyról alkotott képet, ha a tárgyat a lencsétől mérve a következő helyekre tesszük: 2 cm, 8 cm, ill. 10 cm! Szerkessze meg egy 5 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse által egy 2 cm magas tárgyról alkotott képet, ha a tárgyat a lencsétől mérve a következő helyekre tesszük: 2 cm, 8 cm, ill. 10 cm!

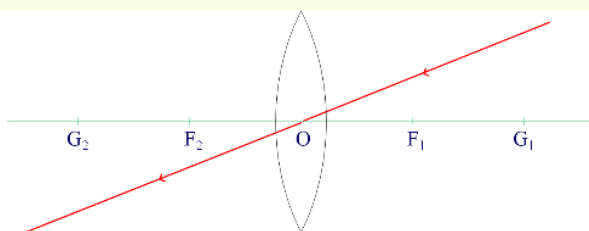
Megoldás a nevezetes sugarakkal való szerkesztés:

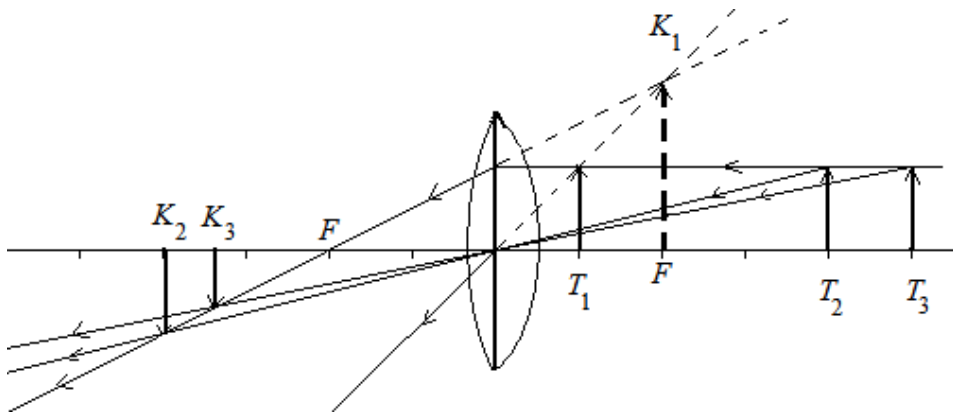
1. Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugár a másik oldalon lévő a fókuszponton halad keresztül



2. A fókuszponton át érkező fénysugár az optikai tengellyel párhuzamosan halad tovább.

3. Az optikai középponton át érkező fénysugár irányváltoztatás nélkül halad tovább.





30. Egy domború tükör fókusz távolsága -30 cm. Mekkora nagyítású képet lát magáról a 60 cm távolságban lévő megfigyelő? Szerkessze meg a nevezetes sugármeneteket!

Megoldás:

$f = -30$ cm, $t = 60$ cm

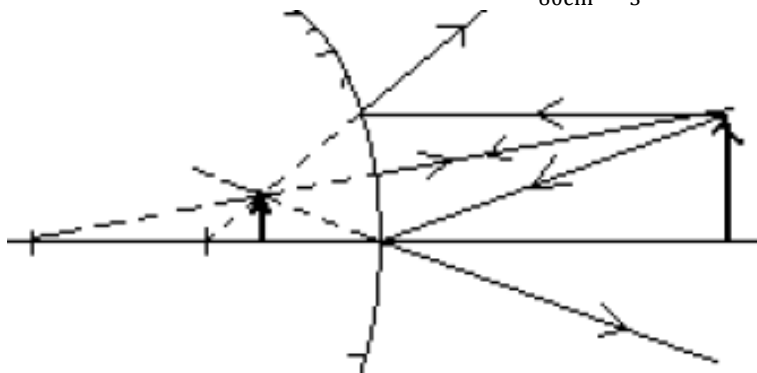
A keresett nagyítás: $N = -\frac{k}{t}$

Az f (fókusz távolság), t (tárgy távolság), és k (képtávolság) közt a tükör egyenletet

ad összefüggést: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$

Innen: $\frac{1}{k} = \frac{1}{f} - \frac{1}{t}$, vagyis $k = \frac{tf}{t-f} = -20$ cm

Így már ki tudjuk számolni a nagyítást: $N = -\frac{-20 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$



31. Mekkora a borotválkozó tükör fókusztávolsága, ha arcunkról a tisztánlátás távolságában (25 cm) kétszeres nagyítású képet alkot?
32. Mekkora a fényképezőgép-objektív gyújtótávolsága, ha a 60 m távolságban lévő 15 m magas épületről 2 mm magasságú valódi képet állít elő a CCD-chipen?
33. Hogyan kell elhelyezni két, 15 cm fókusztávolságú gyűjtőlencsét a közös optikai tengelyükön, hogy az egyik lencsére az optikai tengellyel párhuzamosan beeső fénysugarak a másik lencsét párhuzamosan hagyják el? Szerkessze meg a fénysugarak útját!

V.fejezet: Hullámtan és optika
szerző: Dr. Horváth Zoltán

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014



Elméleti bevezető

1. Hullámtani összefoglaló

1.1. A hullámokról általában

Hullámon általában valamilyen közegben tovaterjedő zavart értünk. Például, ha nyugalomban lévő vízfelületre egy kisméretű követ ejtünk, akkor azon a helyen a vízfelülethez közeli pontok mozgásba jönnek. Ezzel megzavartuk a közeg nyugalmi állapotát. Ennek a zavarási állapotnak a keletkezésének helyétől - az idő tovahaladtával arányosan - a vízfelszín egyre távolabbi pontjai jönnek mozgásba. A víz szabad felszínén - a kövel megzavart helyről kiindulva - egy időben arányosan távoluló sugarú körgyűrű mentén terjed tova a zavarási állapot. Hasonlóan, ha egy vékony, hosszú kifeszített gumikötél, vagy fémszál (húr) egyik végét harmonikus rezgésre készítjük, akkor a közeg többi pontja is – a közöttük lévő kölcsönhatás miatt – szintén ugyanolyan frekvenciájú harmonikus rezgésbe kezdenek, azonban az egyes rezgések között a *helytől függő fáziskülönbség* van. Egy vékony gumikötél, vagy húr *egydimenziós* pontsornak tekinthető a számolásoknál, amely nyilván egyszerűsítése a valódi közegnek, de ez az egyszerűsítés jelentősen megkönnyíti a modellezést, és az ezzel kapott eredmények jó közelítését adja a valódi közeg mozgásának. Hasonlóan hasznos absztrakció egy kifeszített hárttyát, membránt vagy egy folyadék szabad felszínét *kétdimenziós* közegnek tekinteni. Ebből a szempontból tehát beszélhetünk egydimenziós közegben (vagy pontsoron), kétdimenziós közegben (vagy felületen) és háromdimenziós (térbeli) hullámokról.

A hullámok között nagyon fontos szerepet játszanak azok a hullámok, melyeknél a zavart leíró Ψ fizikai mennyiség a tér *minden* pontjában *egymással megegyező*, adott ω körfrekvenciájú *harmonikus rezgést* végez, azaz az

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

függvény szerint változik időben, ahol A az amplitúdó, φ a fázisállandó és t az idő. Ezeknek a harmonikus rezgéseknek az amplitúdója és kezdőfázisa a helytől függően eltérő lehet, így a tér egy P pontjában Ψ fizikai mennyiség a

$$\Psi(P, t) = A(P) \sin[\omega t + \varphi(P)] \quad (2)$$

összefüggéssel írható le, ahol az $A(P)$ amplitúdó és a $\varphi(P)$ fázisállandó *az adott hullámtípusra jellemző módon függenek a helytől*. Hullámok esetén, a rezgésektől eltérően, a fázisállandó helyett sokszor a *térfüggő fázis* elnevezés használjuk a $\varphi(P)$ függvényre, amely sokkal kifejezőbb elnevezés, hiszen ez a mennyiség nem is

állandó, mert függ a P pont helyétől. A (2) egyenletben a szinusz függvény argumentumára lévő

$$\Phi(P, t) = \omega t + \varphi(P) \quad (3)$$

mennyiséget a hullám *fázisának* hívjuk, és gyakran – megkülönböztetésképpen a $\varphi(P)$ térfüggő fázistól – időfüggő fázisnak nevezzük, bár nyilván a helytől is függ. Ha a (2) kifejezésre alkalmazzuk a sin függvény

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

addíciós tulajdonságát, akkor a hullám tér- és időbeli függését leíró formulájára a

$$\Psi(P, t) = a(P) \cos \omega t + b(P) \sin \omega t \quad (4)$$

egyenlet adódik, ahol

$$a(P) = A(P) \sin \varphi(P) \quad \text{és} \quad b(P) = A(P) \cos \varphi(P)$$

A (2) vagy (4) formulákkal leírt hullámtípust *harmonikus hullámnak* nevezzük. Széleskörben elterjedt még rájuk a *szinuszos hullám* vagy a *monokromatikus hullám* elnevezés is. A monokromatikus hullám elnevezés az egyszínűsége utal, ugyanis a fény színekében egyetlen vonalnak megfelelő hullám is éppen ilyen módon írható le. Más szempontból is fontos a szerepük: megmutatható, hogy a bonyolultabb időfüggésű hullámok általában egyértelműen előállíthatók monokromatikus hullámok összegeként. Ezt az előállítást *Fourier-féle előállításnak* nevezzük.

A (2) és (4) egyenletek teljesen egyenértékű kifejezések. Azt szokás használni, amely az adott problémánál jobban megfelel, könnyebb vele a számolás, vagy jobban kifejezi a fizikai mondanivalót. A (4) egyenlettel adott forma például könnyebben általánosítható arra az esetre, amikor a hullámban változó fizikai mennyiség *vektormennyiség*. Ilyen például a *fény*, vagy egy szilárd rugalmas közegben terjedő *deformációs hullám*. Ilyen vektor jellegű hullámokra az a és b fizikai mennyiségek a helytől függő *vektorértékű függvények*, azaz *vektorterek* (vagy másnéven *vektormezők*). Érdemes megjegyezni, hogy az ilyen vektorjellegű hullámoknál nagyon fontos fizikai jelenség léphet fel: a polarizáció.

Amikor egy monokromatikus hullámmal leírható zavar a térben tovaterjed, akkor a szomszédos helyek térfüggő fázisa egymástól valamelyest eltér. A harmonikus hullámok jellemzésénél fontos szerepet játszanak azon helyek, melyekben a hullám fázisa egy adott időpontban ugyanazt az értéket veszi fel. Egy tovaterjedő zavar - másnéven *haladó hullám* - esetén ezek a helyek egydimenziós közegben *elkülönült (izolált) pontok*, kétdimenziós közeg esetén *görbék*et, míg

háromdimenziós közegben *felületeket* alkotnak. Azon pontok halmazát melyekben a hullám fázisa egy adott (önkényesen választott) értéket vesz fel *hullámfrontnak*, vagy *hullámfelületnek* nevezzük. A hullámfront alakja szempontjából így beszélhetünk *sík*-, *gömb*- vagy *hengerhullámokról*, amelyeknél nyilván a hullámfelület *sík*-, *gömb*- vagy *hengerfelület*. Ezek a számolásoknál gyakran alkalmazott típusok, de nyilván ettől eltérő és bonyolultabb hullámfelületek is lehetségesek. A háromdimenziós esethez hasonlóan, kétdimenziós hullámok esetén a számolásnál és a kísérleti szemléltetésnél is gyakori hullámtípus az *egyenes hullámfrontú* és a *kör hullámfrontú* hullámok. Vízhullámkádban, ha például egy vékony egyenes rudat harmonikusan rezgetünk, akkor jó közelítéssel egyenes hullámfrontú vízhullám keletkezik. Hasonlóan, ha egy kis harmonikusan rezgő fénycsúcscsal mozgatjuk meg a vízfelszínét, akkor kör hullámfrontú hullám jön létre.

A bevezetőben említett példánál, a hosszú és vékony kifeszített gumikötél baloldali végét, az $x = 0$ helyet harmonikus rezgésre készítettük, akkor a végpont kitérését az

$$\Psi(0, t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

összefüggés írja le. Ha a gumikötélen a zavarási állapot, amelyet most a fázis jellemez, c sebességgel terjed, akkor az x koordinátájú helyre a zavar $\tau = x/c$ időbeli késéssel érkezik meg. Így a kitérés az x helyen τ idővel később lesz pont ugyanolyan, mint az origóban (az $x = 0$ helyen) volt. Ennek megfelelően a kitérés az x helyen a

$$\Psi(x, t) = A \sin[\omega(t - x/c) + \alpha] \quad (6)$$

összefüggéssel számolható ki. Ezt összehasonlítva az általános monokromatikus hullám (2) egyenletével, akkor láthatjuk, hogy az A amplitúdó állandó a gumikötél mentén, míg a térfüggő fázist a

$$\varphi(x) = -kx + \alpha$$

formula adja meg az x koordinátájú pontban, ahol $k = \omega/c$ az úgy nevezett körhullámszám. Ha a (6) összefüggésbe behelyettesítjük a T rezgési periódusidő és a ω körfrekvencia között fennálló $\omega = 2\pi/T$ relációt, akkor pontsoron terjedő monokromatikus hullámra a

$$\Psi(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right] \quad (7)$$

egyenletet nyerjük, ahol $\lambda = cT$. Ebből az összefüggésből könnyen kiolvasható a λ mennyiség fizikai jelentése: kihasználva a szinusz függvény 2π szerint periodikus függvény, tetszőleges, de rögzített t idő mellett a Ψ fizikai mennyiség bármely x

helytől λ távolsággal közelebbi, vagy távolabbi pontban ugyanazt az értéket veszi fel, azaz formulával írva

$$\Psi(x, t) = \Psi(x \pm \lambda, t)$$

Ez az összefüggés a hullámjelenség *térben periodikus* tulajdonságát fejezi ki, a λ mennyiség pedig a *térbeli periódus*. Ugyancsak a szinusz függvény periodicitása miatt könnyen látható a (2) egyenletből, hogy

$$\Psi(P, t) = \Psi(P, t \pm T)$$

összefüggés áll fenn bármely P helyen és t időpontra, amely azt mutatja, hogy bármely monokromatikus hullám *időben periodikus* és az időbeli periódusa T .

Az x pontsoron terjedő monokromatikus hullámot leíró (6) és (7) formulák ugyanazt a hullámjelenséget írják le, csak az egyes (ekvivalens) alakok a jelenség más tulajdonságára világítanak rá! A (6) egyenlet azt hangsúlyozza, hogy olyan hullámjelenségről van szó, amelyben a fázisállapot c sebességgel terjed a pontsor mentén, míg a (7) reláció a jelenség időben és térben periodikus tulajdonságát emeli ki. A (6) és (7) összefüggések mellett igen elterjedt még a körfrekvenciát és a körhullámszámot tartalmazó

$$\Psi(x, t) = A \sin[\omega t - kx + \alpha] \quad (8)$$

alak is. Az x pontsoron terjedő monokromatikus hullám fázisát szintén többféle alakban adhatjuk meg:

$$\Phi(x, t) = \omega t - kx + \alpha = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha = \omega(t - x/c) + \alpha. \quad (9)$$

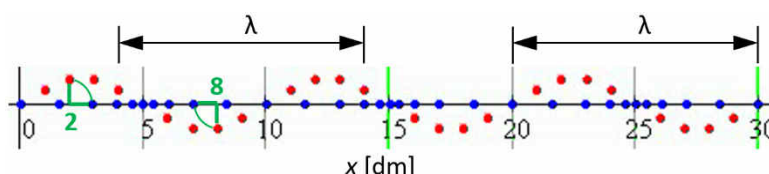
A $\lambda = cT$ összefüggésből a kifejezhetjük a hullám terjedési sebességét, továbbá a ν frekvencia és a T időbeli periódus közötti $\nu = 1/T$ összefüggést felhasználva a

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \quad (10)$$

gyakran használt, ezért nagy fontossággal bíró relációt kapjuk.

Ha a hullámban változó fizikai mennyiség vektormennyiség, akkor ezt célszerű felbontani a hullámterjedési irányába eső, ún. *longitudinális* komponens és egy a terjedési irányra merőleges, ún. *transzverzális* komponensek összegére. Ha hullámban rezgő fizikai mennyiség rezgési iránya megegyezik a terjedési iránnyal, akkor a hullámot *longitudinális hullámnak*, ha pedig a rezgési irány merőleges a terjedési irányra, akkor a hullámot *transzverzális hullámnak* nevezzük. Az 1. ábra az x pontsor bizonyos, valamilyen színnel megjelölt, a nyugalmi helyzetükben egyenközűen, egymástól 1 dm távolságra lévő pontjainak a helyzetét szemlélteti egy adott időpillanatban, amikor a pontsoron egy $\lambda = 10$ dm hullámhosszúságú monokromatikus hullám halad. A piros színnel jelölt pontok egy transzverzális

hullámot, a kék színnel jelölt pontok pedig egy longitudinális hullámot szemléltetnek. Mint látható, transzverzális hullám esetén hullámhegyeket és hullám völgyeket figyelhetünk meg, míg longitudinális hullámnál sűrűsödési és ritkulási helyek jelennek meg. Két szomszédos hullámhegy (vagy völgy) között egy hullámhossznyi távolság van. Nyilván ugyanez igaz két szomszédos sűrűdési (vagy ritkulási) helyre is.



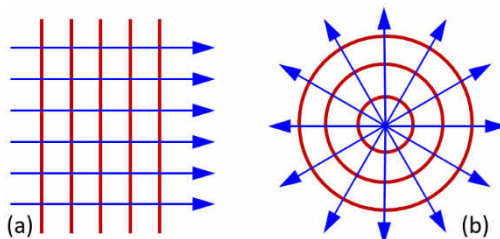
1. ábra. Kifeszített gumikötélen terjedő transzverzális (piros pontok) és longitudinális (kék pontok) hullám szemléltetése.

Az 1. ábrából is kitűnik, hogy a longitudinális hullámot nehezebb szemléltetni. Ezért nagyon gyakran a szemléltetéshez transzverzális hullámot szoktak használni olyan esetben is, mikor a hullám valójában longitudinális. A transzverzális hullám kitéréséből könnyen megszerkeszthető a longitudinális hullám kitérése: Az adott helyen a transzverzális kitéréshez tartozó merőleges szakaszt az óramutató járásával egyező irányba, 90° -kal forgatva, adódik a longitudinális hullámhoz tartozó kitérés, ahogy ezt az 1. ábrán láthatjuk az $x = 2$ dm és az $x = 8$ dm nyugalmi helyen lévő pontokra (lásd a zöld színű címkéket).

1.2. Hullámok visszaverődése és törése

Kifeszített gumikötélen egyik végén keltett zavar mozgását figyelve könnyen megfigyelhetjük, hogy amikor a zavar eléri a kötélmásik végét, akkor egy visszafelé terjedő zavar jelenik meg, amely ezután a végpontot ismét elérve újból ellentétes irányba terjed tovább. Ez a jelenség a hullám *visszaverődése*. Általában, mikor a hullám a térben a hullámhosszához képest nagyméretű határfelülethez érkezik, melynél a terjedési sebesség hirtelen megváltozik, vagy a hullám nem képes behatolni a határfelület túloldalán lévő közegbe, akkor a határfelületről visszaverődik. Amennyiben a hullámtérben lévő akadályok mérete jóval nagyobb, mint a hullámhossz, akkor a hullámok viselkedése jól jellemezhető az ún. *geometriai sugarakkal*, melyek a *hullámfrontokra merőleges görbesereg*. Egy adott geometriai sugár egy tetszőleges pontjában húzott érintője merőleges a kérdéses pontot tartalmazó hullámfelületre. Megmutatható, hogy egy az adott ponton átmenő geometriai sugár érintője a hullámban terjedő energia terjedési irányába

esik. Éppen ezért, a sugaraknak irányítottságot is szokás tulajdonítani, melyet a sugárra rajzolt nyíl jelez, és amely az energia terjedésének irányát mutatja. Mikor a szövegkörnyezetből kiderül, hogy geometriai sugárra gondolunk, egyszerűen a sugár szót használhatjuk. Optikában ezeknek felelnek meg a *fénysugarak*. Olyan közegben, amelynek minden pontjában ugyanannyi a terjedési sebesség (*homogén közeg*), és minden irányba azonos a terjedési sebesség (*izotróp közeg*), a hullámterjedést jellemző (geometriai) sugarak *egyenesek*. Ez azt jelenti, hogy *homogén és izotróp közegben a hullámok egyenes vonalban terjednek*. A 2. ábrán nyílakkal ellátott kék vonalak a sugarakat, a piros görbék pedig a hullámfrontokat szemléltetik. A beeső hullám geometriai sugarai ismeretében könnyen meghatározhatjuk a visszavert hullám geometriai sugarait, az optikából ismert fénysugarak visszaverődésével teljesen analóg törvény segítségével. Nevezetesen a következő két állítás igaz:



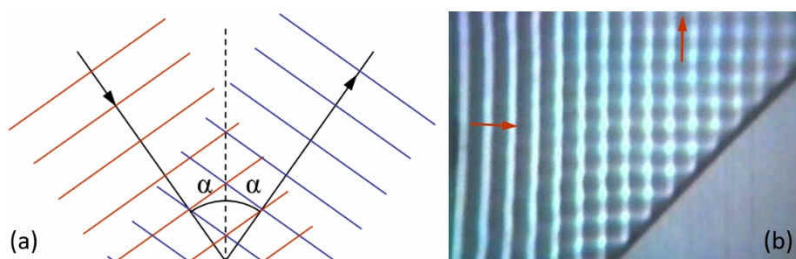
2. ábra. A hullámfrontok (piros görbék) és a hozzájuk tartozó geometriai sugarak (kék egyenesek) szemléltetése háromdimenziós sík- (a) és gömbhullámra, vagy kétdimenziós egyenes (a) és kör hullámfrontú hullámra. Háromdimenziós hullámok esetén az ábra a hullámfrontok merőleges síkmetszeteit mutatja.

1. A beeső sugár, beesési merőleges és a visszavert sugár egysíkban vannak. A beesési merőleges a visszaverő felület azon pontjában, ahol a beeső sugár eléri a felületet, a felület érintősíkjára merőleges egyenes. A beeső sugár és a beesési merőleges által meghatározott síkot *beesési síknak* nevezzük. Az előbbi állítást úgyis megfogalmazhatjuk, hogy *a visszavert sugár a beesési síkban van*.
2. A visszavert sugárnak a beesési merőlegessel bezárt szöge (a visszaverődési szög) egyenlő a beeső sugárnak a beesési merőlegessel bezárt szögével (a beesési szöggel).

A sugarakkal való leírás persze csak közelítő jellegű, de mindaddig amíg az akadályok mérete jóval nagyobb, mint a hullámhossz, a közelítés jó, és így a sugarak nagyon hasznos segédeszközei a hullám viselkedésének meghatározására. Hasonlóan jól használhatók a hamarosan ismertetendő problémánál, hullámok törésénél is!

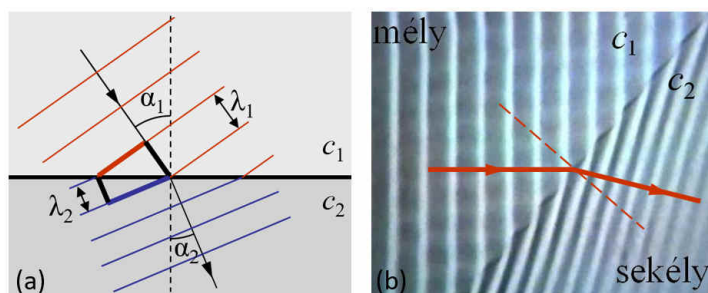
A 3. ábra (a) része (balra) a hullámok visszaverődésének előbb ismertetett törvényszerűségeit szemlélteti. A (b) részen (jobbra) vízhullámok visszaverődését

bemutató kísérlet fényképe látható. A rácsos mintázatot a beeső és a visszavert hullámok találkozásánál fellépő *interferencia* okozza.



3. ábra. (a) Síkhullámok visszaverődésének szemléltetése. A beeső hullámfrontokat a piros, a visszavert hullámfrontokat kék szín mutatja. Ezek az egyenesek a hullámfrontok és a beesési sík metszetei. A sugarakat fekete folytonos, a beesési merőleges fekete szaggatott vonal mutatja. (b) Egyenes hullámfrontú víz hullámok visszaverődését bemutató hullámkádbeli kísérlet.

Ha hullám olyan határfelülethez érkezik, ahol a terjedési sebessége ugrás-szerűen megváltozik, és a hullám behatol a másik közegbe, akkor a felületen átlépő hullám terjedési iránya – a merőleges beeséstől eltekintve – megváltozik.



4. ábra. (a) Síkhullámok törésének szemléltetése. A beeső hullámfrontokat a piros, a megtört (átlépő) hullámfrontokat kék szín mutatja. Ezek az egyenesek a hullámfrontok és a beesési sík metszetei. (b) Egyenes hullámfrontú víz hullámok törését bemutató kísérlet képe.

Ezt az itt leírt - a 4. ábrán szemléltetett - jelenséget a *hullámok törésnek* nevezzük. A beeső és a megtört sugarak a beesési merőlegessel bezárt szögei, az α_1 beesési szög és az α_2 törési szög közötti kapcsolatot az optikából is jól ismert *Snellius-Descartes-féle törvény* adja meg:

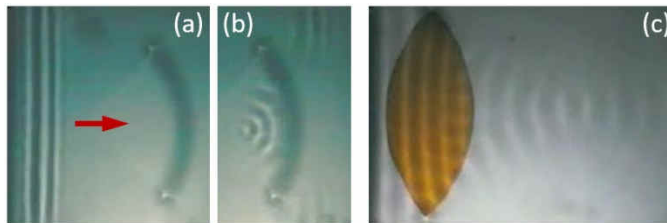
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (11)$$

ahol c_1 és c_2 rendre a hullám terjedési sebessége a beesési és a törési oldalon lévő közegben (4. ábra). Az egyenlet jobb oldalán álló – a közegpárra jellemző –

$$n_{21} = c_1/c_2 \quad (12)$$

hányadost a második közeg elsőre vonatkozó *relatív törésmutatójának* nevezzük. A (11) összefüggésen kívül a hullámok törésének még fontos sajátossága az is, hogy *a megtört sugár a beesési síkban van*.

A törés és a visszaverődés előbb ismertetett sajátosságaival már könnyen magyarázható a homorú és domború felületek tükröző tulajdonsága, továbbá a gyűjtő- és szórólencsék viselkedése is.



5. ábra. Vízhullámok fókuszálása homorú tükörrel (a-b) visszaverődés útján és domború lencsével törés útján (c).

Az 5. ábra baloldali két (a-b) képén egy hullámkádba helyezett, kör alakúra hajlított alumínium lemezre balról beeső egyenesfrontú hullám látható, amely a homorú lemezt elérve és arról visszaverődve, a lemeztől a görbületi sugár fele távolságra lévő (fókusz-)pont felé tartó - körcikkfrontú hullámmá – alakul át (b). A középső kép alsó és felső részén, a homorú tükör mellett elhaladó hullámot látjuk. A jobboldali (c) képen egy vízhullámokat *fókuszáló* lencse látható. A hullámkádba helyezett lencse alakú üveglemez felett lévő sekélyebb vízben a hullámok lassabban terjednek, mert a terjedési sebességük ilyen módon függ a vízmélységtől. Így terjedési sebesség hirtelen változása miatt - az elülső és hátulsó kör alakú határgörbék mentén - törés lép fel. Ennek következtében a balról beeső egyenesfrontú hullám konvergens körcikkfrontú hullámmá alakul át, már az üveglap feletti elülső határon is. A hátulsó határon való újabb törés után a hullámfrontok görbületi sugara ismét megváltozik, láthatóan kisebb lesz, ennek megfelelően a hullámfront görbültebb lesz. A két határon fellépő törés végeredményeként kialakul a lencsét elhagyó fókuszált vízhullám. A fókuszponthon áthaladva konvergens hullámból mindkét esetben egy *széttartó* körcikkfrontú hullám lesz. Az előző három (3-5) ábrák alapján is láthatjuk, hogy a vízhullámok segítségével nagyon szemléletesen mutathatók be a hullámokkal kapcsolatos jelenségek. Fény- és

hanghullámok esetén is teljesen hasonlóan játszódnak le ezek a jelenségek, csak ott a hullámfrontokat nem látjuk.

1.3. Hullámok interferenciája

Gyakorlatban sokszor megtörténik, hogy a tér valamely pontjában egyidejűleg több hullám halad keresztül. A hullámok találkozása során fellépő jelenséget *interferenciának* nevezzük. Az interferencia hatására létrejövő hullámjelenség - sok esetben - egyszerűen, ún. *zavartalan szuperpozíció* elvével értelmezhető. Ezen elv szerint, ha a tér valamely pontján egyszerre több hullám halad keresztül, akkor a hullámok egymástól függetlenül fejtik ki hatásukat és az eredő hullámhoz tartozó időben változó fizikai mennyiségek az egyes hullámokhoz tartozó fizikai mennyiségek összege lesz. Vagyis röviden mondva a hullámok hatása zavartalanul összegződik. Ezt értjük hullámok zavartalan szuperpozícióján. Ha a szuperpozíció elve érvényes, akkor az eredő hullám elméleti vizsgálatánál a tér pontjaiban a hullámokban rezgő fizikai mennyiségeket kell összegeznünk. Ezért az interferencia tulajdonságainak megismeréséhez feltétlenül szükséges a *rezgések összeadásának* a vizsgálata. Monokromatikus hullámok esetén a tér minden pontjában azonos frekvenciájú harmonikus rezgéseket kell összegezni, ezért az interferencia hatásának tárgyalásánál a harmonikus rezgések összegzésénél megismert tudásra kell támaszkodnunk.

Ismert, hogy azonos irányú és azonos frekvenciájú harmonikus rezgések összege az összetevőkkel megegyező irányú és frekvenciájú harmonikus rezgés, melynek A amplitúdóját és α fázisállandóját az összetevők A_1 és A_2 amplitúdói és α_1 és α_2 fázisállandói határozzák meg az

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (13)$$

és

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (14)$$

összefüggéseken keresztül. A (13) egyenletből már egyszerűen balátható, hogy az eredő rezgés amplitúdója *maximális*, amennyiben az összetevők *azonos fázisban* adódnak össze (azaz $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \pm 2m\pi$, ahol m egész szám), illetve *minimális*, ha az összegzés *ellentétes fázisban* történik (azaz $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi \pm 2m\pi$, ahol m egész szám). Ez alapján, monokromatikus hullámok valamely pontban *maximálisan erősíthetik* egymást, ha *azonos fázisban* találkoznak, illetve *maximálisan gyengíthetik* egymást, amennyiben *ellentétes fázisban* vannak azon a helyen. Szemléletesen ezek azt jelentik, hogy azokon a helyeken, ahol hullámhegy

egy hullámheggyel találkozik, ott maximális erősítés, és ahol egy hullámvölgygel találkozik maximális gyengítés lesz. Amennyiben a találkozó hullámok amplitúdói megegyeznek, akkor a maximális gyengítés olyan jelentős, hogy az eredő rezgés amplitúdó *zérus* lesz, ekkor a két hullám *kioltja egymást*. Valamely pontban a találkozó hullámok által keltett rezgések fázisának különbségét – a (3) és a (9) egyenletek alapján – általában a hullámok által megtett távolságoknak a különbsége, az *úthosszkülönbség* és a források kezdőfázisainak különbsége határozza meg. Amennyiben *a hullámok kezdőfázisa megegyezik*, akkor a hullámok *maximálisan erősítik egymást*, ha az úthosszkülönbség a hullámhossznak m egész számú többszöröse, azaz

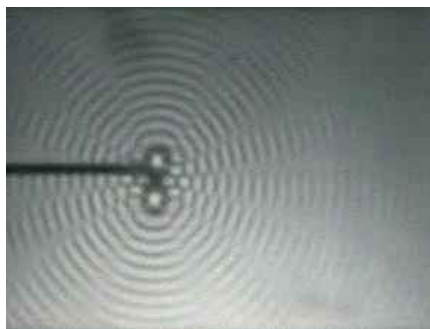
$$\Delta s = s_2 - s_1 = m\lambda = 2m \lambda/2, \quad (15)$$

ahol az utóbbi forma azt jelenti, hogy a feltétel a hullámhossz felének páros számú többszörösével is megfogalmazható. Maximális gyengítés akkor lép fel, ha az úthosszkülönbség a hullámhossz fele plusz hullámhossz egész számú többszörösével egyenlő, azaz

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \lambda/2 + m\lambda = (2m + 1) \lambda/2, \quad (16)$$

amely azt mutatja, hogy a feltétel a hullámhossz felének páratlan számú többszörösével is felírható.

Hullámok interferenciája, a visszaverődés és töréshez hasonlóan, kiválóan szemléltethető víz hullámok segítségével. A 6. ábra két azonos frekvenciával és azonos fázisban harmonikusan rezgő csúcs által létre hozott körhullámok interferenciájának eredményét szemlélteti. Jól látható, hogy vannak olyan helyek, ahol a víz felülete gyakorlatilag nem mozog. Ezeken a helyeken maximálisan gyengíti egymást a két víz hullám. Mivel a két hullám amplitúdója



6. ábra. Azonos frekvenciájú és azonos fázisú harmonikusan rezgő források által keltett körhullámok interferenciája hullámkádban.

lényegileg azonos, ezért a maximális gyengítés gyakorlatilag kioltást eredményez. A kioltási helyek – jól láthatóan – görbéken rendeződnek el a felületen. A (16) egyenlet miatt ezek olyan *hiperbolák*, melynek a fókuszpontjai a hullámforrások, ugyanis a hiperbola éppen olyan pontok halmaza, melyek a fókuszpontjaitól mért távolságuk különbsége állandó. Hasonlóan a (15) egyenlet következtében, a maximális erősítési helyek is hiperbolákon vannak. Egy maximális erősítéshez

tartozó hiperboláa a két szomszédos maximális gyengítéshez tartozó hiperbola között fut.

1.4. Állóhullámok és sajátfrekvenciák

A visszaverődéssel foglalkozó alfejezetben már megemlítettük, hogy a kifeszített gumikötélen az egyik végétől elindított zavar a végpontokon fellépő visszaverődések miatt a két végpont között oda-vissza halad a pontsoron. Ha a hullámvonulat hossza elegendően nagy a pontsor hosszához viszonyítva, akkor könnyen előállhat olyan helyzet, hogy a hullámvonulat bizonyos része összetalálkozik a végpontról már visszaverődött hullámvonulattal. Ekkor a kettő között interferencia lép fel. A beeső és a visszavert hullám frekvenciája, terjedési sebessége pontosan azonos, hiszen a két hullám azonos közegben halad. Továbbá, ha a visszaverő képesség elég közel van egyhez, akkor az amplitúdók is közel azonosak. Ettől azonban eltérhet a fázisaik viselkedése: visszaverődéskor a végpont típusától függően valamilyen *fázisugrás* léphet fel.

Kezdetben ne foglalkozunk a pontsor hosszának végeességével! Egyszerűen vizsgáljuk meg, hogy milyen hullámjelenség jön létre akkor, amikor az x pontsoron egymással szemben halad két pontosan egyező ω körfrekvenciájú, c terjedési sebességű és A amplitúdójú monokromatikus hullám és érvényes a zavartalan szuperpozíció elve. A pontsoron pozitív irányba (azaz jobbra) terjedő monokromatikus hullám (6) egyenlettel adható meg, azaz a

$$\Psi_+(x, t) = A \sin[\omega(t - x/c) + \alpha_1] \quad (17)$$

összefüggéssel. Az említett tulajdonságú, negatív irányba terjedő monokromatikus hullámot pedig a

$$\Psi_-(x, t) = A \sin[\omega(t + x/c) + \alpha_2] \quad (18)$$

reláció írja le. Mint látható, a két hullám fázisállandóit eltérőnek tételeztük fel, a többi fizikai jellemző – terjedési iránytól eltekintve – megegyezik. A szuperpozíció elve szerint az eredő hullámot a

$$\Psi(x, t) = \Psi_+(x, t) + \Psi_-(x, t) \quad (19)$$

kifejezés írja le. Ezt az összeget könnyen kiszámíthatjuk a

$$\sin u + \sin v = 2 \cos \frac{v - u}{2} \sin \frac{u + v}{2}$$

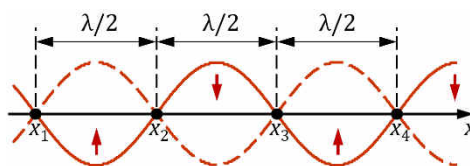
nevezetes trigonometrikus azonosság segítségével! Ha a (17) és a (18) képleteket behelyettesítjük a (19) formulába, és felhasználjuk az említett azonosságot, akkor a pontsoron kialakuló hullámra a

$$\Psi(x, t) = 2A \cdot \cos\left[kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right] \cdot \sin\left[\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right] \quad (20)$$

összefüggést kapjuk, ahol $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ a körhullámszám. Az első dolog, amely rögtön feltűnik a (20) függésben, hogy nem szerepel benne a haladó hullámokra jellemző $t \mp x/c$ argumentum (lásd a (17) és a (18) haladó hullámokat megadó képleteket). Látható, hogy (20) kifejezésben az x térváltozó és a t időváltozótól való függés szorzat alakban elkülönül! Ennek következtében a pontsor minden pontja olyan harmonikus rezgést végez, amelynek az a amplitúdóját az időfüggő tényező előtti szorzó faktorok abszolút értéke az

$$a = \left| 2A \cdot \cos\left[kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right] \right|$$

formula határoz meg. Ebből könnyen belátható, hogy a pontsoron vannak olyan – egyenként, egymástól $\lambda/2$ távolságra elhelyezkedő – pontok, ahol ez a rezgési amplitúdó zérus! Ezekben az ún. *csomópontokban* a mozgás megszűnik, azaz a pontsor ezen pontjai

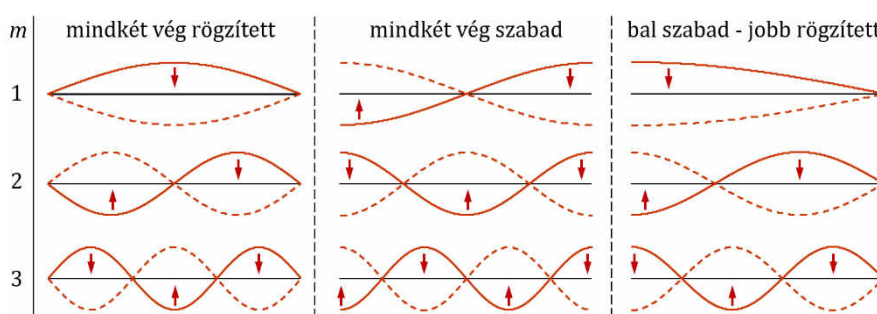


7. ábra. Az x pontsoron kialakuló állóhullám szemléltetése. Az állóhullám 4 csomópontját x_1 , x_2 , x_3 és x_4 jelöli. A csomópontok ellentétes fázisban mozgó pontokat választanak szét, melyett a fel és lefelé mutató nyilak jelölnek.

nyugalomban vannak! A csomópontokban az előző formulában lévő abszolút értéken belüli mennyiség éppen *előjelet vált*, továbbá két szomszédos csomópont között már *előjeltartó*, pozitív vagy negatív. Az időfüggő tényező előtti koszinuszos szorzófaktor negatív előjele a harmonikus rezgés fázisállandójában egy π *fázis-állandó változást* jelent. Így két szomszédos csomópont közötti pontok *azonos* fázisban mozognak, míg a *csomópontok ellentétes fázisban rezgő tartományokat választanak szét*. A rezgési amplitúdó éppen a csomópontok közötti részben középen *maximális*, melynek értéke $2A$. Ezeket a helyeket *duzzadóhelyeknek* nevezzük. Két szomszédos duzzadóhely között szintén $\lambda/2$ távolság van. A pontsor itt ismertetett, a (20) egyenlettel leírt mozgásait *állóhullámoknak* nevezzük. Állóhullámoknál a pontsor minden pontja *azonos frekvenciájú harmonikus rezgést végez, azonos vagy ellentétes fázisban*. Ez pontosan megegyezik a pontsor ún. *sajátrezgéseinek* definíciójával. Ezért az állóhullámokhoz tartozó frekvenciákat *sajátfrekvenciáknak* szokás nevezni. Az állóhullámoknak fontos szerepük van, mert az elméleti úton megmutatható, hogy a pontsor általános mozgása az állóhullámainak a szuperpozíciójaként áll elő.

A pontsor hosszának végeessége korlátozza azt, hogy milyen frekvenciájú és hullámhosszúságú állóhullámok alakulhatnak ki rajta. A tárgyalásnál figyelembe

kell venni azt is, hogy a pontsor vége, hogyan viselkedik. Ezek az ún. *határ-*, vagy *peremfeltételek*. A legtöbb gyakorlati szempontból érdekes esetben a pontsor vége *rögzített*, vagy *szabadon* mozoghat. Kísérletekkel és elméleti vizsgálattal is kideríthető, hogy *szabad végpontról* a hullámok a beesővel *azonos*, míg *rögzített végpontról* a beesővel *ellentétes* fázisban (azaz π fázisugrással) verődnek vissza. A probléma elméleti vizsgálata nem egyszerű, ezért itt csak egy rövid és szemléletes áttekintést adhatunk. Annak a feltétele, hogy véges hosszúságú pontsoron állóhullám jöjjön létre, vagyis a pontsor mozgása során a térben állandó helyzetű pontokban, a csomópontokban a rezgési amplitúdó zérus legyen, továbbá közöttük minden pont azonos frekvenciájú és fázisú harmonikusan rezgést végezzen úgy, hogy a csomópontok ellentétes fázisban rezgő részeket választanak szét, a következő: A bal végpontról elinduló rezgési fázis végig haladva a pontsoron, majd a jobb végpontról visszaverődve, majd visszafelé ismét végig haladva a bal végpontig és arról ismét visszaverődve, éppen meg kell hogy egyezzen az ekkor a



8. ábra. Véges hosszúságú pontsoron kialakuló állóhullámok szemléltetése.

bal végpontnál éppen elinduló elsődleges rezgési fázissal. Rövidebben fogalmazva: egy körbejárást követően a visszavert hullám fázisának meg kell egyeznie a primer hullám fázisával. Ez a feltétel már nagyon egyszerű relációkat szolgáltat a kialakuló állóhullámok hullámhosszára. A hullámhosszból a terjedési sebesség ismeretében a sajátfrekvenciák már egyszerűen kiszámíthatók. Most ezeket ismerjük meg.

Mindkét végén rögzített, vagy mindkét végén szabad / hosszúságú pontsoron, akkor alakulhat ki állóhullám, ha a pontsor hossza egész számú többszöröse a λ hullámhossz felének, azaz

$$l = m \lambda / 2 = 2m \lambda / 4, \quad (21)$$

ahol m pozitív egész szám. Látható, hogy a feltétel a hullámhossz negyedével is kifejezhető: a pontsor hosszának a hullámhossz negyedének páros számú többszöröse kell legyen. Amennyiben az egyik végpont (mondjuk a baloldali)

szabad, a másik rögzített, akkor az állóhullám kialakulásához a pontsor hosszának a hullámhossz negyedének páratlan számú többszöröse kell lennie, azaz az

$$l = (2m - 1) \lambda / 4 , \quad (22)$$

feltételnek kell teljesülnie, ahol m pozitív egész szám. Ezekből a feltétekből és a jól ismert (10) összefüggésből a sajátfrekvenciák már egyszerűen adódnak. Ennek megfelelően a mindkét végén rögzített vagy szabad l hosszúságú pontsoron létrejövő állóhullámok frekvenciáját a

$$\nu_m = m \frac{c}{2l} \quad (23)$$

összefüggésből számolhatjuk ki, ahol c a hullám terjedési sebessége és m pozitív egész szám. Az egyik végén szabad, a másik végén rögzített pontsor esetén pedig

$$\nu_m = (2m - 1) \frac{c}{4l} \quad (24)$$

reláció adja meg a sajátfrekvenciákat, ahol c és m az előző esettel azonos jelentésű.

Az elméleti leírásból ismert, itt nem részletezett módon megmutatható, hogy egy F erővel megfeszített q keresztmetszetű és ϱ sűrűségű húron, vagy gumikötélen a *transzverzális* hullámok terjedési sebessége

$$c = \sqrt{\frac{F}{q\varrho}} . \quad (25)$$

Ugyan csak részletezés és indoklás nélkül, egy vékony ϱ sűrűségű és E Young modulusú rúdiban terjedő longitudinális hullám terjedési sebessége

$$c = \sqrt{E/\varrho} . \quad (26)$$

Hasonló formula adja meg folyadékokban is a hangsebességet, csak az E Young modulus helyébe a K kompresszió moduluszt kell helyettesíteni.

Az itt ismertetett állóhullámok hullámhosszára és a sajátfrekvenciákra vonatkozó formulák vékony lég- és gázoszlopokra is jól használhatók, persze olyan kitételrel, hogy ekkor c az gázban a hangsebességet jelöli. Megmutatható, hogy ideális gázban a hangsebességet

$$c = \sqrt{\kappa p/\varrho} . \quad (27)$$

formula szolgáltatja, ahol p a termodinamikai egyensúlyhoz tartozó nyomás, ϱ a gáz sűrűsége és $\kappa = c_p/c_v$ az adiabatikus tényező, az állandó nyomású és az állandó térfogatú állapotváltozásokhoz tartozó fajhők hányadosa. Az ideális gázokra vonatkozó általános állapotegyenletet felhasználva megmutatható, hogy ideális gázban a hangsebesség a

$$c = c(T) = c_0 \sqrt{T/T_0}. \quad (28)$$

relációval leírt módon függ a T (Kelvin fokban mért) termodinamikai hőmérséklettől, ahol c_0 egy adott T_0 termodinamikai hőmérsékleten a hangsebesség.

Állóhullámok két- és háromdimenziós hullámok esetén is kialakulnak és a szerepük az egydimenziós esethez hasonlóan nagyon fontos. Az egydimenziós esettől eltérően a csomópontok általában nem izoláltan helyezkednek el, hanem a kétdimenziós hullámoknál *csomóvonalakat*, a háromdimenziós hullámoknál pedig *csomófelületeket* alkotnak. Két szomszédos csomóvonal, vagy csomófelület között lévő helyeken azonos frekvenciával és fázisban történik a harmonikus rezgés, és a csomóvonalak, vagy csomófelületek ellentétes fázisban rezgő tartományokat választanak szét.



9. ábra. Chlandi-féle porábrák. Hegedűvonóval rezgésbe hozott vékony négyzet alakú fémllemezen kialakuló állóhullámok csomóvonalai szemléltetése.

A 9. ábrán hegedűvonóval rezgésbe hozott vékony négyzet alakú fémllemezen kialakuló három állóhullám csomóvonalai láthatók. A kísérlet során a lemezre kevés búzadarát szórtunk, majd hegedűvonóval egy állóhullámot gerjesztettünk a lemezen. A könnyű búzadara a lemez rezgése során összegyűlik azokon a helyein, ahol az nem mozog. Ezzel kirajzolódnak az adott állóhullámhoz tartozó csomóvonalak. Jól látható, hogy arról a helyről, ahol a lemezt kézzel megfogjuk (a lemez jobb oldalán), csomóvonalak indulnak ki. Ennek így is kell lennie, hiszen ez a hely a rögzítés miatt nem mozoghat. Hasonlóan csomóvonalak futnak ki a lemez közepén csavarral rögzített helyről is.

2. Optika összefoglaló

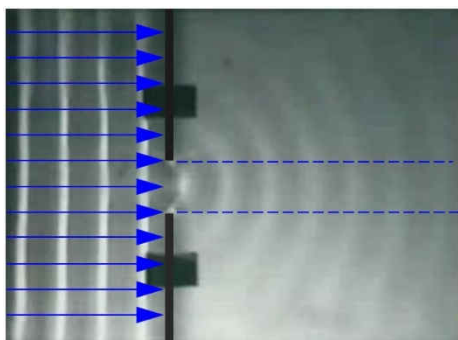
2.1. Fényforrás, fénynyaláb és fénysugár

Minden napos tapasztalatunk, hogy bizonyos testek egyfajta – szemünkkel érzékelhető – sugárzásnak a forrásai. Az ilyen világító, *fényt* kisugárzó testeket *fényforrásoknak* nevezzük. Ezek között bizonyosak, az úgy nevezett *elsődleges fényforrások*, saját maguk által létrehozott fényt sugározzák, míg mások - a

másodlagos fényforrások - csak addig világítanak, amíg egy elsődleges fényforrásból származó fénysugárzás éri őket. A másodlagos fényforrások sugárzása vagy *fényvisszaverődésből*, vagy *fényszórásból* származik. Az elsődleges fényforrások fénye többnyire atomi vagy molekuláris állapotváltozásból (elektronátmenetekből, molekula rezgési és/vagy forgási átmenetből) származik. Egy ilyen átmenetnél egy magasabb energiájú (gerjesztett) állapotban lévő atom vagy molekula egy alacsonyabb energiájú állapotba kerül. A két állapot közötti energia-különbség fény formájában sugárzásként jelenik meg, biztosítva az energia megmaradását. Elsődleges fényforrásra példa a Nap, izzólámpa, LED, TV vagy monitor képernyő. Másodlagos fényforrásra példa a Hold, a vetítővászon, és tulajdonképpen minden olyan test, amit sötétben nem látunk.

Ha egy besötétített szoba ablakán lévő – a napfényt kizáró – átlátszatlan ernyőre egy kis nyílást vágunk, akkor a nyílással szemben a falon egy kis megvilágított fényfolt jelenik meg. Ha levegő kissé poros, vagy füstöt fújunk a levegőbe, akkor oldalról - a fényszóródás miatt – látható egy keskeny világos henger alakú tartomány a nyílástól a falon lévő fényfoltig. Ennek kis hengerszerű kis térrészben fényjelenséget észlelünk, ha egy fehér papírlapot teszünk az útjába, akkor a falon látható fényfолthoz hasonló, megvilágított tartomány alakul ki a lapon, és ezzel egyidejűleg a falon látható megszűnik. Az átlátszatlan ernyőn lévő nyílástól az ernyőig egy *fénynyaláb* terjed, amelyben – kísérletekkel kimutatható módon – energia terjed tova. Az energiasugárzását például az mutatja, hogy a nyaláb útjába helyezett test felmelegszik. Ha sötétítő ernyőn lévő nyílás átmérőjét csökkentjük, akkor a nyaláb átmérője is csökken. Ebből arra gondolhatnánk, hogy egyetlen pontra összehúzza a nyílás sugarát, a fénnyaláb keresztmetszete is egyetlen pontra húzódik össze. Amit úgy képzelünk el, hogy a fénnyaláb, bizonyos elképzelt geometriai görbék, az úgy nevezet *fénysugarak* összessége. Példánkban ezek a sugarak (közel) párhuzamos egyenesek. Ezen modell keretében a fényjelenségeket úgy írjuk le, hogy egy kisméretű – határesetben *pontszerű* – fényforrásból bizonyos irányokba fénysugarak indulnak ki, melyek együttesen alkotják a forrás által kisugárzott fénnyalábot. Az ilyen fénnyalában a sugarak egy közös pontból, a forrásból széttartóan indulnak ki, és egy kúppaláston belül haladnak. Ezen kúppalást határolja a fénnyalábot. A *kiterjedt* fényforrásokat pontszerű fényforrások összességének tekinthetjük. Ezek minden pontja egy-egy fénnyalábot sugároz. Ezek a fénysugarak lokálisan az energia terjedésének irányát mutatják, optikai szempontból homogén és izotróp közegben egyenesek. Általában inhomogén közegben a fénysugarak görbék, amelyek szakaszonként

homogén közegben, az egyes homogén részekben belül egyenes szakaszokból álló görbék (poligonok) lesznek. Az optikai jelenségek leírására azt kell megismernünk, hogy miként viselkednek ezek a fénysugarak. A fénysugarak a hullámoknál bevezetett geometriai sugaraknak a fényre vonatkozó megnyilvánulásuk. A fényjelenségeknek az itt ismertetett modellen alapuló leírását *geometriai optikának* nevezzük. Az, hogy ez a modell csak közelítő leírása a fényjelenségeknek, már viszonylag egyszerű kísérlettel is kimutatható. Ha a fénysugarak bevezetésénél leírt gondolatkísérletet ténylegesen végrehajtjuk, azaz a sötétítő ernyőn lévő nyílás átmérőjét folyamatosan csökkentjük, akkor a fénynyaláb átmérője egy bizonyos átmérőig valóban csökken, de ezt követően ismételten növekedni kezd, azaz a fénynyaláb merőleges keresztmetszete nem fog egyetlen pontra összeszorodni az ernyőn. Ez a jelenség a *fényelhajlás* következménye, amely fény *hullámtermészetét* igazolja. Ha a hullámok útjába kerülő akadályok mérete csökken, és a hullám hullámhosszánál csak egy-két nagyságrenddel nagyobb, vagy azzal összemérhető, akkor a geometriai sugarakkal leírható terjedéstől eltérések mutatkoznak. Az eltérés annál jelentősebb, minél jobban megközelíti az akadály mérete a hullámhosszúságot. A 10. ábra az elhajlás jelenségét szemlélteti egy fémlemezen vágott keskeny résen keresztülhaladó víz hullám esetén.



10. ábra. Vízhullámok áthatolása keskeny résen. A bal oldali kék, nyíllal ellátott kék vonalak a résre beeső hullámhoz tartozó geometriai sugarakat szemléltetik. A jobb oldali kék szaggatott vonalak közötti tartományban figyelhetnénk meg hullámokat, ha a sugarakkal leírható egyenes vonalú terjedésnek megfelelően terjedne a résen átmenő hullám. Azonban jól látható a hullám behatol a rés átlátszatlan része mögé, az egyenes vonalú terjedéstől eltérés mutatkozik, röviden mondva *elhajlás* lép fel.

Amint azt már említettük, a geometriai optika keretein belül a fénysugarak viselkedésének ismertében tudjuk a fényjelenségeket értelmezni. A legtöbb gyakorlatban fontos esetben a fénysugarak viselkedése néhány egyszerű törvénnyel leírható. Most ezeket ismerjük meg röviden.

1. Homogén és izotróp közegben a fény *egyenes vonalban* terjed, vagyis a fénysugarak ekkor egyenesek.

2. A fénysugarak *megfordíthatók*, amely azt jelenti, hogy a fény valamely módon az A pontból eljut a B pontba, akkor a B pontból pontosan az előzővel egyező úton haladva jut el az A pontba.
3. A *visszaverődés* törvénye: Egy határfelületről visszavert fénysugár a beesési síkban van, és a visszaverődési szög egyenlő a beesési szöggel (szemléltetése a 11. ábrán). A beesési sík a beesési merőleges és a beeső fénysugár által meghatározott sík. A beesési merőleges pedig a tükröző felület azon pontjában, az érintő síkra merőlegesen állított egyenes, ahol a beeső fénysugár eléri a tükröző felületet. Érdeemes megjegyezni, hogy mind a beesési szöget, mind a visszaverődési szöget a beesési merőlegetől mérjük!
4. A *fénytörés* törvénye: Egy határfelülethez érve, ha a fénysugár áthatol a határfelületen, akkor – a merőleges beeséstől eltekintve – a terjedési iránya megváltozik. Nevezetesen, a megtört fénysugár a beesési síkban van, továbbá a beesési szög szinuszának és a törési szög szinuszának hányadosa a felület által szétválasztott két közegre jellemző állandó, amely a két közegbeli fénysebesség hányadosa, formulával kifejezve,

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{21} = c_1/c_2, \quad (29)$$

ahol n_{21} a 2-es közeg 1-es közegre vonatkozó relatív törésmutatója. Ez az összefüggés a jól ismert *Snellius-Descartes-féle törvény*. Mint látható, a relatív törésmutató fény esetén is a hullámtani részben ismertetett (12) összefüggés szerint függ a közegbeli terjedési sebességektől. A törés és a visszaverődés általában együttesen lép fel, ahogy ezt a 11. ábra is szemlélteti.

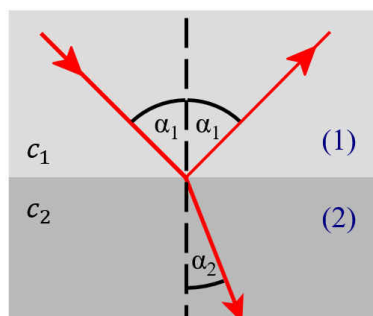
Mivel a fény vákuumban is terjed, az optikában relatív törésmutató mellett beszokták vezetni az abszolút törésmutató fogalmát. Egy közeg *abszolút törésmutatóján* a vákuumra vonatkozó relatív törésmutatóját értjük, azaz

$$n = c/c_0, \quad (30)$$

ahol $c_0 = 299.792 \text{ km/s} \approx 300.000 \text{ km/s}$ a vákuumbeli fénysebesség. A Snellius-Descartes-törvény az abszolút törésmutatókkal a

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (31)$$

alakba írható át, ahol n_1 és n_2 rendre az 1-es és a 2-es közeg abszolút törésmutatója. Az n_{21} relatív



11. ábra. A fényvisszaverődés és fénytörés szemléltetése. A beesési sík az ábra síkjával esik egybe. A szögeket a szaggatott vonallal jelölt beesési merőlegetől mérjük.

törésmutató és az n_1 és n_2 abszolút törésmutatók között az

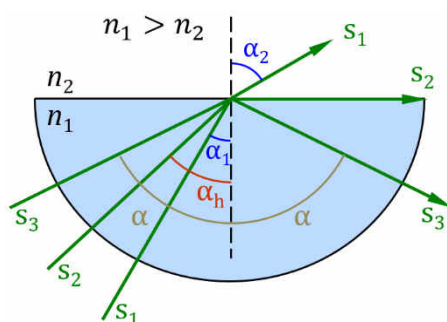
$$n_{21} = n_2/n_1 \quad (32)$$

kapcsolat áll fenn. A közeget *optikailag sűrűbbnek* nevezzük egy másikra vonatkozólag, ha az erre vonatkozó relatív törésmutatója nagyobb, mint 1, és *optikailag ritkább*, egy másik anyaghoz képest, amennyiben a reá vonatkozó relatív törésmutatója kisebb, mint 1. Optikailag *sűrűbb* közeg esetén a törési szög – a merőleges beesést kivéve – mindig *kisebb*, mint a beesési szög. Ezt szemléletesen úgy mondjuk, hogy a sugár a *beesési merőlegeshez törik*. Optikailag *ritkább* közeg esetén a törési szög – a merőleges beeséstől eltekintve – mindig *nagyobb*, mint a beesési szög. Szemléletesen úgy mondjuk, hogy a sugár a *beesési merőlegestől törik*.

Optikailag ritkább közeg esetén – a 0° és 90° között változtatható – beesési szöget 0° -tól fokozatosan növelve, még 90° -nál kisebb beesési szögnél a törési szög eléri a 90° -ot. Ezt a beesési szöget nevezik a *teljes visszaverődés határszögének*. Mivel ekkor $\alpha_1 = \alpha_h$ és $\alpha_2 = 90^\circ$ Snellius-Descartes- törvény alapján a

$$\sin \alpha_h = n_2/n_1 \quad (33)$$

reláció határozza meg a határszöget. A beesési szöget a határszögnél tovább növel azt tapasztaljuk, hogy az optikailag ritkább közegbe nem jelenik meg fénysugár. Ekkor a felület egy 100%-os visszaverőképeségű tükörként visszaveri a beeső fénysugarat, a szabályos visszaverődés törvényeinek megfelelően. Mivel a teljes fényenergia visszaverődik a határfelületről, a jelenséget *teljes visszaverődésnek* hívjuk. Annak a fontos ténynek, hogy a visszaverődésnél nincsen energia-vesztesség, nagyon fontos gyakorlati jelentősége van. A teljes visszaverődésen alapul napjainkban széleskörben elterjedt *optikai szálakon* történő jeltovábbítás. Az optikai szálak segítségével igen nagy távolságra tudunk, igen nagy mennyiségű információt nagyon gyorsan eljuttatni. A teljes visszaverődés más alkalmazásai is vannak. A határszög mérésével meg tudjuk határozni az adott anyag relatív törésmutatóját. Nagyon lényeges alkalmazásuk még az ún. képfordító prizmák, például távcsövekben és fényképező gépekben. Még egyszer kiemeljük, hogy a teljes visszaverődés fellépéséhez két feltétel szükséges. Az egyik az, hogy a fény az optikailag sűrűbb közegből haladjon a ritkább felé, a másik pedig, hogy a beesési szög nagyobb legyen, mint a határszög!



12. ábra. Optikailag sűrűbb közeg határfelületén a törés (s_1), a határszög (s_2) és a teljes visszaverődés szemléltetése.

2.2. Tükrök és lencsék képképzése

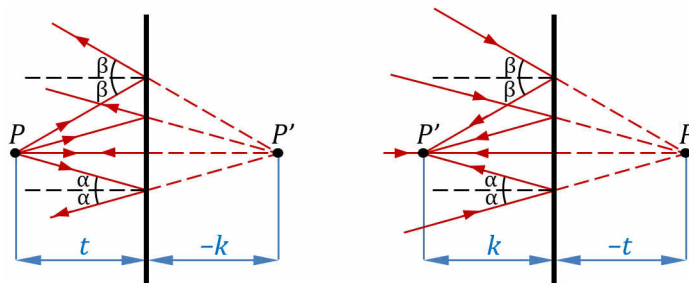
Képképzésnek, vagy *optikai leképezésnek* azt a jelenséget nevezzük, amikor egy pontszerű tárgyból kiinduló fénysugarak – a visszaverődések és törések követően – az optikai eszközön úgy haladnak keresztül, hogy vagy maguk a sugarak, vagy csak a meghosszabbításuk egy ponton halad keresztül. Ezt a pontot nevezik a tárgy *képének*. Amennyiben maguk a sugarak mennek keresztül a képponton, azaz összetartó fénynyaláb lép ki az eszközből, *valódi* képről beszélünk. Ha csak sugarak meghosszabbítása halad keresztül a képponton, azaz széttartó nyaláb lép ki az eszközből, akkor a képet *látványlagosnak*, vagy másszóval *virtuálisnak* nevezzük.

A legegyszerűbb képképző tulajdonsággal rendelkező elemi optikai eszközök a sík-, homorú vagy domború gömbalakú (másszóval gömbi) tükröző felülettel rendelkező *tükrök*, vagy átlátszó anyagból készült domború vagy homorú gömbi esetleg egyik oldalról síkfelülettel határolt *lencsék*. A gömbi felületek ugyan nem teljesen ideálisak a képképzés szempontjából, mert az ideális képképzéstől kisebb-nagyobb eltéréseket, ún. *képképzési hibákat* – idegen szóval *aberrációkat* – okoznak, azonban geometriai okok miatt, a gyakorlatban legkönnyebb a felületeket gömbi alakra csiszolni. Az összetett képképző eszközök általában ilyen elemi képképző eszközök egymást követő elrendezéséből áll. Ezeket megfelelően tervezve elérhető, hogy az előbb említett képképzési hibák kis mértékűek legyenek, így jó minőségű képet kapjunk eredményül. Ilyen összetett képképző eszközök például a *távcsövek*, *mikroszkópok*, *fényképezőgépek* és *vetítőgépek*. Ezek mindegyikénél igazán fontos, hogy a kép megfelelő minőségű legyen.

Az ilyen összetett eszközök működési elvének megértéséhez mindenképpen elengedhetetlen az őket felépítő elemi építő elemek képképző tulajdonságainak megismerése. Az összetett képképzésnél, amikor az egyszerű képképző eszközök egymást követve helyezkednek el, nagyon fontos segédeszköz a *virtuális tárgy* fogalma. Virtuális tárgyról akkor beszélünk, amikor egy összetartó sugárnyaláb, melynek sugarai egy adott pont felé tartanak, útjába egy másik képképző eszközt helyezünk, de a sugarak még az előtt elérik azt, mielőtt azok áthaladnának a közös pontjukon. Vagyis a második optikai eszköz megakadályozza a sugarak egy pontba való összetartását. Tipikusan ilyen eset akkor lép fel, ha egy optikai eszköz valódi képet alkot, és mögötte viszonylag közel elhelyezünk egy másik képképző eszközt. Az itt leírt esetben is előfordulhat az, hogy a képképző eszközből a sugarak úgy lépnek ki, hogy maguk a kilépő sugarak, vagy csak a meghosszabbításuk halad

keresztül egy ponton, azaz képpontot alkot. Ennek a képpontnak a helye nyilvánvalóan függ, attól a ponttól, ahova az beeső összetartó sugárnyaláb tart. Vagyis a kép az ennek az elképzelt (azaz virtuális) tárgynak a képének tekinthető. A továbbiakban megismerünk olyan egyenleteket, amelyek a tárgy és a kép helyzete közötti kapcsolatot adják meg. Ezeket az egyenleteket *képpalkotási*, vagy *leképezési egyenleteknek* nevezzük. Hogy ezek az egyenletek egységes alakúak legyenek az összes esetre vonatkozólag, érdemes a tárgy- és a képtávolságnak előjelet tulajdonítani, bár a valódi távolságok nyilván nem negatívak. A továbbiakban olyan *előjel megállapodást* használunk, amely szerint virtuális kép esetén a kép-, míg virtuális tárgyra a tárgytávolságot negatívnak tekintjük. Ilyen esetekben nyilván a valódi távolságot az egyenletből nyert „távolság” negatívja adja meg. Ez a leképezéseket illusztráló ábrákon úgy mutatkozik meg, hogy a geometriai távolságokat jelző nyilak mellé virtuális kép esetén $-k$, virtuális tárgynál $-t$ kerül.

A síktükör képpalkotása a visszaverődés törvényei alapján könnyen megérthető. Ha a tökéletes sík tükröző felület elé egy P világító pontszerű tárgyat helyezünk, akkor egyszerű geometriai megfontolásokkal belátható, hogy a tárgyból kiinduló széttartó sugarak, a visszaverődés után is széttartók maradnak, és a sugarak meghosszabbítása egy - a tükör mögött lévő - P' pontban metszik egymást, ahogy azt a 13. ábra bal oldala is mutatja. Továbbá ez a P' pont a P ponton átmenő, a tükörrre merőleges egyenesen rajta van, a tükörtől a P ponttal



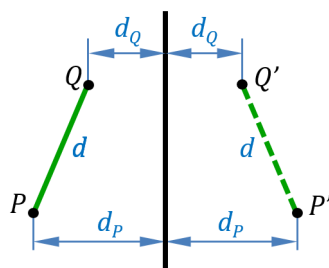
13. ábra. Síktükör képpalkotásának szemléltetése. A bal oldali rész egy valódi P tárgy virtuális P' képének keletkezését, jobb oldali rész pedig egy virtuális P tárgy valódi P' képének létrejöttét szemlélteti. Vegyük észre, hogy a két részásra lényegében csak a sugarak irányításában különbözik!

azonos távolságra található. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben *virtuális kép* jön létre. Ha fénysugarak irányítását megfordítjuk, akkor a virtuális tárgyra vonatkozó szemléletes példát nyerünk. Ha valamely módon egy - a tükör mögött lévő - P pontfelé összetartó sugarakból álló fénynyalábot hozunk létre, akkor a sugarak a

visszaverődés után is összetartók maradnak, és abban a – tükör előtt lévő - P' pontban találkoznak, amely a P pontot tartalmazó, a tükörrre merőleges egyenesen van, a tükörtől a P ponttal azonos távolságra. A kép- és a tárgytávolságra – a bevezetőben leírt előjel megállapodással összhangban lévő – leképezési egyenlet síktükörre az

$$1/t + 1/k = 0 \quad (34)$$

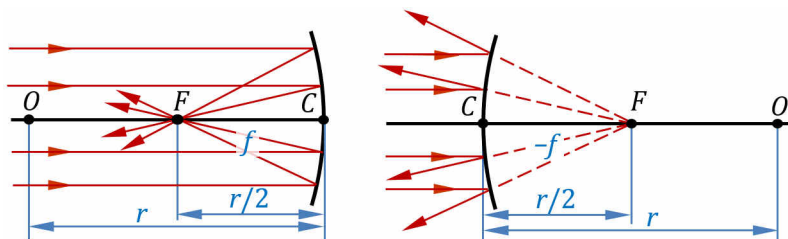
alakba írható fel, amely ekvivalens a $t + k = 0$ relációval. Amiből rögtön látszik, hogy $k = -t$ összefüggés van a kép- és a tárgytávolság között. Valódi tárgy esetén $t > 0$, amiből $k < 0$ és $|k| = t$ következik, azaz a képtávolság negatív, amely virtuális képre utal, valamint nagysága a tárgytávolsággal azonos. Virtuális tárgyra t negatív ($t < 0$), és így $k > 0$ és $k = |t|$ következik, azaz a képtávolság pozitív, amely valódi képre utal, valamint k abszolút értéke a tárgytávolság abszolút értékével egyenlő. A kiterjedt tárgyakat pontszerű tárgyak összességének tekintve, már előzőleg ismertetett módon mindegyik pontra megszerkesztve a képét, kapjuk a kiterjedt tárgy képét. Ezt szemlélteti a 14. ábra a PQ szakaszra, melynek képe a $P'Q'$ szakasz. Könnyen belátható módon, a kép állása a tárgyal azonos és nagysága megegyezik a tárgy nagyságával, amely azt jelenti, hogy a síktükör nagyítása egységnyi. Továbbá könnyen ellenőrizhető, hogy a tükörképben a tárgyhoz képest a jobb és a bal oldalak felcserélődnek: a jobb kezünk a tükörképünk bal, míg a bal kezünk a tükörképünk jobb keze lesz. A leképezés többi tulajdonsága megegyezik a pontszerű tárgy esetén megismerttel.



14. ábra. A PQ szakasz síktükör által alkotott képe a $P'Q'$ szakasz. Valódi tárgy képe virtuális, virtuális tárgy képe valódi. A kép a tárggyal azonos állású és egyszeresen nagyított.

Gömbtükörök képkalkotása szintén a visszaverődés törvényei segítségével érhető meg. Az optikai leképezés leírásánál vannak bizonyos különös fontossággal bíró pontok, a *kardinális pontok*. Ezeket homorú és domború gömbtükörre a 15. ábra szemlélteti. Gömbtükörök esetén három ilyen pont van, tükröző gömbfelület O görbületi középpontja, a C optikai középpont és az F fókuszpont. Az *optikai középpont* a tükröző gömbsüveg felületének tetőpontja. Az optikai középponton és a görbületi középponton átmenő egyenest *optikai tengelynek* vagy *főtengelynek* nevezik. A fókuszpont, vagy másnéven a *gyújtópont* a főtengelyen az optikai középpont és a geometria középpont között éppen félúton helyezkedik el. Ha a

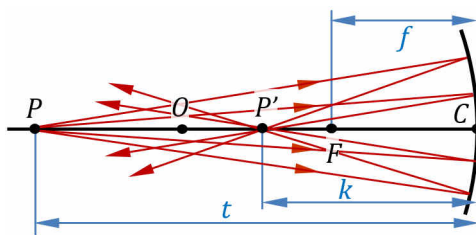
gömbtükörre az optikai tengelyével párhuzamos és ehhez közel haladó sugarakat ejtünk be, akkor homorú tükör esetén a visszavert sugarak összetartók lesznek és



15. ábra. A gömbtükörök kardinális pontjai: A tükröző gömbsüveg felület O görbületi középpontja. A gömbsüveg C tetőpontja az ún. optikai középpont. Az OC szakasz F felező ponja, az ún. fókuszpont, vagy más néven gyújtópont. Az O és C pontokon átmenő egyenes az optikai tengely vagy más néven főtengely. Az ábra a főtengellyel párhuzamosan beeső sugarak és a fókuszpont kapcsolatát mutatja.

a fókuszpontra haladnak keresztül. Míg domború tükörnél olyan széttartó sugarak hagyják el tükröt, melyek meghosszabbítása megy keresztül a fókuszpontra.

Amennyiben egy homorú gömbtükör főtengelyén elhelyünk egy pontszerű világító tárgyat, akkor a főtengelyen valódi vagy virtuális kép jön létre. Kísérletekkel egyszerűen ellenőrizhetjük a következő állításokat: Ha tárgya C és az F pontok között van, akkor a kép virtuális, azaz olyan széttartó sugarak hagyják el a tükröt, melyek meghosszabbításai a képpontban találkoznak. Ha a tárgy a tükrőtől távolabb van, mint az F pont (azaz a fókuszon kívül van), akkor valódi kép keletkezik. Ha a tárgy az O és F pontok között van, akkor a kép az O ponttól távolabb jön létre.



16. ábra. Homorú gömbtükör főtengelyénén, O görbületi középpontjától távolabb, lévő P pont képe. Ekkor a P' valódi kép az O és az F pontok között alakul ki.

Amennyiben a tárgy az O ponttól van távolabb, akkor a kép az O és F pontok között lesz. Ez az eset látható a 16. ábrán. A kép helyét a főtengelyen az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad (35)$$

ún. tüköregyenletből számolhatjuk ki, ahol t a tárgy-, k a kép- és f a fókusz-távolság, amely a tükör görbületi sugarának a fele, azaz

$$f = r/2. \quad (36)$$

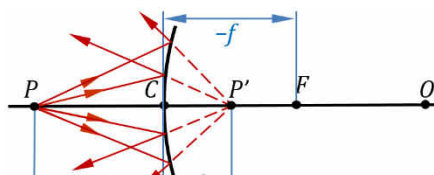
Ha a P tárgyat a tükrőtől egyre távolabb vesszük a főtengelyen, akkor a hozzá-tartozó t tárgytávolság is egyre nagyobb lesz, és tárgyból kiinduló sugarak egyre kisebb szöget zárnak a főtengellyel. A $t \rightarrow \infty$ határesetben a sugarak a tengellyel

párhuzamosak lesznek, és ekkor a (35) leképezési egyenlet alapján $k = f$, azaz a kép a fókuszpontban jön létre. Ez alapján a fókuszpontnak nagyon szemléletes értelmezést lehet tulajdonítani! A *fókuszpont a főtengelyen lévő végtelen távoli pontszerű tárgy képe*. Ezen szemlélet alapján – a képtávolsághoz hasonlóan – a fókusz távolságnak is lehet, sőt érdemes *előjelet* tulajdonítani! Mivel homorú tükörnél a fókuszban valódi kép alakul ki (amelyhez pozitív képtávolság tartozik), a homorú tükör fókusz távolsága pozitív. A fókusz távolságnak tulajdonított előjel haszna a domború tükörnél nyilvánul meg számunkra.

Ha domború tükör főtengelyén egy valódi P tárgyat helyezünk el, akkor a tükörről visszavert sugarak mindig széttartók lesznek, és ezek meghosszabbítás megy keresztül a tükör mögötti főtengelyen lévő P' ponton (17. ábra). Vagyis a kép virtuális lesz, melynek negatív előjelet tulajdonítunk ($k < 0$). A kép helyét a főtengelyen ugyancsak a (35) tüköregyenlettel határozhatjuk meg, azzal a megállapodással, hogy az f fókusz távolságot az

$$f = -r/2. \quad (37)$$

egyenlet alapján számoljuk. Amelyből látható, hogy a domború tükör fókusz távolságát negatívnak tekintjük. Erre utal a 17. ábrán az is, hogy a geometriai távolságot $-f$ jelöli. Ez az előjel megállapodás tel-

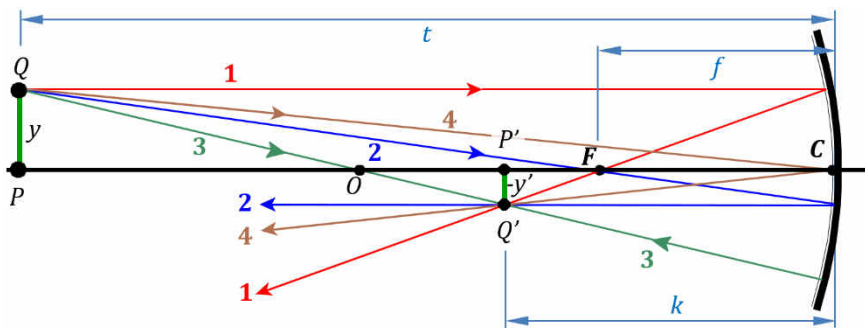


17. ábra. Domború gömtükör főtengelyén lévő valódi P tárgy képe virtuális kép lesz, hiszen a tükörről visszavert sugarak széttartók maradnak és csak a meghosszabbításuk metszik egymást a tükör mögött, a főtengelyen lévő P' pontban.

jesen összhangban van a fókuszpontnak, mint a főtengelyen lévő végtelen távoli tárgy képének az értelmezésével (15. ábra). Ha a P pontot a főtengelyen távolítjuk a tükörtől, akkor határesetben a sugarak a főtengellyel párhuzamosak lesznek, a virtuális kép - a (35) tüköregyenlet alapján - éppen a fókuszpontban jön létre. A fókusz távolság előjele azt jelzi, hogy a főtengelyen lévő végtelen távoli pontszerű tárgy fókuszban keletkező képe valódi vagy virtuális, a képtávolságra vonatkozó előjel megállapodásnak megfelelően. A homorú tükör összetartóvá, a domború tükör pedig széttartóvá teszi a reá beeső párhuzamos fénysugarakból álló fénynyalábot. Hasonló előjel megállapodást fogunk használni a lencsék esetén is.

Kiterjed tárgy esetén a tárgy- és képtávolság közötti kapcsolatot szintén a (35) leképezési egyenlet adja meg. A nem főtengelyen lévő pont helyét könnyen megállapíthatjuk a kardinális pontokhoz tartozó sugarak menetének ismeretében.

Ezeket *nevezetes sugármeneteknek* hívjuk. Az optikai tengelyre merőleges PQ szakasz képe névezetes sugármenetekkel történt szerkesztését a 18. ábra mutatja. Látható, hogy a tárgy az O görbületi középponton kívül helyezkedik, és a



18. ábra. A görbületi középponton kívül elhelyezkedő tárgy képnek megszerkesztése a nevezetes sugármenetek segítségével.

képe az O és az F pontok között jön létre. A Q pontból kiinduló főtengellyel párhuzamos 1-es sugár a visszaverődés után az F fókuszponton halad keresztül. A Q pontból kiinduló és az F ponton keresztül haladó 2-es sugár az optikai tengellyel párhuzamosan verődik vissza. A Q pontból kiinduló és az O görbületi középponton keresztül haladó 3-as sugár önmagában verődik vissza, hiszen merőlegesen esik a tükröző felületre. A Q pontból kiinduló és a tükröt a C optikai középpontban érő 4-es sugár úgy verődik vissza, mintha egy a főtengelyre merőleges síktükörre esne be, mert gömbtükör főtengelye éppen a beesési merőleges. A példánál valódi kép jön létre, mert a tükrőről visszavert sugarak összetartók.

Kiterjedt tárgy esetén lényeges kérdés a kép tárgyhoz viszonyított állása, továbbá a kép és a tárgy nagyságának viszonya. Ezt a két fontos tulajdonságot az következőkben leírt definiált *nagyítással* jellemezhetjük. Használjunk egy olyan koordináta rendszert, melynek a vízszintes tengelye a főtengely és az erre merőleges függőleges tengely a főtengelyt és a Q tárgy pontot tartalmazó síkban van (ez az ún. *meridián sík* éppen a 18. ábra síkja). A függőleges tengely mutasson a PQ vektorral párhuzamosan, azaz a 18. ábrán felfelé. Ekkor a Q tárgy pont y koordinátája pozitív és így y a PQ szakasz hossza, tárgy nagysága is egyben. A Q' képpont koordinátája viszont negatív, így a $P'Q'$ szakasz hossza, a kép nagysága $-y'$, ahogy azt a 18. ábrán is jeleztük. Ezen előkészületek után a *nagyítást*, melynek előjelet is tulajdonítunk, az

$$N = y'/y \quad (38)$$

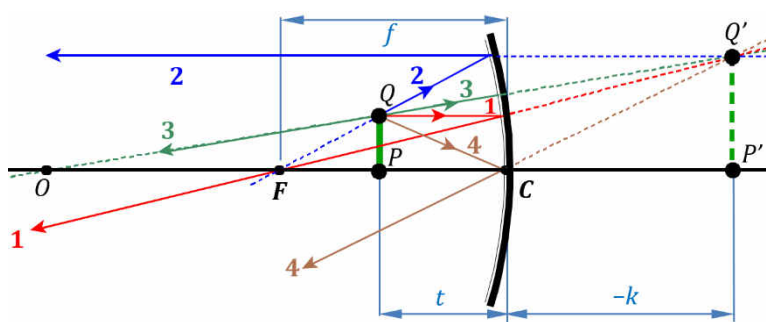
definícióval értelmezzük. Amiből rögtön kiolvasható, hogy a nagyítás előjeléből megállapítható, hogy a kép a tárgyhoz képest *azonos* vagy *fordított* állású.

Amennyiben a kép a tárggyal azonos állású, úgy a két y és y' koordináta *azonos előjelű*, ezért ekkor a nagyítás *pozitív*. Amennyiben a kép a tárgghoz viszonyítva fordított állású, akkor az y és y' koordináták *eltérő előjelűek*, ami nyilván negatív nagyítást eredményez. A nagyítás abszolútértéke nyilván a kép és a tárgy nagyságának hányadosát adja. Így $0 < |N| < 1$ esetén a kép a tárgghoz képest kicsinyített és $1 < |N|$ fennálltakor nagyított. A 18. ábra 4-es sugármenetét követve, látható, hogy a PQC és a $P'Q'C$ derékszögű háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, hiszen a C pontnál lévő szögek egyenlők, és így a többi szögük is megegyezik. Ezért a (38) egyenletbeli hányadost kifejezhetjük a kép- és a tárgytávolságok hányadosával is, azaz a nagyítás az

$$N = -k/t \quad (39)$$

formulával számolható ki.

Ha a tárgyat a fókuszon belülre helyezzük, akkor a tárggyal azonos állású virtuális kép jön létre. A nevezetes sugarakon alapuló képszerkesztés a 19. ábrán látható. A szerkesztés menete lényegében az előző ábrán látotthoz teljesen

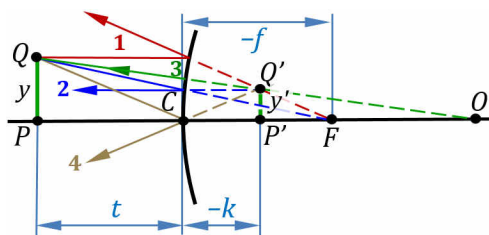


19. ábra. Homorú tükör és a fókuszpontja közé helyezett tárgy képének szerkesztése nevezetes sugarakkal. Ebben az esetben a tárggyal azonos állású, virtuális és nagyított kép keletkezik.

hasonló. A 18. ábrához képest csak annyi az eltérés, hogy most a Q tárgypontból a tükör felé induló 2-es és a 3-as sugarak maguk nem mennek keresztül az F illetve az O ponton, hanem csak a meghosszabbításuk. A tükörről visszavert sugarak széttartók, így virtuális kép jön létre, amelynek következtében – az előjel megállapodásunk szerint – a k képtávolság negatív lesz. A tárgy- és a képtávolság kapcsolatát a (35) leképezési egyenlet írja le, és a nagyítás is a (39) formula alapján számolható ki.

A domború tükör előtti PQ szakasz képe szintén egyszerűen megszerkeszthető a nevezetes sugarak segítségével, csupán azt kell figyelembe venni, hogy a fókuszpont virtuális képként értelmezhető. A Q pontból kiinduló és az optikai

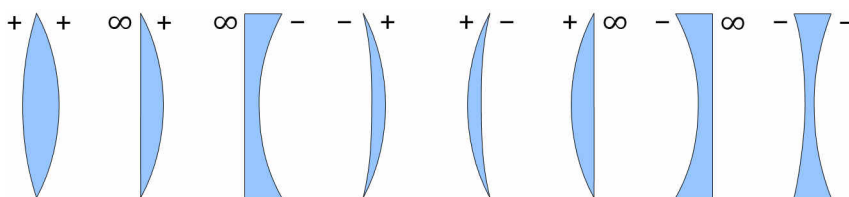
tengellyel párhuzamos 1-es sugár a tükörről úgy verődik vissza, mintha az F fókuszpontból indult volna ki. A Q pontból kiinduló és az F fókuszpont felé tartó 2-es sugár az optikai tengellyel párhuzamosan verődik vissza. A Q pontból kiinduló és az O görbületi középpont felé tartó 3-as sugár önmagában verődik vissza, mert merőlegesen esik a tükröző felületre. Valamint a Q pontból kiinduló és a tükört a C optikai közép-



20. ábra. Domború tükör képének szerkesztése nevezetes sugarakkal.

vissza, mintha egy a főtengelyre merőleges síktükörrre esne be, hiszen gömbtükör optikai tengelye éppen a beesési merőleges. Látható, hogy a létre jött kép egyenes állású, kicsinyített és virtuális. A tárgy- és a képtávolság közötti relációt a (35) leképezési egyenlet írja le, továbbá a nagyítás a (39) formula alapján számolható ki.

A gömbi lencsét két oldalról egy-egy gömbfelület határolja, amely közül az egyik lehet sík is ($R = \infty$). A lencsék optikai tulajdonságait ezeknek a gömbfelületeknek az alakja, a görbületi sugara és a lencsét alkotó anyagnak a környező közegre vonatkozó relatív törésmutatója határozzák meg együttesen. A két

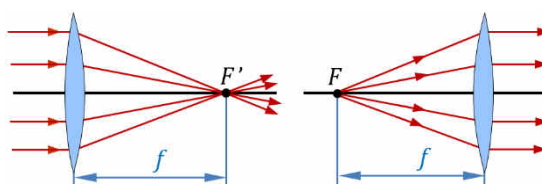


21. ábra. A határoló felületek alakja szerint lehetséges lencse típusok. A felületek kívülről nézve lehetnek homorú vagy domború alakúak, esetleg az egyik határesetben síkfelület, amely végtelen sugarú gömbfelületnek tekinthető. A lencsék mellé írt + és - előjelek a felület görbületi sugarának előjelére utalnak kívülről domború és homorú felületek esetén. A ∞ síkfelületre utal.

határoló gömbi felület görbületi középpontján átmenő egyenest nevezzük a lencse *optikai tengelyének*, *főtengelyének*. Az alakot tekintve a két határoló felület kívülről nézve lehet domború vagy homorú, esetleg az egyik síkfelület. A 21. ábrán a lehetséges lencse alakok láthatók. A görbületi sugaraknak, később indokolt ok miatt érdemes előjelet tulajdonítani. A határoló felület melletti előjelek, a görbületi sugár előjelére utalnak, továbbá a síkfelület görbületi sugara végtelennek (∞) tekinthető.

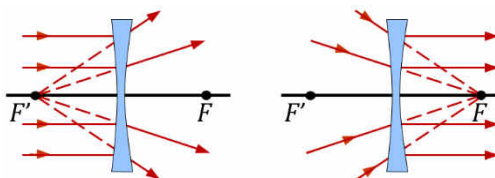
A továbbiakban csak az úgy nevezett *vékonylencsékkel* foglalkozunk, melyeknek az optikai tengelynél mért vastagságuk elhanyagolható a többi lényeges távolsághoz képest. A vékonylencsének – a vékonysága miatt – gyakorlatilag az optikai tengellyel egyetlen közös pontja van. Ezt nevezik a lencse *optikai középpontjának*. Belátható, hogy az optikai középponton áthaladó sugár *irányváltozás nélkül* halad keresztül a lencsén. Ez a lencse egyik nevezetes sugara!

A lencséknek – a tükrökhöz hasonlóan – az optikai tengelyével párhuzamosan beeső sugarakra gyakorolt hatását tekintve két fajtája van. Az egyik fajta az ilyen sugarakból álló beeső fénynyalábot egy – lencse másik oldalán lévő – pont felé *összetartó*, míg a másik típus egy – a beeső fénynyaláb felőli oldalon lévő – pontból *széttartó* fénynyalábbá alakítja át. Az első típust *gyűjtő*-, a második típust pedig *szórólencsének* szokás hívni. Az említett tulajdonságú pont a lencse *fókuszpontja*. Mivel – a tükröktől eltérően – a lencsékre két irányból ejthetünk be az optikai tengelyével párhuzamos sugarakat, a lencséknek két fókuszpontjuk van! Az egyiket *tárgydali*, a másikat *képoldali* fókuszpontnak szokás nevezni. A gyűjtőlencse fókuszpontjait a 23. ábra szemlélteti. Szórólencsének



23. Gyűjtőlencse tárgy- (F) és képoldali (F') fókuszpontjai.

szintén két fókuszpontja van, csak éppen a gyűjtőlencséhez képest átellenes oldalon vannak. Hangsúlyozzuk, hogy a lencsénél is a fókuszpontok az optikai tengelyen lévő végtelen távoli pontszerű tárgy képének tekinthetők. Gyűjtőlencse esetén ezek valódi, míg szórólencse esetén ezek virtuális képek. Ez alapján a fókusz távolságnak érdemes itt is előjelet tulajdonítani, a képtávolságnál használt előjel megállapodásnak megfelelően. Ez alapján a gyűjtőlencse fókusz távolsága pozitív, míg a szórólencse fókusz távolsága negatív. A lencse fókusz távolságát az



22. ábra. Szórólencse tárgy- (F) és képoldali (F') fókuszpontjai.

$$1/f = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2) \quad (40)$$

kifejezés adja meg, ahol n és a lencse anyagának a környező közegre vonatkozó relatív törésmutatója, R_1 és R_2 a határoló gömbfelületek előjeles görbületi sugarai, melyek pozitív, illetve negatív előjelűek kívülről nézve domború, illetve homorú felületre, továbbá végtelennek síkfelület esetén. A kívülről homorú

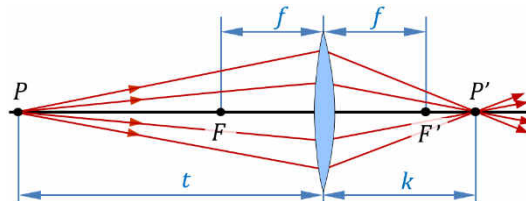
felületre negatív görbületi sugár nyilván úgy értendő, hogy geometriai értelemben vett (nem-negatív) görbületi sugárnak a mínusz egyszeresét kell az egyenletbe behelyettesíteni, hasonlóan a virtuális képnél és tárgynál alkalmazott előjel konvencióhoz. A (40) egyenletből már könnyen látható, hogy a környezetéhez képest optikailag sűrűbb (vagyis $n > 1$ relatív törésmutatójú) anyagból készült – például levegőben lévő üveglencse – esetén a kétszer domború és a sík-domború lencse gyűjtő-, a kétszer homorú és sík-homorú lencse szórólencseként működik, ugyanis $f > 0$ illetve $f < 0$ relációk állnak fent rendre az első és második esetre. Optikailag ritkább anyagból készült – például vízben lévő levegő – lencse viszont a megszokottól eltérően, éppen fordítva viselkedik a lencse alakot tekintve! Az $1/f$ mennyiséget a lencse *törőerejének* nevezzük. Ennek SI egysége az $1/m$, melyet *dioptriának* nevezünk.

A lencsék képalkotásánál, ha a lencse mindkét oldalán azonos közeg van, akkor a tükröregyenlettel alakra egyező

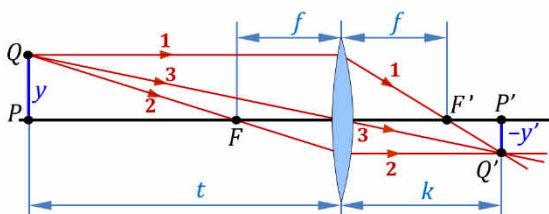
$$1/t + 1/k = 1/f \quad (41)$$

egyenlet adja meg a kép- és tárgytávolságok közötti kapcsolatot, de

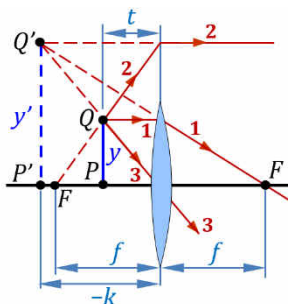
ne felejtjük el, hogy itt az f fókusz távolságot a (40) egyenlet szolgáltatja! Az



24. Gyűjtőlencse optikai tengelyén lévő, a lencsétől a kétszeres fókusz távolságnál távolabb lévő pontszerű tárgy képe.



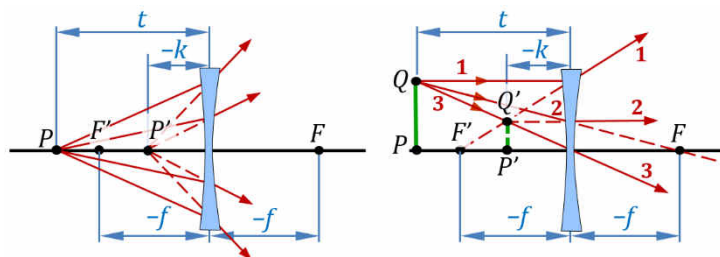
25. ábra. A PQ szakasz képének szerkesztése nevezetes sugarakkal, mikor a tárgy a fókuszponton kívül (bal oldali részábra) vagy amikor a fókuszponton belül helyezkedik el (jobb oldali részábra).



optikai tengelyén lévő pontszerű tárgy képe az optikai tengelyen keletkezik. A (41) leképezési egyenletből számolással, nevezetes sugarakon alapuló szerkesztéssel és kísérletekkel is könnyen ellenőrizhetők a következő képalkotási tulajdonságok: A lencsétől a fókuszpontonál távolabbi tárgy esetén valódi kép, a fókusznál közelebbi tárgyra, pedig virtuális kép alakul ki. Ha a tárgy a lencsétől az egyszeres és a kétszeres fókusz távolság között van, akkor a kép a lencsétől kétszeres

fókusz távolságnál távolabb jön létre, kiterjedt tárgy esetén fordított állású és nagyított. Ha a tárgy a kétszeres fókusz távolságnál távolabb van, akkor a kép a lencsétől az egyszeres és kétszeres fókusz távolságok közötti távolságban lesz, kiterjedt tárgyra kicsinyített és fordított állású. Éppen kétszeres fókusz távolságra elhelyezett tárgy képe a lencse másik oldalán szintén kétszeres fókusz távolságra van a lencsétől, kiterjed tárgyra a kép fordított állású és a tárggyal azonos nagyságú, azaz a nagyítás $N = -1$. A 25. ábra a lencse előtt lévő PQ szakasz képének nevezetes sugarakon alapuló szerkesztésének menetét mutatja, a lényegében különböző két fontos esetre. A Q tárgypontból az optikai tengellyel párhuzamosan kiinduló 1-es sugár a lencséből kilépve az F' képoldali fókuszponton halad keresztül. A Q tárgypontból az F tárgyoldali fókuszponton átmenő 2-es sugár a lencséből kilépve az optikai tengellyel párhuzamosan halad. Ha a tárgy a fókuszpontonál közelebb van a lencsénél, akkor nyilván csak a sugár meghosszabbítása halad át az F tárgyoldali fókuszponton (lásd a jobb oldali részábrát). A lencse optikai középpontját érő 3-as sugár irányváltozás nélkül halad át a lencsén.

Szórólencse esetén a lencse előtt lévő valódi tárgynak a képe mindig virtuális, ahogy azt a 26. ábrán láthatjuk. A PQ szakasz képének nevezetes sugarakkal



26. ábra. Szórólencse valódi tárgyról mindig virtuális képet alkot. A nevezetes sugarakon alapuló szerkesztést a baloldali rész szemlélteti.

történő szerkesztését jobb oldalon láthatjuk. A Q tárgypontból az optikai tengellyel párhuzamosan kiinduló 1-es sugár a lencséből úgy lép ki mintha az F' képoldali fókuszpontonból indult volna. A Q tárgypontból az F tárgyoldali fókuszpont felé tartó 2-es sugár a lencséből kilépve az optikai tengellyel párhuzamosan halad. A lencse optikai középpontján áthaladó 3-as sugár irányváltozás nélkül megy keresztül a lencsén. A tárgy- és a képtávolság viszonyát a (41) leképezési egyenlet határozza meg.

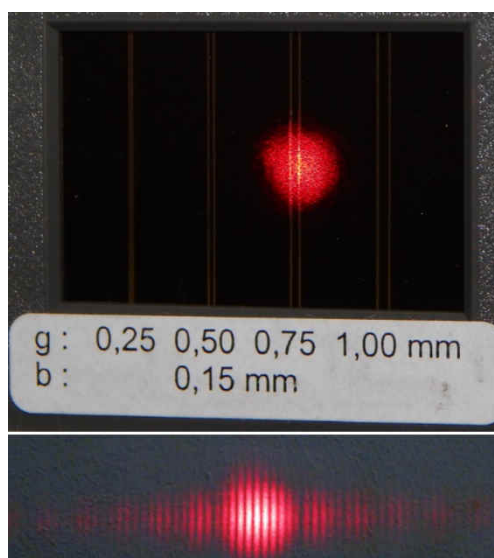
A nagyításra vonatkozó (39) formula lencsékre is érvényes, amennyiben a lencse mindkét oldalán azonos törésmutatójú közeg van. Ezt könnyen beláthatjuk

a 25. és a 26. ábrákon látható, az optikai középponton keresztül haladó 3-as fénysugarat vizsgálva. Ugyanis a PQ szakasz, a 3-as sugár és az optikai tengely által, valamint a $P'Q'$ szakasz, 3-as sugár és az optikai tengely alkotott háromszögek derékszögűek és a lencsénél lévő szögek egyenlők. Ezért a megfelelő oldalak aránya egyenlő. Így, hasonlóan a tükröknél alkalmazott gondolatmenethez, a Q' pont y' koordinátájának és a Q pont y koordinátájának hányadosa kiszámolható a kép- és a tárgytávolságok hányadosával.

2.3. A fényinterferencia alapjai

A fénysugarakról szóló bevezetőben már említettük, hogy a geometriai optika módszereivel nem minden esetben lehetséges a fényjelenségeket pontosan leírni, értelmezni. Vannak olyan fényjelenségek, melyek egyértelműen mutatják, hogy a fénynek hullámtermészete van. Ilyen, hullámokra egyértelműen jellemző jelenség például az interferencia és az elhajlás. A továbbiakban csak nagyon vázlatosan foglalkozunk néhány a fényinterferenciával kapcsolatos jelességgel. Fény esetén sokkal nehezebb interferenciajelenséget kimutatni, mint például víz- vagy hanghullámokkal. Ennek oka a fényforrások sajátosságaiban van. A szokásos fényforrások (pl. izzólámpa) összetettek, nagyon nagy számú elemi fényforrás összesége. Ezért többnyire a kisugárzott fény nem egyszerű hullámvonulat, hanem véletlenszerű változó fázisállandójú és különböző frekvenciájú elemi hullámvonulatok rendkívül nagyszámú sokasága. A véletlenszerűen változó fázisállandók és az eltérő frekvenciák miatt megfigyelhető interferencia általában nem alakul ki, mert az elemi hullámvonaltok szintjén meglévő interferencia hatása az időben nagyon gyorsan változó viszonyok miatt eltűnik. A lézerek azonban olyan fényforrások melynek a fényében lévő elemi hullámvonulatok azonos frekvenciájúak és egymáshoz képest rendezettek, így ezeknél a fényinterferencia megfigyelhető. Ezért célszerű lézert használni az ilyen kísérleteknél.

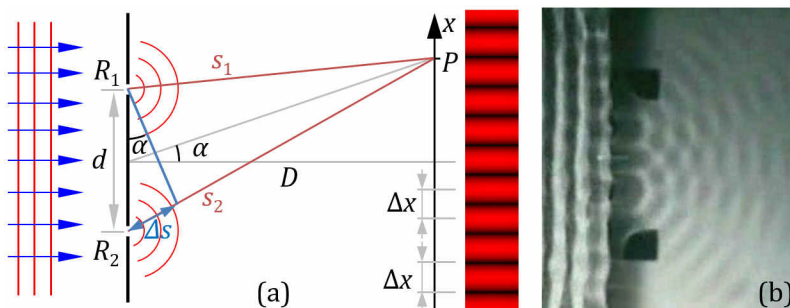
Ha egy átlátszatlan ernyőn párhuzamosan álló, egymástól nagyjából 1 mm távolságban lévő, két egyforma keskeny, $100\ \mu\text{m}$ nagyságrendbe eső



27. ábra. A Young-féle interferenciakísérlet.

szélességű rést készítünk és réseket egy lézernyalábjával megvilágítjuk (27. ábrán felül), akkor a kettősrés mögé pár méter távolságra helyezett ernyőn egymástól azonos távolságra lévő, a rések élével párhuzamosan álló, világos és sötét csíkok jelennek meg (27. ábrán alul). A 27. ábrán felül látható diakeretbe foglalt átlátszatlan ernyőn 4 darab kettősrés van egymás mellett. A rések $150\text{ }\mu\text{m}$ szélesek (b), és a kettősrés sorozatban a rések távolsága (g) letérő: balról jobbra haladva $250\text{ }\mu\text{m}$, $500\text{ }\mu\text{m}$, $750\text{ }\mu\text{m}$ és 1 mm . A lézernyaláb balról a harmadik, $750\text{ }\mu\text{m}$ réstávolságú kettősrést világítja meg. A 27. ábrán alul, az ernyőn – az interferencia eredményeképpen – létrejövő fényintenzitás mintázat látható. Jól megfigyelhető a világos-sötét függőleges csíkrendszer. A csíkok intenzitásának megfigyelhető változását a résen történő elhajlás okozza.

Ezt a híres kétréses interferenciakísérletet leghamarabb Thomas Young tudta eredményesen megvalósítani 1802-ben, ezért Young-féle kísérletnek nevezzük. A Young-féle kísérlet az ún. *hullámfrontosztással* létrehozott fényinterferenciáknak egy tipikus megvalósítása. Az ilyen interferenciajelenségeknek valamilyen módon a hullámfrontnak két különböző helyről származó része találkozik a megfigyelési



28. ábra. A Young-féle kettősréssel végrehajtott kísérlet vázlata (balra), és a kísérlet vízhullámokkal végrehajtott szemléltetése (jobbra).

helyen. A kísérlet másféle hullámmal, pl. vízhullámmal is elvégezhető. Alumínium lemezen két közeli egyforma keskeny résre beeső hullám hatására kialakuló hullámjelenség látható a 28(b) ábrán (jobbra). A beeső egyenesfrontú hullám balról érkezik. A lemez mögötti hullámjelenség feltűnően hasonlít a 6. ábrán mutatott azonos fázisban rezgő hullámforrásokkal keltett hullámok interferenciájánál látottra. Ez hasonlóság könnyen magyarázható 10. ábrán bemutatott kísérlet eredményét figyelembe véve. Ott látható, hogy a beeső hullám hatására a keskeny rés úgy viselkedik, mint egy pontszerű hullámforrás, hiszen a résből egy körhullám indul ki. Így a kettősrésnél a két közeli keskeny rés két közeli pontszerű forrásként viselkedik (lásd a 28(a) ábrát). Mivel a beeső hullámfrontok egyszerre

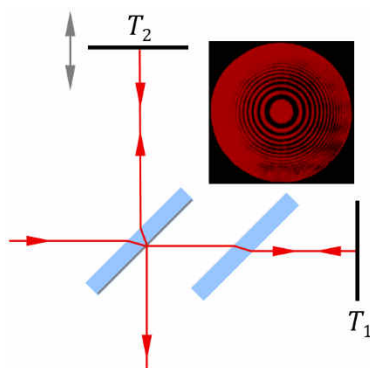
érik el a két rést, ezek az elemi források azonos fázisban rezegnek, éppen ugyanúgy, mint ahogy a 10. ábrán mutatott kísérletben. A nyílásokból kiinduló víz hullámok bizonyos helyeken maximálisan erősítik, és bizonyos helyeken maximálisan gyengítik egymást.

Fény esetén pontosan ugyanígy értelmezhető a jeleség. A megfigyelési ernyő azon pontjaiban vannak a világos csíkok, ahol a keskeny nyílásokból kiinduló elemi fényhullámok maximálisan erősítik egymást. A sötét csíkok helyén ezek a hullámok maximálisan gyengítik egymást. Mivel gyakorlatilag azonos amplitúdójú hullámok találkoznak, a maximális gyengítés szinte kioltást jelent. Ezért alakulnak ki teljesen sötét csíkok. A maximális erősítés és gyengítés feltételét már a hullámok interferenciájának vizsgálatánál láttuk: ezeket rendre a (15) és a (16) egyenletek írják le. A fényvel végzett kísérletben a két rés d távolsága több nagyságrenddel kisebb, mint a megfigyelési ernyő D távolsága ($d \ll D$) a két résből kiinduló elemi hullámok közötti $\Delta s = s_2 - s_1$ útkülönbség $d \cdot \sin \alpha$ -val közelíthető. Így az ernyőn a világos csíkok azon helyen vannak, melyre a

$$d \cdot \sin \alpha = m\lambda \quad (42)$$

feltétel teljesül, ahol m egész szám és λ a fény közegbeli hullámhossza. Optikában nagyon gyakran a fény vákuumbeli hullámhosszát szokás használni. Ha a fény vákuumbeli hullámhossza λ_0 és a fény n abszolút törésmutatójú közegben terjed, akkor $\lambda = \lambda_0/n$ a közegbeli hullámhossz.

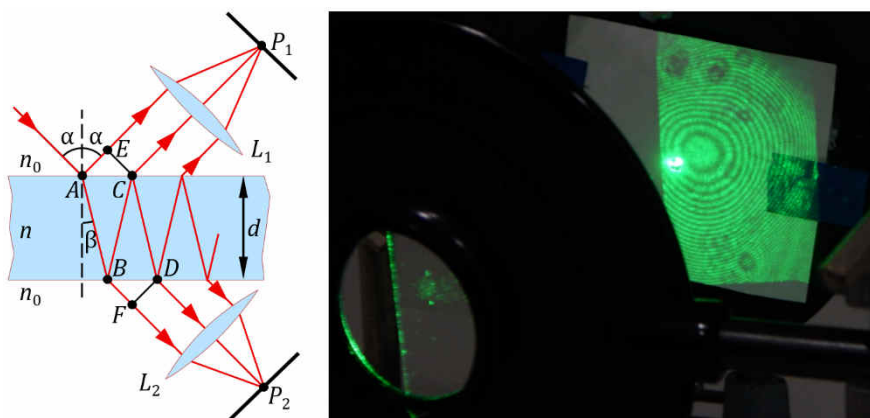
A fényinterferencia jelenségek másik fontos fajtája az ún. *amplitúdóosztással* létrehozott interferencia. A hullámok visszaverődésének és törésének vizsgálatánál már említettük, és a víz hullámmal végzett kísérleten is jól látszik, hogy általában egy határfelületen a törés és visszaverődés egyidejűleg fellép. Ez a jelenség lehetőséget ad arra, hogy egy ilyen határfelületen a beeső teljes hullámot két hullámra, a visszavert és átmenő hullámra osszuk szét. Ilyen módon lehetséges olyan eszköznek a megvalósítása, amely a beeső fényhullámot két azonos amplitúdójú hullámra bontja. Az ilyen optikai eszközt *nyalábosztónak* szokás nevezni. Az amplitúdóosztással létrehozott fényinterferenciának egy tipikus megvalósítása a Michelson-féle interferométer, melynek vázlata a 29. ábrán látható. Az interferométerben az egyik tükör mozgatható,



29. ábra. A Michelson-féle interferométer vázlata és a kimeneten keletkező interferenciagyűrűk divergens fényvel történő megvilágítás esetén (jobbra fent).

így a találkozó hullámok közötti útkülönbség változtatható. A belépő fényhullám az első üveglemez hátsó felületére párologtatott vékony fémréteg amplitúdóosztással egy visszavert és egy átmenő hullámot hoz létre, amely az interferométer ún. *karjaiban* terjed, és a két T_1 és T_2 tükörről visszaverődve ismét végig halad karokon, ahol ismét elérve a vékony fémréteget újabb amplitúdóosztás történik. A vízszintes karban látható második üveglemez a másik karban haladó hullám üvegben történő terjedését kompenzálja. Ennek segítségével mindkét karban azonos vastagságú üvegen halad keresztül a fény. A fémréteggel történt második találkozás után az interferométerből két azonos irányba terjedő hullám lép ki (a 29. ábrán lefelé mutató irányba). A két hullám között – a karhosszúságok különbségétől függően – útkülönbség van. A maximális erősítés, illetve gyengítés feltételét a (15) és a (16) összefüggések adják meg.

Interferenciajelenségek egy gyakorlatban is fontos típusa a *sík-párhuzamos lemezek* figyelhető meg (30. ábra). Az ilyen interferenciákat általában gyűjtőlencsék fókuszsíkjában szokás megfigyelni, mert a lencse a párhuzamos fénysugarakkal reprezentált hullámokat a fókuszsíkjának egy adott pontjába gyűjti



30. ábra. Fényinterferencia sík-párhuzamos lemezen. Balra: A lemez felső és alsó felületén amplitúdóosztással hullámok verődnek vissza, illetve lépnek ki a lemezből. Ezek között a hullámok között a beesési szögtől függő útkülönbség van. Jobbra: Mikroszkóp tárgylemezt erősen divergens fénynyalábbal megvilágítva, a lemeztől visszavert hullámok a papírlapon látható interferenciagyűrűket hozzák létre. A divergens fénynyaláb a papírlapon lévő – erősen fénylő – lyukon lép ki. A tárgylemez függőlegesen a fekete tárgytartón lévő kerek nyílás közepén látható.

össze. Így a hullámok találkozása ezen pontban történik. Ez a gyűjtőlencse lehet akár a szemünk is, ha közvetlenül végtelenbe akkomodált szemmel nézünk a lemez irányába. Persze a szemmel történő közvetlen megfigyelésnél nagyon

vigyázni kell, hogy a fény sugárzási teljesítménye ne haladja meg az előírt határértéket!

Az interferáló fényhullámok a lemez felső és alsó felületén amplitúdó-osztással jönnek létre. A lemezen belül a fény többszörös visszaverődéssel oda-vissza terjed (30. ábra). Egy-egy visszaverődés során a fényenergia egyrésze kilép a lemezből. Így a lemeznek a beeső fényhullám felőli és a másik oldalán is hullámok lépnek ki. Ha felületek visszaverő képessége nem túl nagy, akkor gyakorlatilag mindkét oldalon elegendő csak az első két hullámot figyelembe venni. Ilyenkor ún. *kétsugaras* interferenciáról szokás beszélni. Amennyiben a felületek visszaverő képessége nagy, akkor már gyakorlatilag nem csak két hullám adódik össze. Ekkor az interferencia *soksugaras*.

Mivel a fény nem csak egy adott törésmutatójú közegben halad (lásd a 30. ábra bal oldalát), a hullámhossza a határfelületen való átlépésnél megváltozik. Ezért az interferenciát befolyásoló fáziskülönbséget célszerű az ún. *optikai úthosszkülönbséggel* kifejezni. Ha fény egy n abszolút törésmutatójú közegben valamely idő alatt s utat tesz meg, akkor a fény optikai úthosszán az $n \cdot s$ mennyiséget értjük. Kicsit általánosabban, ha a fény az $n_1, n_2, n_3, \dots$ abszolút törésmutatójú közegekben rendre $s_1, s_2, s_3, \dots$ utakat tesz meg, akkor az optikai úthossza

$$\Delta = n_1 s_1 + n_2 s_2 + n_3 s_3 + \dots \quad (43)$$

Ez megegyezik azzal a távolsággal, amit a fény ugyanannyi idő alatt vákuumban tenne meg. Ha a találkozó fényhullámok fázisállandója azonos, akkor a fényhullámok fáziskülönbségét az optikai úthosszkülönbség határozza meg. Az optikai úthosszkülönbséggel – már a (15) és a (16) egyenletekhez hasonló – összefüggéssel tudjuk kifejezni a maximális erősítés és gyengítés feltételét. Ebben már a vákuumbeli hullámhossz szerepel. Nevezetesen, ha a találkozó fényhullámok $\Delta_{21} = \Delta_2 - \Delta_1$ optikai úthosszkülönbsége a λ_0 vákuumbeli hullámhossz m egész számú többszöröse, azaz

$$\Delta_{21} = m \lambda_0 = 2m \lambda_0 / 2, \quad (44)$$

akkor a fényhullámok maximálisan erősítik egymást, továbbá ha

$$\Delta_{21} = \lambda_0 / 2 + m \lambda_0 = (2m + 1) \lambda_0 / 2, \quad (45)$$

akkor maximálisan gyengítik egymást.

A d vastagságú, n abszolút törésmutatójú sík-párhuzamos lemezre α szögben beeső hullám esetén az első és a második hullám közötti (és minden két további szomszédos hullám között is), visszavert és átmenő fényre egyaránt, az optikai úthosszkülönbség a

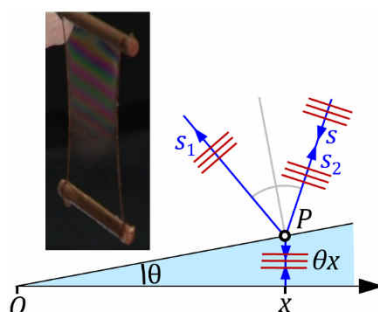
$$\Delta_{21} = n(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_0 \overline{AE} = 2d\sqrt{n^2 - (n_0 \sin \alpha)^2} \quad (46)$$

képlettel számítható ki, ahol n_0 a környező közeg abszolút törésmutatója. Az utolsó formula egyszerű geometriai megfontolással, a Snellius-Descartes-törvény, továbbá trigonometrikus azonosságok alkalmazásával kapható meg. A visszavert fény esetén még egy nagyon fontos – elméleti úton indokolható és kísérleteknél is megfigyelhető – tényt figyelembe kell venni: Amikor a fény optikailag ritkább közegből lép át az optikailag sűrűbb közegbe, akkor ezen a határfelületen történő visszaverődés során pontosan úgy viselkedik, mint a kifeszített gumikötélen terjedő rögzített végről visszavert rugalmas hullám, azaz ilyen határfelületről a fényhullám *ellentétes* fázisban verődik vissza. Az átmenő fényhullámnál nincs ilyen fázisváltozás. Reflektált fényre ezért közvetlenül a felső felületről legelőször visszaverődő hullám esetén figyelembe kell venni ezt ellentétes fázisban történő visszaverődést. Az ellentétes fázis éppen π fázis változásnak felel meg, amely pedig nyilvánvalóan $\lambda_0/2$ optikai úthosszúsággal ekvivalens. Ennek megfelelően a maximális erősítés és a gyengítés feltételei éppen *felcserélődnek*, azaz visszavert fényben a maximális erősítés feltételét a (45), míg a maximális gyengítés feltételét a (44) egyenletek szolgáltatják! Ezért *a visszavert és átmenő fényben megfigyelhető interferencia jelenségek éppen egymás komplementerei lesznek*. Ez azt jelenti, hogy ahol a visszavert fényben maximális fényintenzitás van, akkor ugyanott az átmenő fényben éppen minimális fényintenzitás lesz a megfigyelési ernyőn.

Az optikai úthosszkülönbség egy adott lemezre, a (46) egyenlet alapján, az α beesési szögtől függ. Ezért egy adott beesési szöghöz tartozó részhullámok interferenciája, az azokat összegyűjtő lencse fókuszsíkjában, egy olyan görbét hoz létre, melynek pontjaihoz azonos fényhatás tartozik. Ezért a megjelelő világossötét interferenciamintázatot *azonos beesés görbéinek* nevezzük. A 30. ábrán jobbra látható kísérletben egy mikroszkóp tárgylemezt erősen divergens fénynyalábbal viágítottunk ki. A sík-párhuzamos üveglemez felső és alsó felületéről visszavert hullámok közötti – beesési szögtől függő – útkülönbség miatt, a papírlapon interferenciagyűrűk jelennek meg. Az erősen divergens megvilágítás miatt, a beesési szög széles tartományban változik. A maximális erősítés feltételét teljesítő beesési szöggel rendelkező fényhullámok egy világos gyűrűt, a maximális gyengítés feltételét kielégítő pedig sötét gyűrűt hoznak létre. Az erősen divergens fénynyaláb a papírlapon vágott erősen fénylő kis lyukon lép ki. A fekete tárgytartó kerek nyílásának közepén a tárgylemez függőleges széle látható.

A következő fontos interferenciajelenség, amivel foglalkozunk itt, kis halásszögű ékalakú lemezen alakul ki. A két sík határfelület közötti szög általában csak néhány ívperc. Ha egy ilyen ékalakú lemezt közel merőlegesen megvilágítunk, akkor a felületére nézve, az ék élével párhuzamos interferenciacsíkokat lehet látni. Az interferáló hullámok itt is a lemez felső és alsó lapján, amplitúdóosztással kialakuló visszavert hullámok interferenciája következtében jön létre. Ha jelenséget egy kisbelépő nyílású lencsével (ilyen a szemünk is) tanulmányozzuk, akkor a találkozó hullámok közötti optikai úthosszkülönbség lényegében a lemez adott helyen lévő vastagságától függ. Így az azonos vastagságú helyek azonos fényhatást keltenek, ezért a megjelenő interferenciamintázatot *azonos vastagság görbéinek* nevezzük. Síkfelületekkel határolt ékes lemez esetén ezek az ék élével párhuzamos szakaszok.

A 31. ábra az eddig elmondottakat szemlélteti. A beeső fényhullámot az s sugár reprezentálja, amelynek egy része a felső felületen visszaverődik az s_1 sugárral jelölt irányba, másik része pedig megtörik, majd közel merőlegesen esik hátsó felületre. A hátsó felületet elérve ismét amplitúdóosztással keletkezik egy visszavert fényhullám, ami elérve a felső felületet, az s_2 sugárral jelölt irányba kilép a lemezből. Egy kisbelépő nyílású lencsével a P pontot (a lemez felső felületét) egy ernyőre képezve, ott megjelennek az interferenciacsíkok. Ha szemmel nézünk a lemezre, akkor a hullámok az ideghártyán találkoznak és a lemez felületén látjuk az ék élével párhuzamos interferenciacsíkokat. A maximális gyengítés és erősítés feltételeinél figyelembe kell venni, hogy a lemez felső felületén megint ellentétes fázisú visszaverődés lép fel! A 31. ábrán vázolt esetben, az x koordinátájú helyen az interferáló hullámok között



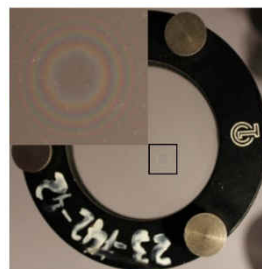
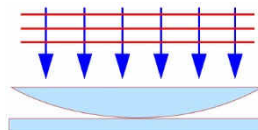
31. ábra. Fényinterferencia ékalakú lemezen. A fényképen a nehézségi erő hatására ékalakú szappanhártyán kialakuló, a fehér fényű megvilágítás miatt, színes interferenciacsíkok, az azonos vastagság görbéi láthatók.

$$\Delta_{21} = n2\theta x \quad (47)$$

optikai úthosszkülönbség van, ahol n a lemez anyagának abszolút törésmutatója, θ az ék hajlásszöge. Mivel θ kicsi szög, a lemez vastagsága az x helyen $d \approx \theta x$ közelítéssel adható meg. Az említett felső felületen való ellentétes fázisban való

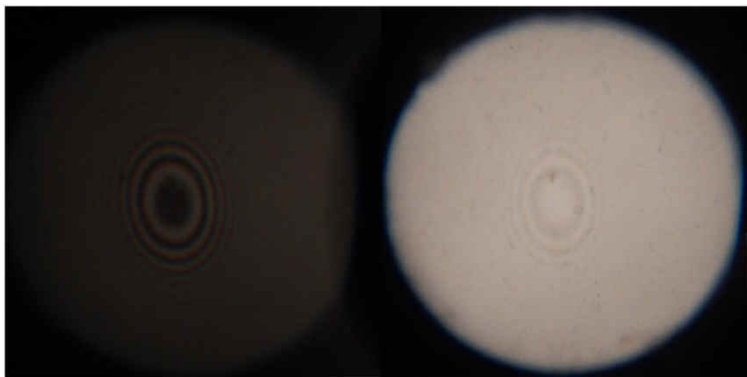
visszaverődés miatt a maximális erősítés és gyengítés feltételei most is felcserélődnek, azaz a (45) egyenlet a maximális erősítés, és a (44) összefüggés a maximális gyengítés feltételét szolgáltatja.

Az azonos vastagság görbéinek egy szép példáját szolgáltatják a Newton-féle gyűrűk, amit a 32. ábrán láthatunk. Egy sík-párhuzamos üveglapra egy nagy görbületi sugarú sík-domború lencsét helyezünk a domború felülettel fordítva az üveglap felé. Ha a lencsét a síkfelülete felől egy párhuzamosított fehér fénynyalábbal megvilágítjuk, akkor visszavert fényben az 32. ábrán látható színes koncentrikus gyűrűrendszer jön létre, közepén fekete folttal. Fehér fény esetén csak igen kicsi, néhány mikrométer alatti úthosszkülönbségek esetén jön létre interferencia.



32. Newton-gyűrűk visszavert fényben. A bal felső sarokban a bekeretezett négyzet nagyítása.

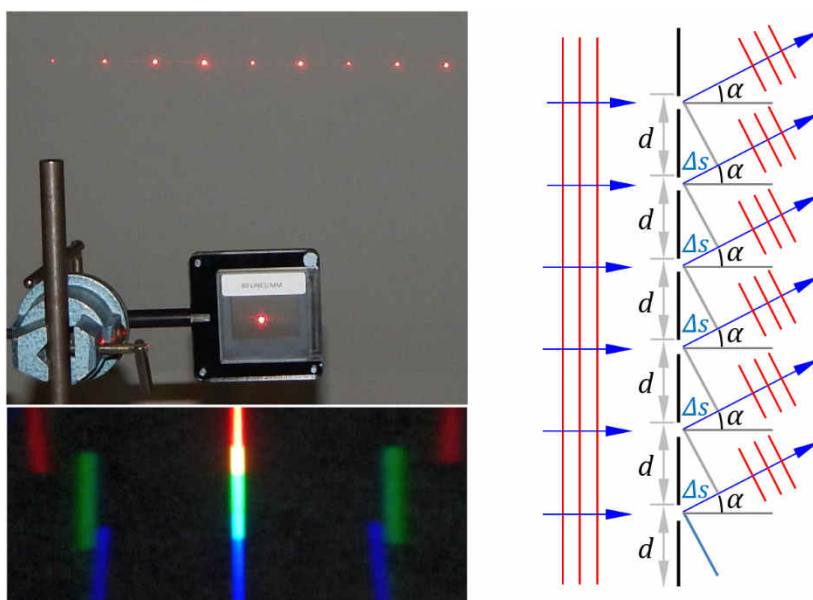
A Newton-féle gyűrűk a lencse görbült alsó felülete és az üveglemez sík felső felülete közötti – nagyon vékony – változó hajlásszögű levegő éken létrejövő azonos vastagság görbéi. A levegő ékben az azonos vastagságú helyek körök, ezért az fényinterferencia gyűrűket létesít. A látott színeket színkeverés hozza létre. Ha egy adott hullámhossza kioltás van, akkor annak a kiegészítő színének megfelelő gyűrűt látjuk. A gyűrűk nemcsak visszavert, hanem átmenő fényben észlelhetők (33. ábra). Átmenő fényben a gyűrűrendszer közepén fehér folt van. A két interferenciajelenség



33. ábra. Newton gyűrűk visszavert (balra) és átmenő fényben (jobbra). A két interferenciajelenség egymás komplementere. Az átmenő fényre az interferenciagyűrűk egy homogén háttérre rakódnak rá, ezért a gyűrűk láthatósága rosszabb, mint visszavert fényre. Visszavert fényre a jelenség fénysegevényebb, de a gyűrűrendszer láthatósága sokkal jobb.

komplementer volta a már említett π fázisugrás következménye. Az ellentétes fázisú visszaverődés most a levegő ék alsó felületén való visszaverődéskor lép fel.

Az általunk itt vizsgált interferenciajelenségek közül az utolsó az optikai rács által létesített fényjelenség lesz. Ha a Young-féle kettősréshez hasonlóan, átlátszatlan ernyőn hosszú és keskeny, egyforma rések sorozatát hozzuk létre, egymástól szigorúan azonos távolságra, vagy még általánosabban egy hordozón periodikusan váltakozó kicsiny hosszú és keskeny, a hordozótól eltérő optikai tulajdonságú, azonos felépítésű szerkezeteket hozunk létre, akkor az így kapott eszközt *optikai rácsnak* nevezzük. A periodikusan ismétlődő részek közötti távolságot *rácsállandónak* hívjuk. A rácsállandó az optikai rács egyik fontos jellemzője.



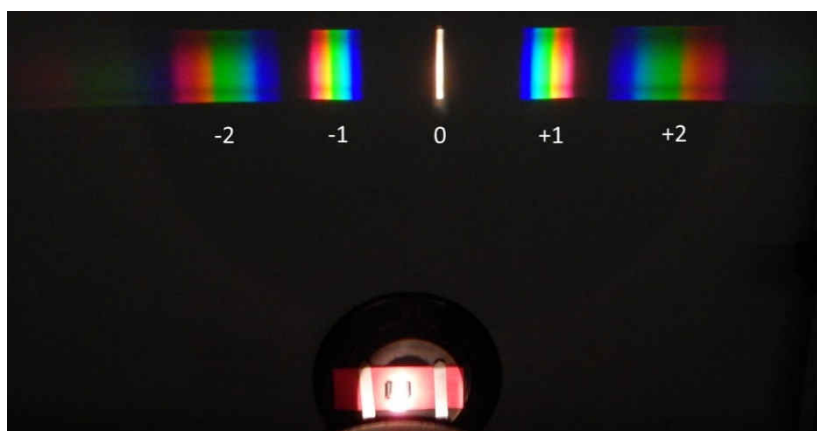
34. ábra. Optikai rács szemléltetése. Balra fent: egy HeNe lézer nyalábja esik egy diakeretben lévő optikai rácsra (80 vonal/mm). A mögötte lévő ernyőn láthatók az interferencia következtében kialakuló maximális fényerősítési helyek. Balra alul: a zérus rendű erősítéstől eltekintve, az erősítés iránya függ a hullámhossztól, az ibolyától a vörösig növekszik. Jobbra: a maximális erősítés irányának meghatározásához használt magyarázó ábra.

Ha az optikai rácsra merőlegesen beeső keskeny monokromatikus fénynyaláb, például egy lézer nyalábját ejtjük be, akkor a rács mögött elhelyezett ernyőn bizonyos helyeken fényes fényfoltok jelennek meg (34. ábra). Az optikai rácsot elérő fénynyaláb a rácson bizonyos irányokba terjedő fénynyalábokat hoz létre. Ezek a nyalábok az ernyőt elérve, létre hozzák az említett fényfoltokat. Merőlegesen beeső nyaláb esetén a maximális erősítési irányokat könnyen meghatároz-

hatjuk. Az elemi hullámforrásként viselkedő keskeny résből kiinduló hullámok olyan – rács felszínére merőleges iránytól mért – α irányban erősítik egymást maximálisan, mikor a két szomszédos résből kiinduló elemi hullám között az útkülönbség éppen a közegbeli hullámhossznak az egész számú többszöröse. A 34. ábra jobb oldali részéből látható, hogy két szomszédos elemi hullám közötti útkülönbség $\Delta s = d \cdot \sin \alpha$. Ezért merőleges beesésnél a

$$d \cdot \sin \alpha = m \cdot \lambda \quad (48)$$

egyenlet adja meg a maximális erősítéshez tartozó irányokat, ahol az m egész az az erősítés rendszáma száma, λ a közegbeli hullámhossz és d a rácsállandó. A *rácsegyenletnek* nevezett (48) összefüggésből jól látszik, hogy a – nullarendtől ($m = 0$) eltekintve – nagyobb hullámhosszhoz nagyobb eltérítési szög tartozik. Ezt igazolja a 34. ábrán bal oldalán alul látható kísérletről készült fénykép is, Mivel az ibolyától a vörösig növekszik a hullámhossz, ezért a 34. ábrán látható ± 1 rendű erősítésre a színes sávok sorrendje a középső 0 rendtől kifelé kék, zöld és vörös. A maximális erősítési iránynak a színtől való függése lehetőséget ad arra, hogy a nem-egyszínű fényének a színi összetételét meghatározzuk. Ez, az úgy nevezett színekép nagyon lényeges információt ad a fényforrásokat alkotó anyagokról. Ugyanis az anyagokat alkotó atomok és molekulák által sugárzott fény színi összetétele jellemző az adott atomra vagy molekulára. A színeképből a fényforrást alkotó anyagok azonosíthatók. A jó minőségű színeképet létrehozó eszközt *spektrográfnak* nevezzük, a rácson kívül még egyéb optikai elemeket is tartalmaz.



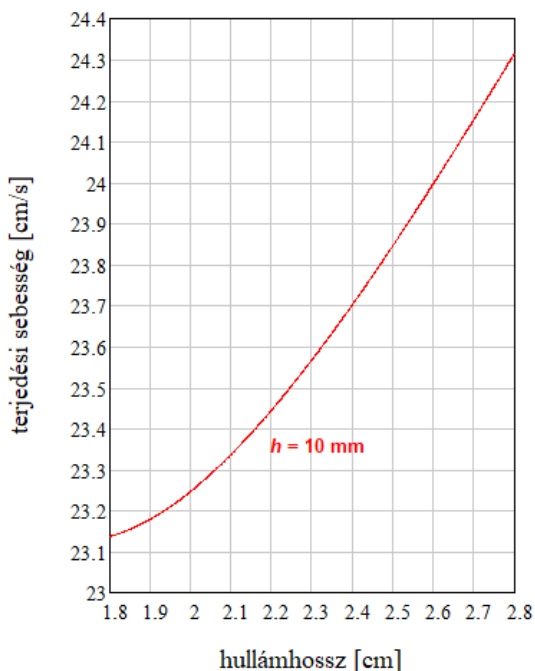
35. ábra. Előtérben a fehér fényt színeire bontó rács látható (a képen alul). A színekép a rács mögötti ernyőn jön létre (a képen felül). A színeképek alá az erősítésnek a rendszámát írtuk.

A spektrográfban általában egy keskeny rést erősen megvilágítanak a vizsgálandó fényforrás fényével és a rést leképezik lencsék segítségével. Ha a rácsot (vagy más bontó elemet például prizrát) a fényútba helyezik, a színi bontás miatt a rés különböző színű képei sorakoznak fel egymás mellett. Ez maga a látott színekép.

Mivel az optikai rácsban sok kis elemi rést világítunk ki, az interferáló hullámok száma igen nagy lehet. Így az optikai rács esetén megfigyelhető fényjelenség *soksugaras interferencia*. A soksugaras interferencia miatt az erősítési irányok rendkívül élesen elkülönülnek egymástól, továbbá közöttük gyakorlatilag teljes a kioltás. Ezért olyan kicsik és jól szeparáltak a 34. ábrán bal oldalon felül látható kísérletben az ernyőn lévő erősen fénylő foltok.

4. Feladatok

1. Két egymástól $d = 5$ cm távolságra lévő, $\nu = 13,53$ Hz frekvenciával, azonos fázisban rezgő csúccsal hullámokat keltünk a vízfelületen. A víz hullámok terjedési sebessége $c = 23$ cm/s. Határozza meg, hogy a forrásokat összekötő egyenessel párhuzamos, attól $D = 20$ cm távolságra lévő egyenesen hány olyan hely van, ahol a két víz hullám maximálisan erősíti egymást! Adja meg ezen a helyek helyzetét!
2. Egy 1 m hosszú vékony üveghenger vízzel van feltöltve. Az üveghenger felső nyitott végénél egy 500 Hz frekvenciájú hangforrás szól. A vizet a henger alján lévő kis nyíláson lassan kiengedjük. Az első hangerősödést a vízszintnek a cső nyitott végégtől mért 16 cm-es helyzeténél, a második erősödést 50 cm-es, a harmadikat 84 cm-es helyzeténél halljuk. Mekkora a hang terjedési sebessége? Mekkora a levegő hőmérséklete a csőben, ha 0°C -on a hangsebesség 331,5 m/s?
3. A víz hullámok terjedési sebessége függ a hullámok hullámhosszától. Egy adott hullámkádban lévő 1 cm mélységű víz esetén a függést az 1,8 cm-től a 2,8 cm-ig terjedő tartományra a jobbra látható ábra mutatja. Egy harmonikusan rezgő egyenes rúddal víz hullámokat keltünk. Mekkora sebességgel terjednek és mekkora lesz a hullámok hullámhossza, ha a rudat 9 Hz frekvenciával rezgetjük? Mennyivel változik meg a terjedési sebesség és a hullámhossz, ha forrás frekvenciáját 3 Hz-cel megnöveljük? A feladat megoldása során használja fel a mellékelt grafikont!
4. Hullámkádban egyszerre keltünk 19 mm és 27 mm hullámhosszú hullámokat, melyek rendre 23,18 cm/s és 24,16 cm/s sebességgel terjednek (lásd az előző

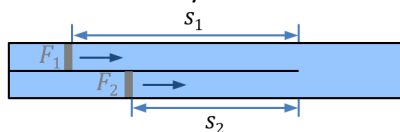


feladat grafikonját). A hullámok frontja egyenes és azonos irányba terjednek. Egy adott időpontban a két hullámnak egy-egy hullámhegye azonos helyen van, így nyilván ezen a helyen a kéthullám maximálisan erősíti egymást. Ebben az időpontban az egy hullámhossznyival hátrébb lévő hullámhegyek biztosan eltérő helyen lesznek. Mennyi idővel később lesz ez a két hullámhegy azonos helyen? Ennyi idővel később, mivel megint egy helyen van két hullámhegy, ezen a helyen szintén maximális erősítés lép fel. Ez alatt az idő alatt mennyivel mozdult el ez az erősítési hely? Mekkora sebességgel mozgott a hullámkádhoz képest?

5. Hullámkádba derékszögű trapéz alakú vékony üveglemezt helyezve a vízfelületet egy 1,5 cm és egy 0,2 cm mélységű tartományra bontjuk szét. Így a két tartományt szétválasztó egyenesre a vízhullámok ferdén esnek be. Sekély vízben a vízhullámok terjedési sebessége függ a víz mélységétől. A mélyebb tartomány vízfelületén egy hosszú egyenes rudat 8 Hz-es frekvenciával harmonikusan rezgetve egyenes hullámfrontú vízhullámot keltünk, melyek a 15 mm mély vízben 251,98 mm/s, a 2 mm mély vízben 192,54 mm/s sebességgel terjednek. A beeső hullám terjedési iránya 30°-os szöget zár be a szétválasztó szakaszra merőleges iránnyal. A beeső hullám irányához képest mekkora szöggel és milyen irányba változik meg a sekély vízbe behatoló hullám terjedési iránya?
6. Egy 25 cm hosszú és 4 mm átmérőjű 0,97 kg/dm³ sűrűségű gumiszálát dinamométerrel közbeiktatásával kifeszítünk és a közepénél megpengetjük. A hallott hang frekvenciája 60 Hz? Mekkora erőt mutat a dinamométer?
7. Egy kifeszített hosszú gumiszálán, a szálra merőleges y tengely irányába rezgő harmonikus hullám terjed jobbra. A gumiszálnak egy O -val jelölt pontja, harmonikus rezgést végez az $y(t) = A \sin(2\pi vt)$ képlettel leírt módon, ahol $A = 3$ cm, $v = 2$ Hz és t az időt jelöli. A szálon a transzverzális hullámok $c = 4$ m/s sebességgel terjednek. Milyen messze lesznek egymástól a transzverzális hullám hullámhegyei? Hogyan mozognak a hullámhegyek a szál mentén? Hogyan mozog a szálnak az O ponttól jobbra, $x = 5$ m távolságra lévő P pontja? Adja meg ennek a pontnak a kitérését a $t = 2,25$ s időpontban!
8. Egy feszített hosszú gumiszálán azonos irányba terjed két azonos frekvenciájú és azonos rezgési irányú transzverzális harmonikus hullám. Milyen lesz az

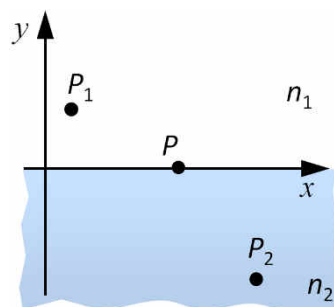
eredő hullámjelenség, ha a szálon terjedő hullámokra érvényes a zavartalan szuperpozíció elve? Hogyan mozognak a gumiszál pontjai ekkor?

9. Egy feszített hosszú gumiszálon egymással szemben terjed két azonos amplitúdójú, frekvenciájú és azonos rezgési irányú transzverzális harmonikus hullám. Milyen lesz az eredő hullámjelenség, ha a szálon terjedő hullámokra érvényes a zavartalan szuperpozíció elve? Hogyan mozognak a gumiszál pontjai ekkor?
10. Egy feszített hosszú gumiszálon egyező irányba terjed két azonos amplitúdójú és azonos rezgési irányú transzverzális harmonikus hullám. Tegyük fel, hogy a két hullám körfrekvenciája és körhullámszám is különbözik egymástól. Milyen eredő hullámjelenség jön létre a szálon, ha a szálon terjedő hullámokra érvényes a zavartalan szuperpozíció elve? Hogyan mozognak ekkor a gumiszál pontjai?
11. Egy víz hullám csatorna egyik felét egy hosszú keskeny függőleges lappal két részre osztjuk (a felülnézetet lásd jobbra). Az így keletkezett két részcsatorna egyikében találkozási helyüktől $s_1 = 64$ cm távolságra helyezzük el az F_1 víz hullámforrást. A másik részcsatornában is rakunk egy az előzővel azonos fázisban rezgő F_2 hullámforrást, melyet a találkozási helytől 44 és 74 cm közötti s_2 távolságokra tudjuk elhelyezni.
A hullámforrások $\lambda = 8$ cm hullámhosszúságú víz hullámokat keltenek. Hová tegyük a második hullámforrást, ha és azt szeretnénk, hogy a találkozó víz hullámok maximálisan gyengítsék egymást?

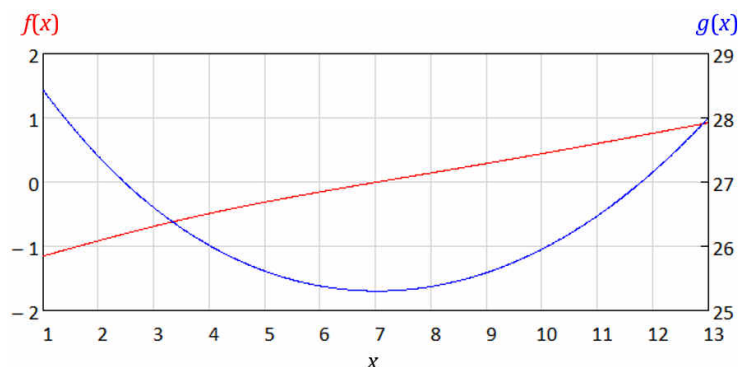


12. Egy vonatkoztatási rendszerben az $A(2 \text{ m}; -1 \text{ m}; 5 \text{ m})$ pontból fényjelet küldünk a $B(-1 \text{ m}; 2 \text{ m}; 0 \text{ m})$ pontba. Mennyi idő alatt jut a fény az A pontból a B pontba, ha fény vákuumban terjed? Mennyi a terjedési idő, ha a teret 1,5 abszolút törésmutatójú közeg tölti ki?
13. Albert Einstein a *speciális relativitáselméletében* egy adott vonatkoztatási rendszerben eltérő helyen lévő órák szinkronizálására fényjel alkalmazását javasolta. A Földön lévő órát mennyi idővel kell későbbre állítani tőle 150 millió km-re lévő órához képest, ha azt szeretnénk, hogy a két óra ugyanazt az időt mutassa a fényjel megérkezésekor?

14. Függőleges tengely körül forgatható, függőleges tükröző felületű síktükörre vízszintes fénysugár esik pontosan a tükör forgástengelyénél érve el a tükört. Mekkora szöggel térül el a tükörről visszavert fénysugár, mikor a tükört φ szöggel elforgatjuk?
15. Két egyforma téglalap alakú síktükört egymásmellé helyezünk úgy, hogy az egyik élüknél szorosan összeérnek, a tükröző felületeik függőlegesek és φ szöget zárnak be egymással ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$). Vízszintes fénysugarat ejtünk az egyik tükörre úgy, hogy róla visszaverődő fénysugár a másik tükört is elérje, arról visszaverődve az első tükört már ne érje el a fénysugár. Mekkora szöget zárnak be egymással a belépő és a kilépő fénysugarak?
16. Mekkora annak az anyagnak a törésmutatója, amelyre 60° -os beesési szög alatt ejtve a fényt, visszavert és a megtört fénysugár merőleges lesz?
17. Egy 50 cm hosszú rudat állítunk függőlegesen az 1 m mélységű vízzel teli medencébe aljára. A nap sugarai levegőben a függőlegessel 30° -os szöget zárnak be. Milyen hosszú lesz a rúd árnyéka a medence alján, ha a víz levegőre vonatkozó törésmutatója 1,33?
18. Egy $n = 1,52$ relatív törésmutatójú levegő-üveg sík határfelületére a levegőből $a = 5$ cm átmérőjű kör alakú merőleges keresztmetszetű párhuzamos fénysugarakból álló fénynyaláb esik be olyan beesési szöggel, hogy a felületről visszavert fénysugarak és az üvegbe belépő fénysugarak egymásra merőlegesek lesznek. Mekkora beesési szög? Milyen alakú, és mekkora lesz a visszavert és az átmenő fénynyaláboknak a terjedési irányra merőleges keresztmetszete?
19. Levegő-üveg közegpár sík határfelületére merőleges síkban helyezkedik el a $P_1(1 \text{ cm}, 5 \text{ cm})$ és a $P_2(13 \text{ cm}, -10 \text{ cm})$ pont, ahol a koordináta-rendszer x tengelye a határsík és az erre merőleges sík metszészvonala, az y tengely a határfelületre merőlegesen, az üveg felől a levegő irányába mutat, ahogy azt a bal oldali ábra szemlélteti. A levegő abszolút törésmutatója



$n_1 = 1$, az üvegé $n_2 = 1,5$. Tudjuk, hogy a P_1 pontból fénysugár jutott el a P_2 pontba. Adja meg határfelület azon P pontját, ahol a fénysugár átlépett a határfelületen! A feladat megoldásánál használja fel az alábbi ábrát,



melyek

az

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 25}} - 1,5 \frac{13-x}{\sqrt{(x-13)^2 + 100}}$$

és

a

$$g(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 25} + 1,5\sqrt{(x-13)^2 + 100}$$

függvények grafikonjait szemlélteti! A baloldali függőleges tengely az $f(x)$, míg a jobboldali függőleges tengely a $g(x)$ függvényre vonatkozik. A piros görbe az $f(x)$ függvény, míg a kék görbe a $g(x)$ viselkedését mutatja. Vajon tulajdonítható-e valamilyen fizikai jelentés a $g(x)$ függvénynek?

20. Egy $n = 1,46$ relatív törésmutatójú $d = 3$ cm vastag kvarcból készült sík-párhuzamos lemezre $\alpha = 30^\circ$ -os beesési szöggel $a = 1$ cm átmérőjű kör merőleges keresztmetszetű párhuzamosított sugarakból álló fénynyaláb esik. Hogyan haladnak keresztül a lemezen a nyalábot alkotó fénysugarak? Milyen alakú és mekkora lesz a lemezben haladó, és az abból kilépő fénynyalábok merőleges keresztmetszete?
21. Egy 60° -os törőszögű, $n = 1,46$ relatív törésmutatójú üvegprizmára $\alpha_1 = 30^\circ$ -os beesési szöggel párhuzamosított sugarakból álló $a = 1$ cm átmérőjű kör merőleges keresztmetszetű fénynyaláb esik be úgy, hogy a beeső nyaláb a prizma törőélére merőleges és a beesési merőlegesnek a prizma alapja felé esik. Mekkora szöggel téríti el a prizma a nyalábot alkotó sugarakat? Milyen alakú és mekkora lesz a prizmából kilépő fénynyaláb merőleges keresztmetszete? Mekkora szögben kell a beeső nyalábot a prizma ejteni, hogy a

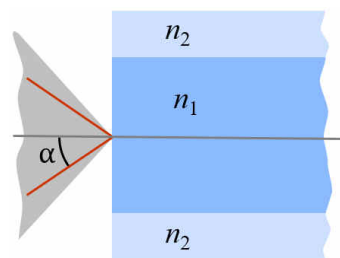
kilépő nyaláb merőleges keresztmetszete megegyezzen a beeső nyalábéval? Mekkora szöggel térül el ekkor a kilépő nyaláb a beesőhöz képest?

22. Egy 60° -os törőszögű üvegprizmára párhuzamos fénysugarakból álló keskeny fénynyalábot ejtünk be. A prizma törőéle merőlegesen áll, a fénynyaláb vízszintes. Mikor a prizma forgatásával fokozatosan változtatjuk a beesési szöget, azt tapasztaljuk, hogy a prizmából kilépő nyaláb eltérülési szöge a beeső nyalábhoz képest egy adott beesési szögnél minimális. Ennél a minimális eltérésnél a prizmában terjedő fénysugarak éppen merőlegesek a törőszög szögfelezőjére. Mekkora az üveg törésmutatója, ha a minimális eltérítés szöge $65,7^\circ$?

23. Folyadékkal telt kádban a felszín alatt lévő pontszerű fényforrásból függőleges síkban a felszín irányába fénysugarak indulnak ki. A fényforrást egy fémből készült hengerpalást veszi körbe, melynek vízszintes tengelyében van a fényforrás. A paláston kicsi nyílások vannak, melyen keresztül keskeny fénynyalábok lépnek ki és eléri a folyadék felszínét. A nyalábok beesési szöge eltérő. A hengerpalást a szimmetriatengelye körül forgatható. Az eszközt beállítjuk úgy, hogy az egyik keskeny nyaláb éppen merőlegesen essen a folyadék felszínére. Ezen rést figyelve fokozatosan elforgatjuk a hengert. Azt tapasztaljuk, hogy a megfigyelt résen keresztül haladó keskeny fénynyaláb $45,6^\circ$ -os forgatási szög után nem lép ki a folyadékból. Mekkora a folyadék levegőre vonatkozó relatív törésmutatója?



24. Telekommunikációban széleskörben használt optikai szál közepében egy hajlékony, átlátszó és nagy törésmutatójú anyagból készült henger alakú rész, a szál *magja* van. A magot nála kisebb törésmutatójú anyag veszi körbe koaxiálisan, melyet *köpeny*nek nevezünk. Legyen a szál magját alkotó anyag törésmutatója 1,72, a köpenyé pedig 1,54. A fényt egy gyűjtőlencse segítségével szokták bejuttatni a szálba. A lencse a szál magjának a külső felületének egy pontjába gyűjti össze a fénysugarakat. A beeső fénynyalában a sugarak egy



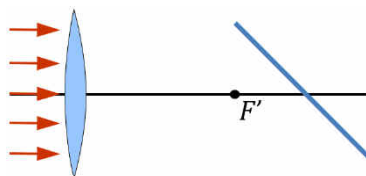
kúppaláston belül haladnak, melyet az ábrán a szürke tartomány szemléltet. Az összetartó fénynyalábnak azonban nem minden sugara marad feltétlenül bent a magban a belépés után, hanem csak – az ábrán piros vonalakkal jelölt – α félnyílásszögű kúppaláston belül haladók! Az adott törésmutatókra mekkora ez az α szög?

25. Egy tó vizében $t = 50$ cm mélységben egy $L = 20$ cm hosszú hal lebeg. Milyen mélységben és mekkorának látja a halat az éppen felette levegőben lebegő halászmadár? Milyen típusú képet lát a madár? A víz törésmutatója $n = 4/3$?
26. Egy tó vize felett $t = 50$ cm magasságban egy $L = 5$ cm hosszú szitakötő lebeg a levegőben. Éppen a szitakötő alatt a vízben lévő hal milyen magasságban és mekkorának látja a szitakötőt? Milyen típusú képet lát a hal? A víz törésmutatója $n = 4/3$.
27. Egy mikroszkóppal vizsgálunk egy $d = 3$ mm vastag síkpárhuzamos üveglemezt. A lemezt a mikroszkóp felé lassan közelítve először a lemez felső, majd az alsó felületét látjuk élesen. Ahhoz, hogy a lemez felső felülete után az alsó felületet lássuk élesen, az üveglemezt $b = 2$ mm távolsággal kell közelebb vinni a mikroszkóp irányába. Mekkora az üveglemez levegőre vonatkozó relatív törésmutatója?
28. Egy R sugarú homorú gömbtükörre az optikai tengelyével párhuzamosan, a tengelytől d távolságra fénysugarak esnek be. A beeső fénysugarak egy d sugarú henger palástját alkotják. Hogyan verődnek vissza a tükörről ezek a sugarak?
29. Egy R sugarú domború gömbtükörre az optikai tengelyével párhuzamosan, a tengelytől d távolságra fénysugarak esnek be. A beeső fénysugarak egy d sugarú henger palástját alkotják. Hogyan verődnek vissza a tükörről ezek a sugarak?
30. A levegőhöz képest 1,5 relatív törésmutatójú üvegből egy szimmetrikus +20 dioptria törőerejű gömbi lencsét akarunk készíteni. Milyen alakú legyen a lencsék felülete, és mekkora legyen ezek görbületi sugara? Milyen nyaláb hagyja el a lencsét, ha a lencse optikai tengelyével párhuzamos, a tengelyhez közeli, fénysugarakból álló fénynyalábot ejtünk a lencsére? Ábrán szemléltesse a lencsének a beeső nyalábra gyakorolt hatását!

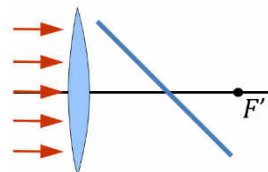
31. A levegőhöz képest 1,5 relatív törésmutatójú üvegből egy szimmetrikus -25 dioptria törőerejű gömbi lencsét akarunk készíteni. Milyen alakú legyen a lencsék felülete, és mekkora legyen ezek görbületi sugara? Milyen nyaláb hagyja el a lencsét, ha a lencse optikai tengelyével párhuzamos, a tengelyhez közeli, fénysugarakból álló fénynyalábot ejtünk a lencsére? Ábrán szemléltesse a lencsének a beeső nyalábra gyakorolt hatását!

32. Párhuzamosított fénynyaláb merőlegesen esik egy ernyőre, melyen $r = 2,5$ cm sugarú kört világít meg. Ha az ernyőtől $l = 50$ cm távolságban egy 3 cm sugarú belépő nyílással rendelkező sík-homorú vékony szórólencsét állítunk a nyaláb útjába, az ernyőn a világos kör sugara $R = 7,5$ cm-re növekszik. Mekkora a lencse fókusztávolsága? Mekkora a lencse homorú felületének görbületi sugara, ha a lencse anyagának törésmutatója a környező közegre vonatkozólag 1,5?

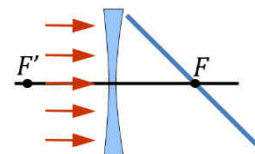
33. Egy 10 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse mögé 15 cm távolságra egy a lencse optikai tengelyéhez képest 45° -ban álló síktükört helyezünk. A lencsét – a tükörrel átellenes oldaláról – a főtengelyével párhuzamos, a tengelyhez közeli sugarakból álló fénynyalábbal világítjuk meg. Milyen fénynyaláb hagyja el a tükört? Mit lát a tükör felé néző megfigyelő, ha úgy áll, hogy a tükörről visszaverő fénysugarak a szemébe jutnak?



34. Egy 10 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse mögé 5 cm távolságra egy a lencse optikai tengelyéhez képest 45° -ban álló síktükört helyezünk. A lencsét – a tükörrel átellenes oldaláról – az optikai tengelyével párhuzamos, a tengelyhez közeli sugarakból álló fénynyalábbal világítjuk meg. Milyen fénynyaláb hagyja el a tükört? Mit lát a tükörközepétől 50 cm távolságra oldalról a lencse optikai tengelyére merőlegesen a tükör felé néző megfigyelő, ha úgy áll, hogy a tükörről visszaverő fénysugarak a szemébe jutnak?



35. Egy -5 cm fókusztávolságú szórólencse mögé 5 cm távolságra egy a lencse optikai tengelyéhez képest 45° -ban álló síktükört helyezünk. A lencsét – a tükörrel



átellenes oldaláról - a főtengelyével párhuzamos, a tengelyhez közeli sugarakból álló fénynyalábbal világítjuk meg. Milyen fénynyaláb hagyja el a tükröt? Mit lát a tükör felé néző megfigyelő, ha úgy áll, hogy a tükrőről visszaverő fénysugarak a szemébe jutnak?

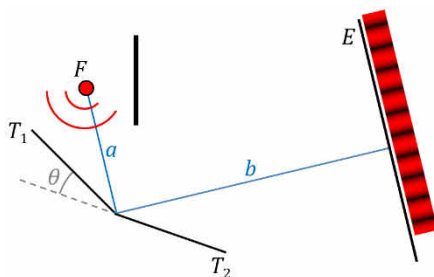
36. Egy 100 cm görbületi sugarú domború gömbtükör előtt 25 cm távolságra áll egy tárgy. Nevezetes sugarakat használó szerkesztéssel és számolással is határozza meg a kép helyét, típusát és a nagyítást!
37. Egy domború gömbtükör görbületi sugara 80 cm. A tárgytávolság a görbületi sugár fele. Nevezetes sugarakat használó szerkesztéssel és számolással is határozza meg a kép helyét, típusát és a nagyítást!
38. Egy $R = 60$ cm görbületi sugarú homorú tükör előtt $t = 80$ cm távolságban $T = 20$ cm hosszú gyújtózsínort feszítünk ki az optikai tengelyre merőlegesen és a végét meggyújtjuk. Számítással és szerkesztéssel is határozza meg a gyújtózsínór kép helyét és típusát és a nagyítást! Mekkora sebességgel halad a láng képe, ha a láng a zsinóron $u = 10$ cm/s sebességgel terjed?
39. Homorú tükör görbületi sugara 40 cm. Határozzuk meg számolással a tárgy helyzetét abban az esetben, amikor a tükör kétszeresen nagyított, valódi és kétszeresen nagyított virtuális képet ad! Nevezetes sugarakat használva szerkesszük meg a tárgy képét mind a két esetre!
40. Egy homorú gömbtükör görbületi sugara 80 cm. A tárgytávolság a görbületi sugár negyede. Nevezetes sugarakat használó szerkesztéssel és számolással is határozza meg a kép helyét, típusát és a nagyítást!
41. Egy -8 cm fókusztávolságú lencse előtt 6 cm távolságra helyezkedik el a 5 cm nagyságú tárgy. Számítással és szerkesztéssel is határozza meg a lencse által alkotott kép helyét, típusát és a nagyítást!
42. Egy vékony gyűjtőlencse fókusztávolsága 20 cm. Határozza meg szerkesztéssel és számolással is a lencse előtt 15 cm távolságban lévő tárgy képét és a nagyítást! Milyen típusú kép jön létre?
43. Egy 5 cm fókusztávolságú gyűjtő vékonylencse előtt $t = 10$ cm távolságra helyezkedik el az $y = 1$ cm nagyságú világító tárgy. Nevezetes sugármeneteken alapuló szerkesztéssel és számolással is határozza meg a lencse által alkotott

kép helyét típusát és a nagyítást! Ezután a lencse másik oldalán $d = 8$ cm távolságra egy szóró vékonylencsét helyezünk el, melynek fókusz-távolságának nagysága 4 cm. Hol keletkezik a lencserendszer által létrehozott végső kép, milyen típusú és mekkora a mérete? Nevezetes sugarakkal szerkessze meg a végső képet!

44. Egy $f_1 = 4$ cm fókusz-távolságú lencse előtt $t = 5$ cm távolságra helyezkedik el az $y = 1$ cm nagyságú tárgy. A lencse másik oldalán $d = 14$ cm távolságra egy $f_2 = 3$ cm fókusz-távolságú lencse helyezkedik el. Számolással és nevezetes sugar-meneteken alapuló szerkesztéssel is határozza meg a lencsék által alkotott végső képet! Milyen típusú a végső kép?
45. Egy szóró lencse előtt 24 cm távolságra 9 cm nagyságú világító tárgy áll. A szóró lencse fókusz-távolságának nagysága 12 cm. A lencsének a tárggyal ellentétes oldalán, a lencsétől 22 cm távolságban 20 cm fókusz-távolságú gyűjtőlencsét helyezünk el. Számolással és nevezetes sugarakon alapuló szerkesztéssel is határozza meg a lencsék által alkotott végső kép helyét, nagyságát, típusát és a nagyítást!
46. Egy $f_L = 10$ cm fókusz-távolságú gyűjtő lencse előtt $t = 20$ cm távolságban $y = 6$ cm nagyságú tárgy áll. A lencse másik oldalán a lencsétől $d = 12$ cm távolságban egy $R = 16$ cm görbületi sugarú domború gömbtükör van. Nevezetes sugarakat használó szerkesztéssel és számolással is határozza meg a végső kép helyét, nagyságát, típusát és a nagyítást!
47. Egy $f_L = -12$ cm fókusz-távolságú szóró lencse előtt $t = 24$ cm távolságra $y = 9$ cm nagyságú tárgy áll. A lencse másik oldalán a lencsétől $d = 22$ cm távolságban egy $R = 60$ cm görbületi sugarú homorú gömbtükör van. Nevezetes sugarakat használó szerkesztéssel és számolással is határozza meg a végső kép helyét, nagyságát, típusát és a nagyítást!
48. A Young-féle interferencia kísérletnél a két rés távolsága 0,5 mm. A résektől 836,4 cm távolságra lévő megfigyelési ernyőn két szomszédos világos csík távolsága 8,9 mm. Mekkora a réseket megvilágító fény hullámhossza és frekvenciája? A levegő törésmutatója egynek vehető a megoldás során.
49. Egy transzmissziós optikai rács milliméterenként 500 karcolatot tartalmaz, a rács elemi rései függőlegesen állnak. A rácsot merőlegesen megvilágítjuk egy

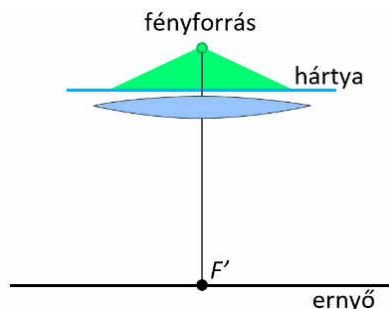
532 nm hullámhosszúságú keskeny, párhuzamosított és vízszintesen terjedő fénynyalábbal. Hány fényfolt jelenik meg a rácstól 3 m távolságra lévő fehér ernyőn? Milyen irányú egyenes mentén helyezkednek el a fényes foltok az ernyőn és a rács beesési merőlegeséhez képest milyen irányokban vannak ezek a foltok? Közvetlenül a rács mögé egy 20 cm fókusztávolságú vékony gyűjtőlencsét helyezünk el. Milyen távol lesznek egymástól a lencse fókuszsíkjában a diffrakciós rendeket reprezentáló képpontok?

50. Két – egymás melletti, közös éllel bíró – síktükör (T_1 és T_2) síkja nagyon kicsiny θ hajlásszögben áll. Az jobbra lévő ábra az elrendezés síkmetszetét mutatja. A tükrök közös élétől a távolságra egy a tükrök élével párhuzamosan álló rést monokromatikus fénnel világítunk ki,



amely vonalszerű fényforrásnak tekinthető (F az ábrán). A tükrök élétől b távolságra lévő ernyőt úgy állítjuk be, hogy a tükrökről visszaverődő sugarak közel merőlegesen essenek rá. A leírt kísérlet az ún. Fresnel-féle kettőstükör interferenciakísérlet. Az ernyőn a rések élével párhuzamosan álló sötét és világos interferenciacsíkok jelennek meg. Mekkora a szomszédos világos csíkok távolsága, ha a tükrök hajlásszöge 3 ívperc ($\theta = 3'$), a megvilágító fény hullámhossza 633 nm, $a = 30$ cm, $b = 549$ cm?

51. Egy $3\text{ }\mu\text{m}$ vastagságú sík-párhuzamos – 1,4 abszolút törésmutatójú – szappanhártya folyadékfilmet 532 nm hullámhosszúságú erősen divergens fénynyalábbal világítunk meg. A hártya túloldalán egy 10 cm fókusztávolságú gyűjtőlencsét helyezünk, továbbá a lencse fókuszsíkjába egy ernyőt teszünk. Az ernyőn – a hártya felső és alsó felületén



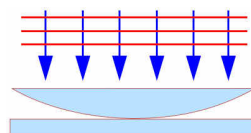
amplitúdóosztással létrejövő fényhullámok interferenciája miatt – sötét és világos koncentrikus körgyűrűrendszer jelenik meg. Hány világos gyűrűt látunk az ernyőn? Mekkora a világos gyűrűk sugara és rendszáma?

52. Egy téglalap alakú keretben szappan hártya feszül. A keret síkját függőlegesen állítjuk be. A hárttyát olyan zöld fénnel világítjuk meg, amelynek a vákuumbeli

hullámhossza 532 nm. A hártya felszínére nézve egyenközű, vízszintes világos-sötét csíkokat látunk. Mekkora a nehézségi erő hatására ékalakúvá váló hártya határoló síkjainak szöge, ha a világos csíkok távolsága 2 mm és a szappanfolyadék abszolút törésmutatója 1,35?

53. Michelson interferométer mozgatható tükrét úgy állítjuk be, hogy a kimeneten középen sötét folt legyen. Ekkor leolvassuk a tükrök helyzetét. Ezután a mozgatható tükrök mikrométercsavarját nagyon lassan tekerve 1000 világos-sötét fényváltást számolunk le a kimenet közepén. A mikrométercsavar skáláját ismét leolvassuk, a tükrök elmozdulása 0,325 mm. Mekkora a kísérletnél használt fény hullámhossza és frekvenciája?

54. Egy üveglapra 15 cm görbületi sugarú sík-domború lencsét rakunk a domború felével az üveglap felé. A lencse síklapja felől merőlegesen beejtünk egy 633 nm hullámhosszúságú (vörös színű) párhuzamosított fény-nyalábot. Visszavert fényben mekkora lesz a lencse és az üveglap közötti levegő réteg által létrehozott világos Newton-gyűrűk sugara?



55. Milliméterenként 100 karcolatú transzmissziós optikai rácsot fehér fényrel ($380 \text{ nm} \leq \lambda \leq 780 \text{ nm}$) világítunk meg merőlegesen. Az ernyő 3 m távolságra van a rácsból és párhuzamosan áll a ráccsal. Milyen messze van egymástól az ernyőn a másodrendű színek két széle? Átfedi-e egymást az első- és a másodrendű színek?
56. Michelson interferométer bemenetén 633 nm hullámhosszú párhuzamosított fénynyalábot ejtünk be. Ilyenkor a kimenetre merőlegesen elhelyezett ernyőn homogén intenzitáseloszlású fényfolt van, amelynek intenzitása az aktuális karhosszkülönbségtől függ. Ha az egyik tükröt vízszintes tengely körül nagyon kicsit elforgatjuk (megdöntjük), akkor a kimeneten vízszintesen álló világos és sötét csíkok jelennek meg. A függőleges helyzethez képest mekkora szöggel dőlt meg a tükrök, ha a világos csíkok közötti távolság 1,5 mm?

5. Minta megoldások

1. feladat

A (15) összefüggés szerint a maximális erősítés azokon az x helyeken lehet, amelyre a

$$\Delta s(x) = s_1(x) - s_2(x) = m\lambda \quad (\text{F1-1})$$

egyenlet teljesül, ahol a λ a közegbeli hullámhossz, m egész szám, továbbá a többi mennyiség értelmezését a jobb oldali ábra mutatja. A lehetséges helyek számát az előző egyenlet megoldása nélkül is meg tudjuk határozni. Az F_1 ,

F_2 és a P háromszögben a két oldal összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal. Ezért az $s_2 < s_1 + d$ és az $s_1 < s_2 + d$ relációk állnak fent. Amikből egyszerű rendezéssel a $-d < s_2 - s_1 < d$ egyenlőtlenség adódik. Ebbe behelyettesítve a maximális erősítés (15) feltételét a $-d < m\lambda < d$ reláció adódik. Ebből a pozitív λ -val osztva a

$$-d/\lambda < m < d/\lambda \quad (\text{F1-2})$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Amiből látható, hogy az erősítés rendszámának meghatározásához először a hullámhosszúságot kell meghatározni, amely a feladatban megadott adatokból egyszerűen megtehető a (10) egyenlet segítségével. Ebből $\lambda = c/\nu$, amelybe adatokat behelyettesítve

$$\lambda = 1,7 \text{ cm}$$

értéket kapjuk a víz hullám hullámhosszára. Ebből $d/\lambda = 2,941$ adódik. Így a rendszámra kapott (F1-2) egyenlőtlenséget kielégítő egész számok

$$m = -2, -1, 0, +1, +2. \quad (\text{F1-3})$$

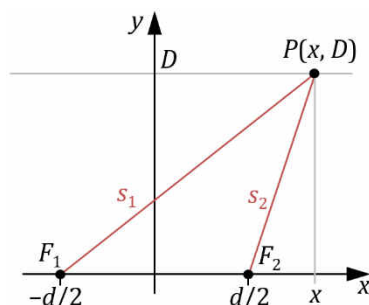
Azaz a kérdéses egyenesen éppen 5 pont található, ahol a két hullám maximálisan erősíti egymást. Az x koordináták konkrét értéke is meghatározható viszonylag egyszerűen. A feladat vázlatára alapján egyszerűen felírható az x koordináta függvényeként a két távolság:

$$s_1(x) = \sqrt{(x + d/2)^2 + D^2} \quad \text{és} \quad s_2(x) = \sqrt{(x - d/2)^2 + D^2}.$$

Ezeket a (F1-3) egyenlet helyettesítve és s_1 mennyiségre rendezve az

$$\sqrt{(x + d/2)^2 + D^2} = m\lambda + \sqrt{(x - d/2)^2 + D^2}$$

összefüggést kapjuk, amelyből az összefüggést kielégítő x koordinátákat kell meghatároznunk a már kiszámolt m rendszámokra. Az $m = 0$ rendszámra nyilván $s_1 = s_2$, amely az ábrából is látható $x = 0$ szimmetrikus esetnek felel meg. Mivel



az $m = 0$ esetet megvizsgáltuk és az útkülönbség az y tengelyre szimmetrikus a továbbiakban feltehetjük, hogy $m > 0$, ami nyilván $x > 0$ feltétellel azonos. A szimmetria miatt negatív rendszámokra a pozitív gyökök negatívja a megoldás. Az utóbbi összefüggést négyzetre emelve és a zárójeleket is felbontva, végül a megmaradó négyzetgyökös kifejezésre rendezve

$$\sqrt{(x + d/2)^2 + D^2} = \frac{dx}{m\lambda} - \frac{m\lambda}{2}$$

kifejezést kapjuk. Ezt ismét négyzetre emelve csak x -ben másodrendű tag marad meg! Így x -re az egyenlet könnyen rendezhető. Ez alapján az x koordinátákat az

$$x_m = m\lambda \sqrt{\frac{D^2 + \frac{d^2 - (m\lambda)^2}{4}}{d^2 - (m\lambda)^2}}$$

egyenletből számolhatjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a kifejezés nem csak a pozitív rendszámokra, hanem az összes (F1-3) alatti értékre helyes eredményt ad. Ha a rendszámokat és a paramétereket behelyettesítjük, akkor a koordinátákra az

$$x = 0 \text{ cm}; \pm 7,28 \text{ cm}; 18,625 \text{ cm}$$

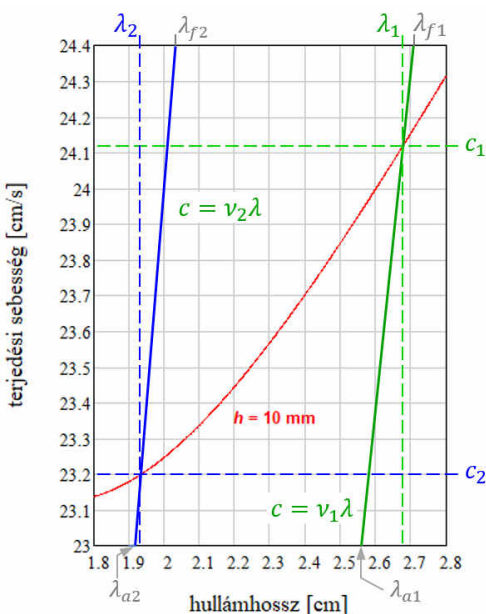
értékeket kapjuk.

3. feladat

A feladat szövege szerint a rudat kezdetben $\nu_1 = 9 \text{ Hz}$ frekvenciával rezgetjük, majd ezt követően $\Delta\nu = 3 \text{ Hz}$ -cel megnöveljük, azaz $\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu = 9 \text{ Hz}$ a rezgés frekvenciája. Az hullámtani bevezetőben láttuk, hogy a hullám terjedési sebessége, a frekvenciája és hullámhossza között a

$$c = \nu\lambda$$

összefüggés áll fenn (lásd a (10) egyenletet). Ez pedig éppen azt mutatja, hogy egy adott ν frekvencia esetén, a c sebesség arányos a λ hullámhosszal. Ennek az összefüggésnek a grafikonja egy origón átmenő, ν meredekségű egyenes. A feladat szövegével mellé-



kelt grafikonba könnyen berajzolható a v_1 és a v_2 frekvenciáknak megfelelő egyenes, hiszen egy egyenest már két különböző pontja egyértelműen meghatároz. A grafikont függőleges tengelyét alulról a $c_a = 23$ cm/s, felülről pedig a $c_f = 24,4$ cm/s értékek határolják. Ezekhez a v_1 frekvencia esetén $\lambda_{a1} = c_a/v_1 = 2,56$ cm és $\lambda_{f1} = c_f/v_1 = 2,71$ cm hullámhossz értékek tartoznak. Teljesen hasonlóan a v_2 frekvenciára $\lambda_{a2} = c_a/v_2 = 1,92$ cm valamint $\lambda_{f2} = c_f/v_2 = 2,03$ cm a megfelelő hullámhossz értékek. A kiszámolt – azonos frekvenciához tartozó – pontokat a grafikonon összeköve megkapjuk a két említett egyenest. A v_1 frekvenciához tartozó egyenest zöld, a v_2 frekvenciához tartozót pedig kék szín jelöli az ábrán. A keresett hullámhosszakot és terjedési sebességeket a két egyenes $c = c(\lambda)$ összefüggést reprezentáló piros görbe és az egyenesek metszéspontjai szolgáltatják. A metszéspontokból vízszintes és függőleges egyeneseket húzva a tengelyekig, a vízszintes tengelynél az adott frekvenciához tartozó hullámhossz, a függőleges tengelynél pedig nyilván a sebesség olvasható le grafikusán. Ezzel a grafikus módszerrel megkaptuk, hogy a $v_1 = 9$ Hz frekvencián a hullám $\lambda_1 = 2.68$ cm hullámhosszúságú és $c_1 = 24.12$ cm/s sebességű. Ugyanígy a $v_2 = 12$ Hz frekvenciájú hullám hullámhossza $\lambda_2 = 1,93$ cm, terjedési sebessége $c_2 = 23.2$ cm/s. Így a $v_1 = 9$ Hz frekvenciánál $\Delta v = 3$ Hz frekvencianövekedéshez $\Delta c = c_2 - c_1 = -0.92$ cm/s sebességváltozás és $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = -0.75$ cm hullámhosszváltozás tartozik.

11. feladat

A hullámtani bevezetőben láttuk, hogy a maximális gyengítés feltételét a (16) egyenletet adja meg. Ez alapján a hullámok által megtett utakra fennáll az

$$s_2 = s_1 + (2m + 1) \lambda/2$$

feltétel, ahol m egész szám. A feladat feltételei szerint

$$l \leq s_2 \leq L,$$

ahol $l = 44$ cm és $L = 74$ cm. Az első egyenletet beírva az előző relációba, az

$$l \leq s_1 + (2m + 1) \lambda/2 \leq L,$$

feltételt kapjuk. Aminek mindkét oldalából s_1 -et kivonva, utána $2/\lambda$ -val szorozva, majd megint 1-et kivonva és 2-vel osztva, azt kapjuk, hogy az m egész szám az

$$\frac{l - s_1}{\lambda} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{L - s_1}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

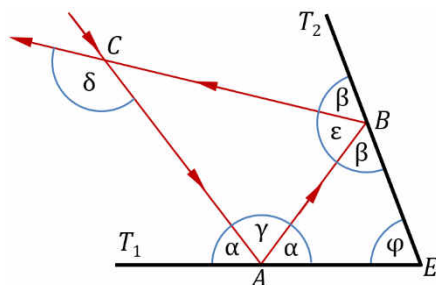
relációnak tesz eleget. Az adatokat behelyettesítve az

$$-3 \leq m \leq \frac{3}{4}$$

egyenlőtlenséget kapjuk az m rendszámra. Mivel m egész szám, a kapott relációt kielégítő egész számok a következők: $m = -3, -2, -1$ és 0 . A lehetséges m , valamint s_1 és λ értékeket az első összefüggésbe visszaírva, kapjuk a második forrás azon helyeit, ahol a két hullám maximálisan gyengíti egymást. A számolásokat elvégezve, $s_2 = 44$ cm, 52 cm, 60 cm és 68 cm lehetséges értékek adódnak.

15. feladat

A szögtükör E élére – a fénysugarakat is tartalmazó – merőleges síkmetszetet a jobbra lévő ábra mutatja. Az ábrán lévő szögek jelölésénél már kihasználtuk a visszaverődés törvényének következményeit. Ezért lehet az A és B pontoknál az α illetve a β szögeket mind a beeső, mind a visszavert sugár tükörrel bezárt szögét azonos betűvel jelölni. Ezeknél a pontoknál a szögek összege egy egyenes szöget ad ki, ezért



$$2\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \text{és} \quad 2\beta + \varepsilon = 180^\circ.$$

Mivel δ az ABC háromszög külső szöge, ezért $\delta = \gamma + \varepsilon$. Ha az első két összefüggést összeadjuk és a harmadikat felhasználjuk, akkor a

$$2\alpha + 2\beta + (\gamma + \varepsilon) = 2(\alpha + \beta) + \delta = 360^\circ \quad (\text{F15-1})$$

összefüggéshez jutunk. Az ABE háromszög szögeire $\alpha + \beta + \varphi = 180^\circ$ áll fenn, amiből

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \varphi$$

következik. Ezt visszahelyettesítve az (F15-1) egyenletbe, majd δ szögre rendezve

$$\delta = 2\varphi$$

formulát kapjuk az eltérítés szögére. Amiből láthatjuk, hogy nyaláb eltérülése éppen a szögtükör hajlásszögének a kétszerese.

Egy 45° -os szögtükör segítségével a fénynyalábot éppen 90° -os szögben tudjuk eltéríteni. Gyakorlatban egy ilyen 45° -os szögtükörrel derékszögeket könnyen ki lehet jelölni.

20. feladat

A sík-párhuzamos lemezen áthaladó fénynyalábnak a beesési síkbeli metszetét szemlélteti a jobb oldali ábra. A nyalábot síkmetszetét határoló – két szélső s_1 és s_2 – sugarak a Snellius-Descartes-törvénynek megfelelően megtörnek a határfelületeken. A (29) egyenletnek megfelelően

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

áll fenn. Amiből $\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n}$. Az

adatokat behelyettesítve $\beta = 20,027^\circ$. Mivel a lemez alatt és felett ugyanolyan közeg van, a fénysugarak megfordíthatósága miatt, az alsó felületen történő törésnél α törési szöggel lépnek ki a sugarak. Ezért a fénysugarak az ábrán jelölt $\Delta = \overline{BI}$ távolsággal eltolódva, a beeső sugárral párhuzamosan lépnek ki a lemezből. Az AHB derékszögű háromszögből $\overline{AB} = d / \cos \beta$, továbbá a ABI derékszögű háromszögekből

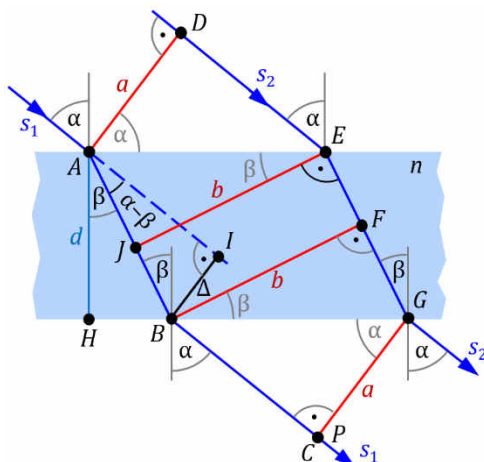
$$\Delta = \overline{AB} \sin(\alpha - \beta) = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

egyenlet adódnak. Ezekből már a most ismert konkrét adatok behelyettesítésével megkaphatjuk, hogy az eltolódás $\Delta = 0,553$ cm. Érdekes megjegyezni, hogy a $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$ és a $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ azonosságok, valamint a Snellius-Descartes-törvény felhasználásával a Δ eltolódásra vonatkozó formula egyszerű átalakításokkal a

$$\Delta = d \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$

összefüggésbe alakítható át, amely közvetlenül mutatja, hogy miként függ a nyaláb eltolódása a lemez vastagságától, a relatív törésmutatótól és a beesési szögtől.

Az ábrán is látható, hogy a beesési síkbeli nyalábátmérő megváltozik a törés során. A beesési síkra merőleges irányban a nyalábátmérő változatlan marad. Az ábrán látható ADE derékszögű háromszögből az $a = \overline{AE} \cos \alpha$, továbbá az AEJ derékszögű háromszögből $b = \overline{AE} \cos \beta$ egyenletek írhatók fel. A második összefüggést osztva az elsővel $b/a = \cos \beta / \cos \alpha$ relációt kapjuk. Amiből



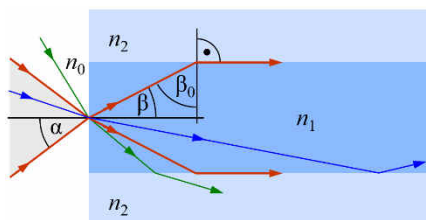
$$b = N(\alpha) \cdot a$$

formula adja meg a lemezen belül a beesési síkbeli nyalábátmérőt, ahol $N = N(\alpha) = \cos \beta(\alpha) / \cos \alpha$. Amiből jól látható, hogy a törés során a – merőleges beeséstől eltekintve – a beesési síkbeli nyalábátmérő megváltozik. Optikailag sűrűbb esetben $0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$, ezért $0 < \cos \alpha < \cos \beta$, amiből $1 < N$ következik, azaz ilyenkor növekszik az átmérő. Optikailag ritkább esetben éppen ellentétes irányúak a relációk, így ekkor csökken a beesési síkbeli nyalábátmérő. A feladat paramétereivel $N = 1,085$. Ennek megfelelően $b = N \cdot a = 1,085$ cm.

A lemezen belül a beesési síkbeli bármely nyalábmetszet átmérője szintén N -szeresére változik. Ennek következtében a nyaláb merőleges keresztmetszete egy olyan ellipszis lesz, amelynek az kistengelye $a = 1$ cm, a nagytengelye pedig $b = N \cdot a = 1,085$ cm. A lemez alsó határfelületén a törés miatt ismét megváltozik a beesési síkbeli nyalábátmérő, de mivel az α és β szögek felcserélődnek, most a szorzó tényező éppen az előbbinek a reciprok értéke lesz. Ezért a kilépő nyaláb átmérője meg egyezik a lemezre eső nyaláb átmérőjével. A lemezből kilépő nyaláb az eredetivel párhuzamosan terjedő és azzal megegyező körkeresztmetszetű nyaláb lesz, csak lemezen történő áthaladás miatt $\Delta = 0,553$ cm távolsággal eltolódik.

24. feladat

Jelölje a környező közeg abszolút törésmutatóját n_0 . Levegő esetén ez gyakorlatilag 1-nek tekinthető. A jobbra lévő ábrán három tipikus sugármenetet rajzoltunk be. A kék színű rajzolt sugár a magba való belépése után, a mag- köpeny határfelületet úgy éri el, hogy a beesési szög a teljes visszaverődés határszögénél nagyobb. A piros színű sugár éppen a határszög alatt esik a belső határfelületre, azaz éppen 90° törési szög tartozik hozzá. A zölddel rajzolt sugár esetén a belső határfelületen már nem lép fel teljes visszaverődés. Ez alapján látható, hogy azok a sugarak, melyek beesési szöge α -nál kisebb, az optikai szál magjába belépve biztosan ott is maradnak, mivel a határfelületen egymást követően teljes visszaverődések lépnek fel. A piros sugarra a belső határfelületre felírva a Snellius-Descartes-törvényt, az $n_1 \sin \beta_0 = n_2 \sin 90^\circ = n_2$ összefüggést kapjuk. Kihasználva, hogy $\beta_0 = \beta - 90^\circ$ és ennek következtében fennálló $\sin \beta_0 = \cos \beta$



relációt, az $n_2 = n_1 \cos \beta$ formula adódik. Mivel $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$, így az előző összefüggés alapján

$$\sin \beta = \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}.$$

Amiből $n_1 \sin \beta = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ következik. Kihasználva a mag külső felületére vonatkozó $n_0 \sin \alpha = n_1 \sin \beta$ Snellius-Descartes-törvényt, az

$$n_0 \sin \alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

relációt kapjuk végeredményént. A külső közegre $n_0 = 1$ feltételezéssel, a feladat szövegében megadott $n_1 = 1,72$ és $n_2 = 1,54$ értékeket helyettesítve

$$\sin \alpha = 0,766$$

adódik, amelyből $\alpha = 50^\circ$. Vagyis a szál tengelyéhez képest legfeljebb 50° -os szögben beeső sugarak maradnak az optikai szálban.

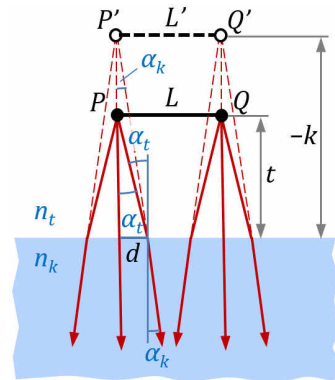
26. feladat

A jobb oldalon lévő ábrán a PQ szakasz felel meg a szitakötőnek. Ha a szakasz P végpontjából a függőlegeshez képest α_t szögben a vízfelület felé induló fénysugár a felszín eléri, akkor Snellius-Descartes-törvény szerint megtörik, így az

$$n_t \sin \alpha_t = n_k \sin \alpha_k$$

reláció érvényes, ahol n_t a tárgyoldali közeg (most levegő), n_k a képoldali közeg (itt víz) abszolút törésmutatója, α_t a beesési, α_k a törési szög. Optikailag sűrűbb közeg esetén a beesési merőlegeshez törik a sugár, vagyis $\alpha_k < \alpha_t$. Mivel a megtört sugár a beeső sugárhoz képest a beesési merőleges áttelleges oldalán van, a P pontból kiinduló széttartó sugárnyaláb széttartó marad. Ezért P pontnak a P' képe virtuális kép lesz. Így, az optikai bevezetőben ismertetett előjel megállapodás értelmében, a képtávolságot célszerű negatívnak tekinteni. Ezért jelöli $-k$ a geometriai távolságot a mellékelt ábrán. Kis szögekre – a szöget radiánban mérve – a $\sin \alpha \approx \alpha$ közelítés érvényes. Ezért a P ponton átmenő függőleges egyeneshez közel haladó és ezzel kis szöget bezáró sugarakra, az ún. *paraxiális sugarakra*, a törési törvény az

$$n_t \cdot \alpha_t = n_k \cdot \alpha_k$$



formulával írható le. A leképezésnek a paraxiális sugarakkal történő tárgyalását *paraxiális közelítésnek* nevezzük. Paraxiális közelítésben a szögeket az $\alpha_t = d/t$ és az $\alpha_k = d/(-k)$ összefüggésekkel közelíthetjük. Ezeket a formulákat beírva a törési törvény paraxiális közelítésébe, az $n_t \cdot d/t + n_k \cdot d/k = 0$ összefüggés adódik. Ferdén beeső sugárra $d \neq 0$, ezért az előző összefüggésben egyszerűsítünk vele, így a végeredményként az

$$\frac{n_t}{t} + \frac{n_k}{k} = 0$$

leképezési egyenletet kapjuk, mivel ez adja meg a kép- és tárgytávolság viszonyát. Az a tény, hogy az egyenletünkben eltűnt a d távolság, azt jelenti, hogy az α_t szögtől függetlenül minden P pontból induló paraxiális sugárnak a törés utáni meghosszabbítása ugyanazon P' ponton halad keresztül. Azaz valóban képalkotás történik! Teljesen hasonlóan kapható meg a szakasz másik végpontjának, a Q tárgyponthoz Q' képe. Mivel a függőleges sugár nem törik meg, a két képpont éppen a tárgy pontjaik felett lesznek. Ez pedig azt jelenti, hogy a virtuális kép a tárggyal azonos állású és egységnyi nagyítású. A feladatban lévő közegekre $n_t = 1$ és $n_k = n = 4/3$, továbbá $t = 50$ cm. Ezekkel az adatokkal $k = -(n_k/n_t) \cdot t = -66,67$ cm. A negatív jel a virtuális képre utal. Összefoglalva, fénytörés miatt a vízben lévő hal nem az eredeti helyén, a víz felett 50 cm-re, hanem attól távolabb 16,67 cm-rel magasabban látja a szitakötőt. A látott kép nagysága megegyezik a tárgyával. Mivel azonban az eredetinel kissé messzebb látja, így – a látószög által meghatározott – érzékelt nagyság (látszólagos nagyság) egy kicsit kisebb lesz, mintha levegőben nézné a hal a szitakötőt.

44. feladat

A feladatot a számolásnál, mind a szerkesztésnél két lépésben kell megoldani. Az első lencse képe a második lencse tárgya lesz. A végső képet második lencse hozza létre. Nézzük először a számolást! Az első lencse képalkotásánál a tárgy valódi, így a tárgytávolság $t_1 = t = 5$ cm. A képalkotást leíró (41) leképezési egyenlet szerint $1/t_1 + 1/k_1 = 1/f_1$, amiből egyszerű rendezéssel és behelyettesítéssel

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{t_1} = \frac{1}{4 \text{ cm}} - \frac{1}{5 \text{ cm}} = \frac{5 - 4}{20 \text{ cm}} = \frac{1}{20 \text{ cm}}$$

adódik. Így látható, hogy az első lencse maga mögött $k_1 = 20$ cm távolságra alkotná a képet. Azonban a második lencse ettől kisebb távolságra van. Így valójában a kép nem jön létre, hanem a második lencsére olyan összetartó

sugárnyaláb esik, amely az első lencse által a Q tárgyról alkotott Q' képpont felé tart. Azaz az első lencse által létrehozott kép a második lencse képalkotásánál virtuális tárgyként értelmezhető. A képalkotásnál elmondott előjel konvenció szerint, ilyenkor a tárgytávolság a geometriai távolság negatívja lesz. Ezért a második képalkotásnál a tárgytávolság $t_2 = -(k_1 - d) = d - k_1 = -6$ cm. A (41) képalkotási egyenlet szerint az $1/t_2 + 1/k_2 = 1/f_2$ kapcsolat áll fenn a k_2 kép- és a t_2 tárgytávolságok között, ahol $f_2 = 3$ cm a második lencse fókusz-távolsága. Ebből egyszerűen kiszámolható a képtávolság:

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{3 \text{ cm}} - \frac{1}{-6 \text{ cm}} = \frac{2 + 1}{6 \text{ cm}} = \frac{3}{6 \text{ cm}} = \frac{1}{2 \text{ cm}}.$$

Amiből $k_2 = 2$ cm. Mivel k_2 pozitív, a kép valódi. Számolásunk azt mutatja, hogy a végső kép valódi és a lencse mögött 2 cm távolságra jön létre.

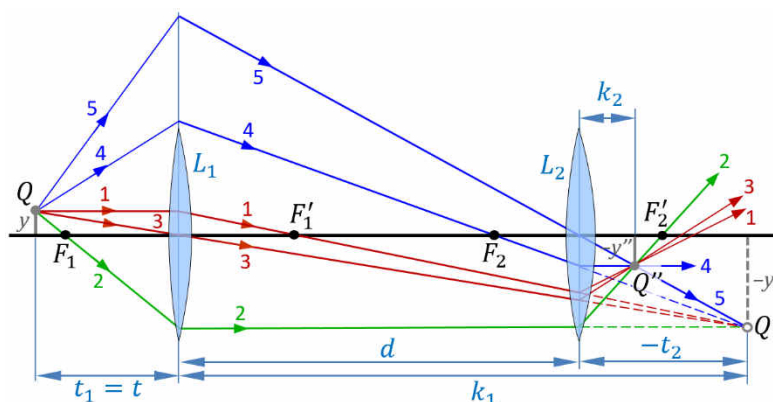
Vizsgáljuk a végső kép tárgyhoz viszonyított állását és méretét! A lencsékre is érvényes (39) formula szerint. Definíció szerint a nagyítás a kép- és a tárgy pontok y koordinátáinak hányadosa, azaz $N = y''/y$, ahol y'' a végső kép, valamint y a tárgy koordinátái. A kép esetében a koordinátánál a két vessző jelölés arra utal, hogy a végső kép két egymást követő leképezés eredménye. Ezzel a jelölésmóddal az első leképezés képpontjának az y koordinátája y' . Az y''/y törtet bővíthetjük y' -vel, így

$$N = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y} = N_2 \cdot N_1$$

összefüggéshez juthatunk, ahol N_1 az első képalkotás, N_2 a második képalkotás nagyítása. Ezek a kép- és a tárgytávolságokból kiszámíthatók, ugyanis $N_1 = -k_1/t_1 = -5$, és $N_2 = -k_2/t_2 = 1/3$. Ezzel beláttuk, hogy a végső nagyítást a két nagyítás szorzata, esetünkben $N = -5/3$. A negatív előjel arra utal, hogy a végső kép a tárgyhoz képest fordított állású. Mivel $|N| = 5/3 > 1$, ami azt jelenti, hogy kép 5/3-szorosan nagyított.

A szerkesztést a nevezetes sugarak segítségével végezhetjük el. Az első lencse képe egyszerűen megszerkeszthető. Sokkal nehezebb a második lencse képalkotásának kezelése! Azt kell mindig szem előtt tartani, hogy ha már a nevezetes sugarakkal a tárgy pont képét megszerkesztettük, akkor minden a tárgyból kiinduló sugár viselkedését ismerjük! Ugyanis minden tárgypontból kiinduló sugárnak a törések vagy visszaverődések után át kell mennie a már ismert képponton. Az alább található ábra szemlélteti a szerkesztés menetét. Az ábrán a sugarakat, a jobb érthetőség kedvéért eltérő színnel jelöltük. A színek jelentését a magyarázat közben ismertettük. Az 1-es, 2-es és 3-as sugarak az első (bal oldali) lencse

tárgypontból kiinduló nevezetes sugarak. Ezek a lencsék képalkotásánál – részletelesen – ismertetett módon viselkednek, melyet a 25. ábra szemlélet. Látható az első lencse (L_1) mögött, hogy a három sugár közül csak a 2-es sugár lesz a második lencsének (L_2) nevezetes sugara. Erre utalnak a színek. A pirossal jelölt sugarak csak az L_1 , a kékkel jelölt sugarak csak az L_2 , míg a zölddel jelölt sugarak mindkét lencsének nevezetes sugarak.



Az L_1 lencse által alkotott kép az L_2 lencse mögött jönne létre. Így az L_2 lencsére a Q' pont felé tartó sugarak esnek. Nyilván L_2 lencse hatására – az optikai középpontján áthaladó sugarat kivéve – a sugarak iránya megváltozik, a szaggatott vonalak a sugarak meghosszabbítását jelölik. A 2-es sugár nyilván az F_2' képoldali fókuszpont keresztül haladva hagyja el a lencsét, mivel az optikai tengellyel párhuzamosan esik be rá. Viszont az 1-es és 3-as sugarak a második lencsének már nem nevezetes sugarak, ezért ezeket a Q'' kép helyének meghatározásához nem tudjuk felhasználni. Azonban a Q' pont felé tartó L_2 lencse előtti sugarak közül vannak olyanok, melyek ugyan az L_1 lencsének nem nevezetes sugarak, viszont az L_2 lencsének igen! Éppen ilyen a 4-es és az 5-ös sugár. A 4-es sugarat úgy kaphatjuk meg, hogy az F_2 tárgyoldali fókuszpontot összekötjük a Q' ponttal, az L_2 lencse mögött csak szaggatott vonallal, hiszen a fénysugár a lencsén meg fog törni. Ezt a sugarat egészen az L_1 lencse főtájiáig húzzuk. A főtájbeli metszéspontot összekötve a Q tárggyal, megkapjuk, hogy az L_1 lencse előtt hogyan haladt a fény. Hasonlóan, a Q' pont felé tartó – L_2 lencse előtti – sugarak közül van olyan, amely az L_2 lencse optikai középpontján megy keresztül. Ezt nyilván úgy kapjuk meg, hogy az L_2 lencse optikai középpontját összekötjük Q' ponttal, ezúttal folytonos vonallal, hiszen ez a sugár irányváltozás nélkül halad tovább. Látható, hogy az L_2 lencsének a Q' pont felé tartó nevezetes sugarak – a 2-es, 4-es és 5-ös

jelű sugarak – egy pontban, a Q'' pontban metszik egymást. A végső kép fordított állású, kicsit nagyított és a számolással összhangban lévő helyen van. Ezt akár a szakaszok megméréseivel is ellenőrizhetjük.

46. feladat

Ennél a feladatnál a végső kép létre jötté egymást követő három leképezéssel értelmezhető, hiszen a fény a lencsén áthaladva visszaverődik a tükörről, amely ismételtén keresztül halad a lencsén. Az első képalkotásnál a lencse képének helye a leképezési egyenletnek megfelelően az $1/t_1 + 1/k_1 = 1/f_L$ összefüggésből számolható ki, ahol $t_1 = t = 20$ cm és $f_L = 10$ cm a lencse fókusz távolsága. Ebből a k_1 képtávolság egyszerűen adódik:

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_L} - \frac{1}{t_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{20 \text{ cm}} = \frac{2-1}{20 \text{ cm}} = \frac{1}{20 \text{ cm}},$$

így $k_1 = 20$ cm. A nagyítás $N_L = -k_1/t_1 = -1$, ami azt mutatja, hogy a kép tárgyhoz képest fordított állású és azonos nagyságú. Mivel $k_1 > 0$, a kép valódi. A Q' pontról a lencse által alkotott kép a tükör mögött jönne létre mivel a tükör közelebb van a lencséhez, mint Q' , hiszen $d < k_1$. A tükörről a Q' pont felé tartó sugarak esnek, ezért a Q' pont a tükör leképezése szempontjából virtuális tárgyként vehető figyelembe. Virtuális tárgy esetén a tárgytávolság a geometriai távolság -1 -szerese, azaz a második leképezésnél $t_2 = -(k_1 - d) = -8$ cm. A tükör által alkotott kép helye a (35) tüköregyenletből kapható meg. Ez alapján

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{f_T} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{-8 \text{ cm}} - \frac{1}{-8 \text{ cm}} = 0 \frac{1}{\text{cm}},$$

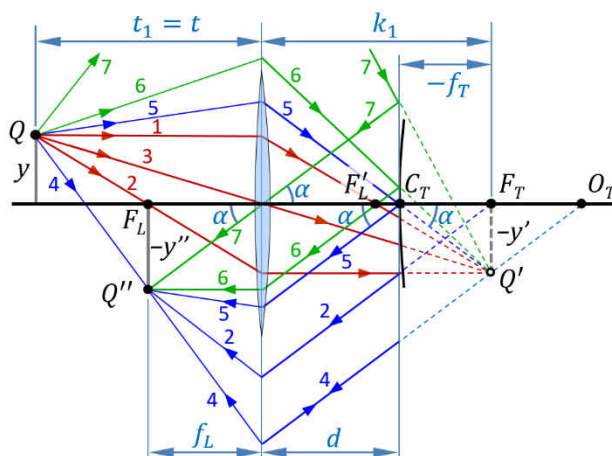
amiből $k_2 = \infty$ következik. Ez az különös eredmény azt jelenti, hogy a tükörről visszavert sugarak párhuzamosak lesznek! Mivel a Q' pont nem a főtengelyen fekszik, a visszavert sugarak a tengelyhez képest ferdén verődnek vissza. Ezek visszaverődő sugarak ismét a lencse felé irányulnak, így a lencsére párhuzamos sugarak esnek be, de ezúttal ellentétes irányból. A lencsére párhuzamos sugarak esnek be, a harmadik leképezésnél a tárgytávolság lesz végtelen, azaz $t_3 = k_2 = \infty$. A leképezési egyenletet ismételtén alkalmazva az

$$\frac{1}{k_3} = \frac{1}{f_L} - \frac{1}{t_3} = \frac{1}{f_L} = \frac{1}{10 \text{ cm}}$$

egyenletet írhatjuk fel, amiből $k_3 = 10$ cm. Azaz a végső kép a lencse fókusz-síkjában jön létre!

A nevezetes sugarakkal történő szerkesztésnél a lencse első képalkotása könnyen kezelhető, a 25. ábrán látható sugármenetekkel. A további nehézséget az

okozza, hogy a lencse képe a tükör mögött jön létre, ráadásul ez a képpont éppen a tükör fókusz síkjában van! Az alább található ábra szemlélteti a szerkesztés menetét. Az 1-es, 2-es és 3-as vörös színnel jelölt sugarak a lencse Q ponton átmenő nevezetes sugarai. Ezek közül azonban már csak a 2-es jelű sugár lesz nevezetes sugara domború tükörnek. Ennek a tükörről való visszaverődése egyszerűen megadható: úgy verődik vissza a tükörről, mintha a domború tükör F_T fókuszpontjából indult volna ki. A Q pontból kiinduló összes sugár a lencsét



elhagyva a Q' pont felé tart. Ezek között lesznek olyanok, melyek a domború tükörnek nevezetes sugarai. Ezek a sugarak 4-es és az 5-ös jelű sugarak. A 4-es sugár menetét úgy jelölhetjük ki, hogy a Q' képponton és a domború tükör O_T görbületi középpontján áthaladó egyenest berajzoljuk, a tükör mögött csak szaggatott vonallal jelölve, hiszen oda a fénysugár nem hatol be. Ez a nevezetes sugár nyilván önmagába verődik vissza. A lencse előtti sugármenetet úgy kapjuk meg, hogy a tükörtől a sugarat (visszafelé) a lencse fókuszáig, majd innen a Q tárgypontra húzzuk. Hasonlóan a C_T optikai középpont és a Q' képpont összekötésével adódik a Q' pont felé tartó nevezetes sugár. Ez a sugár nyilván úgy verődik vissza, hogy a főtengellyel bezárt szöge ugyan az lesz, mint amilyen szögben beesett. A Q' sajátos – fókusz síkjában – helyzetéből kifolyólag a tükörről visszaverődő 2-es, 4-es és 5-ös – kék színnel rajzolt – sugarak párhuzamosak lesznek. Ez azt jelenti, hogy a tükör képe a végtelenben jön létre. Ezért az összes Q' felé tartó sugár ugyanígy, az előző három kék sugárral párhuzamosan verődik vissza. A kék színnel rajzolt sugarak, melyek a domború tükör nevezetes sugarai, már nem lesznek a lencse nevezetes sugarai. Azonban a tükörről visszavert párhuzamos sugarak közül van két olyan – zöld színnel rajzolt – sugár, amely

nevezetes sugara a lencsének. Ezek a 6-os és 7-es jelű sugarak. A 6-os sugár a lencse F'_L fókuszpontján, a 7-es sugár optikai középpontján halad keresztül. Nyilván a 6-os sugár a lencsét a főtengellyel párhuzamosan hagyja el, míg a 7-es sugár irányváltozás nélkül megy át a lencsén. A végső képet ennek a két sugárnak és a 4-es sugárnak a közös metszéspontja adja meg. A 4-es sugár nagyon érdekes viselkedésű, ugyanazon az úton halad a tükörig, majd vissza. Látható, hogy a végső kép valódi, fordított állású.

A nagyítást is meghatározhatjuk a sugármenet segítségével. Mivel a nagyítás definíció szerint $N = y''/y$, melyben a törtet bővítve y' mennyiséggel, a következő formula kapható:

$$N = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y}.$$

Az utolsó y'/y tényező nem más, mint az első leképezés nagyítása, példánkban $N_1 = -1$. Az y''/y' hányados az ábrán látható azon derékszögű háromszögekből határozható meg, melyeknek egyik szöge α . Ezekből a háromszögekből

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-y''}{f_L} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-y'}{-f_T}$$

relációk írhatók fel, amelyből

$$\frac{-y''}{f_L} = \frac{y'}{f_T}$$

következik. Ebből pedig már egyszerűen adódik, hogy a keresett hányados:

$$\frac{y''}{y'} = -\frac{f_L}{f_T}.$$

Ezt vissza helyettesítve a nagyításra adott formulánkba, az

$$N = -\frac{f_L}{f_T} \cdot N_1$$

összefüggés adódik a végső nagyításra. Behelyettesítéssel a fókusz távolságokat és az első leképezés nagyítását, a végső nagyítás $N = -10/8 = -5/4 = -1,25$. Azaz a kép a tárgyhöz képest fordított állású és kissé nagyított.

48. feladat

A két keskeny rés azonos fázisban rezgő F_1 és F_2 hullámforrásként viselkedik. Ezért az 1. feladatnál rajzolt ábra most is jól használható. D itt az ernyő kettősréstől mért távolságát jelöli, és P az ernyőn lévő megfigyelési pont. Már láttuk, hogy az erősítés feltétele $s_1 - s_2 = m\lambda$, ahol a λ a fény közegbeli hullámhossza, m egész szám, s_1 és s_2 a két hullám által megtett út. Az $s_1^2 - s_2^2 = (s_1 - s_2)(s_1 + s_2)$ azonosságból az

$$s_1 - s_2 = \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1 + s_2}$$

összefüggést kaphatjuk. Mivel $s_1^2 = (x + d/2)^2 + D^2$ és $s_2^2 = (x - d/2)^2 + D^2$, egyszerű számolással belátható, hogy $s_1^2 - s_2^2 = 2dx$. Másrészt a megfigyelési ernyő sokkal messzebb van, mint a két rés távolsága ($d \ll D$). Ezért az F_1PF_2 háromszögnek a P pontnál lévő szöge nagyon kicsi. Így az $s_1 + s_2 \approx 2s$ közelítés nagyon jól teljesül, ahol s a P pont origótól mért távolsága. Az elmondottakat kihasználva az útkülönbség az

$$s_1 - s_2 = \frac{dx}{s} = d \frac{x}{s} = d \cdot \sin \alpha$$

kifejezéssel közelíthető, ahol az α szög értelmését az ábra mutatja. Az erősítés feltételét beírva kapjuk, hogy olyan P pontokban van maximális erősítés, amely a

$$d \cdot \sin \alpha = d \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + D^2}} = m\lambda$$

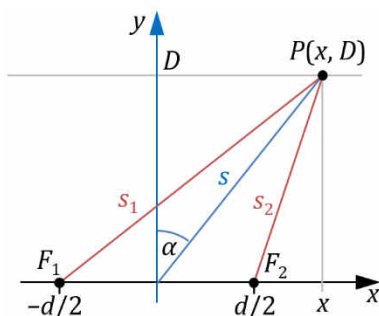
egyenletet teljesíti. Ezzel gyakorlatilag beláttuk a (42) összefüggést. A két réshez képest az ernyő közepén ($x = 0$) az útkülönbség nyilván zérus, ezért ott nulla rendű ($m = 0$) erősítés van. Az ernyő közepétől balra és jobbra is alacsony rendű erősítésekre $|x| \ll D$ jól teljesül. Ezért a nevezőben lévő gyök alatt az összegben x^2 elhanyagolható D^2 mellett, azaz $\sqrt{x^2 + D^2} \approx D$. Ebben a – geometriai elrendezés miatt – jól teljesülő közelítésben az erősítés feltétele az

$$\frac{d}{D} \cdot x = m\lambda$$

alakot ölti. Amiből egy adott m erősítési rendszámhoz tartozó koordinátát az

$$x_m = m \cdot \frac{D}{d} \lambda$$

egyenletből számolhatjuk ki. Amiből látszik, hogy két szomszédos világos csík közötti távolságot



$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

összefüggés szolgáltatja. Ebből a hullámhosszúságot kifejezve

$$\lambda = \frac{d}{D} \Delta x$$

adódik. Behelyettesítve a $d = 0,05$ cm, $D = 836,4$ cm és a $\Delta x = 8,9$ mm értékeket, $\lambda = 532$ nm adódik, amelyet zöld színű fénynek érzékelünk. A frekvenciát a jól ismert $c = \lambda \cdot \nu$ összefüggésből kapjuk: $\nu = c/\lambda = 0,56$ PHz. Vegyük észre, hogy ez rendkívül nagy frekvencia, hiszen $1 \text{ PHz} = 10^{15} \text{ Hz}$.

54. feladat

A lencse optikai tengelyétől r távolságban beeső hullámfelület egyrésze az A pontnál visszaverődik a lencse görbült felületéről, a másik fele tovább haladva, d távolság megtétele után az üveglemez felső felületéről visszaverődik a B pontnál. Mivel optikailag sűrűbb közeg határfelületéről történik a reflexió, π fázisugrás is fellép, amely $\lambda/2$ úthossznak felel meg. A B pontnál visszavert fény ismét befutja a d távolságot. Azért a két interferáló hullám között a fázisugrást is figyelembe véve $\Delta_{21} = 2d + \lambda/2$ optikai úthosszkülönbség lesz, itt a levegő törésmutatóját 1-nek feltételeztük. Így (44) alapján a maximális erősítés feltétele

$$2d + \lambda/2 = m\lambda,$$

ahol $m \geq 1$ egész szám, az erősítés rendszáma. Az OAD derékszögű háromszögre Püthagorasz-tételét felírva $r^2 + (R - d)^2 = R^2$ összefüggést kapjuk. A zárójelet felbontva és rendezve $r^2 = 2d(R + d)$ reláció adódik. Általában a d és az R távolságok között legalább két nagyságrendbeli különbség van ($d \ll R$). Ezért az utolsó összefüggésnél, a zárójeletben lévő összegben, d elhanyagolható R mellett. Így a lencse tengelyétől r távolságra a fény által oda-vissza befutott utat a

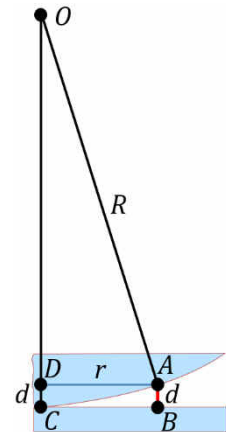
$$d = \frac{r^2}{2R}$$

formulával közelíthetjük. Ezt az erősítés feltételébe helyettesítve a

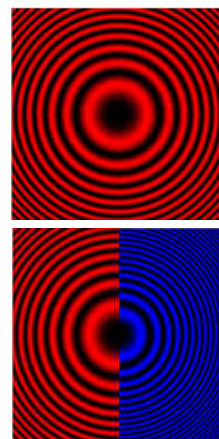
$$r^2 = (m - 1/2)\lambda R$$

egyenletet kapjuk. Amiből adódik, hogy egy adott $m \geq 1$ rendszámú erősítéshez tartozó világos Newton-gyűrű sugara a

$$r_m = \sqrt{(m - 1/2)\lambda R}$$



formulával számolható ki. Látható, hogy a gyűrűk sugara a hullámhossz gyökével arányos. Így rövidebb hullámhosszra (például kék színű fényre) az azonos rendszámhoz tartozó gyűrűk sugara kisebb. A feladat paramétereit behelyettesítve a belső négy gyűrű sugara $r_1 = 217,9 \mu\text{m}$; $r_2 = 377,4 \mu\text{m}$; $r_3 = 487,2 \mu\text{m}$ és $r_4 = 576,5 \mu\text{m}$. A numerikus értékekből is megfigyelhető, hogy a gyűrűk nem egyenközüek. Ez annak a következménye, hogy az ék hajlásszöge változik, a sugárral növekszik, ezért az útkülönbség nem arányos a sugárral. Ennek következtében a gyűrűk kifele sűrűsödnek, amit a mellékelt ábra is szemléltet.



6. A fejezettel kialakítandó konkrét tanulási eredmények

Tudás	Képesség	Attitűd	Autonómia-felelősség
Ismeri a hullám általános fogalmát. Tudja a monokromatikus hullám fogalmát. Ismeri a hullámok Fourier-féle felbontásának fogalmát. Ismeri a haladó és állóhullám fogalmát. Ismeri a longitudinális és a transzverzális hullám fogalmát.	Felírja a monokromatikus hullám formuláját. Felírja a haladó hullám fázisának képletét. Kiszámítja az állóhullámok csomópontjainak helyét és a közöttük lévő távolságot	A megszerzett ismereteket szem előtt tartja és következetesen alkalmazza a hullámtani feladatok megoldásánál. Az eredményt kritikusan szemléli, meggyőződik annak fizikai realitásáról. Törekszik az érthető és áttekinthető munkára.	A számolás eredményét ellenőrzi. A hibákat önállóan javítja. Az eredményért felelősséget vállal.
Ismeri a monokromatikus hullám frekvenciájának, hullámhosszának és terjedési sebességének fogalmát	Felírja a frekvencia, a hullámhossz és a terjedési sebesség közötti relációt.	Figyelembe veszi ezt a relációt a saját frekvenciák kiszámolásánál.	Felismeri ezen összefüggés jelentőségét és univerzális voltát.
Ismeri a geometriai sugár fogalmát.	Ábrázolja a hullámok terjedését a geometriai sugarakkal.	Elfogadja a geometriai sugarakkal való leírás közelítő jellegét. Szem előtt tartja annak az érvényességi területét.	Tisztában van a közelítés korlátaival. Felismeri a geometriai sugarak és az optikai fénysugarak kapcsolatát.

Ismeri a hullámok visszaverődésének és törésének jelenségét. Ismeri a teljes visszaverődés jelenségét.	A geometria sugarakal leírja ezeket a jelenségeket.	Törekszik a jelenségeket leíró törvények alkalmazására összetettebb optikai rendszerek esetén is.	Felismeri a jelenségeknek a fényvisszaverődéssel és töréssel fennálló hasonlóságát.
Ismeri a hullámok interferenciájának fogalmát. Tudja, hogy a hullámok találkozásuk esetén erősíthetik vagy akár gyengíthetik egymás hatását.	Felírja az eredő hullám amplitúdójára és fázisára vonatkozó formulákat. Felírja a maximális erősítés és maximális gyengítés feltételére vonatkozó képleteket.	Következetesen alkalmazza az interferencia jelenségét a hullámtani feladatok megoldásánál.	Felismeri az interferencia jelentőségét.
Ismeri a fényforrás, a fénynyaláb és a fény-sugár fogalmát. Ismeri a fénysugarak viselkedését homogen részekből álló közegben. Ismeri a teljes fényvisszaverődés fogalmát. Ismeri a relatív és abszolút törésmutató fogalmát.	Felírja a fényvisszaverődés és törés leíró formulákat. Kiszámolja az optikai úthosszúságot szakszonként homogén közegben. Kiszámolja a teljes fényvisszaverődés határszögét. Kiszámolja a relatív és az abszolút törésmutatókat a terjedési sebességekből.	Törekszik a megismert fényvisszaverődés és törés törvényeinek következetes alkalmazására a geometriai optikai feladatok megoldásánál.	Önállóan alkalmazza a geometriai optika alaptörvényeit a feladatok megoldásánál. Felismeri, hogy mikor lép fel teljes visszaverődés.
Ismeri a képalkotás fogalmát. Ismeri a valódi és a virtuális tárgy, illetve kép fogalmát. Ismeri az olyan elemi képalkotó optikai eszközöket, mint a sík- és gömbtükör és a gömbi lencse. Ismeri a nagyítás fogalmát. Ismeri az egyes elemi képalkotó eszközök nevezetes sugarait.	Felírja a sík- és gömbtükörök és a vékony lencsék képalkotási egyenletét. Tudja a képalkotási egyenletben használt előjel megállapodásokat. Felírja a nagyításra vonatkozó formulákat. Megszerkeszti a kiterjedt tárgy képét a nevezetes sugarakkal.	Törekszik a képalkotás fogalmának megértésére. Törekszik a virtuális tárgy fogalmának a megértésére. Elfogadja a nagyítás előjeles definícióját. Törekszik a nevezetes sugarak következetes alkalmazására.	Felismeri a képalkotási egyenletnél bevezetett előjel megállapodás jelentőségét és hasznát. Felismeri a nagyításnál bevezetett előjel szerepét és hasznát. Önállóan összehasonlítja a nevezetes sugarakon alapuló szerkesztéssel és a számolással kapott eredményeket, felismeri, ha hibázott. Megkeresi és kijavítja a hibát.

Ismeri a fényinterferencia fogalmát. Ismeri a Young- és a Michelson interferencia kísérletet. Ismeri a hullámfront- és az amplitúdóosztás fogalmát. Ismeri az egy- és a többsugaras interferencia fogalmát. Tudja a rendszám jelentését. Ismeri a síkpárhuzamos lemezen és az ékalakú lemezen kialakuló fényinterferenciát. Ismeri az azonos beesés és az azonos vastagság görbéinek fogalmát. Ismeri a Newton-gyűrűk fogalmát. Ismeri az optikai rács fogalmát.	Felírja a maximális erősítés és maximális gyengítés feltételét a geometriai és az optikai úthossz segítségével egyaránt. Kiszámítja két szomszédos világos csík távolságát a Young-féle kísérletnél. Felírja az optikai úthosszkülönbséget síkpárhuzamos lemez esetén. Felírja az optikai úthosszkülönbséget ékalakú lemezre közel merőlegesen beeső fény esetére. Kiszámolja az azonos vastagság görbéi közötti távolságot és a Newton-féle gyűrűk sugarát. Felírja és alkalmazza a rácsegyenletet.	Alkalmazza a megismert elméletet a feladatok megoldása során. Látja az optika és a hullámtan közötti kapcsolatot. Figyelembe veszi a feladatok megoldásánál a fény hullámtermészetét.	Felismeri a fényinterferencia elméleti jelentőségét. Ismeri a fény hullámtermészetét és látja a geometriai optika közelítő jellegét.
--	--	--	--