

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

DINAMIKUS RENDSZEREK

ELMÉLETI ÉS GYAKORLATI JEGYZET

Készítette: Balázs István, Dénes Attila és Makay Géza

SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

© Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar, Bolyai Intézet

Lektorálta: Fülöp Vanda

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014, „A Szegedi Tudományegyetem oktatási és szolgáltatási teljesítményének innovatív fejlesztése a munkaerő-piaci és a nemzetközi verseny kihívásaira való felkészülés jegyében”.



Tartalomjegyzék

Tárgyleírás	1
Előszó	5
1. Diszkrét dinamikus rendszerek	6
1.1. Periodikus pontok, stabilitás	6
1.2. Magasabb rendű, lineáris differenciaegyenletek	10
1.3. A diszkrét logisztikus egyenlet, Cantor-halmaz	14
1.4. Topologikus ekvivalencia, bifurkációk	19
1.5. Káosz	27
2. A körvonal leképezései	30
3. Szimbolikus dinamika, Smale-patkó	38
3.1. Szimbolikus dinamika	38
3.2. A Smale-patkó	41
4. Folytonos dinamikus rendszerek	46
4.1. Pályák	46
4.2. Határhalmazok	49
4.3. Ljapunov tételei	51
4.4. Linearizálás	56
4.5. A LaSalle-féle invarianciaelv	59
4.6. Poincaré-leképezés	63
4.7. A Poincaré–Bendixson-tétel	67
4.8. A Van der Pol-egyenlet	73
4.9. Populációdinamikai példák	78
4.10. Határciklusok	82
4.11. Hartman–Grobman-tételek	89
5. Dinamikus rendszerek magasabb dimenzióban	95
Előismeretek	99
Tárgymutató	101
Irodalomjegyzék	101

Tárgyleírás

Dinamikus rendszerek	Kreditértéke: 5
A tantárgy képzési karaktere: elmélet 50%, gyakorlat 50%	
A tanóra típusa: 28 óra előadás és 28 óra gyakorlat az adott félévben. Előadáson leadjuk az elméleti anyagot. A gyakorlat elsősorban az elméleti anyag példákon keresztül történő elsajátítását célozza a hallgatók aktivitására is számítva.	
A számonkérés módja: egy közös jegy az előadásra és a gyakorlatra. Az ismeretellenőrzésben alkalmazandó további sajátos mód:a félév közepén és végén a hallgató számot ad (zárhelyi dolgozat formájában) a gyakorlatokon elsajátított témakörben való jártasságáról. Ha a gyakorlati pontszáma eléri az elégséges szintet, szóbeli vizsgán ad számot az előadáson elsajátított témakörben való jártasságáról.	
A tantárgy tantervi helye: 2. félév	
Előtanulmányi feltételek: Közönséges differenciálegyenletek	

A tantárgy célja: A természettudományokban megjelenő jelenségek és problémák matematikai leírása. A természetben megfigyelhető jelenségek, időbeli folyamatok közönséges differenciálegyenletekkel leírható modelljeinek megadása. A differenciálegyenletek kvalitatív módszereinek és eszközeinek ismertetése.

Tematika

1. Kétdimeziós autonóm rendszerek, a Poincaré-Bendixson tétel.
2. Nyeregpon t tulajdonság, stabil, instabil és centrális sokaságok.
3. Stabilitáselmélet.
4. Periodikus megoldások stabilitása, Poincaré-leképezések, orbitális stabilitás.
5. Strukturális stabilitás, generikus tulajdonságok. Attraktorok.
6. Lagrange egyenletek, Hamilton vektormezők.
7. Diszkrét dinamikai rendszerek.
8. A körvonal leképezései, kvadratikus leképezések, periodikus pontok bifurkációi, Smale-féle patkó.

Kötelező irodalom:

- Balázs István, Dénes Attila, Makay Géza: Dinamikus rendszerek (ezen jegyzet)

Ajánlott irodalom:

- Terjéki József: Differenciálegyenletek, Szeged, Polygon 1997.
- Hatvani László, Krisztin Tibor, Makay Géza: Dinamikus modellek a közgazdaságban, Szeged, Polygon, 2001.
- M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney: Differential equations, dynamical systems & an introduction to chaos, Elsevier Academic Press, 2005.

A szakmai kompetenciák, kompetencia-elemek, amelyek kialakításához a tantárgy jellemzően, érdemben hozzájárul:

a) Tudás

- Ismeri a differenciálegyenletek kapcsolódó fogalmakat.
- Megérti a dinamikus rendszerek fogalmainak absztrakt tárgyalását.
- Ismeri az elsajátítandó elméleti és gyakorlati matematikai módszereket.
- Felismeri az tanult módszerekkel kezelhető problémákat.

b) Képesség

- A hallgató a kurzus elvégzése után képes a differenciálegyenletes modellek azonosítására, rendszerbe foglalására.
- Képes a dinamikus rendszerek témakörében szakszerűen kifejezni magát.
- Képes a matematika tudományterületén a fogalmak, elméletek és tények közötti összefüggések megteremtésére, közvetítésére.
- Képes a kurzuson elsajátított elméleti ismeretek gyakorlati alkalmazására.

c) Attitűd

- Belátja a differenciálegyenletek fogalmainak absztrakt tárgyalásának szükségességét.
- Elfogadja a Poincaré-leképezés fogalmának problematikáját. Belátja a dinamikus rendszerekben nélkülözhetetlen szerepét.
- Kritikusan szemléli az elsajátítandó elméleti és gyakorlati matematikai módszereket.
- Törekszik az absztrakt fogalmak pontos használatára.

d) Autonómia és felelősség

- Önállóan kiválasztja egy összetett feladat megoldásához tartozó megfelelő módszereket.
- Képes feladatok önálló megalkotására és a megoldások elemzésére, a hibák önálló javítására.
- Önállóan megteremti a matematika tudományterületén a fogalmak, elméletek és tények közötti összefüggéseket.
- Kreatívan alkalmazza a matematikában elsajátított elméleti ismereteket a gyakorlatban.

A tantárggyal kialakítandó konkrét tanulási eredmények:			
Tudás	Képesség	Attitűd	Autonómia-felelősség
Felidézi a közönséges differenciálegyenletek, egyensúlyi helyzetek, stabilitás fogalmait.	Képes alkalmazni a differenciálegyenletek, egyensúlyi helyzetek, stabilitás fogalmait.	Kérdéseket fogalmaz meg a differenciálegyenletekről.	Önállóan felismeri egy adott elsőrendű differenciálegyenlet típusát. Önállóan kiválasztja a feladathoz tartozó megfelelő megoldási módszert.
Ismeri stabilitással kapcsolatos fogalmakat. Ismeri a Ljapunov-tételeket és a LaSalle-féle invariancia-elvet. Tudja a Poincaré-Bendixson tételt.	Értelmezi a stabilitással kapcsolatos fogalmakat. Alkalmazza a Ljapunov-tételeket és a LaSalle-féle invariancia-elvet. Részletesen kifejti a Poincaré-Bendixson tételt	Elfogadja a stabilitás fogalmának problematikáját. Belátja a dinamikus rendszerekben nélkülözhetetlen szerepét.	Önállóan példákat gyűjt stabil és instabil egyensúlyi helyzetekre.
Tisztában van a diszkrét dinamikus rendszer definíciójával. Ismeri bifurkációk fajtáit. Felsorolja a káosz tulajdonságait.	Értelmezi a diszkrét dinamikus rendszer definícióját. Bemutatja bifurkációk fajtáit. Értelmezi a káosz definícióját, tulajdonságait.	Törekszik az absztrakt fogalmak pontos használatára. Észreveszi a bifurkáció és a káosz kapcsolatát.	
Meghatározza a Van der Pol egyenletet és tulajdonságait.	Bemutatja a Van der Pol egyenletet és tulajdonságait.	Kíváncsi a Van der Pol egyenlet tulajdonságaira.	
Ismeri a Poincaré-leképezés definícióját. Tisztában van a nullklínák és az első integrál kapcsolatával.	Értelmezi a Poincaré-leképezés definícióját. Részletesen kifejti a nullklínák és az első integrál kapcsolatait.	Belátja a Poincaré-leképezés fogalmának fizikai jelentését.	
Ismeri a határciklus fogalmát. Tudja az orbitális stabilitás definícióját.	Értelmezi a határciklus fogalmát. Részletesen kifejti az orbitális stabilitás definícióját.	Hajlandó egy konkrét alkalmazást többféle szemszögből is megvizsgálni.	Önállóan kiválasztja a feladat megoldásához tartozó megfelelő módszereket. Önállóan képes feladatok megalkotására és a megoldásának elemzésére.

Tudás	Képesség	Attitűd	Autonómia-felelősség
Ismeri az szimbolikus dinamikát és a Smale-patkót.	Meghatározza a szimbolikus dinamika és a Smale-patkó tulajdonságait.	Érdeklődik a szimbolikus dinamika-ban és a Smale-patkóban rejlő lehetőségekről.	Önállóan példát gyűjt olyan esetekre, ahol és amikor a szimbolikus dinamika használata megkérdőjelezhetetlen.
Tantárgy felelőse: Dr. Krisztin Tibor, egyetemi tanár			
Tantárgy oktatásába bevont oktatók: Dr. Dénes Attila, tudományos munkatárs; Balázs István, tudományos segédmunkatárs			

Előszó

Dinamikus (másképpen dinamikai) rendszer alatt egy differencia- vagy differenciálegyenlet megoldásainak rendszerét értjük. A megoldásokat alapvetően három különböző megközelítéssel vizsgálhatjuk. Analitikusan megpróbálhatjuk kiszámolni, zárt alakban, képlettel megadni a megoldásokat; ez csak a legegyszerűbb típusú differencia- és differenciálegyenletek esetén lehetséges. Numerikus módszerekkel közelíthetjük a megoldásokat, de ez csak bizonyos pontossággal és korlátos intervallumon működik. Ebben a jegyzetben a kvalitatív vizsgálati módszert használjuk, vagyis a megoldásoknak az egyenletekből kikövetkeztethető tulajdonságaira, viselkedésére fókuszálunk.

Az első fejezetben definiáljuk a dinamikus rendszereket. Előbb diszkrét dinamikus rendszerekkel kezdünk foglalkozni, vagyis függvények iterációjával. Ezek vizsgálata általában egyszerűbb, mint a differenciálegyenleteké, így ezeken könnyebb megérteni a káosz fogalmát.

A második fejezetben a körvonalon értelmezett dinamikus rendszerek tulajdonságait, periodikus pontjainak létezését vizsgáljuk.

Dinamikus rendszereket nem csak a valós számok halmazán vagy vektortereken definiálhatunk, hanem absztrakt tereken is, erről szól a 3.1. alfejezet. A 3.2. alfejezetben egy nevezetes kaotikus rendszert, a Smale-patkót mutatjuk be.

A negyedik fejezetben átvesszünk néhány, a közönséges differenciálegyenletek kurzuson tanult definíciót, tételt, mint például a Ljapunov-tételeket. Bebizonyítjuk a LaSalle-féle invarianciaelvet, és alkalmazzuk a matematikai ingára. Bevezetjük a Poincaré-leképezés fogalmát, amellyel jellemezhetjük a periodikus megoldásokat a stabilitás szempontjából. További hasznos eszközöket is megismerünk, mint az első integrál vagy a nullklína. Néhány példán illusztráljuk az eredményeket, többek között a nevezetes Van der Pol-egyenleten.

Az utolsó, ötödik fejezetben egy másodrendű, fizikai rendszert tekintünk. A korábbi fejezetekben tanultak segítségével bebizonyítjuk Kepler második törvényét.

A jegyzetet a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében oktatott Dinamikus rendszerek című mesterszakos kurzushoz készítettük, de hasznos lehet bárki számára, aki tanulmányai vagy munkája során differenciálegyenletekkel foglalkozik. Feltételezzük, hogy az olvasó stabil matematikai háttérrel rendelkezik, a közönséges differenciálegyenletek alapszakos kurzus anyagát már elsajátította.

Reméljük, az olvasó hasznosnak találja jegyzetünket. Az észrevételeket, megjegyzéseket örömmel fogadjuk.

A szerzők

1. fejezet

Diszkrét dinamikus rendszerek

1.1. Periodikus pontok, stabilitás

Mindenek előtt definiáljuk, hogy mi az a dinamikus rendszer.

1.1. Definíció. Egy *dinamikus rendszer* egy

$$\varphi: G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto \varphi_g(x)$$

leképezés úgy, hogy $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{g \circ h}$ teljesül, ahol G félcsoporthat és X egy metrikus tér. Ha G csoport, akkor ez egy *invertálható dinamikus rendszer*.

Alapvetően kétféle dinamikus rendszerrel foglalkozunk.

1.2. Definíció. *Diszkrét dinamikus rendszer* esetén $G = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ vagy $G = \mathbb{Z}$.

1.3. Definíció. *Folytonos dinamikus rendszer* esetén $G = [0, \infty)$ vagy $G = \mathbb{R}$.

A fejezet hátralevő részében diszkrét dinamikus rendszerekkel foglalkozunk.

1.4. Tétel. Egy $\varphi_k(x)$ diszkrét dinamikus rendszer mindig felírható egy $f: X \rightarrow X$ leképezés iteráltjaként.

Bizonyítás. Legyen $f(x) := \varphi_1(x)$. Ekkor a dinamikus rendszer definíciója szerint $\varphi_2(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_1)(x)$ és így tovább, $\varphi_k(x)$ a $\varphi_1(x)$ k -adik iteráltja: $\varphi_1^k(x)$. $\square$

1.5. Definíció. $f: X \rightarrow X$ *homeomorfizmus*, ha folytonos, invertálható és az inverze is folytonos.

1.6. Definíció. $f: X \rightarrow X$ *diffeomorfizmus*, ha differenciálható, invertálható és az inverze is differenciálható.

Egy dinamikus rendszer viselkedéséről sokat elárulnak a periodikus pontjai, ezek stabilitása, stabil, instabil halmazai. A következő néhány definíció és példa erre vonatkozik.

1.7. Definíció. A p pont *periodikus*, ha $f^m(p) = p$ valamilyen m -re. A legkisebb ilyen m az alap-periódus. Az 1-periodikus pontokat *fixpontoknak* nevezzük.

1.8. Definíció. Legyen p egy m -periodikus pont. Egy x pont *előre aszimptotikus p -hez*, ha

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{im}(x) = p.$$

1.9. Definíció. Egy p periodikus pont előre aszimptotikus pontjainak halmaza a p *stabil halmaza*, jelölése $W^s(p)$.

1.10. Definíció. Legyen p egy m -periodikus pont és f invertálható. Egy x pont *hátra aszimptotikus* p -hez, ha

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} f^{im}(x) = p.$$

1.11. Definíció. Egy p periodikus pont hátra aszimptotikus pontjainak halmaza a p *instabil halmaza*, jelölése $W^u(p)$.

1.12. Példa. $f(x) = x^3$ periodikus pontjai: $0, \pm 1$ fixpontok (1-periodikus pontok). $W^s(0) = (-1, 1)$, $W^u(0) = \{0\}$, $W^s(1) = \{1\}$, $W^u(1) = (0, \infty)$, $W^s(-1) = \{-1\}$, $W^u(-1) = (-\infty, 0)$.

1.13. Példa (Newton-féle gyökvonó módszer). Tekintsük az

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{A}{x_k} \right)$$

egyenletet. Legyen $x_k = \sqrt{A} + \varepsilon$, ahol ε lehet pozitív és negatív is. Ekkor

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{A}{x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{A} + \varepsilon + \frac{A - \varepsilon^2}{\sqrt{A} + \varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{A} + \varepsilon} \right) = \sqrt{A} + \frac{\varepsilon^2}{2(\sqrt{A} + \varepsilon)}.$$

Vegyük észre, hogy ez mindig nagyobb, mint $\sqrt{A}$ (ha $x_0 > 0$). Az $x_{k+1} - \sqrt{A}$ különbség legfeljebb fele az $|x_k - \sqrt{A}|$ különbségnek, és ha ε kicsi, akkor a különbség négyzetesen kisebb (nagyon gyorsan tart 0-hoz). A $\sqrt{A}$ fixpont, a stabil halmaza a $(0, \infty)$ intervallum. Könnyen belátható, hogy a $-\sqrt{A}$ is fixpont, és annak stabil halmaza $(-\infty, 0)$.

1.14. Példa. Bizonyítsuk be, hogy ha egy folytonos függvényre teljesül, hogy $f(x) = f\left(\frac{x}{1+x}\right)$, $x \neq -1$, akkor az a függvény csak a konstans függvény lehet.

Vegyük az

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k}$$

dinamikus rendszert. Belátjuk, hogy bármilyen kezdőérték esetén $x_k \rightarrow 0$. Legyen először $x_0 \geq 0$. Ekkor

$$x_1 = \frac{x_0}{1 + x_0} < 1.$$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $x_k < \frac{1}{k}$. $k = 1$ -re ezt már megtettük, tegyük fel, hogy k -ig igaz az állítás, és nézzük $(k+1)$ -re:

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k} = \frac{1 + x_k}{1 + x_k} - \frac{1}{1 + x_k} < 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{k+1}.$$

Ezzel $x_0 \geq 0$ esetén beláttuk, hogy $x_k \rightarrow 0$. Ha $x_0 < -1$, akkor x_1 a definíciója szerint pozitív lesz, és így $x_k \rightarrow 0$ ismét teljesül. Ha $x \in (-1, 0)$, akkor $1 + x \in (0, 1)$, és

$$\frac{x}{1 + x} < x.$$

Tehát $x_1 < x_0$, és mindaddig, amíg az x_k sorozat benne marad a $(-1, 0)$ intervallumban, addig szigorúan monoton csökken. Ebből az is következik, hogy

$$x_2 = \frac{x_1}{1 + x_1} < \frac{x_1}{1 + x_0} = \frac{x_0}{(1 + x_0)^2}$$

és ismét teljes indukcióval belátható, hogy

$$x_k < \frac{x_0}{(1+x_0)^k}$$

Itt a jobb oldal tart $-\infty$ -be, tehát a sorozat előbb-utóbb kisebb lesz, mint -1 , és a fentiek alapján akkor tudjuk, hogy $x_k \rightarrow 0$.

A függvényre megadott feltétel szerint az f függvény konstans értéket vesz fel ilyen pályák mentén: $f(x_{k+1}) = f(x_k) = f(x_0)$. Másrészt a folytonosság és x_k 0-hoz tartása miatt $f(x_k) \rightarrow f(0)$, amiből kapjuk, hogy minden x_0 -ra $f(x_0) = f(0)$, és az állítást beláttuk.

1.15. Definíció. Egy p m -periodikus pont *stabil*, ha bármely U környezetéhez létezik olyan V környezete, hogy ha $x \in V$, akkor $f^{km}(x) \in U$ minden $k \geq 0$ -ra; *instabil*, ha nem stabil.

1.16. Definíció. Egy p m -periodikus pont *aszimptotikusan stabil*, ha stabil és létezik olyan V környezete, hogy ha $x \in V$, akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{km}(x) = p.$$

1.17. Definíció. Egy p periodikus pont *attraktor*, ha $W^s(p)$ tartalmazza p egy nyitott környezetét X -ben.

1.18. Definíció. Egy p periodikus pont *repellor*, ha $W^u(p)$ tartalmazza p egy nyitott környezetét X -ben.

Innentől 1 dimenzióban dolgozunk.

1.19. Definíció. Egy p m -periodikus pont *hiperbolikus*, ha $|(f^m)'(p)| \neq 1$. $(f^m)'(p)$ a p pont multiplikátora.

Egy hiperbolikus fixpont stabilitását meghatározza a derivált az adott pontban.

1.20. Tétel. Legyen p egy hiperbolikus fixpontja $f \in C^1$ -nek, és $|f'(p)| < 1$. Ekkor van egy olyan U környezete p -nek, hogy minden $x \in U$ esetén $f^k(x) \rightarrow p$ (miközben $k \rightarrow \infty$).

Bizonyítás. Mivel f folytonosan differenciálható, ezért van olyan $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $|f'(x)| \leq A < 1$ minden $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ esetén. A Lagrange-féle középértéktétel szerint

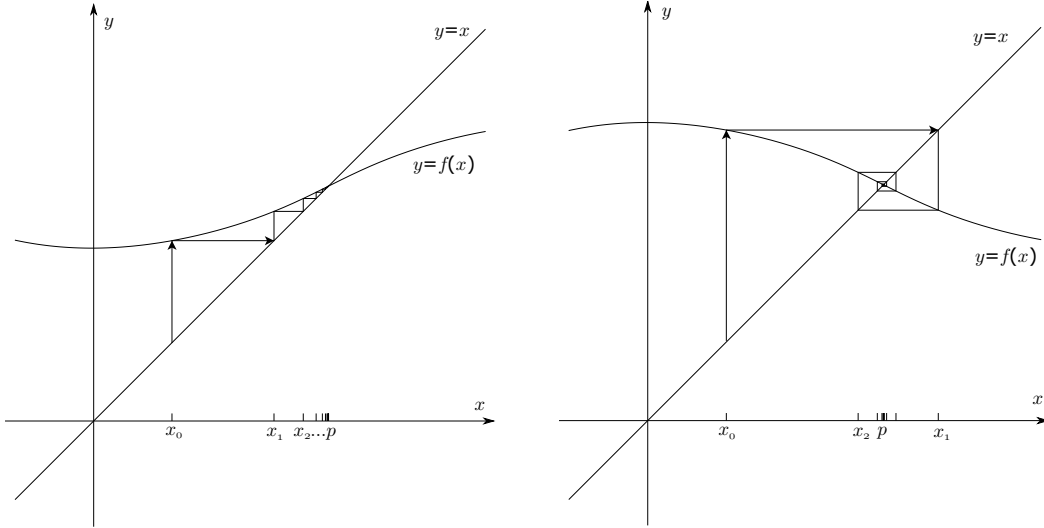
$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(y)| \cdot |x - p| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon,$$

tehát f a $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ intervallumot önmagába képezi. Iterálva ezt a leképezést azt kapjuk, hogy

$$|f^k(x) - p| = |f^k(x) - f^k(p)| \leq A^k|x - p| \rightarrow 0,$$

mivel $0 \leq A < 1$, tehát $f^k(x) \rightarrow p$, $[p - \varepsilon, p + \varepsilon] \subseteq W^s(p)$ és p attraktor. $\square$

Hasonló állítást ki lehet mondani m -periodikus p pontokra is, ha $|(f^m)'(x)| < 1$ teljesül.



1.1. ábra. Pókhálódiaagram $f'(p) \in (0, 1)$ és $f'(p) \in (-1, 0)$ esetén

1.21. Tétel. Legyen p egy hiperbolikus fixpontja $f \in C^1$ -nek, és $|f'(x)| > 1$. Ekkor van egy olyan U környezete p -nek, hogy minden $x \in U \setminus \{p\}$ esetén van olyan $k > 0$, amelyre $f^k(x) \notin U$.

Bizonyítás. Mivel f folytonosan differenciálható, ezért van olyan $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $|f'(x)| \geq A > 1$ minden $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ esetén. A Lagrange-féle középértéktétel szerint

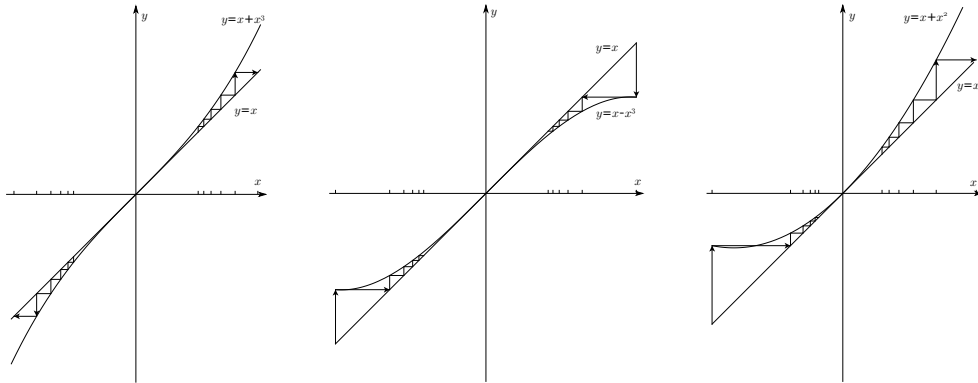
$$|f(x) - f(p)| = |f'(y)| \cdot |x - p| \geq A|x - p| > |x - p|$$

mindaddig, amíg $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. Iterálva ezt a leképezést azt kapjuk, hogy

$$|f^k(x) - p| = |f^k(x) - f^k(p)| \geq A^k|x - p|$$

teljesül minden olyan k -ra, amelyre $f^l(x) \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ ($l < k$). Mivel $A > 1$, ezért találhatunk olyan k -t, amelyre $|f^k(x) - p| > \varepsilon$ teljesülni fog, p repellor. $\square$

Hasonló állítást ki lehet mondani m -periodikus p pontokra is, ha $|(f^m)'(x)| > 1$ teljesül.



1.2. ábra. A 0 fixpont az $f(x) = x + x^3$ leképezésre gyengén taszító; $f(x) = x - x^3$ -re gyengén vonzó; $f(x) = x + x^2$ -re jobbról gyengén taszító, balról gyengén vonzó

Ellenőrző kérdések:

- Mi a dinamikus rendszer definíciója?
- Mi egy periodikus pont stabil halmaza?
- Mikor hiperbolikus egy fixpont?

1.2. Magasabb rendű, lineáris differenciaegyenletek

Ha $k \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, akkor az

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} \quad (1.1)$$

egyenletet k -adrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük. Keressük a megoldását $x_n = \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ alakban:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_k \lambda^{n-k}.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - \dots - a_k \lambda^{n-k} = 0,$$

és szorozzuk λ^{k-n} -nel:

$$\lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \dots - a_k = 0. \quad (1.2)$$

Az (1.2) egyenletet az (1.1) egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenletnek, gyökeit karakterisztikus gyököknek vagy sajátértékeknek nevezzük.

1.22. Tétel. Ha az (1.2) egyenlet különböző gyökei $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$, $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}$ multiplicitásokkal, akkor az (1.1) egyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} x_n &= b_{1,0} \lambda_1^n + b_{1,1} n \lambda_1^n + \dots + b_{1,m_1-1} n^{m_1-1} \lambda_1^n + \dots + b_{l,0} \lambda_l^n + \dots + b_{l,m_l-1} n^{m_l-1} \lambda_l^n \\ &= \sum_{u=1}^l \sum_{v=0}^{m_u-1} b_{u,v} n^v \lambda_u^n, \end{aligned}$$

ahol $b_{u,v} \in \mathbb{C}$.

Másodrendű egyenletre, azaz, ha $k = 2$, akkor két karakterisztikus gyök van, ezekre három eset lehetséges:

- két különböző valós gyök,
- két azonos valós gyök,
- vagy egy komplex konjugált gyökpár.

A következőkben ezekre nézünk egy-egy példát.

1.23. Példa (Fibonacci-sorozat). Tegyük fel, hogy a nyúlpárok két hónapos koruktól kezdve minden hónapban egy újabb nyúlpárnak adnak életet, és örökké élnek. Kezdetben egy újszülött nyúlpárunk van. Adjuk meg zárt képlettel, hogy hány nyúlpárunk lesz n hónap múlva.

Ha x_n -nel jelöljük a nyúlpárok számát, akkor $x_0 = 1$ és $x_1 = 1$. $n \geq 2$ -re x_n úgy számolható, hogy a már meglévő nyulak számához, x_{n-1} -hez hozzáadjuk a legalább két hónapos nyulak számát, x_{n-2} -t.

A probléma megoldása a Fibonacci-sorozat: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., ezt szeretnénk zárt alakban felírni.

A következő másodrendű, lineáris differenciaegyenletet kapjuk x_n -re:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

$x_n = \lambda^n$ helyettesítéssel a

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

adódik. Rendezzük:

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0,$$

és szorozzuk λ^{2-n} -nel, így a

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A differenciaegyenlet általános megoldása:

$$x_n = b_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

A kezdeti értéket figyelembe véve a következő egyenletrendszert írhatjuk fel az a, b paraméterekre:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad x_0 &= b_1 + b_2 = 1, \\ n = 1 : \quad x_1 &= b_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + b_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Innen az együtthatók:

$$b_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{és} \quad b_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right). \end{aligned}$$

1.24. Példa.

$$\begin{cases} x_n = -4x_{n-1} - 4x_{n-2} \\ x_0 = 3 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

$x_n = \lambda^n$ helyettesítéssel a következő karakterisztikus egyenlet adódik:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

ahonnan $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Tehát most két azonos gyökünk van, az általános megoldás:

$$x_n = b_1(-2)^n + b_2n(-2)^n.$$

Tekintsük a megadott kezdeti értékeket:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad x_0 &= b_1 = 3 \\ n = 1 : \quad x_1 &= b_1(-2) + b_2(-2) = 5. \end{aligned}$$

Innen az együtthatók:

$$b_1 = 3 \quad \text{és} \quad b_2 = -\frac{11}{2},$$

a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$x_n = 3(-2)^n - \frac{11}{2}n(-2)^n.$$

Ha valós leképezést tekintünk, és valós kezdeti feltételből indulunk ki, akkor a megoldás is valós lesz. A c) esetben a következő állítást alkalmazhatjuk.

1.25. Állítás. *Tegyük fel, hogy egy másodrendű, lineáris differenciaegyenlet karakterisztikus gyökei egy komplex konjugált gyökpárt alkotnak, λ és $\bar{\lambda}$, λ trigonometrikus alakja $\lambda = re^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, és a kezdeti értékek is valósak. Ekkor a megoldás*

$$x_n = r^n(c_1 \cos(n\phi) + c_2 \sin(n\phi))$$

alakban írható, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a feltételek teljesülnek. Az 1.22. Tétel szerint a megoldás

$$x_n = b_1\lambda^n + b_2\bar{\lambda}^n$$

alakú. Mivel a kezdeti értékek valósak, és az (1.1) egyenlet is csak valós együtthatókat tartalmaz, ezért a megoldás valós. A trigonometrikus alakot használva

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname{Re} (b_1 r^n e^{in\phi} + b_2 r^n e^{-in\phi}) \\ &= r^n \operatorname{Re} ((\operatorname{Re} b_1 + i \operatorname{Im} b_1)(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) + (\operatorname{Re} b_2 + i \operatorname{Im} b_2)(\cos(n\phi) - i \sin(n\phi))) \\ &= r^n (\operatorname{Re} b_1 \cos(n\phi) - \operatorname{Im} b_1 \sin(n\phi) + \operatorname{Re} b_2 \cos(n\phi) + \operatorname{Im} b_2 \sin(n\phi)), \end{aligned}$$

ahonnan $c_1 = \operatorname{Re} b_1 + \operatorname{Re} b_2$ és $c_2 = -\operatorname{Im} b_1 + \operatorname{Im} b_2$ helyettesítéssel adódik az állítás. $\square$

1.26. Példa.

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} \\ x_0 = 8 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$x_n = \lambda^n$ helyettesítéssel a

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, ahonnan $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Tehát most egy komplex konjugált gyökpárunk van. Írjuk át a $\lambda = 1 + i\sqrt{3}$ -at trigonometrikus alakra:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

és

$$\cos \phi = \frac{1}{2}, \quad \sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

melynek az egyetlen $[0, 2\pi]$ intervallumba eső megoldása

$$\phi = \frac{\pi}{3}.$$

A fenti állítást használva az általános megoldás:

$$x_n = 2^n \left(c_1 \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) + c_2 \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

A kezdeti feltételből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad x_0 &= c_1 = 8 \\ n = 1 : \quad x_1 &= 2 \left(c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \quad \implies \quad c_2 = -2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

Innen az együtthatók:

$$c_1 = 8 \quad \text{és} \quad c_2 = -2\sqrt{3},$$

a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$x_n = 2^n \left(8 \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) - 2\sqrt{3} \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Ellenőrző kérdések:

- Hogyan írható fel egy k -adrendű lineáris differenciaegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet?
- Milyen alakú egy másodrendű lineáris differenciaegyenlethez általános megoldása, ha két azonos valós karakterisztikus gyöke van?
- Milyen alakú egy másodrendű lineáris differenciaegyenlethez általános megoldása, ha a karakterisztikus gyökei komplex konjugált gyökpárt alkotnak?

1.3. A diszkrét logisztikus egyenlet, Cantor-halmaz

1.27. Példa. Tekintsük az

$$f(x) = \mu x(1 - x)$$

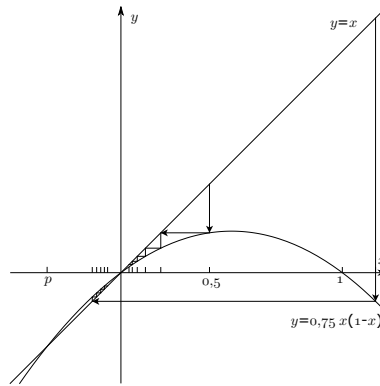
logisztikus leképezést, ahol $\mu > 0$ paraméter.

$f(x) > 0$, ha $0 < x < 1$, és $f(x) < 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. A leképezés fixpontjai a

$$\mu x(1 - x) = x$$

egyenlet gyökei: 0 és a $p = 1 - \frac{1}{\mu} < 1$.

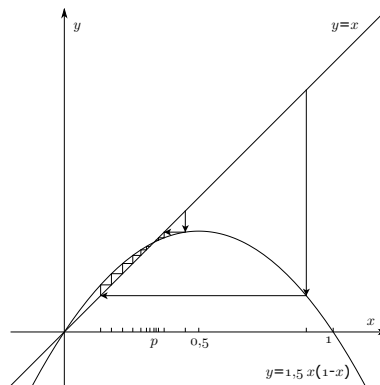
Ha $\mu < 1$, akkor $p < 0$. $x \in (p, 0)$ esetén $x < f(x) < 0$, $f^k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. $x \in (0, 1)$ -re $0 < f(x) < x$, $f^k(x) \rightarrow 0$. Ha $x < p$, akkor $f(x) < x$, $f^k(x) \rightarrow -\infty$. Tehát a 0 attraktor és p repellor.



1.3. ábra. A diszkrét logisztikus egyenlet pókhálódigramja $\mu = 0,75 < 1$ -re

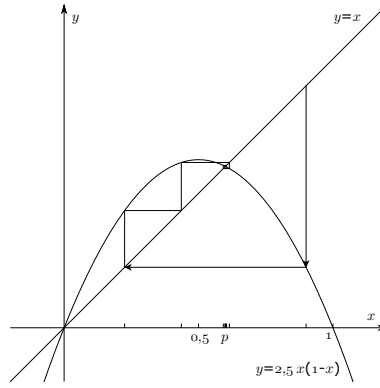
$\mu > 1$ esetén, ha $x < 0$ vagy $x > 1$, akkor $f^k(x) \rightarrow -\infty$. Ha $1 < \mu < 3$, akkor a 0 repellor, a p attraktor és $x \in (0, 1)$ esetén $f^k(x) \rightarrow p$.

$1 < \mu \leq 2$ esetén az ábráról látszik, hogy $x \leq 1/2$, $x \neq p$ esetén $f^k(x)$ monoton és korlátos, ezért konvergens, $f^k(x) \rightarrow p$. Ha $x \in (1/2, 1)$, akkor $f(x) \leq 1/2$ és így ismét $f^k(x) \rightarrow p$.



1.4. ábra. A diszkrét logisztikus egyenlet pókhálódigramja $\mu = 1,5 \in (1, 2]$ -re

Ha $2 < \mu < 3$, akkor $p > 1/2$. Legyen $\bar{p} \in (0, 1/2)$ olyan, hogy $f(\bar{p}) = p$. Ha $x \leq \bar{p}$, akkor $f(x)$ monoton növekedése és $f(x) > x$ miatt, van olyan k , amelyre már $f^k(x) \in (\bar{p}, p]$. Ha $x > p$, akkor $f(x) < p$, és vagy $f(x) \in (\bar{p}, p]$, vagy $f(x) \leq \bar{p}$ esetén az



1.5. ábra. A diszkrét logisztikus egyenlet pókhálódigramja $\mu = 2,5 \in (2, 3)$ -ra

előzőek szerint előbb-utóbb ebben az esetben is eljutunk a $(\bar{p}, p]$ intervallumba. Most már csak az $(\bar{p}, p]$ -ből induló megoldásokat kell vizsgálni.

A 2-periodikus pontok még kiszámolhatóak, ehhez keressük az

$$f^2(x) = \mu(\mu x(1-x))(1-\mu x(1-x)).$$

leképezés 0-tól és p -től különböző fixpontjait. Az

$$x = \mu(\mu x(1-x))(1-\mu x(1-x))$$

egyenlet x -szel egyszerűsítve

$$1 = \mu^2(1-x)(1-\mu x(1-x))$$

adódik. Ennek az egyenletnek $p = 1 - \frac{1}{\mu}$ gyöke, osszunk a gyöktényezővel (pontosabban a gyöktényező μ -szörösével, mert akkor nem kell törtekkel számolni), és kapjuk, hogy

$$\mu^2 x^2 - (\mu^2 + \mu)x + (\mu + 1) = 0.$$

Ebből

$$x_{1,2} = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}.$$

A gyökök akkor lesznek valósak, ha $\mu^2 - 2\mu - 3 = (\mu + 1)(\mu - 3) \geq 0$, amiből $\mu \geq 3$ (a $\mu \leq -1$ esetet nem vizsgáljuk). Tehát lesz két 2-periodikus pont, logikusan ez a két pont alkot egy pályát. $\mu = 3$ esetén $x_1 = x_2 = p$.

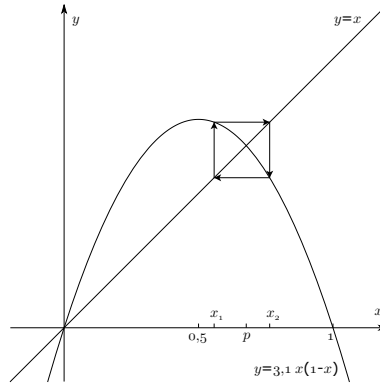
Belátjuk, hogy f^2 a $[\bar{p}, p]$ intervallumot az $[1/2, p]$ intervallumra képezi. Valóban, az f^2 függvény monoton növe az $[1/2, p]$ intervallumon, $f^2(p) = p$ és

$$g(\mu) = f^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu^2}{4} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right).$$

Ennek, mint μ függvényének a $(2, 3)$ intervallumba eső minimális értéke kiszámolható:

$$\left(\frac{\mu^2}{4} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right)\right)' = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) - \frac{\mu^2}{16} = -\frac{3\mu^2}{16} + \frac{\mu}{2}$$

a $\mu = 0$ és a $\mu = 8/3$ pontokban lesz 0, ott lehet szélsőértékhelye $g(\mu)$ -nek. A $8/3$ -ban lokális maximum van, tehát a $\mu = 2$ -nél vagy a $\mu = 3$ -nál lehet lokális minimum a $[2, 3]$ intervallumon. Behelyettesítve ezeket $g(2) = 1/2$, $g(3) = 9/16$, tehát $g(\mu) > 1/2$

1.6. ábra. A diszkrét logisztikus egyenlet pókhálódigramja $\mu = 3,1 > 3$ -ra

a $(2, 3)$ intervallumon. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az f^2 a $[\bar{p}, p]$ intervallumot az $[1/2, p]$ intervallumra képezi.

Ezek szerint minden megoldás előbb-utóbb bekerül az $[1/2, p]$ intervallumba. Az f^2 ezt az intervallumot (mint a $[\bar{p}, p]$ intervallum részét) is az $[1/2, p]$ intervallumba képezi, ott monoton növekvő, és felülről korlátos, tehát konvergens. Ahová konvergál, az f^2 fixpontja, f 2-periodikus pontja. De ilyen $\mu < 3$ -ra nincs, illetve csak a p fixpont felel meg ennek, tehát attól függően, hogy egy kezdőértékre mikor jutunk el először a $[\bar{p}, p]$ intervallumba vagy $f^{2k}(x)$ vagy $f^{2k+1}(x)$ konvergál p -hez. De f folytonossága és $f(p) = p$ miatt mindkét esetben igaz lesz, hogy $f^k(x) \rightarrow p$.

A 3-periodikus pályák már nem számolhatóak: nyolcadfokú egyenletet kapunk. A két fixpont ismeretében a fokszaót kettővel csökkenthetjük, így hatodfokú egyenletet kellene megoldani.

Mi történik $\mu > 4$ esetén? Ilyenkor az f függvény maximuma nagyobb, mint 1, így vannak olyan x pontok, amelyekre $f(x) > 1$, tehát $f^2(x) < 0$ és $f^k(x) \rightarrow -\infty$. Legyen

$$A_0 := \{x \in [0, 1] \mid f(x) > 1\}$$

Ez egy nyitott intervallum, szimmetrikus $1/2$ -re. Ha

$$A_1 := \{x \in [0, 1] \mid f(x) \in A_0\},$$

akkor minden $x \in A_1$ -re $f^2(x) > 1$, $f^3(x) < 0$ és $f^k(x) \rightarrow -\infty$. Folytatva ezt az eljárást, definiálva az

$$A_{j+1} := \{x \in [0, 1] \mid f(x) \in A_j\}$$

halmazt beláthatjuk, hogy minden $x \in A_j$ -ra $f^k(x) \rightarrow -\infty$. A „maradék pontok” a

$$\Lambda = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$$

halmazba esnek, és az ezekből induló pályák sorsáról nem tudunk semmit egyelőre. Mi ez a halmaz egyáltalán? A $[0, 1] \setminus A_0$ két részintervallumból áll elő: $I_0 = [0, a]$ és $I_1 = [1 - a, 1]$. Az I_0 -n f szigorúan monoton nő, I_1 -en szigorúan monoton csökken, és $f(I_0) = f(I_1) = [0, 1]$. Vagyis I_0 -ban és I_1 -ben is van egy-egy részintervallum, amelyet f A_0 -ba képez. Ennek a két részintervallumnak az uniója az A_1 . Most tekintsük a $[0, 1] \setminus (A_0 \cup A_1)$ halmazt, ami az eddigiek szerint négy zárt részintervallumból áll, amelyeket f monoton módon ráképez (tehát a leképezés szürjektív) vagy I_0 -ra vagy I_1 -re. Így f^2 mind a négy

zárt részintervallumot $[0, 1]$ -re képezi. Tehát mindegyikben van egy olyan részintervallum, amelynek képe f^2 mellett A_0 , és ezen részintervallumok uniója az A_2 . Vegyük észre, hogy a részintervallumokon az f^2 váltakozva nő illetve csökken, vagyis az f^2 -nek két lokális maximuma van a $[0, 1]$ intervallumban, amelynek értéke 1-nél nagyobb, illetve (a 0 és 1 végpontokat nem számítva) egy lokális minimuma, amelynek értéke negatív. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy A_k 2^k db diszjunkt nyílt intervallum uniójaként áll elő, így a

$$[0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^k A_j$$

halmaz 2^{k+1} zárt részintervallumból tevődik össze, mivel azokat

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

nyílt intervallum választja el egymástól. Ezen zárt részintervallumokon f^{k+1} szigorúan monoton, felváltva növekvő és csökkenő, tehát pontosan 2^k lokális maximuma van, amelyeknek értéke 1-nél nagyobb, illetve $2^k - 1$ lokális minimuma van, amelyeknek értéke negatív. Így az $f^{k+1}(x) = x$ egyenletnek pontosan 2^{k+1} megoldása kell legyen, vagyis az f -nek 2^{k+1} db $(k+1)$ -periodikus pályája van (persze $k+1$ nem feltétlenül az alap-periódusa ezeknek a pályáknak).

A Λ halmaz nagyon hasonlít a Cantor-halmaz konstrukciójához.

1.28. Példa („A” Cantor-halmaz). A $[0, 1]$ intervallumból vegyük ki a középső harmadát, az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyitott intervallumot. A fennmaradó zárt részintervallumokból is vegyük ki a középső harmadukat és így tovább. A Cantor-halmaz Jordan mértéke 0: az n -edik lépés után maradó intervallumok összhossza $(\frac{2}{3})^n$. Ez egy fraktál: egy halmaz, amelynek egy része hasonló az eredetihez. Például, a Cantor halmaz $[0, \frac{1}{3}]$ intervallumba eső része az $f(x) = 3x$ lineáris transzformációval átvihető a Cantor halmazba, de ezt akármilyen mélységben keletkező zárt részintervallummal meg lehet csinálni. A Cantor-halmaz a $[0, 1]$ intervallum azon pontjait tartalmazza, amelyek hármas számrendszerben felírhatóak a 0 és 2 számjegyekkel triadikus tört alakban. Éppen ezért a Cantor-halmaz számossága kontinuum, mert ha a 2-est kicseréljük 1-re és a számot kettes számrendszerbelinek tekintjük, akkor megkapjuk az összes $[0, 1]$ intervallumba eső számot.

1.29. Definíció. Egy halmaz teljesen nemösszefüggő, ha nem tartalmaz egyetlen részintervallumot sem.

1.30. Definíció. Egy halmaz tökéletes, ha minden pontja torlódási pont.

1.31. Definíció. Egy Cantor-halmaz egy teljesen nemösszefüggő, tökéletes, kompakt (korlátos és zárt) halmaz.

1.32. Tétel. „A” Cantor-halmaz egy Cantor-halmaz.

Bizonyítás. A Cantor-halmaz zártsága ugyanúgy bizonyítható, mint a fenti állításban. Ugyancsak könnyű belátni, hogy a Cantor halmaz nem tartalmaz egyetlen intervallumot sem: az k . lépés után a halmazban szereplő összes zárt intervallum hossza $\frac{1}{3^k}$, elég nagy k -ra ez rövidebb bármilyen intervallumnál, amit a Cantor-halmaz tartalmazhatna. A Cantor-halmaz konstrukciójából következik, hogy az pontosan azokat a 3-as számrendszerbeli (triadikus) törteket tartalmazza, amelyekben nincs 1-es számjegy ($0, 0\dot{2}_3 = 0, 1_3$). Az ilyen alakú q törtekhez könnyen konstruálunk Cantor-halmazbeli konvergencia sorozatot: $q \pm 2 \cdot 3^{-k}$ megfelelő lesz, ahol $+$ van, ha az k . triadikus jegy 0 és $-$, ha az 2. $\square$

A Cantor-halmaz megkonstruálható úgy is, hogy egy olyan f függvényt veszünk, ami a $(-\infty, \frac{1}{2}]$ intervallumon lineárisan nő, az $[\frac{1}{2}, \infty)$ intervallumon lineárisan csökken, $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = 1$ ($f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$), f sátor-leképezés, sátor-függvény). Alkalmazzuk ugyanazt az eljárást, mint a logisztikus rendszernél ezzel az f -fel, a Cantor-halmazt kapjuk, és a következő állítás bizonyításával belátható, hogy az egy Cantor-halmaz.

1.33. Tétel. Ha $\mu > 2 + \sqrt{5}$, akkor Λ egy Cantor-halmaz.

Bizonyítás. Mivel az A_k halmazok nyitottak, és

$$\Lambda = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$$

ezért Λ egy zárt halmaz és egy nyitott halmaz különbsége, tehát zárt. Az $f(x) = \mu x(1-x)$ függvény lefelé álló parabola, konkáv, és mivel $\mu > 4$, maximum értéke nagyobb, mint 1. Számoljuk ki hol veszi fel az 1 értéket. A

$$\mu x(1-x) = 1,$$

azaz

$$\mu x^2 - \mu x + 1 = 0$$

egyenletből kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}.$$

Számoljuk ki ezekben a pontokban az f' értékét:

$$f'(x_{1,2}) = \mu(1 - 2x_{1,2}) = \mu - \mu \mp \sqrt{\mu^2 - 4\mu} = \mp \sqrt{\mu^2 - 4\mu}$$

Szükségünk lesz arra, hogy $|f'(x)| > 1$ legyen az I_0 és I_1 intervallumokban (I_0 -ban nyilván 1-nél nagyobb, I_1 -ben 1-nél kisebb). Ehhez a konkávság miatt elegendő, ha $|f'(x_{1,2})| > 1$, amihez az kell, hogy $\mu^2 - 4\mu > 1$ legyen,

$$\mu_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5},$$

és mivel $\mu > 0$ -t tekintünk csak, ez pontosan $\mu > 2 + \sqrt{5}$ esetén teljesül. Ekkor $|f'(x)| \geq |f'(x_{1,2})| = \lambda > 1$. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint $|(f^k)'(x)| \geq \lambda^k$ teljesülni fog minden $x \in \Lambda$ esetén.

Először is belátjuk, hogy Λ nem tartalmaz egyetlen intervallumot sem. Tegyük fel indirekt, hogy mégis: $[x, y] \subseteq \Lambda$. Vegyük k -t elegendően nagyra ahhoz, hogy $\lambda^k(y-x) > 1$ legyen. A Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$|f^k(y) - f^k(x)| = |(f^k)'(a)| \cdot (y-x) \geq \lambda^k(y-x) > 1,$$

vagyis $f^k(y)$ és $f^k(x)$ valamelyike nem lehet benne a $[0, 1]$ intervallumban, tehát x és y valamelyike nincs benne Λ -ban, ellentmondás. Ezek szerint Λ teljesen nemösszefüggő.

A tökéletesség bizonyításához először is vegyük észre, hogy A_k végpontjai benne vannak Λ -ban: valóban, ezeket a pontokat f^{k+1} a 0 fixpontba képezi, és így minden k -ra $f^k(x)$ benne marad a $[0, 1]$ intervallumban. Ha egy $p \in \Lambda$ izolált pont lenne, akkor a p egy kis környezetében levő pontok mindegyike f iterálása során előbb-utóbb el kellene hogy hagyja a $[0, 1]$ intervallumot, tehát valamelyik A_k -ba kell essen. Két esetre bontjuk a problémát.

1. Ha ezen A_k -k végpontjainak van olyan sorozata, amelyik p -hez konvergál, akkor ellentmondásra jutunk azzal, hogy p izolált.
2. Ha ez nem teljesül, akkor A_k indexe korlátos kell, hogy maradjon egy elegendően kicsi környezetben (mondjuk $< k$), akkor $f^k(x)$ negatív lenne minden környezetbeli pontra, kivéve persze magát a p -t, amelyre akkor $f^k(p)$ -nek 0-nak kell lennie. Így f^k -nak lokális maximuma van p -ben: $(f^k)'(p) = 0$. Ez az összetett függvény deriválási szabálya szerint csak úgy lehet, ha $f'(f^i(p)) = 0$ teljesül valamilyen $i < k$ esetén, tehát $f^i(p) = \frac{1}{2}$, $f^{i+1}(p) > 1$ és $f^l(p) \rightarrow -\infty$ ($l \rightarrow \infty$), ami ellentmond annak, hogy $f^k(p) = 0$.

Ezzel beláttuk, hogy Λ tökéletes, és így egy Cantor-halmaz is. Az állítás igaz $\mu > 4$ -re is, de a bizonyítás nehezebb. $\square$

Ellenőrző kérdések:

- Hogyan határozható meg egy differenciaegyenlet 2-periodikus pályája?
- Mikor nevezünk egy halmazt teljesen nem-összefüggőnek?
- Hogyan kaphatjuk meg „A” Cantor-halmazt?

1.4. Topologikus ekvivalencia, bifurkációk

Gyakran előfordul, hogy két leképezésnek különböző a képlete, mégis hasonlóan viselkednek. Ezt a jelenséget vizsgáljuk ebben az alfejezetben.

1.34. Definíció. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezések C^0 -távolsága:

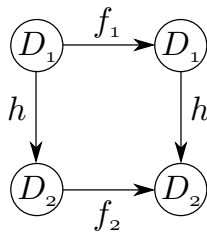
$$d_0(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|f(x) - g(x)|).$$

d_0 egy metrika a függvények terén.

1.35. Definíció. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ r -szer differenciálható leképezések C^r -távolsága:

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (\max \{|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|\}).$$

1.36. Definíció. Egy $f_1: D_1 \rightarrow D_1$ és egy $f_2: D_2 \rightarrow D_2$ dinamikus rendszer *topologikusan ekvivalens*, ha van olyan homeomorfizmus $h: D_1 \rightarrow D_2$, hogy $h(f_1(m)) = f_2(h(m))$ teljesül minden $m \in D_1$ -re.



1.7. ábra. Kommutatív diagram: mindegy, hogy előbb f_1 -et, aztán h -t, vagy előbb h -t, aztán f_2 -t alkalmazzuk $m \in D_1$ -re

Topologikusan ekvivalens dinamikus rendszerek teljesen hasonló módon viselkednek: h egy olyan összefüggést ad a két tér között, ami fixpontokat fixpontba, periodikus pontokat ugyanolyan periódusú periodikus pontba visz, $h(W^s(m)) = W^s(h(m))$, stb.

1.37. Definíció. Egy f dinamikus rendszer C^r -strukturálisan stabil, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden g dinamikus rendszer, amelyre $d_r(f, g) < \varepsilon$, g topologikusan ekvivalens f -fel.

Ha nem mondjuk ki, akkor a strukturálisan stabilitás alatt C^1 -strukturális stabilitást értünk.

1.38. Példa. $L(x) = \frac{1}{2}x$ C^1 -strukturálisan stabil $\mathbb{R}$ -en. Legyen $\varepsilon < \frac{1}{2}$, ekkor $d_1(L, g) < \varepsilon$ -ből következik, hogy $g'(x) \in (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon) \subset (0, 1)$, tehát szigorúan monoton növekvő, így invertálható. Sőt, mivel g szigorú kontrakció, g -nek létezik pontosan egy fixpontja, és ahhoz tart az összes iteráció. Nyilván ezeknek teljesülnie kell, hiszen L is ilyen.

1.39. Definíció. Az *alaptartomány* egy olyan részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek, hogy minden trajektória pontosan egyszer lép be ebbe a halmazba.

Mivel most L és g is invertálható, az L^{-k} és a g^{-k} iterációkat is tekintjük. L alaptartományának bármilyen $A_L = [-2a, -a] \cup \{0\} \cup (a, 2a]$ alakú halmaz megfelel $a > 0$ -ra. g alaptartománya lehet például a $A_g = [-2a, g(-2a)) \cup \{p\} \cup (g(2a), 2a]$ halmaz, ahol p a g fixpontja, és a $(-2a, 2a)$ intervallumba esik. Az alapötlet, hogyha az alaptartományok között meg tudjuk valósítani a topologikus ekvivalenciát, akkor az összes többi pontra az kiterjeszthető az iteráció segítségével. Másrészt az alaptartományok között bármilyen szigorúan növekvő folytonos leképezés megteszi, hiszen nem juthatunk ellentmondásra: minden trajektória csak egyszer jár ezekben. Legyen tehát h olyan szigorúan monoton növekvő lineáris leképezés, ami $(a, 2a]$ -t $(g(2a), 2a]$ -ba viszi, illetve monoton növekvő lineáris a $[-2a, -a]$ intervallumon, ami azt a $[-2a, g(-2a))$ -ba viszi, vagyis $h(2a) = 2a$ és $h(-2a) = -2a$, és nyilván $h(0) = p$. h -t kiterjesztjük az egész számegyenesre a következő módon: ha $x \neq 0$, akkor pontosan egy $k \in \mathbb{Z}$ -re fog teljesülni, hogy $L^k(x) \in A_L$, és legyen $h(x) = g^{-k} \circ h \circ L^k(x)$, aminek így van már értelme. Ezzel h -t az egész számegyenesen definiáltuk. h -nek az alaptartományon való folytonosságából és monoton növekedéséből következik, hogy $h(a) = g(2a)$, tehát a kiterjesztett h folytonos lesz minden „töréspontban”. A 0-ban pedig a fixpontok stabilitásából következik a folytonosság: ha $x \approx 0$, akkor h kiterjesztésének a definíciójában szereplő k egy nagy abszolút értékű negatív szám, $h \circ L^k(x) \in A_g$, és g fixpontjának attraktivitása miatt $g^{-k} \circ h \circ L^k(x)$ már közel lesz g fixpontjához. Világos, hogy ha x helyett $L(x)$ -re alkalmazzuk a fenti definíciót, akkor

$$h \circ L(x) = h(L(x)) = g^{-(k-1)} \circ h \circ L^{k-1}(L(x)) = g \circ g^{-k} \circ h \circ L^k(x) = g \circ h(x)$$

teljesül minden $x \neq 0$ -ra ($x = 0$ -ra ugyanez triviális), tehát a kiterjesztett h valóban egy topologikus ekvivalenciát ad az L és g között.

Ebből is látszik, hogy a topologikus ekvivalencia definíciójában nem használhatunk diffeomorfizmust. Ha h diffeomorfizmus lenne, akkor a $g = h \circ f \circ h^{-1}$ összefüggés szerint, ha p fixpontja f -nek, akkor $h(p)$ fixpontja lesz g -nek, így

$$g'(h(p)) = h'(f(h^{-1}(h(p)))) \cdot f'(h^{-1}(h(p))) \cdot (h^{-1})'(h(p)) = h'(p) \cdot f'(p) \cdot \frac{1}{h'(p)} = f'(p)$$

lenne, márpedig a fenti példában sem teljesül, hogy L és g deriváltjai a megfelelő fixpontokban ugyanazok lennének.

Konkrét esetben számoljunk ki egy ilyen h -t. Legyen $g(x) = \frac{1}{4}x$. Melyik az a h , amelyik topologikus ekvivalenciát ad L és g között? Teljesülnie kell a

$$h \circ L(x) = g \circ h(x)$$

egyenlőségnek, azaz

$$h\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{4}h(x).$$

Kis kísérletezés után rájöhettünk, hogy a $h(x) = x^2$ megfelelő lesz:

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$$

De mégsem jó, mert nem invertálható, úgyhogy ehelyett vegyük a

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt, amely már valóban megfelelő lesz. Látszik, hogy az együttthatótól függ a h -ban x hatványa: $g(x) = \lambda x$ ($\lambda \in (0, 1)$) esetén $h(x) = |x|^{\log_{1/2} \lambda} \operatorname{sgn} x$ lesz jó. Nem egyszerű függvény, általában nem egyszerű megfelelő h -t találni.

1.40. Definíció. Egy p fixpontja f -nek *lokálisan C^r -strukturálisan stabil*, ha van olyan U környezete p -nek és $\varepsilon > 0$, hogy minden g dinamikus rendszerre, amelyre $d_r(f, g) < \varepsilon$, teljesül, hogy g lokálisan topologikusan ekvivalens f -fel U -n, tehát létezik egy U -n értelmezett h homeomorfizmus, amelyre $g \circ h(x) = h \circ f(x)$ minden $x \in U$ esetén, ahol annak van értelme.

1.41. Tétel. Legyen p hiperbolikus fixpontja f -nek, $f'(p) = \lambda \neq 0$. Ekkor van olyan U környezete p -nek, hogy f lokálisan topologikusan ekvivalens $L(x) = \lambda x$ -szel U -n.

Bizonyítás. A $\lambda = 0$ esetet ki kell zárunk:

1. ha $f(x) \equiv 0$, akkor $f^1(x) = 0$ minden x -re;
2. ha $f(x) = x^3$, akkor $f^k(x) \rightarrow 0$ az $x \in (-1, 1)$ intervallumban, $|x| > 1$ esetén pedig x előjelétől függően divergál a $+\infty$ -be vagy a $-\infty$ -be.

Mindkét esetben $f'(0) = 0$, és ezek a leképezések megfelelően kis U környezetben C^1 -közel vannak egymáshoz, de nyilván nem topologikusan ekvivalensek, hiszen teljesen más a dinamikájuk.

Különben a bizonyítás ugyanúgy megy, mint az $L(x) = \frac{1}{2}x$ esetén: $\varepsilon > 0$ legyen kisebb, mint $\min\{|\lambda|, |1 - \lambda|, |1 + \lambda|\}$, p -nek vegyük azt a környezetét, amelyben $|f'(x) - \lambda| < \varepsilon$, alaptartományt definiálunk, és definiáljuk a topologikus ekvivalenciát biztosító h -t. $\square$

A strukturálisan stabil rendszerek a „jók”: a modellezésnél elhanyagolt elegendően kicsi behatások nem befolyásolják a végeredményt.

1.42. Definíció. Ha egy dinamikus rendszer egy paramétertől függ, és a paraméter egy adott értékénél a paraméter változtatásával a rendszer trajektóriái lényegesen megváltoznak (nem C^1 -strukturálisan stabil), akkor *bifurkáció* történik.

A bifurkációknak sok típusa van, a következő példákban ezek közül látunk néhányat.

1.43. Példa. Vizsgáljuk az

$$F(x) = x - x^2$$

leképezést. Az

$$x - x^2 = x$$

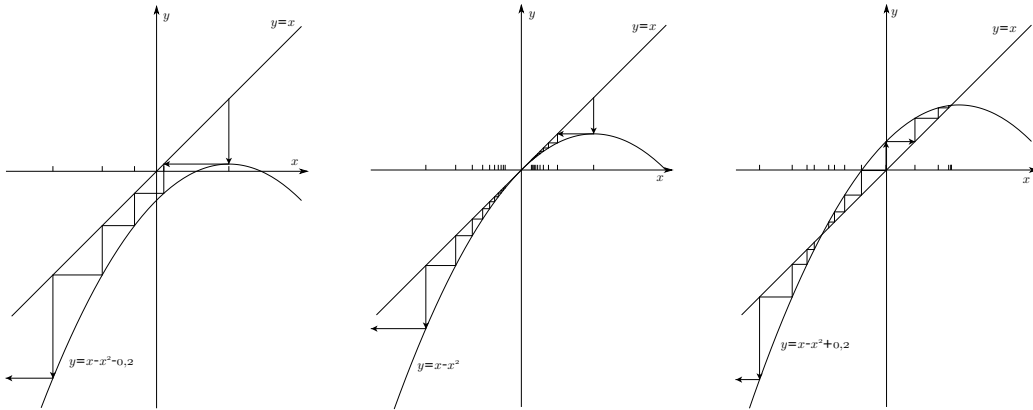
egyenlőség megoldásával megkapjuk az egyetlen fixpontot, $x = 0$ -t. Mivel $F'(x) = 1 - 2x$, amely a 0-ban az $F'(0) = 1$ értéket veszi fel, adódik, hogy a 0 az egyetlen fixpont és az nem hiperbolikus. Legyen $F_\varepsilon(x) = x - x^2 + \varepsilon$, ez C^r -közel van F -hez bármilyen r -re. Nyilván, ha $\varepsilon > 0$, akkor F_ε -nak két fixpontja van, hiszen az

$$x - x^2 + \varepsilon = x$$

egyenlet két megoldása

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon}.$$

Ha viszont $\varepsilon < 0$, akkor F_ε -nak nincs fixpontja. F így nyilván nem lehet strukturálisan stabil, hiszen nem ugyanaz a dinamikája, mint bármelyik fentinek.



1.8. ábra. Pókhálódíagram $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$ -ra

Vizsgáljuk most az F'_ε fixpontjainak stabilitását:

$$F'_\varepsilon(x) = 1 - 2x,$$

alapján

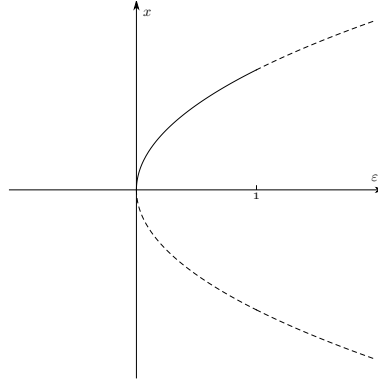
$$F'_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon},$$

ami akkor és csak akkor esik a $(-1, 1)$ intervallumba, ha $\varepsilon \in (0, 1)$, illetve

$$F'_\varepsilon(-\sqrt{\varepsilon}) = 1 + 2\sqrt{\varepsilon},$$

ami nem $(-1, 1)$ -beli, ha $\varepsilon \geq 0$.

Tehát az ε paraméter növelésével, a 0 kritikus értéknél egy aszimptotikusan stabil és egy instabil fixpont keletkezik. Ezt nyereg–csomó bifurkációnak nevezzük.

1.9. ábra. Fixpontok $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ -re

1.44. Példa. Tekintsük a

$$T_\mu(x) = x^3 - \mu x$$

leképezést.

A T_μ leképezés fixpontjait az

$$x^3 - \mu x = x$$

egyenlet megoldásával kaphatjuk. Az egyenletet átalakítva

$$x(x^2 - (\mu + 1)) = 0$$

adódik. Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát

$$x = 0$$

vagy

$$x^2 = \mu + 1,$$

ahonnan

$$x = \pm\sqrt{\mu + 1}, \quad \text{ha } \mu > -1.$$

Határozzuk meg a fixpontok stabilitási tulajdonságait:

$$T'_\mu(x) = 3x^2 - \mu$$

alapján

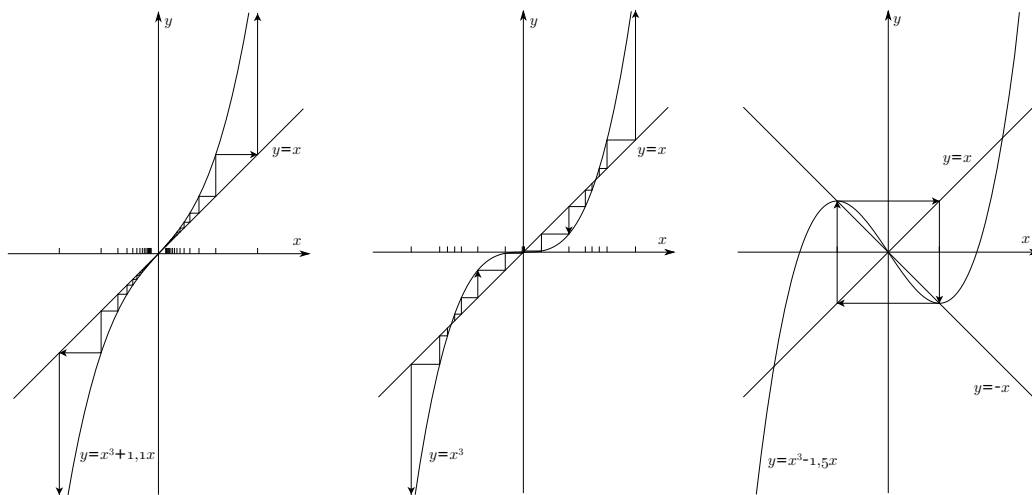
$$T'_\mu(0) = -\mu,$$

ami akkor és csak akkor esik a $(-1, 1)$ intervallumba, ha $\mu \in (-1, 1)$, illetve

$$T'_\mu(\pm\sqrt{\mu + 1}) = 3(\mu + 1) - \mu = 2\mu + 3,$$

amely nem a $(-1, 1)$ intervallumba esik, ha $\mu > -1$.

A μ paraméter növelésével, a -1 kritikus értéknél a 0 fixpont aszimptotikusan stabillá válik és megjelenik körülötte két instabil fixpont. Ezt vasvilla-bifurkációnak nevezik. $\mu > 1$ -re viszont van olyan $x_1 \in [0, \sqrt{\mu + 1}]$, amelyre $T_\mu(x_1) = -x_1$ és mivel T_μ páratlan függvény, ezért $T_\mu(-x_1) = x_1$. Vagyis x_1 és $x_2 = -x_1$ egy 2-periodikus pálya, ami nem volt $\mu \leq 1$ -re. Tehát T_1 is C^1 -strukturálisan instabil.

1.10. ábra. Pókhálódiaagram $\mu < -1$, $\mu = 0$, $\mu > 1$ -re

Határozzuk meg ezt a 2-periodikus pályát, oldjuk meg az

$$x^3 - \mu x = -x$$

egyenletet. Rendezéssel és kiemeléssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^3 - (\mu - 1)x &= 0, \\ x(x^2 - (\mu - 1)) &= 0. \end{aligned}$$

$x \neq 0$, ezért csak a második tényező lehet 0:

$$x^2 = \mu - 1,$$

ahonnan

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu - 1}.$$

Vizsgáljuk ennek a stabilitását, deriváljuk a leképezés második iteráltját:

$$(T_\mu^2)'(x_{1,2}) = T_\mu'(T_\mu(x_{1,2}))T_\mu'(x_{1,2}) = T_\mu'(x_1)T_\mu'(x_2) = (3(\mu - 1) - \mu)^2.$$

A 2-periodikus pálya aszimptotikusan stabil, ha

$$(3(\mu - 1) - \mu)^2 \in (-1, 1).$$

Oldjuk meg a tartalmazást, vonjunk gyököt:

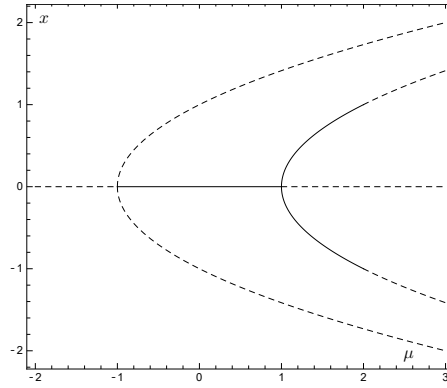
$$3(\mu - 1) - \mu = 2\mu - 3 \in (-1, 1),$$

fejezzük ki μ -t:

$$2\mu \in (2, 4),$$

azaz

$$\mu \in (1, 2).$$

1.11. ábra. Fixpontok és 2-periodikus pontok $-2 \leq \mu \leq 3$ -ra

A μ paraméter növelésével, az 1 kritikus értéknél a 0 fixpont újra instabillá válik és megjelenik körülötte egy aszimptotikusan stabil 2-periodikus pálya. Ezt periódusduplikációnak nevezik.

Probléma: a μ változtatásával a T_μ -k az egész számegegyenesen nincsenek C^1 -közel egymáshoz: tetszőleges μ_1, μ_2 -re a $\sup_{x \in \mathbb{R}} (|T_{\mu_1}(x) - T_{\mu_2}(x)|) = \infty$, de véges intervallumon ez a szuprénum is véges (sőt, „kicsi”). Ezért itt csak lokális topologikus ekvivalenciáról lehet beszélni.

1.45. Példa. A logisztikus leképezés a $\mu = 3$ értéknél bifurkálódik. Ugyanis, ha $\mu \in (1, 3)$, akkor a $(0, 1)$ intervallumból induló trajektóriák $1 - \frac{1}{\mu}$ -hez, a $(-\infty, 0)$ és az $(1, \infty)$ intervallumból indulók $-\infty$ -be tartanak. $\mu = 3$ -nál periódusduplikáció történik: egy stabil fixpont instabillá válik, és megjelenik egy 2-periodikus pálya. Valóban:

$$f'(p) = f'\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu < -1, \quad \text{ha } \mu > 3,$$

tehát p instabil. Korábban kiszámoltuk, hogy a 2-periodikus pontok a következők:

$$x_{1,2} = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}.$$

Ebben az esetben

$$\begin{aligned} (f^2)'(x_{1,2}) &= f'(f(x_{1,2})) \cdot f'(x_{1,2}) = f'(x_1) \cdot f'(x_2) \\ &= \left(\mu - \left(\mu + 1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}\right)\right) \cdot \left(\mu - \left(\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}\right)\right) \\ &= \left(-1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}\right) \cdot \left(-1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}\right) \\ &= 1 - \mu^2 + 2\mu + 3 = 5 - (\mu - 1)^2 \end{aligned}$$

A 2-periodikus pálya aszimptotikusan stabil, ha

$$5 - (\mu - 1)^2 \in (-1, 1).$$

Vonjunk ki 5-öt és szorozzunk -1 -gyel:

$$-(\mu - 1)^2 \in (-6, -4),$$

vagyis

$$(\mu - 1)^2 \in (4, 6),$$

ahonnan gyökvonással

$$\mu - 1 \in (-\sqrt{6}, -2) \cup (2, \sqrt{6}),$$

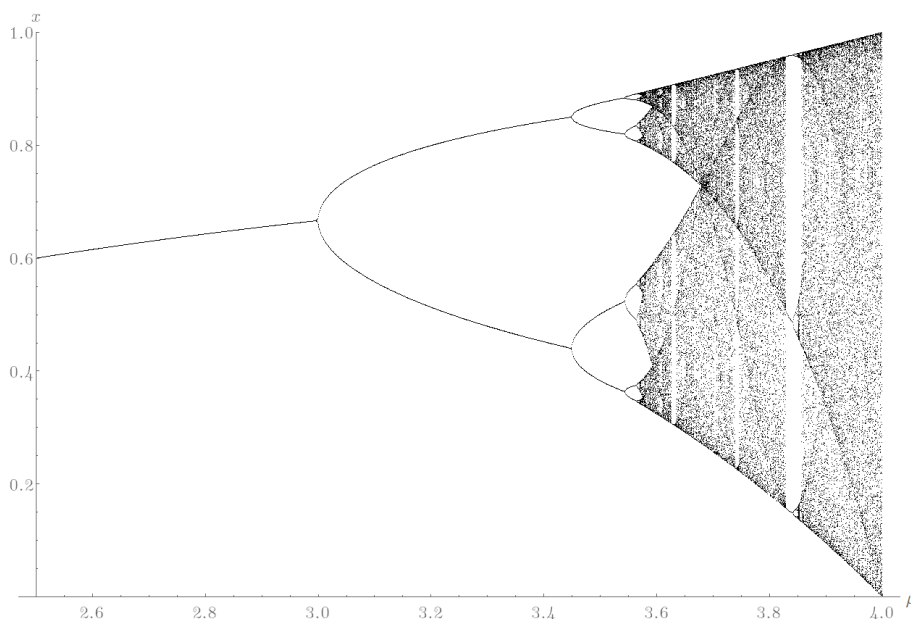
azaz

$$\mu \in (1 - \sqrt{6}, -1) \cup (3, 1 + \sqrt{6})$$

adódik. $\mu > 0$, tehát $\mu \in (3, 1 + \sqrt{6})$ esetben aszimptotikusan stabil a 2-periodikus pálya, $\mu > 1 + \sqrt{6}$ esetén instabil.

Numerikus számolással kideríthető, hogy f^2 -nek $(1 + \sqrt{6})$ -nál szintén duplikálódik a periódusa, ott az eredeti f -nek 4-periodikus megoldásai keletkeznek, és ez folytatódik tovább is.

Mikor történhet egyáltalán periódusduplikáció? Tegyük fel, hogy egy $F: I \rightarrow I$ leképezés a μ paramétertől úgy függ, hogy a μ_0 értéknél periódusduplikáció lép fel, vagyis $F(p) = p$ a $\mu = \mu_0$ értéknél, és két 2-periodikus pont keletkezik μ_0 -nál: $p_{\pm}(\mu_0) = p$, $\mu > \mu_0$ esetén $p_{-}(\mu) < p_{+}(\mu)$, és $F(p_{\mp}(\mu)) = p_{\pm}(\mu)$. A folytonosságból következik, hogy $[p_{-}(\mu), p_{+}(\mu)] \subseteq F([p_{-}(\mu), p_{+}(\mu)])$. Felhasználva, hogy $F(p_{\mp}(\mu)) = p_{\pm}(\mu)$ kapjuk, hogy van egy $p(\mu)$ fixpont $\mu > \mu_0$ esetén is, illetve a Lagrange-féle közéértéktétel szerint van olyan pont a $(p_{-}(\mu), p_{+}(\mu))$ intervallumban, ahol $F' = -1$. A C^1 -közelség miatt, ha $\mu \rightarrow \mu_0$, akkor $F'(p) = -1$.



1.12. ábra. A diszkrét logisztikus egyenlet stabil periodikus pontjai $2,5 \leq \mu \leq 4$ esetén. Ezt az ábrát Feigenbaum-diagramnak nevezzük

Ellenőrző kérdések:

- Mi a C^r -távolság definíciója?
- Mikor mondjuk, hogy két dinamikus rendszer topologikusan ekvivalens?
- Mi a strukturális stabilitás definíciója?

1.5. Káosz

Edward Lorenz amerikai matematikus és meteorológus 1960-ban számítógépes időjárás-modelljét vizsgálva azt figyelte meg, hogy a kezdeti feltételek kis megváltoztatása a későbbiekben hatalmas változásokat eredményezhet az időjárásban. Tőle ered a káosz egyik közismert megfogalmazása, mely szerint egy pillangó egyetlen szárnycsapása a Föld egyik oldalán tornádót idézhet elő a másikon.

A káoszt matematikai precizitással definiálni nem egyszerű, több megközelítés lehetséges. Ebben az alfejezetben ezek közül mutatunk egyet.

Innentől legyen újra $n \geq 1$ tetszőleges.

1.46. Definíció. Egy $f: D \rightarrow D$ dinamikus rendszer *érzékenyen függ a kezdeti feltételektől*, ha van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy minden $x \in D$ -re és $\varepsilon > 0$ -ra van olyan $y \in D$ és $k \in \mathbb{N}$, hogy $d(x, y) < \varepsilon$ és $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$.

1.47. Példa. $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \mu x$ ($\mu > 1$) érzékenyen függ a kezdeti feltételektől (nyilván $f^k(x) = \mu^k x$, $|f^k(x) - f^k(y)| = \mu^k |x - y| \rightarrow \infty$). De nem kaotikus, mert minden pálya egyszerűen divergál ∞ -be.

1.48. Definíció. Egy $f: D \rightarrow D$ dinamikus rendszer *topologikusan tranzitív*, ha minden $U, V \subseteq D$ nyílt halmazra van olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

1.49. Tétel. *Ha egy dinamikus rendszernek van sűrű pályája, akkor topologikusan tranzitív.*

Bizonyítás. Legyen $f^k(x)$ egy sűrű pálya D -ben, és legyenek adva $U, V \subseteq D$ nyílt halmazok. Mivel a pálya sűrű D -ben, létezik egy olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $f^k(x) \in U$ és egy olyan $l > k$, amelyre pedig $f^l(x) \in V$. Ekkor az $y = f^k(x) \in U$ pontra

$$f^{l-k}(y) = f^{l-k}(f^k(x)) = f^l(x) \in V$$

és $f^{l-k}(y) \in f^{l-k}(U)$, tehát $f^{l-k}(U) \cap V \neq \emptyset$. □

1.50. Tétel. *Ha D véges és f topologikusan tranzitív, akkor D -ben egyetlen periodikus pálya van.*

Bizonyítás. Legyen $x \in D$. Mivel D véges, ezért a pálya előbb-utóbb periodikussá kell váljon; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy x -et már eleve úgy választottuk, hogy a pályája periodikus. Ha nem igaz az állítás, akkor van olyan $y \in D$, ami nincs rajta x pályáján. y és x pályájának távolsága pozitív, hiszen a pálya csak véges sok pontot tartalmaz és y nincs rajta a pályán. Így található x pályájának és y -nak olyan U és V környezete, amelyik nem metszi egymást és U -ban x pályáján kívül nincs más pont. Ez viszont azt jelenti, hogy mivel $f(U) \subseteq U$, $f^k(U) \subseteq U$ sem metszi soha V -t, ami ellentmond annak, hogy f topologikusan tranzitív lenne. □

A káosz definíciójának olyannak kell lennie, amelyet a topologikus ekvivalencia is „átvisz” a másik rendszerre, tehát egy kaotikus rendszerrel topologikusan ekvivalens másik rendszer is kaotikus kell legyen.

A kezdeti feltételektől való érzékeny függéssel baj van, mert azt nem őrzi meg a topologikus ekvivalencia. Valóban a fenti példában legyen $h(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor $f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f_2(x) = \frac{1}{\mu}x$ ezzel a h -vel topologikusan ekvivalens lesz az $f(x) = \mu x$ dinamikus rendszerrel. De míg f érzékenyen függ a kezdeti feltételektől, addig f_2 nyilván nem: $f_2^k(x) \rightarrow 0$ minden x -re. Ezért a káoszra egy másik definíciót használunk.

1.51. Definíció. Egy $f: D \rightarrow D$ dinamikus rendszer *kaotikusan* viselkedik, ha f folytonos, D végtelen halmaz, f topologikusan tranzitív és f periodikus pályái sűrűn vannak D -ben.

Ez a definíciója a kaotikus viselkedésnek, azon kívül, hogy a topologikus ekvivalencia mellett is megmarad, továbbra is teljesíti a kaotikusság fenti intuitív módon természetes tulajdonságát, ugyanis belátható a következő eredmény.

1.52. Tétel. Ha f kaotikus, akkor érzékenyen függ a kezdeti feltételektől.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in D$ -hez van olyan periodikus pont, amelynek pályája legalább 4δ távolságra van x -től. Valóban, legyen q_1 és q_2 két különböző pályával rendelkező periodikus pont (ilyen van, mert D végtelen, és a periodikus pályák sűrűn vannak D -ben). Ezek távolsága legyen nagyobb, mint 8δ (válasszuk így a δ -t). A háromszög-egyenlőtlenség szerint bármilyen x -re x távolsága legalább az egyik pályától nagyobb lesz, mint 4δ .

Legyen $x \in D$, q egy periodikus pont, amelynek pályája több, mint 4δ távolságra van x -től, és $\varepsilon \in (0, \delta)$ tetszőleges. Mivel a periodikus pályák sűrűn vannak D -ben, ezért található egy m -periodikus p pont az x ε sugarú környezetében: $p \in B_\varepsilon(x)$.

Az f folytonos, ezért van olyan $\gamma > 0$, hogy a q pont γ sugarú környezetéből induló pályák q pályájának δ sugarú környezetében maradnak $m-1$ iteráción keresztül. A topologikus tranzitivitás miatt van olyan $y \in B_\varepsilon(x)$ pont, amelyre $f^k(y) \in B_\gamma(q)$ valamilyen k -ra, és így $f^{k+j}(y) \in B_\delta(f^j(q))$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$). Vegyük azt a j -t, amelyre $k+j$ osztható m -el. Ekkor felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget és azt, hogy $f^{k+j}(p) = p$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 4\delta &< d(x, f^j(q)) \leq d(x, p) + d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(y)) + d(f^{k+j}(y), f^j(q)) \\ &< \varepsilon + d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(y)) + \delta < 2\delta + d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(y)), \end{aligned}$$

amiből

$$2\delta < d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(y)) \leq d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(x)) + d(f^{k+j}(x), f^{k+j}(y)).$$

Tehát vagy $d(f^{k+j}(p), f^{k+j}(x)) > \delta$ vagy $d(f^{k+j}(x), f^{k+j}(y)) > \delta$. Mivel $y \in B_\varepsilon(x)$ és $p \in B_\varepsilon(x)$ és ε tetszőleges volt, ezért ez pontosan a kezdeti feltételektől való érzékenyen függést jelenti. $\square$

1.53. Példa. Tekintsük a $T(x) = 1 - |2x - 1|$ sátor-leképezést. Az ez által generált diszkrét dinamikai rendszer kaotikusan viselkedik. Valóban:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Teljes indukcióval belátható, hogy $k \geq 1$, $j \in \{0, \dots, 2^{k-1} - 1\}$ -re

$$T^k(x) = \begin{cases} 2^k x - 2j, & \text{ha } \frac{2j}{2^k} \leq x \leq \frac{2j+1}{2^k} \\ 2(j+1) - 2^k x, & \text{ha } \frac{2j+1}{2^k} \leq x \leq \frac{2j+2}{2^k}. \end{cases}$$

Ebből az is következik, hogy az $I_{k,j} = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$ intervallumot a T^k a $[0, 1]$ intervallumra képezi, így annak pontosan egy fixpontja van ebben az intervallumban, tehát a periodikus pontok sűrűn vannak a $[0, 1]$ -ben. Ezen kívül, bármilyen x -re és $\varepsilon > 0$ -ra található olyan k és j , hogy $I_{k,j} \subset B_\varepsilon(x)$, tehát $T^k(B_\varepsilon(x)) = [0, 1]$, a T topologikusan tranzitív, ebből következően kaotikus is. Nem nehéz azt sem belátni közvetlen módon, hogy T érzékenyen függ a kezdeti feltételektől.

1.54. Példa. Az $f(x) = 4x(1 - x)$ logisztikus leképezés kaotikusan viselkedik. Belátjuk, hogy a T és az f topologikusan ekvivalensek, és akkor az ekvivalenciából és T kaotikuságából következik az állítás. Legyen $h(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2$. A $[0, 1]$ intervallumon ez egy monoton növekvő, folytonos függvény, tehát homeomorfizmus. A $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon:

$$(h \circ T)(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi T(x)}{2}\right)\right)^2 = \left(\sin\left(\frac{\pi 2x}{2}\right)\right)^2 = (\sin(\pi x))^2.$$

Az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumon:

$$(h \circ T)(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi T(x)}{2}\right)\right)^2 = \left(\sin\left(\frac{\pi(2-2x)}{2}\right)\right)^2 = (\sin(\pi - \pi x))^2 = (\sin(\pi x))^2.$$

Másrészt

$$(f \circ h)(x) = 4 \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 \left(1 - \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2\right) = \left(2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 = (\sin(\pi x))^2.$$

Ezzel beláttuk a topologikus ekvivalenciát és f kaotikus viselkedését is.

Ellenőrző kérdések:

- Mikor mondjuk, hogy egy dinamikus rendszer érzékenyen függ a kezdeti feltételektől?
- Mi a topologikus tranzitivitás definíciója?
- Mi következik abból, ha egy dinamikus rendszernek van sűrű pályája?

2. fejezet

A körvonal leképezései

A körvonal leképezései – a körvonal korlátossága miatt – különböznek az $\mathbb{R}$ leképezéseitől.

Az egyszerűség kedvéért az S^1 körvonal irányítástartó diffeomorfizmusával foglalkozunk, azaz olyan $f: S^1 \rightarrow S^1$ diffeomorfizmusokkal, amelyek megtartják a körvonal pontjainak rendezését.

Definiáljuk a $h: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ leképezést, ahol

$$h(x) = \exp(2\pi i x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x).$$

A h leképezés a valós számok halmazát „feltekeri” az S^1 körvonalra.

2.1. Példa. Legyen $f(\phi) = 2\phi$. Ekkor az n -periodikus pontok az $(2^n - 1)$ -edik egységgyökök.

2.2. Példa. Tekintsük az α szögű forgatást mint leképezést: $f(\phi) = \phi + \alpha$. Ha α/π racionális, akkor minden pont pályája periodikus ($\alpha = 2l\pi$ esetben fixpont). Ha α/π irracionális, akkor minden pont pályája sűrű az S_1 -en.

2.3. Példa. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is adunk meg valahány számjegyet, van egy olyan k , amelyre 2^k azokkal a számjegyekkel kezdődik.

Legyen l az a pozitív egész szám, amelynek számjegyeivel kellene kezdődnie valamelyik 2^k alakú számnak, vagyis teljesülnie kellene a

$$l \cdot 10^m \leq 2^k < (l + 1) \cdot 10^m$$

egyenlőtlenségnek valamilyen m -re és k -ra. Ezzel ekvivalens a

$$0 \leq \{\lg l\} \leq \{k \lg 2\} = k \lg 2 - [\lg l] - m < \lg(l + 1) - [\lg l] \leq 1$$

egyenlőtlenség, ami a fenti példát figyelembe véve adhatja azt az ötletet, hogy S_1 -en ábrázoljuk az $k \lg 2$ (a $\lg 2$ ívhosszú lépésekkel kapott) pontsorozatot. A $\lg 2$ irracionális, mert ha $\lg 2 = p/q$ lenne, akkor $2^q = 10^p$ is teljesülne, ami nyilvánvalóan nem igaz. Következésképpen az $k \lg 2$ pálya sűrű S_1 -en, vagyis van olyan k , amelyre $k \lg 2$ az S_1 -en ábrázolt $[\lg l, \lg(l + 1))$ intervallumba esik, ami a fenti egyenlőtlenség szerint pontosan azt jelenti, hogy a 2^k az l szám számjegyeivel kezdődik.

2.4. Definíció. Az $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést az $f: S^1 \rightarrow S^1$ leképezés felemeltjének nevezzük, ha

$$h \circ F = f \circ h$$

teljesül. Megjegyezzük, hogy h nem ad topologikus ekvivalenciát F és f között, mivel nem injektív.

2.5. Példa. Jelölje $\tau_\phi(\alpha)$ a $2\pi\phi$ szöggel való forgatást, azaz $\tau_\phi(\alpha) = \alpha + 2\pi\phi$. Tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ esetén a $T_{\phi,k}(x) = x + \phi + k$ a τ_ϕ leképezés felemeltje. Hasonlóan, ha $f(\phi) = \phi + \varepsilon \sin \phi$, akkor $F_{\varepsilon,k}(x) = x + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) + k$ az f felemeltje.

2.6. Megjegyzés.

1. Tetszőleges $f: S^1 \rightarrow S^1$ leképezésnek végtelen sok különböző felemeltje van, azonban megmutatható, hogy ezek csak egy egész számban különböznek. Tehát a k index elhagyható.
2. A fenti példákban a körvonal leképezései és felemeltjeik között hasonlóság tapasztalható. Fontos kiemelnünk, hogy ezek a leképezések különböző tereken vannak értelmezve, így azt várhatjuk, hogy dinamikájuk igencsak eltér. Valóban, ha ω racionális, akkor S^1 összes pontja periodikus τ_ω mellett, viszont T_ω mellett $\mathbb{R}$ egyetlen pontja sem periodikus (kivéve, ha $\omega = 0$).
3. Ha F az f egy felemeltje, akkor $F'(x) > 0$ -nak kell teljesülnie, vagyis F növekvő. Továbbá teljesülnie kell annak, hogy $F(x+1) = F(x)+1$, és általánosabban, $F(x+k) = F(x) + k$ tetszőleges k egészre. Hangsúlyozzuk, hogy mindez abból következik, hogy f irányítástartó diffeomorfizmus a körön. Más típusú leképezések felemeltjét is definiálhatjuk, azonban az előbbi tulajdonság ekkor nem feltétlenül fog teljesülni. Következésképpen,

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) - x$$

és így $F - \text{id}$ 1-periodikus függvény. Hasonlóan, $F^n - \text{id}$ is 1-periodikus, mivel F^n az f^n felemeltje. Ezt felhasználva könnyen beláthatjuk, hogy ha $|x - y| < 1$, akkor $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$.

Az ún. rotációs szám, amely 0 és 1 közé esik, a körvonal leképezéseinek esetén lényegében azt mutatja meg, hogy a leképezés iterálásával átlagosan mennyivel forgatjuk el a körvonal pontjait. Mielőtt ennek a számnak a pontos definícióját megadnánk, szükségünk lesz további eszközökre.

Legyen $f: S^1 \rightarrow S^1$ egy irányítástartó diffeomorfizmus, F pedig f tetszőleges felemeltje. Defináljuk a

$$\rho_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

határértéket, amely független x választásától, ugyanis, mivel $F^n - \text{id}$ periodikus,

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq |(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| + |x - y| \leq 1 + |x - y|$$

adódik, ahol a második egyenlőtlenség a 2.6. Megjegyzés 2. pontjából következik. Innen kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x) - F^n(y)|}{n} = 0,$$

vagyis ρ_0 valóban független x választásától, azonban nem független az F felemelt választásától.

2.7. Példa. Tekintsük a $\tau_\phi(\alpha) = \alpha + 2\pi\phi$ egy $T_k(x) = x + \phi + k$ felemeltjét. Ekkor

$$\rho_0(T_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + n\phi + nk}{n} = \phi + k,$$

azaz a felemelt különböző választása különböző ρ_0 értéket ad, azonban megjegyezzük, hogy a különbség mindig egy egész szám.

2.8. Példa. Tegyük fel, hogy az $f: S^1 \rightarrow S^1$ leképezésnek $\phi = 0$ fixpontja és legyen F az f egy felemeltje. Ekkor $F(0)$ egész szám, legyen pl. $F(0) = k$. Következik, hogy $F^n(0) = nk$, így $\rho_0(F) = k$, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = k$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Megjegyezzük, hogy általában is teljesül, hogy két különböző felemelt esetén a megfelelő ρ_0 értékek csak egy egészben térnek el egymástól: legyen F_1 és F_2 az f leképezés két különböző felemeltje. Belátható, hogy létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, amelyre $F_2(x) = F_1(x) + k$. Könnyen adódik, hogy $F_2^n(x) = F_1^n(x) + nk$, így $\rho_0(F_2) = \rho_0(F_1) + k$. Ez azt jelenti, hogy ρ_0 egészrészének elhagyásával a mennyiséget függetlenné tehetjük a felemelt választásától.

2.9. Definíció. Az f rotációs száma a $\rho_0(F)$ törtresze f tetszőleges F felemeltjére. Jelölése: $\rho(f)$. A $\rho(f)$ rotációs szám az egyetlen $[0, 1)$ -beli szám, amelyre $\rho_0(f) - \rho(f)$ egész szám.

2.10. Megjegyzés. A fenti definíciók nem követelik meg f differenciálhatóságát, vagyis a rotációs számot tetszőleges homeomorfizmusra definiálhatjuk.

Igazolnunk kell még, hogy a $\rho_0(f)$ határérték valóban létezik. Tegyük fel először, hogy f -nek van periodikus pontja, azaz $f^m(\phi) = \phi$ és $h(x) = \phi$. Ebből következik, hogy $F^m(x) = x + k$ valamely k egészre. Így $F^{jm}(x) = x + jk$, és

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x)|}{jm} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{jm} + \frac{k}{m} \right) = \frac{k}{m}$$

teljesül.

Általánosabban, tetszőleges n egész felírható $n = jm + r$ alakban, ahol $0 \leq r < m$. Vegyük észre, hogy létezik M konstans, amelyre

$$|F^r(y) - y| \leq M$$

teljesül minden $y \in \mathbb{R}$ és $0 \leq r < m$ esetén. Így kapjuk, hogy

$$\frac{|F^n(x) - F^{jm}(x)|}{n} = \frac{|F^r(F^{jm}(x)) - F^{jm}(x)|}{n} \leq \frac{M}{n}.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x)|}{mj} = \frac{k}{m}.$$

Tehát a rotációs szám létezik, ha f -nek van periodikus pontja, és ebben az esetben a rotációs szám racionális.

Tegyük most fel, hogy f -nek nincs periodikus pontja. Mivel $F^n(x) - x$ sohasem egész, ha $n \neq 0$, létezik olyan k_n egész szám, amelyre

$$k_n < F^n(x) - x < k_n + 1$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget ismételten $x = 0$, $F^n(0)$, $F^{2n}(0)$, $\dots$ esetére, így

$$\begin{aligned} k_n &< F^n(0) < k_n + 1, \\ k_n &< F^{2n}(0) - F^n(0) < k_n + 1, \\ &\vdots \\ k_n &< F^{mn}(0) - F^{(m-1)n}(0) < k_n + 1 \end{aligned}$$

adódik. A fenti egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy

$$mk_n < F^{mn}(0) < m(k_n) + 1,$$

és így

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{(k_n) + 1}{n}.$$

Az eredeti egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^n(0)}{n} < \frac{k_n + 1}{n},$$

ebből és a megelőző egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

A fentieket n és m szerepét felcserélve

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{m}$$

adódik. Mindezekből kapjuk, hogy

$$\left| \frac{F^n(0)}{n} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

ami azt jelenti, hogy az $(F^n(0)/n)$ sorozat Cauchy-sorozat és így konvergens. Ezzel beláttuk a következő tételt.

2.11. Tétel. *Legyen $f: S^1 \rightarrow S^1$ irányítástartó diffeomorfizmus, és legyen F az f felemeltje. Ekkor*

$$\rho_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n}$$

létezik és független x választásától. Következésképpen a $\rho(f)$ rotációs szám jól definiált.

2.12. Megjegyzés. A tétel bizonyításából az is adódik, hogy $\rho(f)$ folytonosan függ f -től.

2.13. Következmény. Tegyük fel, hogy $f: S^1 \rightarrow S^1$ irányítástartó diffeomorfizmus. Legyen $\varepsilon > 0$. Létezik olyan $\delta > 0$, amelyre minden olyan $g: S^1 \rightarrow S^1$ diffeomorfizmus esetén, amelynek f -től vett távolsága C^0 -ban kisebb mint δ , $|\rho(f) - \rho(g)| < \varepsilon$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen n olyan, hogy $2/n < \varepsilon$. Válasszuk f egy olyan F felemeltjét, amelyre $r - 1 < F^n(0) < r + 1$ teljesül. Válasszuk δ -t olyan kicsinek, hogy g -nek legyen olyan G felemeltje, amelyre $r - 1 < G^n(0) < r + 1$ teljesül. Az előző bizonyításhoz hasonlóan adódik, hogy

$$m(r - 1) < F^{nm}(0) < m(r + 1)$$

és

$$m(r - 1) < G^{nm}(0) < m(r + 1),$$

amiből

$$\left| \frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{G^{nm}(0)}{nm} \right| < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

teljesül minden m -re. Felhasználva, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^{nm}(0)}{nm} = \rho_0(F)$$

adódik az állítás. □

Ahogy fent is megjegyeztük, a rotációs szám azt méri, hogy az adott diffeomorfizmus átlagosan hány körbefordulást indukál S^1 -en. Például $\tau_\omega(\phi) = \phi + 2\pi\omega$, vagyis a $2\pi\omega$ szöggel való forgatás esetén $\rho(\tau_\omega) = \omega$. Az $f(\phi) = \phi + \sin^2(\phi/2)$ esetén $\rho(f) = 0$, hiszen f lefixálja a $\phi = 0$ pontot, míg minden más pont esetén $f^n(\phi)$ 0-hoz tart, amint $n \rightarrow \pm\infty$, így az f iterálása során egy pont pályája sem tesz meg egy teljes kört.

A rotációs szám egy fontos tulajdonsága az invariancia topologikus ekvivalenciára: könnyen látható, hogy az f és g S^1 -en definiált irányítástartó diffeomorfizmusok esetén $\rho(f) = \rho(g^{-1}fg)$.

Megmutattuk, hogy ha f -nek van periodikus pontja, akkor $\rho(f)$ racionális szám. Ha ω irracionális, akkor a $2\pi\omega$ szöggel való forgatásnak Jacobi tétele szerint nincs periodikus pontja. Ez azt sejteti, hogy $\rho(f)$ irracionális, ha nincs periodikus pontja. A következőkben megmutatjuk, hogy ez valóban így van.

2.14. Állítás. A $\rho(f)$ rotációs szám akkor és csak akkor irracionális, ha f -nek nincs periodikus pontja.

Bizonyítás. Eddigi eredményeinket figyelembe véve elég megmutatni, hogy ha f -nek nincs periodikus pontja, akkor $\rho(f)$ irracionális. Tegyük fel, hogy $\rho(f)$ racionális. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\rho_0(F^m) = m\rho_0(F)$ teljesül az f tetszőleges F felemeltjére. Vagyis feltehetjük, hogy $\rho(f) = 0$, de f -nek nincs fixpontja. Az F -nek szintén nincs fixpontja, így feltehetjük, hogy $F(x) > x$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (az ellenkező eset hasonlóan kezelhető). Ekkor vagy $F^n(0) < 1$ teljesül minden n -re, vagy létezik olyan $k > 0$, amelyre $F^k(0) > 1$. Az utóbbi esetben azt kapjuk, hogy $F^{mk}(0) > m$, vagyis $\rho_0(F) > 1/k$, ami ellentmondás.

Ha az előbbi eset teljesül, akkor az $F^n(0)$ sorozat monoton növekvő a $[0, 1]$ intervallumon, így konvergens is. Jelöljük p -vel ennek a sorozatnak a határértékét. Ekkor a következő adódik:

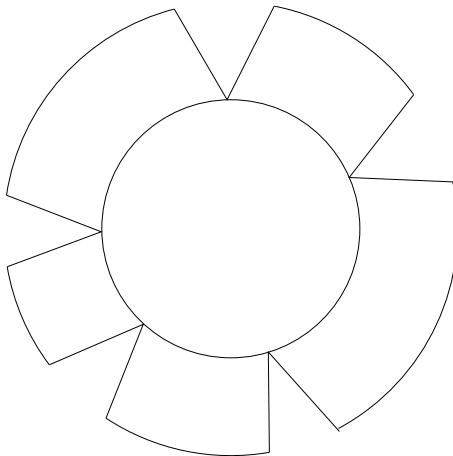
$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(0) = p,$$

vagyis p az F fixpontja, ami megint csak ellentmondás. □

Most részletesebben megvizsgálunk egy olyan leképezést, amelynek irracionális a rotációs száma. Az előző állítás alapján tudjuk, hogy a leképezésnek nincs periodikus pontja. Láttuk, hogy irracionális ω esetén a $\tau_\omega(\phi) = \phi + 2\pi\omega$ forgatás ilyen. Vajon hogyan lehetne olyan, irracionális rotációs számmal rendelkező homeomorfizmust találni, amely nem topologikusan ekvivalens egy ilyen irracionális forgatással? Jacobi tételéből tudjuk, hogy minden irracionális forgatás pályája sűrű S^1 -en. Tehát ha olyan homeomorfizmust akarunk megadni, amely nem topologikusan ekvivalens egy irracionális forgatással sem, akkor elég egy olyan leképezést találni, amelynek pályája nem sűrű S^1 -en. Az alábbiakban erre mutatunk egy példát, a Denjoy-leképezést.

2.15. Példa (Denjoy-leképezés). Induljunk ki a τ_ω irracionális forgatásból. Legyen ϕ_0 tetszőleges S^1 -beli pont. Haladjunk végig ϕ_0 pályáján, és minden érintett pont helyére szúrjunk be egy kis I_n intervallumot úgy, hogy az I_n intervallumok hosszának összege véges legyen. Az eljárás eredményeként egy zárt görbét kapunk.

Most kiterjesztjük a leképezést az I_n intervallumok uniójára. Ehhez minden n -re válasszunk egy h_n irányítástartó diffeomorfizmust, amely I_n -t I_{n+1} -be viszi. Észrevehetjük, hogy az új leképezésnek nincs periodikus pontja, így rotációs száma irracionális. Az is nyilvánvaló, hogy I_n belső pontjai közül egyik sem tér vissza I_n -be a leképezés iterálásával, így e pontok pályája természetesen nem lehet sűrű.



2.1. ábra. A körvonal felnyitása a Denjoy-leképezés konstrukciójához

2.16. Megjegyzés. A Denjoy-leképezés nyilván a kör egy homeomorfizmusa, azonban felmerülhet bennünk a kétely, hogy vajon diffeomorfizmussá tehető-e. A h_n diffeomorfizmusokat választhatjuk úgy, hogy a keletkező leképezés C^1 -diffeomorfizmus legyen, azonban ily módon nem kaphatunk C^2 -diffeomorfizmust. Ismert, hogy tetszőleges, irracionális rotációs számmal rendelkező C^2 -diffeomorfizmus topologikusan ekvivalens τ_ω -val valamely ω -ra. Ez azt mutatja, hogy a kör C^1 - és C^2 -diffeomorfizmusai között meglepően bonyolult különbségek vannak.

A következőkben egy kétparaméteres leképezéscsalád bifurkációit elemezzük. Ezt a leképezéscsaládot standard vagy kanonikus családnak is nevezik.

2.17. Példa. Tekintsük az

$$f_{\omega,\varepsilon}(\phi) = \phi + 2\pi\omega + \varepsilon \sin \phi$$

képlettel megadott kétparaméteres leképezéscsaládot S^1 -en. A leképezés egy felemeltje

$$F_{\omega,\varepsilon}(x) = x + \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi x).$$

Ha $\varepsilon = 0$, ez a leképezés a T_ω forgatássá egyszerűsödik. $0 \leq \varepsilon < 1$ esetén $f_{\omega,\varepsilon}$ diffeomorfizmus S^1 -en, $\varepsilon = 1$ esetén pedig csak homeomorfizmus. Ha $\varepsilon > 1$, a leképezés nem injektív.

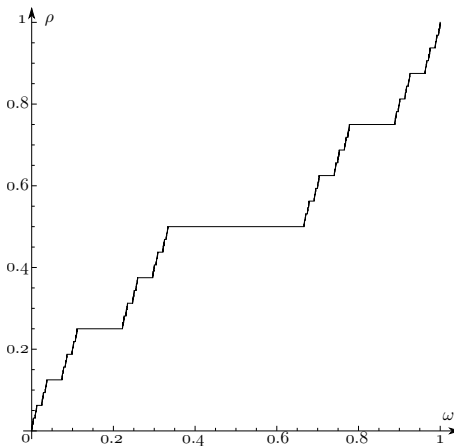
Vegyük észre, hogy ha $\omega_1 > \omega_2$, akkor $F_{\omega_1,\varepsilon}(x) > F_{\omega_2,\varepsilon}(x)$, így $\rho_0(F_{\omega_1,\varepsilon}) \leq \rho_0(F_{\omega_2,\varepsilon})$. Tehát bármely fix ε -ra ρ_0 nemcsökkenő függvénye ω -nak. Fixáljuk le $\varepsilon \neq 0$ -t és tekintsük az $f_\omega = f_{\omega,\varepsilon}$ leképezést.

Tegyük fel, hogy $\rho(f_{\omega_0}) = p/q$ racionális. Ebből következik, hogy f_{ω_0} -nak van q -periodikus pontja. Tehát létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$F_{\omega_0}^k(x_0) = x_0 + k$$

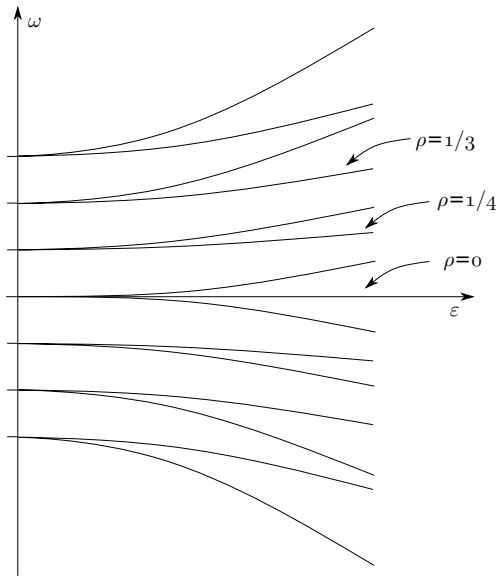
teljesül valamely k egészre, mégpedig éppen $k = p$ -re. Azt állítjuk, hogy létezik az ω értékeknek olyan intervalluma, amelyre f_{ω_0} rotációs száma p/q . Tekintsük az $F_{\omega_0}^q$ grafikonját. Ez a grafikon az $y = x + k$ egyenest az $(x_0, x_0 + k)$ pontban metszi. Ha $F_{\omega_0}^q(x_0) \neq 1$, akkor az implicitfüggvény-tételből következik, hogy létezik egy nyitott intervallum ω_0 körül, amelynek minden ω pontjára teljesül, hogy F_ω^q szintén metszi az $y = x + k$ egyenest. Tehát $\rho(f_\omega) = p/q$ teljesül minden ilyen ω értékre. Ha viszont $F_{\omega_0}^q(x_0) = 1$ teljesül, a bizonyítás nehezebb, így csak a főbb pontokat ismertetjük. Vegyük észre, hogy mivel F_{ω_0} analitikus, létezik olyan j egész szám, amelyre $(F_{\omega_0}^j)^{(j)}(x_0) \neq 0$. Ha nem így volna, $F_{\omega_0}^j(x)$ azonosan egyenlő lenne $x + k$ -val. Ha j páratlan, azonnal adódik, hogy a közeli F_ω^j függvények grafikonjai átmetszik az $y = x + k$ egyenest. Ha j páros, akkor $F_{\omega_0}^j$ konkáv vagy konvex x_0 -ban. Ebben a két esetben a közeli F_ω^j függvények grafikonjai $\omega < \omega_0$ vagy $\omega > \omega_0$ esetén metszik az $y = x + k$ egyenest.

Tehát beláttuk, hogy minden p/q racionális számra létezik olyan nemüres intervallum, amelyen $\rho(f_\omega) = p/q$. Másrészt minden irracionális számra létezik egyetlen ω , amelyre $\rho(f_\omega)$ éppen az adott irracionális számmal egyenlő. (Ennek az igen mély eredmények a bizonyításától itt eltekintünk.) A $\rho(f_\omega)$ függvény grafikonja a Cantor-függvények egy példája: a racionális rotációs számoknak megfelelő intervallumokon konstans, és mindenhol folytonos. Ezt a grafikont az „ördög lépcsőjének” is nevezik.



2.2. ábra. A $\rho(f_\omega)$ Cantor-függvény grafikonja

Ábrázoljuk azokat a régiókat az $\varepsilon - \omega$ síkon, ahol $\rho(f_{\omega,\varepsilon})$ egy adott racionális számmal egyenlő. Ezek a régiók nyelv alakúak, amelyek az ω tengely $\omega = p/q$ pontjaiból ágaznak ki. $\varepsilon < 1$ esetén ezek a nyelvek diszjunkt, nemüres halmazok.



2.3. ábra. A leképezéscsalád bifurkációs diagramja

Egy adott $\varepsilon > 0$ esetén az f_ω leképezés dinamikáját egyszerűen leírhatjuk. Vegyük észre, hogy f_ω -nak van fixpontja, ha

$$\sin \phi = \frac{-2\pi\omega}{\varepsilon}.$$

A $\sin \phi$ függvény grafikonjának 0 és 2π közötti szakaszáról leolvashatjuk, hogy ennek az egyenletnek két megoldása van, ha $|2\pi\omega| < \varepsilon$, egy megoldása, ha $|2\pi\omega| = \varepsilon$ és nincs megoldása, ha $|2\pi\omega| > \varepsilon$. Egyszerűen kiszámíthatjuk, hogy $|f'_\omega(\phi_i)| \neq 1$ teljesül a ϕ_i , $i = 1, 2$ fixpontokban az első esetben, míg a második esetben $|f'_\omega(\phi)| = 1$ teljesül az egyetlen ϕ fixpontban. A dinamikát illetően ez a következőket jelenti: egy nyereg-csomó bifurkáció során egy fixpontja keletkezik f_ω -nak $\phi = \pi/2$ -nél, amikor $\varepsilon = -2\pi\omega$. A fixpontból két fixpont keletkezik, amelyek ω növelésével ellenkező irányban mozognak a körön, végül $\phi = 3\pi/2$ -nél újra találkoznak és összeolvadnak egy újabb nyereg-csomó bifurkáció során. A többi nyelven hasonló jelenség játszódik le.

Ellenőrző kérdések:

- Hogyan definiáljuk egy leképezés felemeltjét?
- Mi a rotációs szám?
- Mikor racionális a rotációs szám?

3. fejezet

Szimbolikus dinamika, Smale-patkó

3.1. Szimbolikus dinamika

Tekintsük az $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ logisztikus leképezést, és válasszuk μ -t 4-nél nagyobbak. Ebben az esetben az $I = [0, 1]$ intervallum nem invariáns a logisztikus leképezés mellett: bizonyos pályák kilépnek ebből az intervallumból és $-\infty$ -be tartanak. Célunk, hogy megértsük azoknak a pályáknak a viselkedését, amelyek mindvégig az I intervallumban maradnak. Jelöljük Λ -val azoknak az I -beli pontoknak a halmazát, amelyek pályája soha nem hagyja el I -t. Nyilvánvaló, hogy pl. a 0 és az 1 a Λ halmaz elemei. Könnyen látható, hogy az I intervallum közepén van egy A_0 intervallum, amelynek minden x elemére $f_\mu > 1$, amiből következik, hogy $f_\mu^2(x) < 0$ és $f_\mu^n(x)$ tart a $-\infty$ -be, amint $n \rightarrow \infty$. Megjegyezzük, hogy minden olyan I -ből induló, végtelenbe tartó pályának valamikor be kell lépnie az A_0 intervallumba. Azt is észrevehetjük, hogy az A_0 intervallum végpontjai Λ -beliek. Jelöljük I_0 -lal, illetve I_1 -gyel az $I \setminus A_0$ halmazt alkotó két intervallumot, továbbá A_1 -gyel azon pontok halmazát, amelyek f_μ melletti képe A_0 -ba esik, könnyen látható, hogy A_1 két intervallumból áll, amelyek egyike I_0 -ban, a másik pedig I_1 -ben helyezkedik el. Nyilván az A_1 -beli pontok pályája is tart $-\infty$ -be, a végpontjai pedig Λ -beliek. Hasonlóan, az A_1 -et alkotó két intervallum inverz képe f_μ mellett két-két intervallum (jelölje ezek unióját A_2) az A_0 két oldalán. Az ezekből a pontokból indított pályák szintén $-\infty$ -be tartanak, végpontjaik pedig Λ -beliek, és így tovább: jelöljük A_n -nel azon pontok halmazát, amelyek n -edik iteráltja A_0 -ba esik. Az ilyen pontokra mindig igaz, hogy pályájuk a $-\infty$ -be tart, és A_n minden n -re 2^n diszjunkt, I -beli intervallumból áll. Ezek után világos, hogy

$$\Lambda = I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in \Lambda$ esetén x teljes pályája $I_0 \cup I_1$ -be esik, hiszen x pályája végig I -ben marad, így A_0 -ba nem léphet be. Az $x_0 \in \Lambda$ ponthoz rendeljük hozzá azt a végtelen sorozatot, amelynek k -adik eleme 0, ha $f_\mu^k(x) \in I_0$, illetve 1, ha $f_\mu^k(x) \in I_1$. Jelölje ezt a leképezést

$$S(x_0) = (s_0 s_1 s_2 \dots).$$

Néhány egyszerű példa: a 0 képe S mellett a $(000\dots)$ sorozat, a p_μ pozitív fixpont képe $(111\dots)$, az 1 képe az $(1000\dots)$ sorozat. Egy olyan 2-ciklus képe, amely felváltva I_0 -ba és I_1 -be esik, az $(\overline{10})$ vagy a $(\overline{01})$ sorozat, ahol $\overline{10}$ az 10 blokk végtelen ismétlésével kapott sorozat.

Jelöljük az összes végtelen 0–1 sorozat halmazát Σ -val. A Σ -n megadunk egy távolságfüggvényt. Legyen $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ és $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ két Σ -beli sorozat. A $d = d(s, t)$

távolságfüggvényt definiáljuk a következő módon:

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Mivel a fenti összeget tetszőleges s, t esetén majorálja a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ sorösszeg, $d(s, t)$ mindig véges. Egyszerű látni, hogy $d(s, t)$ valóban távolság, azaz rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- (1) $d(s, t) \geq 0$ és $d(s, t) = 0$ akkor és csak akkor, ha $s = t$;
- (2) $d(s, t) = d(t, s)$;
- (3) $d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Egyszerűen beláthatjuk a következő állítást is.

3.1. Állítás. *Legyen $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ és $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ két Σ -beli sorozat. Ekkor a következők teljesülnek.*

- (1) *Ha $s_j = t_j$ minden $j = 0, \dots, n$ esetén, akkor $d(s, t) \leq 1/2^n$.*
- (2) *Fordítva, ha $d(s, t) < 1/2^n$, akkor $s_j = t_j$ minden $j = 0, \dots, n$ -re.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $s_j = t_j$ minden $j = 0, \dots, n$ -re. Ekkor

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq 0 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

A második állítás igazolásához tegyük fel, hogy $d(s, t) < 1/2^n$, ebből következik, hogy tetszőleges, $(n+1)$ -nél kisebb indexre $s_i = t_i$ -nek kell teljesülnie, hiszen különben a távolság nagyobb lenne $1/2^n$ -nél. $\square$

3.2. Tétel. *A fent definiált $S: \Lambda \rightarrow \Sigma$ leképezés homeomorfizmus $\mu > 4$ esetén.*

Bizonyítás. A bizonyítást arra az esetre végezzük el, amikor $|f'_\mu(x)| > K > 1$ valamilyen K -ra minden $x \in I_0 \cup I_1$ esetén. A 2. fejezetben láttuk, hogy ez akkor teljesül, ha $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Először megmutatjuk, hogy S kölcsönösen egyértelmű. Legyen $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$, és tegyük fel, hogy $S(x) = S(y)$. Ebből következik, hogy $f_\mu^n(x)$ és $f_\mu^n(y)$ minden n esetén I_0 és I_1 közül ugyanabba az intervallumba esnek, amiből azt kapjuk, hogy f_μ monoton $f_\mu^n(x)$ és $f_\mu^n(y)$ között, tehát f_μ ennek az intervallumnak minden pontját $I_0 \cup I_1$ -be képezi. Azonban feltettük, hogy $|f'_\mu| > K > 1$ teljesül $I_0 \cup I_1$ -n, vagyis az f_μ iterálásával az intervallum minden alkalommal legalább K -szorosára nő, vagyis $f_\mu^n(x)$ és $f_\mu^n(y)$ távolsága végtelenbe tart, tehát előbb-utóbb mindenképpen az A_0 eltérő oldalaira kell esniük, ami viszont ellentmond a feltevésünknek.

Most belátjuk, hogy S ráképezés. Legyen $J \subset I$ egy zárt intervallum és $f_\mu^{-n}(J)$ -vel jelöljük azon I -beli pontok halmazát, amelyeket f_μ^n J -be képez. Legyen $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ tetszőleges Σ -beli sorozat. Definiáljuk az

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, f_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, f_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n}) \end{aligned}$$

halmazokat. Belátjuk, hogy az $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ halmazok nemüres, zárt intervallumok egymásba ágyazott sorozatát alkotják. Vegyük észre, hogy

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n}).$$

Feltehető, hogy $I_{s_1 \dots s_n}$ nemüres intervallum, ekkor a fenti észrevétel szerint $f_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ két zárt intervallumból áll, amelyek közül egyik I_0 -ba, a másik I_1 -be esik. Ebből adódik, hogy $I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ egyetlen zárt intervallum. Ezek az intervallumok egymásba ágyazottak, hiszen

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}.$$

Ezek alapján $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ nemüres. Vegyük észre, hogy ha x eleme ennek a halmaznak, akkor $x \in I_{s_0}$, $f_\mu(x) \in I_{s_1}$ stb. Tehát $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$, vagyis találtunk olyan x -et, amelynek S melletti képe az $(s_0 s_1 \dots)$ sorozat. A $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ halmaz egyetlen pontból áll, ez következik abból, hogy S kölcsönösen egyértelmű.

Az S folytonosságának bizonyításához válasszunk egy $x \in \Lambda$ pontot és legyen $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszuk n -t úgy, hogy $1/2^n < \varepsilon$ teljesüljön. Tekintsük az $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$ intervallumokat az összes lehetséges $t_0 t_1 \dots t_n$ esetén. Ezek az intervallumok diszjunktak, uniójuk tartalmazza Λ -t. Összesen 2^{n+1} ilyen intervallum van, ezek egyike éppen $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Választhatjuk δ -t úgy, hogy $x - y < \delta$ -ból és $y \in \Lambda$ -ból következik, hogy $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, vagyis $S(x)$ és $S(y)$ megegyeznek az első $n + 1$ elemükben. Az előző állítás szerint

$$d(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

amiből következik S folytonossága. Egyszerűen látható, hogy S^{-1} szintén folytonos. Így beláttuk, hogy S homeomorfizmus. $\square$

Ezek után definiáljuk a $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ leképezést a következőképpen:

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots),$$

vagyis a σ leképezés mindössze annyit csinál, hogy eltolja egy elemmel balra a sorozatot, annak első elemét törölve. Nyilvánvaló, hogy σ folytonos: tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk olyan n -et, amelyre $1/2^n < \varepsilon$ teljesül, és legyen $\delta = 1/2^{n+1}$. Ha s és t távolsága kisebb δ -nál, akkor a két sorozat első $n + 2$ eleme megegyezik, így a $\sigma(s)$ és $\sigma(t)$ sorozatok első $n + 1$ eleme is megegyezik, így a két sorozat távolsága kisebb $1/2^n$ -nél, így ε -nál is, ami bizonyítja σ folytonosságát.

A σ leképezés viselkedése egyszerűen átlátható, pl. könnyen felírhatjuk a periodikus pontokat: a fixpontok nyilván a $(\bar{0})$ és $(\bar{1})$ sorozatok, a 2-periodikus pontok a $(\bar{0}\bar{1})$ és $(\bar{1}\bar{0})$ sorozatok, illetve általában az n -periodikus pontok az $(\overline{s_0 \dots s_{n-1}})$ alakú pontok. Az is rögtön adódik, hogy n -periodikus pontból 2^n darab van.

Annak ellenére, hogy a σ leképezés egyszerűnek látszik, igen bonyolult viselkedést mutat. Könnyen megadhatunk egy olyan s sorozatot, amelynek pályája sűrű Σ -ban. Egy ilyen sorozat rendelkezik a tulajdonsággal, hogy iteráltjai tetszőleges Σ -beli elemhez tetszőlegesen közel kerülnek. Ha például azt szeretnénk, hogy egy adott t sorozathoz $1/2^n$ -nél közelebb kerüljön az s valamely iteráltja, akkor elég azt biztosítanunk, hogy az s -ben valahol előforduljon részsorozatként a t első $n + 1$ eleme. Ezt biztosíthatjuk úgy, hogy az s sorozatot úgy választjuk meg, hogy minden lehetséges $n + 1$ hosszúságú sorozat szerepeljen benne részsorozatként. Általánosan, ha minden n -re s -ben szerepel minden lehetséges n hosszúságú sorozat részsorozatként, akkor azzal elérjük, hogy s iteráltjai

tetszőleges Σ -beli elemhez tetszőlegesen közel kerülnek. Egy lehetséges ilyen s sorozatot mutatunk az alábbiakban:

$$s = (0\ 1 \mid 00\ 01\ 10\ 11 \mid 000\ 001 \dots \mid 0000 \dots),$$

azaz s -ben egymás után felsoroljuk az összes lehetséges 1 hosszúságú sorozatot, majd az összes lehetséges 2 hosszúságú sorozatot és így tovább.

Belátjuk, hogy σ érzékenyen függ a kezdeti adatoktól. Ennek igazolására tekintsünk két Σ -beli sorozatot, amelyeknek első $n + 1$ eleme megegyezik, azt követően viszont a megfelelő indexű elemeik mind különbözőek. A két sorozat távolsága $1/2^n$, azonban ha a σ -t mindkét sorozatra $n + 1$ -szer (vagy annál többször) alkalmazzuk, akkor a két sorozat σ iteráltja melletti képei minden elemükben eltérnek egymástól, így távolságuk 2, azaz a legnagyobb távolság, amely Σ két eleme között előfordulhat.

Az 1.49. Tétel felhasználásával rögtön adódik a következő fontos eredmény.

3.3. Tétel. *A σ leképezés kaotikus Σ -n.*

Azt kaptuk tehát, hogy bár a σ leképezés viselkedése sok szempontból jól átlátható, mégis igen bonyolult a dinamikája. Az előbbi eredményünket felhasználhatjuk a logisztikus leképezés kaotikusságának bizonyítására is $\mu > 4$ esetén.

3.4. Tétel. *Az $S: \Lambda \rightarrow \Sigma$ leképezés topologikus ekvivalenciát biztosít a σ és az f_μ leképezések között.*

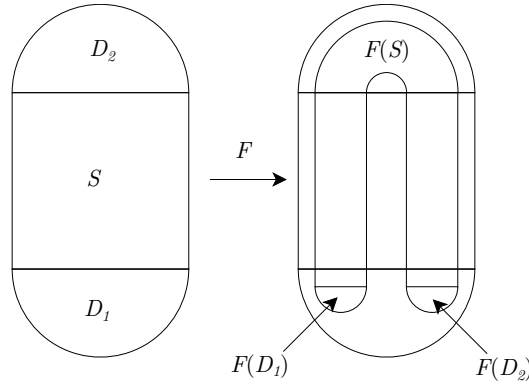
Bizonyítás. Már megmutattuk, hogy S homeomorfizmus, így már csak azt kell belátnunk, hogy $S \circ f_\mu = \sigma \circ S$. Legyen $x_0 \in \Lambda$ tetszőleges, legyen $S(x_0) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. S definíciójából rögtön adódik, hogy $S(f_\mu(x_0)) = (s_1 s_2 s_3 \dots) = \sigma(S(x_0))$, ami igazolja a tétel állítását. $\square$

Ellenőrző kérdések:

- Hogyan definiálhatunk távolságot Σ -n?
- Bizonyítsuk be, hogy ez a távolság-függvény teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget.
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az eltolás leképezés?

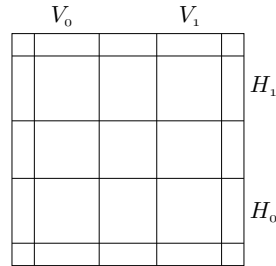
3.2. A Smale-patkó

Tekintsünk egy $D \in \mathbb{R}^2$ tartományt, amely a következő részekből áll: közepén egy S egységnégyzet helyezkedik el, amelynek alsó és felső éléhez egy-egy félkör (D_1 és D_2) csatlakozik. Az F patkóleképezés olyan leképezés, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: F vízszintes irányban összehúzza az S négyzetet δ -szorosára, ahol $\delta < 1/2$, függőlegesen pedig $1/\delta$ -szorosára nyújtja, majd az így kapott keskeny, magas téglalapot patkó alakúra hajlítja úgy, hogy a patkó két szára keresztülhalad S -en, és a teljes patkó a D tartományba esik. Az F leképezés lineárisan képezi a patkó két szárára az S négyzetet. A D_1 és D_2 félköröket a 3.1 ábrán látható módon az F egy-egy, D_1 -ben elhelyezkedő félkörbe képezi. Feltesszük, hogy F -nek van egy fixpontja D_1 -ben, amely minden más D_1 -beli pályát vonz. F kölcsönösen egyértelmű, a D -t D -be képezi, de nem ráképezés, így inverze nincs mindenhol definiálva D -n. Észrevehetjük, hogy az S egységnégyzet inverz képe két keskeny vízszintes téglalapból áll. Jelölje ezeket H_0 és H_1 , ezek F melletti



3.1. ábra. A patkóleképezés első iteráltja

képét pedig V_0 és V_1 , amelyek mindegyike egy-egy keskeny függőleges téglalap, és $F(S) \cap S = V_0 \cup V_1$. Az F leképezés fent felsorolt jellemzőiből következik, hogy a két vízszintes téglalap magassága, illetve a két függőleges téglalap szélessége egyaránt δ -val egyenlő. Mivel F lineárisan képezi H_0 -t V_0 -ra, illetve H_1 -et V_1 -re, tetszőleges H_j -beli vízszintes, illetve függőleges szakasz képe V_j -beli vízszintes, illetve függőleges szakasz lesz ($j = 1, 2$). Egy vízszintes H_j -beli szakasz képének hossza az eredeti szakasz hosszának δ -szorosa, egy függőleges H_j -beli szakasz hossza pedig az eredeti szakasz hosszának $1/\delta$ -szorosa.

3.2. ábra. A H_0, H_1 halmazok, és képeik, V_0, V_1

Legyen x tetszőleges D -beli pont, és vizsgáljuk meg x pozitív pályáját (azaz az $\{F^n(x) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ halmazt). A feltevéseink szerint F -nek egyetlen fixpontja van D_1 -ben, jelöljük ezt a fixpontot x_0 -al. Mivel az F leképezés D_2 -t teljes egészében D_1 -be képezi, és feltettük, hogy x_0 vonz minden D_1 -beli pályát, adódik, hogy minden D_2 -beli pont pályája is x_0 -hoz tart. F tulajdonságaiból következik, hogy az S négyzet bizonyos pontjait F nem S -re, hanem D_1 -be vagy D_2 -be képezi. Ha x olyan S -beli pont, amelyre $F^k(S) \not\subset S$ valamely $k > 0$ -ra, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = x_0$. Mindebből látszik, hogy azok a pontok igazán érdekesek, amelyek (pozitív) pályája nem jut be $D_1 \cup D_2$ -be, vagyis mindvégig S -ben marad. Jelölje az ilyen pontok halmazát Λ^+ , vagyis

$$\Lambda^+ = \{x \in S \mid F^n(x) \in S \text{ minden } n \geq 0\text{-ra}\}.$$

Megmutatjuk, hogy a Λ^+ halmaz hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint az előző fejezetben szereplő Λ halmaz az egydimenziós logisztikus leképezés esetén. Mivel H_0 és H_1 pontjain kívül F minden S -beli pontot $D_1 \cup D_2$ -be képez, minden Λ^+ -beli x pontnak H_0 -ba vagy H_1 -be kell esnie. Mivel $F^2(x)$ is S -be esik, $F(x) \in H_0 \cup H_1$ teljesül, amiből $x \in F^{-1}(H_0 \cup H_1)$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy $x \in F^{-n}(H_0 \cup H_1)$ tetszőleges

$n \geq 0$ -ra, vagyis

$$\Lambda^+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{-n}(H_0 \cup H_1).$$

Legyen H tetszőleges, S jobb és bal oldali élet összekötő vízszintes sáv, jelöljük ennek a sávnak a magasságát h -val. A fentiek alapján $F^{-1}(H)$ egy pár keskenyebb (δh magasságú) vízszintes sáv, melyek egyike H_0 -ba esik, a másik pedig H_1 -be. Ezeknek a sávoknak az F melletti képei rendre $H \cap V_0$ és $H \cap V_1$. Speciálisan, ha $H = H_j$ ($j = 1, 2$), akkor $F^{-1}(H_j)$ két, δ^2 magasságú vízszintes sávból áll, egyikük H_0 -ba, másikuk H_1 -be esik. Hasonlóan folytatva adódik, hogy $F^{-n}(H_j)$ pedig 2^n darab, δ^{n+1} magasságú vízszintes sávból tevődik össze. Ezek alapján látható, hogy a Λ^+ halmaz S -en vízszintesen keresztben húzódó szakaszokból álló Cantor-halmaz. A logisztikus leképezéssel ellentétben azonban ezúttal visszafelé is egyértelműen tudjuk folytatni a pályákat. Egy $x \in S$ pont negatív pályájának az $\{F^{-n}(x) \mid n = 1, 2, \dots\}$ halmazt fogjuk tekinteni, feltéve, hogy $F^{-n}(x)$ definiálva van és D -be esik. Amennyiben $F^{-n}(x)$ nincs definiálva valamilyen n -re, akkor x negatív pályájának ott vége szakad. Jelölje Λ^- azon S -beli pontok halmazát, amelyekre $F^{-n}(x)$ definiálva van és D -be esik minden n -re. Ha $x \in \Lambda^-$, akkor $F^{-n}(x) \in S$ minden $n \geq 1$ -re, így $x \in F^n(S)$ minden $n \geq 1$ -re, amiből kapjuk, hogy $x \in F^n(H_0 \cup H_1)$ minden $n \geq 1$ -re, tehát Λ^- -ra teljesül a következő:

$$\Lambda^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(H_0 \cup H_1).$$

Másrészt, ha $x \in S$ és $F^{-1}(x) \in S$, akkor $x \in S \cap F(S)$, tehát $x \in V_0$ vagy $x \in V_1$. Hasonlóan, ha $F^{-2}(x) \in S$ is teljesül, akkor $x \in S \cap F^2(S)$, amely halmaz négy keskenyebb sávból áll. Hasonlóan folytatva adódik, hogy Λ^- függőleges vonalakból álló Cantor-halmaz. Jelöljük Λ -val a Λ^+ és Λ^- halmazok metszetét, vagyis azon pontok halmazát, amelyek teljes pozitív és negatív pályája is S -ben marad, vagyis

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(H_0 \cup H_1).$$

Az előző fejezethez hasonló szimbolikus dinamikát definiálunk. Egy $x \in \Lambda$ ponthoz hozzárendeljük az

$$S(x) = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \dots)$$

két irányban végtelen 0-1 sorozatot, ahol s_j 0-val vagy 1-gyel egyenlő aszerint, hogy $F^j(x)$ H_0 -ba vagy H_1 -be esik. Jelöljük Σ_2 -vel a mindkét irányban végtelen 0-1 sorozatok halmazát és definiáljuk Σ_2 -n a következő távolságfüggvényt:

$$d(s, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}.$$

A Σ_2 -n így definiált távolságfüggvény tehát hasonlít az előző fejezetben Σ -n definiált távolságfüggvényhez. Két Σ_2 -beli sorozat akkor van közel egymáshoz, ha a 0-hoz közeli indexű tagjaik (mindkét irányban) megegyeznek. Az előző fejezethez hasonlóan definiáljuk a σ eltolásleképezést a következő módon:

$$\sigma(\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \dots) = (\dots s_{-2}s_{-1}s_0 \cdot s_1s_2 \dots),$$

valószínűleg σ ezúttal is azt jelenti, hogy eggyel balra toljuk a sorozatot, azonban az egy irányban végtelen sorozatok esetével ellentétben az eltolás alkalmazásával itt nem vesz el információ, így ennek a leképezésnek van inverze is, amely természetesen az egy elemmel jobbra tolás. Az S leképezés topologikus ekvivalenciát biztosít F és σ között, egyszerűen látható, hogy $S(F(x)) = \sigma(S(x))$. Az előző fejezetben látott tulajdonságok most is érvényesek a σ -ra: pontosan 2^n darab n -periodikus pont van, létezik sűrű pálya. Így azt is igazoltuk, hogy F kaotikus Λ -n. Az előző fejezethez képest azonban újabb tulajdonságok is megjelennek. Azt mondjuk, hogy x_1 és x_2 előre aszimptotikusak, ha $F^n(x_1), F^n(x_2) \in D$ minden $n \geq 0$ esetén és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(F^n(x_1), F^n(x_2)) = 0.$$

Hasonlóan, azt mondjuk, hogy x_1 és x_2 hátra aszimptotikusak, ha $F^n(x_1), F^n(x_2) \in D$ minden $n < 0$ esetén és

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} d(F^n(x_1), F^n(x_2)) = 0.$$

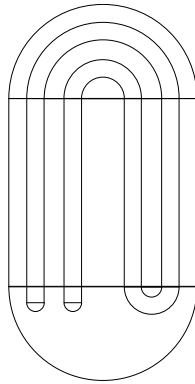
Nyilvánvaló, hogy ha $x_1, x_2 \in \Lambda^+$ ugyanazon a vízszintes egyenesen fekszenek, akkor előre aszimptotikusak; hasonlóan, ha $x_1, x_2 \in \Lambda^-$ ugyanazon a függőleges egyenesen fekszenek, akkor hátra aszimptotikusak. Definiáljuk x *stabil halmazát* a következőképpen:

$$W^s(x) = \{Z \mid d(F^n(Z), F^n(x)) \rightarrow 0, \text{ amint } n \rightarrow \infty\},$$

x *instabil halmazát* pedig a következő módon:

$$W^u(x) = \{Z \mid d(F^n(Z), F^n(x)) \rightarrow 0, \text{ amint } n \rightarrow -\infty\}.$$

Például minden olyan pont, amelynek pályája elhagyja S -t, D_1 -ben lévő fixpont stabil halmazának eleme. Melyek lehetnek vajon egy Λ -beli pont stabil halmazának elemei? Példaként tekintsük a H_0 -be eső x^* fixpont esetét, nyilván $S(x^*) = (\dots 00 \cdot 00 \dots)$. Látható, hogy az x^* -on áthaladó ℓ_s vízszintes szakasz tetszőleges pontja $W^s(x^*)$ -hoz tartozik. Van-e más pontja a stabil halmaznak? Ha Y olyan pont, amelynek valamely iteráltja ℓ_s -re esik, az azt jelenti, hogy $d(F^n(Y), x^*) < 1$ teljesül valamely $n > 0$ -ra, amiből az következik, hogy $d(F^{n+k}(Y), x^*) < \delta^k$, tehát $Y \in W^s(x)$. Általánosan azt mondhatjuk, hogy az $F^{-k}\ell_s$ ($k = 1, 2, \dots$) alakú vízszintes szakaszok mindegyike az x^* stabil halmazának része. Könnyen látható, hogy adott k -ra 2^k ilyen intervallum van.



3.3. ábra. A patkóleképezés második iteráltja

Mivel $F(D) \subset D$, az x^* pont instabil halmaza ettől eltérő szerkezetű. Az x^* -on áthaladó függőleges ℓ_u szakasz nyilván $W^u(x^*)$ -ba esik. A fentiekhez hasonlóan ℓ_u -nak minden

F melletti iteráltja D -be esik és könnyen ellenőrizhető, hogy $F^k(\ell_u)$ egy „kígyószerű” D -beli görbe, amely 2^k alkalommal metszi át függőlegesen S -t, amint az a 3.3. ábrán is látható. Ezeknek az iteráltaknak az uniója egy nagyon bonyolult görbe, amely végtelen sokszor halad át S -en, a görbe lezártja pedig Λ összes pontját és instabil halmazait is tartalmazza.

Λ stabil és instabil halmazait ennél sokkal egyszerűbben leírhatjuk a σ eltolás segítségével. Legyen

$$s^* = (\dots s_{-2}^* s_{-1}^* \cdot s_0^* s_1^* s_2^* \dots) \in \Sigma_2.$$

Ha $t \in \Sigma_2$ olyan sorozat, amelynek elemei valamely indextől kezdve (pozitív irányban) megegyeznek s^* elemeivel, akkor t az s^* stabil halmazához tartozik (az állítás fordítva is igaz).

Azt is beláthatjuk, hogy az előző fejezet Λ -ja és az ezen fejezetbeli Λ homeomorfak. Definiáljuk a

$$\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma_2$$

leképezést a következő módon:

$$\Phi(s_0 s_1 s_2 \dots) = (\dots s_5 s_3 s_1 \cdot s_0 s_2 s_4 \dots).$$

Könnyen látható, hogy az így definiált Φ homeomorfizmust ad a két halmaz között.

Ellenőrző kérdések:

- Hogyan definiáljuk a Smale-féle patkóleképezést?
- Mi a kapcsolat a Cantor-halmaz és a Smale-patkó között?
- Melyik korábbi leképezéssel ekvivalens topologikusan a patkóleképezés?

4. fejezet

Folytonos dinamikus rendszerek

4.1. Pályák

A jegyzet hátralevő részében folytonos dinamikus rendszerekkel foglalkozunk.

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyitott halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, és tekintsük az

$$x'(t) = f(x(t))$$

differenciálegyenletet. Ennek jobb oldala nem függ t -től explicit módon, ezért röviden így írható:

$$x' = f(x). \quad (4.1)$$

A (4.1) egyenletet *autonóm* differenciálegyenletnek nevezzük. Autonóm egyenletek néhány speciális tulajdonságát tárgyaljuk ebben a részben. A továbbiakban (4.1) megoldása alatt mindig nem folytatható megoldást értünk.

4.1. Lemma. Ha $(a, b) \in \mathbb{R}$, $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a (4.1) egyenlet megoldása (a, b) -n, és $c \in \mathbb{R}$, akkor az $y(t) = x(t + c)$ függvény (4.1) megoldása $(a - c, b - c)$ -n.

Bizonyítás. Ha x értelmezési tartománya (a, b) , akkor az y függvényé $(a - c, b - c)$. Minden $t \in (a - c, b - c)$ esetén $t + c \in (a, b)$, és így

$$y'(t) = x'(t + c) = f(x(t + c)) = f(y(t)).$$

□

Legyen $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a (4.1) egyenlet egy megoldása. A x megoldást ábrázolva $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ -ben a $\{(t, x(t)) : a < t < b\}$ halmazt kapjuk, amit *integrálgörbének* nevezünk. Az x értékkészletét, a

$$\gamma_x := \{x(t) : a < t < b\} \subset \mathbb{R}^n$$

halmazt *pályának* nevezzük.

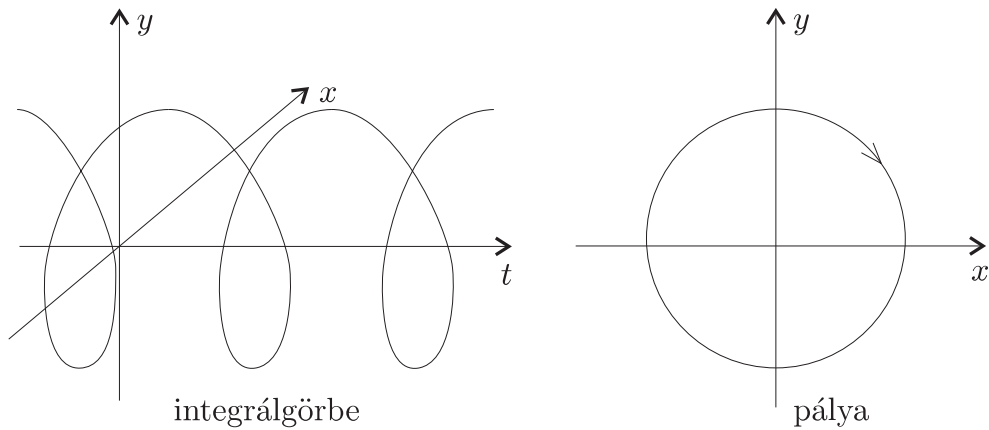
Példaként tekintsük az

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x \end{cases}$$

egyenletrendszert, amelynek minden megoldása

$$x(t) = c \sin(t + d), \quad y(t) = c \cos(t + d)$$

alakú alkalmas $c, d \in \mathbb{R}$ állandókkal. A pályák $|c|$ sugarú, $(0, 0)$ középpontú körvonalak az (x, y) -síkon (4.1. ábra).



4.1. ábra. Az integrálgörbe eggyel magasabb dimenziós térben helyezkedik el, mint a pálya

4.2. Lemma. Legyen $(a, b), (c, d) \subseteq \mathbb{R}$, $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $y: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a (4.1) egyenlet megoldásai, és legyen

$$\gamma_x = \{x(t) : a < t < b\}, \quad \gamma_y = \{y(t) : c < t < d\}.$$

Ekkor vagy $\gamma_x = \gamma_y$, vagy $\gamma_x \cap \gamma_y = \emptyset$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\gamma_x \cap \gamma_y \neq \emptyset$. Ekkor létezik $t_1 \in (a, b)$ és $t_2 \in (c, d)$ úgy, hogy $x(t_1) = y(t_2)$. Legyen $z(t) = y(t + t_2 - t_1)$. A 4.1. Lemma szerint $z(t)$ megoldás a $(c + t_1 - t_2, d + t_1 - t_2)$ intervallumon. Mivel

$$x(t_1) = y(t_2) = z(t_1),$$

és a (4.1) egyenletnek egyetlen $x(t_1) = y(t_2)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása van, ezért $z(t) = y(t)$ minden $t \in (a, b)$ -re, és $a = c + t_1 - t_2$, $d = b + t_1 - t_2$. Innen $\gamma_x = \gamma_y$ következik. $\square$

4.3. Lemma. Legyen $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a (4.1) olyan megoldása, hogy $x(t_1) = x(t_2)$ valamely $a < t_1 < t_2 < b$ esetén. Ekkor $(a, b) = (-\infty, \infty)$, és vagy $x(t)$ állandó, vagy létezik minimális $T > 0$ úgy, hogy $x(t) = x(t + T)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Defináljuk a $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt úgy, hogy $y(t) = x(t)$, ha $t \in [t_1, t_2]$, és y periodikus $t_2 - t_1$ szerint. Ekkor $y(t)$ megoldása (4.1)-nek. Mivel $y(t_1) = x(t_1)$, ezért $(a, b) = (-\infty, \infty)$ és $y(t) = x(t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Jelölje P az x pozitív periódusainak halmazát, és legyen

$$T = \inf P.$$

A $T = 0$ esetben $x(t)$ állandó. Ugyanis ekkor van pozitív periódusok 0-hoz tartó $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata. Minden k egészre és minden $n \geq 1$ egészre $x(k T_n) = x(0)$. Mivel $T_n \rightarrow 0$, minden $t \in \mathbb{R}$ számhoz van $k_n T_n$ alakú számokból álló, t -hez konvergáló sorozat ($k_n = \lfloor \frac{t}{T_n} \rfloor$). Az x folytonossága alapján $x(t) = x(0)$ következik.

Ha $T > 0$, akkor létezik $\{T_n\}$ periódusoknak T -hez tartó sorozata. A $x(t + T_n) = x(t)$ egyenlőségekből és a x folytonosságából következő $x(t + T_n) \rightarrow x(t + T)$ konvergencia felhasználásával $x(t + T) = x(t)$ adódik. Tehát x T -periodikus. A $T = \inf P$ definícióból kapjuk, hogy T a minimális pozitív periódus. $\square$

A 4.3. Lemmában a periodikus megoldás esetében a

$$[0, T] \ni t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$$

görbe egyszerű zárt görbe, azaz $x(0) = x(T)$ és x injektív $[0, T)$ -n. Továbbá

$$\{x(t) : t \in (a, b)\} = \{x(t) : t \in (-\infty, \infty)\} = \{x(t) : t \in [0, T)\}.$$

4.4. Következmény. A (4.1) autonóm differenciálegyenlet tetszőleges pályája háromféle lehet:

- a) önmagát nem metsző görbe;
- b) egyszerű zárt görbe;
- c) egyetlen pont.

A 4.2. Lemma bizonyításából az is adódik, hogy ha $x_0 \in D$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t; 0, x_0)$ a (4.1) egyenlet $x(0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása (a, b) -n, $\varphi(t; t_0, x_0)$ a (4.1) egyenlet $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása (c, d) -n, akkor $a = c - t_0$, $b = d - t_0$ és

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0), \quad \text{ha } t \in (c, d).$$

Tehát autonóm egyenlet esetén elegendő csak az $x(0) = x_0$ alakú kezdeti feltételekhez tartozó megoldásokat vizsgálni, mert ezekből egyszerűen kaphatók az $x(t_0) = x_0$ alakú kezdeti feltételekhez tartozó megoldások.

A továbbiakban jelölje $\varphi(\cdot; x_0)$ a (4.1) egyenlet $x(0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

4.5. Lemma. Legyenek $x_0 \in D$ és $s, t \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy s eleme az $x(\cdot; x_0)$ megoldás I értelmezési tartományának, és t eleme a $\varphi(\cdot; x(s, x_0))$ megoldás J értelmezési tartományának. Ekkor $t + s \in I$, és

$$\varphi(t; \varphi(s; x_0)) = \varphi(t + s; x_0).$$

Bizonyítás. Legyen $y(t) = \varphi(t + s; x_0)$, $t \in I - s = \{u \in \mathbb{R} : u + s \in I\}$; és legyen $z(t) = \varphi(t; \varphi(s; x_0))$, $t \in J$. A y és z függvények a (4.1) egyenlet megoldásai az $I - s$ illetve J intervallumon. Mivel $y(0) = z(0)$, ezért a (4.1) egyenlet $y(0) = z(0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának egyértelműsége alapján $J = I - s$ és $y(t) = z(t)$, $t \in J$, tehát az állítás igaz. $\square$

Ellenőrző kérdések:

- Mi a különbség a pálya és az integrálgörbe között?
- Mit mondhatunk két pályáról, ha azok metszete nem üres?
- Milyen halmaz lehet egy autonóm differenciálegyenlet pályája?

4.2. Határhalmazok

4.6. Lemma. Legyen $p \in D$, és legyen $x(t)$ a (4.1) egyenlet $[0, \infty)$ -en értelmezett olyan x megoldása, amelyre $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$. Ekkor $f(p) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(p) \neq 0$. Ekkor létezik j index úgy, hogy $f_j(p) \neq 0$. Legyen $f_j(p) > 0$. (Az $f_j(p) < 0$ eset hasonló.) Mivel f_j folytonos p -ben, ezért létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\|x - p\| < \delta$ esetén $f_j(x) > f_j(p)/2$. Mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$, ezért van $T > 0$ úgy, hogy $\|x(t) - p\| < \delta$, ha $t \geq T$. Így minden $t \geq T$ esetén

$$\frac{d}{dt}x_j(t) = f_j(x(t)) > \frac{f_j(p)}{2}.$$

Integrálva $[T, t]$ -n azt kapjuk, hogy

$$x_j(t) > x_j(T) + \frac{f_j(p)}{2}(t - T).$$

Innen $\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = \infty$ következik, ami ellentmond annak, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$. Tehát $f(p) = 0$. $\square$

Legyen $x_0 \in D$ olyan, hogy a $\varphi(\cdot; x_0)$ megoldás értelmezési tartománya tartalmazza a $[0, \infty)$ intervallumot.

4.7. Definíció. A $p \in D$ pont a $\varphi(\cdot; x_0)$ megoldás ω -határpontja, ha van olyan nemnegatív számokból álló $\{t_k\}$ sorozat, hogy $t_k \rightarrow \infty$ és $\varphi(t_k; x_0) \rightarrow p$, ha $k \rightarrow \infty$. A $\varphi(\cdot; x_0)$ megoldás ω -határpontjainak halmazát $\omega(x_0)$ -val jelöljük. Az α -határpont és az α -határpontok $\alpha(x_0)$ halmazának definícióját úgy kapjuk, hogy a fenti definícióban $[0, \infty)$ -t $(-\infty, 0]$ -ra és $t_k \rightarrow \infty$ -t $t_k \rightarrow -\infty$ -re cseréljük.

Az $\omega(x_0)$ halmaz tulajdonságait tartalmazza az alábbi tétel. Hasonló állítás igaz $\alpha(x_0)$ -ra.

4.8. Tétel. Legyen a korlátos, zárt $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz és az $x_0 \in D$ pont olyan, hogy $K \subset D$, a $\varphi(\cdot; x_0)$ megoldás értelmezési tartománya tartalmazza $[0, \infty)$ -t, és $\varphi(t; x_0) \in K$, ha $t \geq 0$. Ekkor

- a) $\omega(x_0) \neq \emptyset$, korlátos és zárt;
- b) $\omega(x_0)$ összefüggő, azaz nem létezik két, nemüres, diszjunkt A, B zárt halmaz úgy, hogy $A \cup B = \omega(x_0)$;
- c) $\omega(x_0)$ invariáns, azaz minden $q \in \omega(x_0)$ -re $x(\cdot; q)$ értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, és $\varphi(t; q) \in \omega(x_0)$, ha $t \in \mathbb{R}$;
- d) $\text{dist}(x(t; x_0), \omega(x_0)) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$ (ahol $p \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\text{dist}(p, A) = \inf\{\|p - a\| : a \in A\}$);
- e) $\omega(x_0)$ a legszűkebb d) tulajdonsággal rendelkező halmaz.

Bizonyítás.

- a) Ha (t_k) tetszőleges ∞ -be tartó sorozat, akkor $\varphi(t_k; x_0) \in K$ és a Bolzano–Weierstrass-tétel segítségével kapjuk, hogy van $\{\varphi(t_k; x_0)\}$ -nek egy konvergens részsorozata, amely valamely $p \in K \subset D$ ponthoz tart. Ekkor $p \in \omega(x_0)$.

Mivel $\varphi(t; x_0) \in K$, $t \geq 0$, és K korlátos, zárt, ezért $\omega(x_0) \subset K$ következik. Tehát $\omega(x_0)$ is korlátos.

A zártság igazolásához legyen $p_k \in \omega(x_0)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, $q \in K$ olyan, hogy $p_k \rightarrow q$. Minden $k \in \{1, 2, \dots\}$ -hez létezik $j \in \{1, 2, \dots\}$ úgy, hogy $\|p_j - q\| < 1/(2k)$. A $p_j \in \omega(x_0)$ ponthoz van $t_k > k$ úgy, hogy $\|\varphi(t_k; x_0) - p_j\| < 1/(2k)$. Ekkor

$$\|\varphi(t_k; x_0) - q\| \leq \|\varphi(t_k; x_0) - p_j\| + \|p_j - q\| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

azaz $q \in \omega(x_0)$.

- b) Tegyük fel, hogy A, B nemüres, zárt, diszjunkt halmazok úgy, hogy $A \cup B = \omega(x_0)$. Az (a) állítás alapján A, B korlátos is. Ekkor $\varepsilon = \text{dist}(A, B) > 0$. Legyen

$$A_{\varepsilon/3} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) \leq \frac{\varepsilon}{3}\right\}, \quad B_{\varepsilon/3} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, B) \leq \frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

Mivel $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ és $A \cup B = \omega(x_0)$, ezért létezik $\{t_k\}$ sorozat, amelyre $t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, és minden $k \in \{1, 2, \dots\}$ esetén $\varphi(t_{2k-1}; x_0) \rightarrow a_0 \in A$ és $\varphi(t_{2k}; x_0) \rightarrow b_0 \in B$. A sorozatokat ez alapján választhatjuk már úgy is, hogy

$$\varphi(t_{2k-1}; x_0) \in A_{\varepsilon/3}, \quad \varphi(t_{2k}; x_0) \in B_{\varepsilon/3}$$

teljesüljön. Az $a(t) = \text{dist}(\varphi(t; x_0), A_{\varepsilon/3}) - \text{dist}(\varphi(t; x_0), B_{\varepsilon/3})$, $t \geq 0$, függvény folytonos $[0, \infty)$ -en, $a(t_{2k-1}) < 0$, $a(t_{2k}) > 0$. Létezik $s_k \in (t_{2k-1}, t_{2k})$ úgy, hogy $a(s_k) = 0$. Az $\{s_k\}$ sorozat ∞ -be tart, $\varphi(s_k; x_0) \notin A_{\varepsilon/3} \cup B_{\varepsilon/3}$. Az $\{\varphi(s_k; x_0)\}$ sorozatnak van egy torlódási pontja, amely nem eleme $A \cup B$ -nek, de eleme $\omega(x_0)$ -nek. Ez ellentmond $A \cup B = \omega(x_0)$ -nek. Tehát $\omega(x_0)$ összefüggő.

- c) Legyen $q \in \omega(x_0)$, és legyen $\{t_k\}$ olyan sorozat, amelyre $\varphi(t_k; x_0) \rightarrow q$ és $t_k \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$. Rögzítsük a $t \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy t eleme a $\varphi(\cdot; q)$ megoldás (α, β) értelmezési tartományának. Minden elég nagy k indexre $t_k + t \geq 0$, és így eleme $\varphi(\cdot; x_0)$ értelmezési tartományának. Ezt a tényt, a megoldásoknak a kezdeti adatoktól való folytonos függését és a 4.5. Lemmát alkalmazva

$$\varphi(t; q) = x\left(t; \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k; x_0)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t; \varphi(t_k; x_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t + t_k; x_0),$$

azaz $\varphi(t; q) \in \omega(x_0)$. Mivel $\omega(x_0) \subset D$ korlátos és zárt, a megoldások folytathatóak az egész számegyenesre, $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$.

- d) Ha $(\varphi(t; x_0), \omega(x_0)) \not\rightarrow 0$, akkor van $\varepsilon > 0$ és $t_k \rightarrow \infty$ sorozat úgy, hogy minden k -ra $\text{dist}(\varphi(t_k; x_0), \omega(x_0)) \geq \varepsilon$. Mivel $\varphi(t_k; x_0) \in K$, a $\{\varphi(t_k; x_0)\}$ sorozatnak van q torlódási pontja, amire egyrészt definíció alapján $q \in \omega(x_0)$ teljesül, másrészt $(q, \omega(x_0)) \geq \varepsilon$ következik. Ez ellentmondás. Tehát $(\varphi(t; x_0), \omega(x_0)) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$.
- e) Tegyük fel, hogy egy $\omega(x_0)$ -nél szűkebb U halmazra is teljesül, hogy $\varphi(t, x_0)$ hozzá tart. Vegyünk egy $\omega(x_0)$ -be eső, de U -hoz nem tartozó q pontot. Ehhez $\omega(x_0)$ definíciója szerint létezik egy $t_k \rightarrow \infty$ sorozat úgy, hogy $\varphi(t_k, x_0) \rightarrow q$. Ekkor persze $\text{dist}(\varphi(t_k, x_0), U) \rightarrow \text{dist}(q, U) > 0$, ami ellentmond annak, hogy $\text{dist}(\varphi(t, x_0), U) \rightarrow 0$.

□

Ellenőrző kérdések:

- Mi az α -határhalmaz definíciója?
- Tegyük fel, hogy a differenciálegyenletünk a teljes $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett. Mit mondhatunk egy pont ω -határhalmazáról, ha a belőle induló megoldás korlátos?
- Miért lesz ebben az esetben az ω -határhalmaz összefüggő?

4.3. Ljapunov tételei

Tekintsük ismét a (4.1) differenciálegyenletet.

Tegyük fel, hogy $x_0 \in D$ és $f(x_0) = 0$. Ekkor $x(t) \equiv x_0$ megoldás, amit *egyensúlyi helyzetnek* nevezünk. Ha $x(t)$ a (4.1) egyenlet egy megoldása, akkor az $y(t) = x(t) - x_0$ függvényre

$$y'(t) = x'(t) = f(x(t)) = f(x_0 + y(t))$$

teljesül. Tehát, a $g(y) = f(x_0 + y)$ definícióval, $y(t)$ megoldása az $y' = g(y)$ egyenletnek. Mivel $g(0) = f(x_0) = 0$, az $y' = g(y)$ egyenletnek 0 egyensúlyi helyzete. Az $x(t)$ megoldás pontosan akkor van közel az x_0 egyensúlyi helyzethez, ha az $y' = g(y)$ egyenlet $y(t) = x(t) - x_0$ megoldása közel van a 0 egyensúlyi helyzethez. Így ha egyensúlyi helyzetek közelében értelmezett megoldásokat vizsgálunk, akkor feltehető, hogy $0 \in \mathbb{R}^n$ az egyensúlyi helyzet.

Tegyük fel, hogy $0 \in D$ és $f(0) = 0$. Emlékeztetőül: az $x = 0$ megoldás stabil, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\|x_0\| < \delta$ -ból $\|\varphi(t; x_0)\| < \varepsilon$ következik minden $t \geq 0$ -ra; az $x = 0$ megoldás aszimptotikusan stabil, ha stabil és van $\sigma > 0$ úgy, hogy $\|x_0\| < \sigma$ -ból $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; x_0) = 0$ következik. Az alábbiakban a (4.1) egyenlet $x = 0$ megoldásának stabilitására és aszimptotikus stabilitására keresünk elegendő feltételeket.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ a $0 \in \mathbb{R}^n$ egy nyílt környezete. A $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *pozitív definitnek* nevezzük 0-ban, ha $V(0) = 0$ és $V(x) > 0$ minden $x \in U \setminus \{0\}$ esetén. A $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *negatív definit* 0-ban, ha $-V$ pozitív definit 0-ban.

Például az

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

kvadratikus alak szimmetrikus A mátrix esetén pontosan akkor pozitív definit 0-ban, ha A minden főminora pozitív, azaz

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det A > 0.$$

Ez Sylvester tétele.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyitott halmaz és $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. A V függvénynek a (4.1) rendszer szerinti deriváltján a

$$V'_{(4.1)}(x) = \langle (\text{grad } V)(x), f(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f_j(x)$$

függvényt értjük.

Ha a $\varphi(t)$ függvény a (4.1) egyenlet megoldása (a, b) -n, és $\varphi(t) \in U$ minden $t \in (a, b)$ -re, akkor

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(\varphi(t)) \frac{d}{dt}\varphi_j(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(\varphi(t)) f_j(\varphi(t)) = V'_{(4.1)}(\varphi(t)).$$

Az alábbi két tételt Ljapunov bizonyította.

4.9. Tétel (Ljapunov I. tétele). *Tegyük fel, hogy $U \subset D$ nyitott halmaz, $0 \in U$, és létezik olyan $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre*

i) V pozitív definit 0-ban,

ii) $V'_{(4.1)}(x) \leq 0$ minden $x \in U$ -ra.

Ekkor a (4.1) egyenlet $x = 0$ megoldása stabil.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Válasszuk az $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ számot úgy, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon_0\} \subset U.$$

Legyen

$$\alpha = \min\{V(x) : \|x\| = \varepsilon_0\}.$$

Mivel az $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \varepsilon_0\}$ halmaz korlátos és zárt, amelyen a folytonos V pozitív értéket vesz fel, ezért a minimum létezik, és $\alpha > 0$. A V folytonossága és $V(0) = 0$ alapján létezik $\delta \in (0, \varepsilon_0)$ úgy, hogy

$$V(x) < \alpha, \quad \text{ha } \|x\| < \delta.$$

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $\|x_0\| < \delta$. Legyen $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ maximális úgy, hogy $\varphi(t; x_0)$ értelmezve van $[0, \beta)$ -n. Azt állítjuk, hogy

$$\|\varphi(t; x_0)\| < \varepsilon_0 \quad \text{minden } t \in [0, \beta)\text{-ra.} \quad (4.2)$$

Ha (4.2) nem igaz, akkor létezik $t_0 \in (0, \beta)$ úgy, hogy $\|\varphi(t_0; x_0)\| = \varepsilon_0$ és

$$\|\varphi(t; x_0)\| < \varepsilon_0 \quad \text{minden } t \in (0, t_0)\text{-ra.}$$

Innen $\varphi(t; x_0) \in U$ következik minden $t \in [0, t_0]$ -ra. Így az (ii) feltétel alapján

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t; x_0)) = V'_{(4.1)}(\varphi(t; x_0)) \leq 0 \quad (t \in [0, t_0]).$$

Ezért

$$V(\varphi(t_0; x_0)) \leq V(\varphi(0; x_0)) = V(x_0) < \alpha.$$

Másrészt α definíciójából és $\|\varphi(t_0; x_0)\| = \varepsilon_0$ -ból

$$V(\varphi(t_0; x_0)) \geq \alpha$$

adódik, ami ellentmondás. Tehát (4.2) teljesül.

Mivel az $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon_0\}$ halmaz korlátos és zárt részhalmaza U -nak, a megoldások folytathatósága alapján $\beta = \infty$ következik. Következésképpen az $x = 0$ megoldás stabil. $\square$

Megjegyezzük, hogy a tétel (i) és (ii) tulajdonsággal rendelkező V függvényét *Ljapunov-függvénynek* szokás nevezni.

4.10. Tétel (Ljapunov II. tétele). *Tegyük fel, hogy $U \subset D$ nyitott halmaz, $0 \in U$, és létezik olyan folytonosan differenciálható $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre*

i) V pozitív definit 0-ban;

ii) $V'_{(4.1)}(x)$ negatív definit 0-ban.

Ekkor a (4.1) egyenlet $x = 0$ megoldása aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. A 4.9. Tétel szerint az $x = 0$ megoldás stabil. Legyen $\varepsilon_0 > 0$ olyan, hogy $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon_0\} \subset U$. A stabilitás miatt van $\varepsilon_0 > 0$ -hoz megfelelő $\delta(\varepsilon_0)$. Legyen $\sigma = \delta(\varepsilon_0)$. Azt állítjuk, hogy $\|x_0\| < \sigma$ esetén $\varphi(t; x_0) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített úgy, hogy $\|x_0\| < \sigma$. A $\varphi(t; x_0)$ megoldás definiálva van $[0, \infty)$ -en és

$$\|\varphi(t; x_0)\| < \varepsilon_0 \quad \text{minden } t \geq 0\text{-ra.}$$

Innen $\varphi(t; x_0) \in U$ következik minden $t \geq 0$ -ra. Így, az (ii) feltétel alapján

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t; x_0)) = V'_{(4.1)}(\varphi(t; x_0)) \leq 0 \quad (t \in [0, \infty)).$$

Ezért a nemnegatív

$$[0, \infty) \ni t \mapsto V(\varphi(t; x_0)) \in \mathbb{R}$$

függvény monoton csökken $[0, \infty)$ -en, és létezik a

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi(t; x_0))$$

határérték. A V pozitív definitése miatt $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; x_0) = 0$ igazolásához elegendő megmutatni, hogy $v_0 = 0$. Tegyük fel, hogy $v_0 > 0$. Ekkor

$$V(\varphi(t; x_0)) \geq v_0 \quad \text{minden } t \in [0, \infty)\text{-re.}$$

V folytonossága és $V(0) = 0$ alapján van egy $\gamma > 0$ szám úgy, hogy

$$V(x) < v_0, \quad \text{ha } \|x\| < \gamma,$$

vagyis

$$\gamma \leq \|\varphi(t; x_0)\| \leq \varepsilon_0 \quad \text{minden } t \in [0, \infty) \text{ esetén.}$$

Mivel $V'_{(4.1)}$ folytonos és negatív a korlátos, zárt

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma \leq \|x\| \leq \varepsilon_0\}$$

halmazon, ezért $V'_{(4.1)}$ -nek van μ maximuma ezen a halmazon, és $\mu < 0$. Kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t; x_0)) \leq \mu \quad (t \geq 0).$$

Integrálva $[0, t]$ -n,

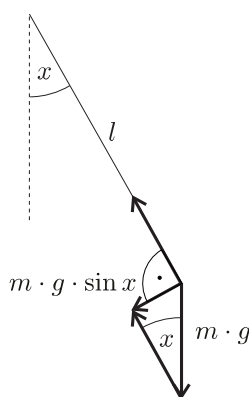
$$V(\varphi(t; x_0)) - V(x_0) \leq \mu t$$

adódik. Ha $t \rightarrow \infty$, akkor innen $V(\varphi(t; x_0)) \rightarrow -\infty$ következik, ami ellentmondás. □

A stabilitáselmélet módszerei leghatásosabban mechanikai példákkal szemléltethetők, hiszen a stabilitás fogalma a mechanikában született meg. Ezek közül a példák közül is a legszemléletesebb a matematikai inga.

A matematikai inga esetén az inga súlytalan rúdjának végén egy m tömegű, kiterjedés nélküli anyagi pont van. A súrlódást és közegellenállást a sebességgel arányosnak tekintjük. Legyen x az inga függőlegestől való eltérése radiánban: az óramutató járásával ellentétes irányt tekintjük pozitívnak. Ekkor az m tömegű anyagi pontra három erő hat:

1. A gravitációs erő: mg , amelynek iránya „lefelé”.
2. Az inga rúdában ébredő kényszererő a gravitációs erő sugárirányú komponensét ellensúlyozza, így a gravitációs erő és az inga rúdában ébredő kényszererő eredője érintőirányú lesz. Tehát ezen két erő eredője (az irányát is figyelembe véve) $-mg \sin(x)$ lesz (ld. a 4.2. ábrát).



4.2. ábra. Az ingára ható erők

3. A súrlódásból és közegellenállásból származó erő: a sebességgel (lx') ellentétes irányú (érintővel párhuzamos) és a sebességgel arányos nagyságú, tehát $-klx'$, ahol $k > 0$ konstans.

Newton 2. törvénye alapján (a tömeg szorozva gyorsulással egyenlő az összes erő eredőjével) kapjuk az

$$mlx'' = -mg \sin(x) - klx'$$

másodrendű egyenletet, amit az $x_1 = x, x_2 = x'$ jelölést használva az

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

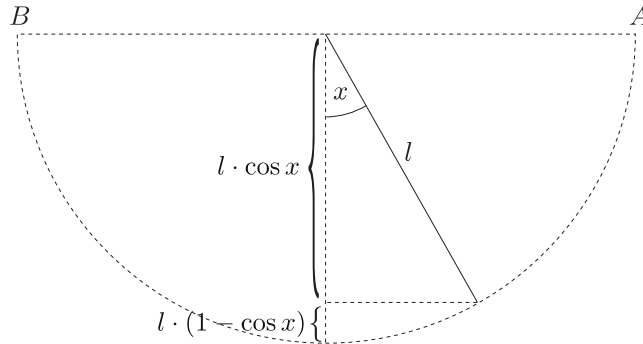
egyenletrendszerre írhatunk át.

Az egyenlet teljesíti a Picard–Lindelöf-tétel feltételeit, így tudjuk, hogy a kezdetiérték-problémának létezik egyértelmű megoldása. Másrészt viszont belátható, hogy ez a megoldás (a triviális megoldásokon kívül) nem írható fel elemi függvényeket használó zárt alakban. Mégis bizonyos dolgokat megállapíthatunk az egyenlet alapján.

Tegyük fel először, hogy az inga csak kicsit tér ki a függőleges egyensúlyi helyzetéből, tehát x „kicsi”. Ekkor $\sin(x)$ körülbelül x , és a modellünket lineárisá tehetjük:

$$mlx'' = -mgx - klx'$$

Ez az egyenlet már gond nélkül megoldható: az $ml\lambda^2 + kl\lambda + mg = 0$ karakterisztikus egyenletből két negatív valós részű sajátértéket kapunk, amelyek a $k^2/m^2 - 4g/l < 0$ feltétel esetén komplexek. Így ez utóbbi esetben („kis fékezés esete”, hiszen k kis értékeinél fordul elő) az inga oszcillálva az alsó egyensúlyi helyzethez tart, míg ha ez nem teljesül („nagy fékezés esete”), akkor az inga legfeljebb egyszer lendül át az egyensúlyi helyzeten és úgy tart hozzá.



4.3. ábra. Az inga végpontja egy körvonalon mozog

Alkalmazzuk Ljapunov első tételét az ingára. Írjuk fel az ingának, mint rendszernek a teljes energiáját, ami a helyzeti és mozgási energiából áll össze. A helyzeti energia (az alsó egyensúlyi helyzetet 0 magasságúnak véve) $mgl(1 - \cos(x))$ lesz, míg a mozgási energia $m(lx')^2/2$ (ld. a 4.3. ábrát). Ekkor tehát

$$E(x, x') = mgl(1 - \cos(x)) + \frac{ml^2(x')^2}{2}$$

Erről könnyen belátható, hogy az alsó egyensúlyi helyzet (vagyis az $(x, x') \equiv (0, 0)$ megoldás) kis környezetében pozitív definit. Számítsuk most ki az energia egyenlet szerinti deriváltját:

$$\begin{aligned} E'(x, x') &= mgl \sin(x)x' + ml^2 x' x'' = mgl \sin(x)x' - lx'(mg \sin(x) + klx') \\ &= -kl^2(x')^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Felhasználva Ljapunov első tételét kapjuk, hogy az $(x, x') = (0, 0)$ egyensúlyi helyzet stabil. Ez viszont még kevés: a „kis kitérés” esetén kapott egyenletből azt sejtjük, hogy az egyensúlyi helyzet aszimptotikusan is stabil. Ljapunov második tétele viszont nem alkalmazható az $E(x, x')$ függvényt használva, hiszen $E'(x, x')$ nem negatív definit.

Módosítsuk egy kicsit az E függvényünket. Ha jobban megnézzük az energiafüggvényünket, akkor kis x esetén $1 - \cos(x)$ körülbelül $x^2/2$, tehát az energia többé-kevésbé az x és x' változók másodfokú függvénye. A teljes másodfokúsághoz már csak egy xx' -t tartalmazó tag szükséges. Legyen tehát

$$\tilde{E}(x, x') = mgl(1 - \cos(x)) + \frac{ml^2(x')^2}{2} + cxx',$$

ahol c egy később meghatározandó konstans. A feladatunk most az, hogy megadjunk egy olyan c számot, amelyre $\tilde{E}$ pozitív definit és $\tilde{E}'$ negatív definit lesz.

Fejtsük Taylor-sorba az $1 - \cos(x)$ függvényt 0 körül:

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Ebből azt kapjuk, hogy $1 - \cos(x) \geq x^2/4$, ha x elég kicsi. Vagyis

$$\begin{aligned}\tilde{E}(x, x') &\geq mgl\frac{x^2}{4} + \frac{ml^2(x')^2}{2} + cxx' \\ &= mgl\frac{x^2}{4} + \frac{ml^2(x')^2}{2} + \frac{c}{2}((x+x')^2 - x^2 - (x')^2) \\ &= \left(\frac{mgl}{4} - \frac{c}{2}\right)x^2 + \left(\frac{ml^2}{2} - \frac{c}{2}\right)(x')^2 + \frac{c}{2}(x+x')^2\end{aligned}$$

Ha c elég kicsi pozitív szám, akkor x^2 és $(x')^2$ együtthatói pozitívak, így megkapjuk, hogy $\tilde{E}$ pozitív definit.

Hasonló ötlettel (bár egy kissé bonyolultabb számolással) azt is megkapjuk, hogy $\tilde{E}'$ negatív definit. Menet közben használjuk ki, hogy x kicsi, tehát $|\sin(x)| > |x|/2$.

$$\begin{aligned}\tilde{E}'(x, x') &= E'(x, x') + c(x')^2 + cxx'' \\ &= -kl^2(x')^2 + c(x')^2 + cx\left(-\frac{g}{l}\sin(x) - \frac{k}{m}x'\right) \\ &\leq (c - kl^2)(x')^2 - \frac{cg}{2l}x^2 - \frac{ck}{m}xx' \\ &= (c - kl^2)(x')^2 - \frac{cg}{2l}x^2 - \frac{cg}{4l}\left(\left(x + \frac{2lk}{gm}x'\right)^2 - x^2 - \left(\frac{2lk}{gm}\right)^2(x')^2\right) \\ &= \left(c - kl^2 + \frac{cg}{4l}\left(\frac{2lk}{gm}\right)^2\right)(x')^2 - \frac{cg}{4l}x^2 - \frac{cg}{4l}\left(x + \frac{2lk}{gm}x'\right)^2\end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben, ha c elég kicsi pozitív szám, akkor az x^2 és az $(x')^2$ együtthatója is negatív, tehát $\tilde{E}'$ valóban negatív definit. Alkalmazva Ljapunov második tételét kapjuk, hogy az $(x, x') = (0, 0)$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.

Ellenőrző kérdések:

- Mikor nevezünk egy függvényt pozitív definitnek?
- Hogyan szólnak Ljapunov tételei?
- Miért módosítottuk az energiafüggvényt a matematikai inga vizsgálata során?

4.4. Linearizálás

Tekintsük ismét a (4.1) differenciálegyenletet. Legyen

$$A = Df(0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right) = (a_{ij}).$$

A D halmazon az

$$R(x) = f(x) - Ax$$

relációval definiált R függvényre $R(0) = 0$ és

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (4.3)$$

teljesül. (Az is igaz, hogy R differenciálható, és $DR(0) = 0$.)

Tekintsük az

$$y' = Ay \quad (4.4)$$

homogén lineáris differenciálegyenletet is. A (4.4) egyenletet a (4.1) egyenlet *linearizáltjává* nevezzük. A (4.4) egyenlet $y = 0$ megoldásának stabilitási tulajdonságait jellemeztük az A mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékeinek segítségével. A (4.3) tulajdonság azt jelenti, hogy 0-hoz közeli x -ekre $f(x)$ és Ax milyen közel vannak egymáshoz. Ez alapján az várható, hogy a (4.1) és a (4.4) egyenletek 0-hoz közeli megoldásai hasonlóan viselkednek. Ezt mutatják az alábbi eredmények.

4.11. Tétel. *Ha a (4.4) egyenlet $y = 0$ megoldása aszimptotikusan stabil (azaz A minden λ sajátértékére $\operatorname{Re} \lambda < 0$), akkor a (4.1) egyenlet $x = 0$ megoldása aszimptotikusan stabil.*

4.12. Tétel. *Ha A -nak van olyan λ sajátértéke, amelyre $\operatorname{Re} \lambda > 0$, akkor a (4.1) egyenlet $x = 0$ megoldása instabil.*

4.13. Tétel. *Ha A minden sajátértékére $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ teljesül, és van olyan λ sajátértéke, amelyre $\operatorname{Re} \lambda = 0$, akkor a (4.1) egyenlet $x = 0$ megoldásának stabilitása illetve aszimptotikus stabilitása R -től is függ.*

A Ljapunov-féle aszimptotikus stabilitási tétel (4.10. Tétel) alkalmazásával bizonyítjuk a 4.11. Tételt.

A 4.11. Tétel bizonyítása. Legyen $\Phi(t)$ a (4.4) egyenlet egy olyan alaplátrixa, amelyre $\Phi(0) = I$. Azaz $\Phi(t)$ oszlopvektorai az $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ megoldások úgy, hogy $y_j(0) = e_j$ (e_j a j -edik báziselem $\mathbb{R}^n$ -ben). Jelölje $\varphi(t; y_0)$ a (4.4) egyenlet $y(0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását. Tudjuk, hogy $\varphi(t; y_0) = \Phi(t)y_0$. Létezik $\mu > 0$ úgy, hogy

$$\operatorname{Re} \lambda_j < -\mu \quad (j \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

Definiáljuk a $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a

$$V(y) = \int_0^\infty \|\varphi(s; y)\|^2 ds$$

formulával. A $\Phi(t)$ alaplátrix minden eleme $\operatorname{Re} e^{\lambda_j t}$ és $\operatorname{Im} e^{\lambda_j t}$ alakú függvények lineáris kombinációja. Ezért létezik $K > 0$ úgy, hogy

$$\|\Phi(t)\| \leq K e^{-\mu t} \quad (t \geq 0).$$

így

$$\|\varphi(s; y)\|^2 = \|\Phi(s)y\|^2 \leq K^2 e^{-2\mu s} \|y\|^2 \quad (s \geq 0),$$

amiből kapjuk, hogy az $\int_0^\infty \|\varphi(s; y)\|^2 ds$ improprius integrál konvergens. Tehát V jól definiált.

A $\varphi(t; y) = \Phi(t)y$ egyenlőség alapján

$$\begin{aligned} V(y) &= \int_0^\infty \|\varphi(s; y)\|^2 ds = \int_0^\infty \langle \Phi(s)y, \Phi(s)y \rangle ds \\ &= \int_0^\infty \langle \Phi^T(s)\Phi(s)y, y \rangle ds = \left\langle \left(\int_0^\infty \Phi^T(s)\Phi(s) ds \right) y, y \right\rangle. \end{aligned}$$

Legyen

$$S = \int_0^\infty \Phi^T(s)\Phi(s) \, ds.$$

Az S mátrix szimmetrikus, mert $(\Phi^T(s)\Phi(s))^T = \Phi^T(s)\Phi(s)$. Tehát

$$V(y) = \langle Sy, y \rangle \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Ebből az előállításból következik, hogy V akárhányszor differenciálható.

A $\varphi(t; y)$ megoldás pontosan akkor azonosan nulla $[0, \infty)$ -en, ha $y = 0$, így V pozitív definit 0-ban.

Annak igazolására, hogy $V'_{(4.1)}$ negatív definit, először $V'_{(4.4)}$ -t becsljük meg. Felhasználva, hogy $\varphi(s; \varphi(t; y)) = \varphi(s+t; y)$ (4.5. Lemma),

$$\begin{aligned} V'_{(4.4)}(y) &= \frac{d}{dt} V(\varphi(t; y)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_0^\infty \|\varphi(s; \varphi(t; y))\|^2 \, ds \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty \|\varphi(s+t; y)\|^2 \, ds \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_t^\infty \|\varphi(u; y)\|^2 \, du \Big|_{t=0} \\ &= -\|\varphi(0; y)\|^2 = -\|y\|^2. \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} V'_{(4.1)}(y) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_j}(y) f_j(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_j}(y) (Ax + R(y))_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_j}(y) (Ax)_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_j}(y) R_j(y) = V'_{(4.4)}(y) + \langle \text{grad } V(y), R(y) \rangle. \end{aligned}$$

Mivel $V(y) = \langle Sy, y \rangle$ és S szimmetrikus, ezért $\text{grad } V(y) = 2Sy$. így

$$|\langle \text{grad } V(y), R(y) \rangle| \leq 2\|S\|\|y\|\|R(y)\|.$$

(4.3) alapján létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$\|R(y)\| \leq \frac{1}{4\|S\|}\|y\|, \quad \text{ha } \|y\| < \delta.$$

Ezért $\|y\| < \delta$ esetén

$$|\langle \text{grad } V(y), R(y) \rangle| \leq \frac{\|y\|^2}{2}.$$

Innen pedig, $\|y\| < \delta$ esetén,

$$V'_{(4.1)}(y) \leq V'_{(4.4)}(y) + |\langle \text{grad } V(y), R(y) \rangle| \leq -\|y\|^2 + \frac{\|y\|^2}{2} = -\frac{\|y\|^2}{2}$$

következik. Tehát $V'_{(4.1)}$ negatív definit 0-ban. A 4.10. Tétel alkalmazásával kapjuk, hogy a (4.1) egyenlet $y = 0$ megoldása aszimptotikusan stabil. $\square$

A 4.12. Tételt itt nem bizonyítjuk.

A 4.13. Tétel bizonyítása. Az egydimenziós $x' = 0$, $x' = x^3$, $x' = -x^3$ egyenletek linearizáltja az $\varphi' = 0$ egyenlet. Itt $A = 0$, és $\lambda = 0$ az egyetlen sajátérték. Az $R(x)$ függvény a három esetben 0 , x^3 illetve $-x^3$.

Az $x' = 0$ egyenlet $x = 0$ megoldása stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

Az $x' = x^3$ egyenlet megoldása

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2tx_0^2}} \quad \left(-\infty < t < \frac{1}{2x_0^2} \right),$$

így az $x = 0$ megoldás instabil.

Az $x' = -x^3$ egyenlet megoldása

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2tx_0^2}} \quad \left(-\frac{1}{2x_0^2} < t < \infty \right),$$

és így az $x = 0$ megoldás aszimptotikusan stabil. $\square$

Alkalmazzuk most az első közelítés (linearizálás) módszerét az ingára, pontosabban az

$$\begin{cases} x_1' = x_2 =: f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

egyenletrendszerre. Ekkor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} y_1 - \frac{k}{m} y_2 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az így kapott egyenlet pontosan megegyezik a „kis kitérés” esetére kapott modellünkkel. Az egyenlet mátrixának sajátértékei tehát negatív valós részűek, így az eredeti inga egyenletünk $(x, x') = (0, 0)$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil. A linearizálással sokkal könnyebben kaptuk meg ezt az eredményt, mint Ljapunov második tételével.

Ellenőrző kérdések:

- Hogyan definiáljuk egy differenciálegyenlet linearizáltját?
- Hogyan függ egy egyensúlyi helyzet stabilitása a linearizált egyenlet mátrixának sajátértékeitől?
- Adjunk példát olyan differenciálegyenletre, amelynek a 0 nem hiperbolikus, de stabil egyensúlyi helyzete.

4.5. A LaSalle-féle invarianciaelv

Emlékeztetőül: $\omega(x_0)$ a $\varphi(t; x_0)$ megoldás ω -határhalmazát jelöli. Korlátos $\varphi(t; x_0)$ megoldás esetén $\omega(x_0)$ nemüres, korlátos, zárt és invariáns (4.8. Tétel). A következő tétel (a LaSalle-féle invarianciaelv) a V függvényről csak annyit tesz fel, amennyit egy energiafüggvény mindig teljesít, persze kevesebbet is állít.

4.14. Tétel (LaSalle-féle invarianciaelv). Legyen $U \subseteq D$ nyitott halmaz, $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre

$$V'_{(4.1)}(x) \leq 0 \quad \text{minden } x \in U \text{ esetén,}$$

és $M = \{x \in U: V'_{(4.1)}(x) = 0\}$. Tegyük fel, hogy $x_0 \in U$ olyan, hogy létezik egy $K \subset U$ korlátos és zárt halmaz, hogy $\varphi(t; x_0) \in K$, minden $t \geq 0$ -ra. Ekkor

$$\omega(x_0) \subset M.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tétel feltételei teljesülnek. Ekkor $\omega(x_0) \subset K$ nemüres. Legyen $v(t) = V(\varphi(t; x_0))$, $t \geq 0$. Feltételeinkből

$$\frac{d}{dt}v(t) = V'_{(4.1)}(\varphi(t; x_0)) \leq 0$$

és

$$v(t) = V(\varphi(t; x_0)) \geq \min_{\xi \in K} V(\xi) \in \mathbb{R}$$

következik minden $t \geq 0$ -ra. Mivel $v(t)$ monoton csökkenő és alulról korlátos, létezik a $v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ határérték. Legyen $p \in \omega(x_0)$ rögzített. Létezik $t_k \rightarrow \infty$ sorozat, amelyre $\varphi(t_k; x_0) \rightarrow p$. Ekkor $V(\varphi(t_k; x_0)) = v(t_k) \rightarrow v_0$ is következik. Az $\omega(x_0) \subset K \subset U$ reláció alapján $p \in U$. A V függvény p -ben való folytonosságából $V(p) = v_0$ következik. Mivel $p \in \omega(x_0)$ tetszőleges volt,

$$\omega(x_0) \subset \{x \in U : V(x) = v_0\}$$

adódik. Ha $q \in \omega(x_0)$, akkor $\omega(x_0)$ invarianciája szerint $\varphi(t; q) \in \omega(x_0)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Innen $V(\varphi(t; q)) = v_0$, $t \in \mathbb{R}$, és így

$$V'_{(4.1)}(q) = \left. \frac{d}{dt}V(\varphi(t; q)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}v_0 \right|_{t=0} = 0$$

következik. Tehát $\omega(x_0) \subset M$. □

A LaSalle-féle invarianciaelvre példaként tekintsük ismét az ingát. Az inga energiafüggvénye teljesíti a LaSalle-tétel feltételeit: nemnegatív, és az egyenlet szerinti deriváltja nempozitív. A tételben szereplő M halmaz ebben az esetben az $x' = 0$ feltételnek megfelelő pontokat tartalmazza (hiszen $E'(x, x') = -kl^2(x')^2$), vagyis

$$M = \{(x, 0) \mid x \in (-\infty, \infty)\}.$$

Ahhoz hogy alkalmazhassuk LaSalle tételét, be kell bizonyítanunk, hogy a vizsgált megoldásunk korlátos. Ténylegesen azt fogjuk bebizonyítani, hogy az inga egyenletének minden megoldása korlátos.

Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy van egy $(x(t), x'(t))$ megoldás, amelyik nem korlátos. Legyen $(x(0), x'(0)) = (x_0, x'_0)$ a kezdeti feltétele a megoldásnak a 0-ban, és legyen $e(t) = E(x(t), x'(t))$. Mivel $E'(x, x') \leq 0$, ezért $e(t)$ monoton csökkenő, tehát $e(t) \leq e(0)$. Felhasználva, hogy az energia magában foglalja a mozgási energiát (is), azt kapjuk, hogy $ml^2(x'(t))^2/2 \leq e(t) \leq e(0)$, amiből felső becslést kapunk $x'(t)$ -re:

$$|x'(t)| \leq \sqrt{\frac{2e(0)}{ml^2}}.$$

Vagyis, mivel a megoldás nem korlátos, ezért a megoldás $x(t)$ komponense lesz nem korlátos. Ha $x'(t_0) = 0$ lenne valamilyen t_0 -ra, akkor a következő két eset lehetséges.

1. Ha $x(t_0) = k\pi$ (vagyis az inga az alsó vagy felső egyensúlyi helyzetben van), akkor a megoldás a továbbiakban az egyensúlyi helyzetben marad, tehát korlátos, ami ellentmond $x(t)$ választásának.
2. Ha nem egyensúlyi helyzetben van a megoldás, akkor a t_0 időpillanatban mozgási energia nincs, a helyzeti energia pedig kisebb, mint a felső egyensúlyi helyzetben a helyzeti energia, így az inga soha többé nem érheti el a felső egyensúlyi helyzetet, tehát korlátos, ami megint ellentmond $x(t)$ választásának.

Azt kaptuk tehát, hogy $x'(t)$ sehol nem lehet 0, előjeltartó. Legyen $x'(t) < 0$, az $x'(t) > 0$ eset hasonlóan vizsgálható. Az inga tehát negatív szögsebességgel (az óramutató járásával egyező irányban) forog körbe, végtelen sokszor teszi meg a kört, $x(t) \rightarrow -\infty$ miközben $t \rightarrow \infty$. Vizsgáljuk meg az inga egy teljes körbefordulását, illetve hogy a 4.3. ábrán bejelölt A és B pontok közötti utat hogyan teszi meg. Legyen az inga a t_1 időpillanatban az A pontban, és a $t_2 > t_1$ időpillanatban a B pontban, és közben az inga csak egy félkörnyi utat tegyen meg.

Először is, mivel a szögsebességre tudjuk az

$$|x'(t)| \leq \sqrt{\frac{2e(0)}{ml^2}}$$

becslést, a π hosszú út (szög) megtételéhez legalább

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2e(0)}{ml^2}}} = l\pi \sqrt{\frac{m}{2e(0)}}$$

idő szükséges ($e(0) = 0$ nem lehetséges, hiszen akkor $x(0) = 2k\pi$ és $x'(0) = 0$ kellene legyen, amiből $x(t) \equiv 2k\pi$ következne).

Másrészt az egész AB íven az inga a B pontban mozog legkisebb sebességgel, hiszen az ív megtétele közben a surlódás és közegellenállás miatt az energia csökken, és az íven az A és B pontokban legnagyobb, és egyenlő a helyzeti energia. A B pontban viszont legalább akkora sebességgel (értsd: mozgási energiával) kell rendelkeznie az ingának, hogy legyőzhesse a felső egyensúlyi helyzetig hátralévő mgl nagyságú helyzetenergia-különbséget. Ebből kapjuk, hogy a B pontban teljesülnie kell az

$$\frac{ml^2(x'(t_2))^2}{2} \geq mgl$$

egyenlőtlenségnek, amiből $x'(t_2) \geq \sqrt{2g/l}$. Mivel a B pontban legkisebb a sebesség, $x'(t) \geq \sqrt{2g/l}$ minden $t \in [t_1, t_2]$ esetén.

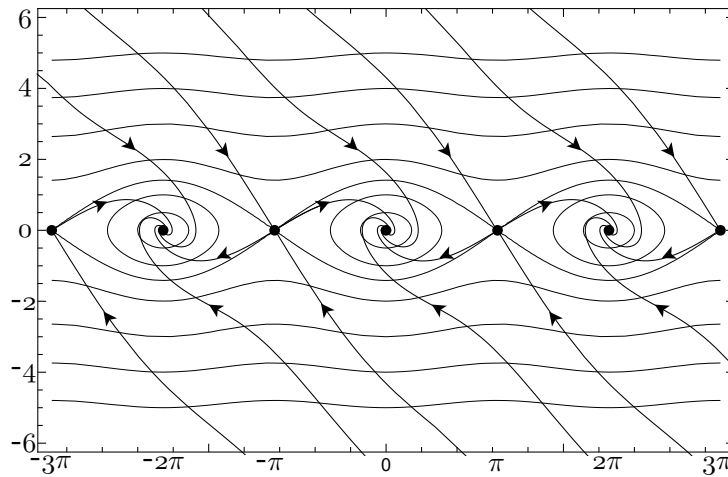
Vizsgáljuk meg most az energia megváltozását a $[t_1, t_2]$ intervallumon:

$$e(t_2) - e(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} e'(t) dt = -kl^2 \int_{t_1}^{t_2} (x'(t))^2 dt \leq -kl^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{2g}{l} dt \leq -2kg l T < 0,$$

vagyis az energia minden kör megtétele közben csökken legalább egy konstans értékkel, ami csak a kezdeti energiaértéktől függ. Ha $x(t)$ valóban mínusz végtelenbe tartana, akkor az energia $-\infty$ -be kellene tartson, ami nem lehetséges, hiszen nemnegatív. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy az inga minden megoldása korlátos.

Alkalmazhatjuk tehát a LaSalle-féle invarianciaelvet: minden megoldás határhalmaza az $M = \{(x, 0)\}$ halmaz része. Mivel a határhalmaz invariáns, ezért egy a határhalmazban

levő $(x_0, 0)$ pontból induló megoldás a határhalmazban (tehát M -ben is) marad. Ebből kapjuk, hogy $x'(t) \equiv 0$ minden határhalmazbeli kezdeti feltétel esetén, így $x(t) \equiv x_0$ kell legyen, vagyis x_0 egyensúlyi helyzetet ad meg, $x_0 = k\pi$. A határhalmaz tehát csak $(k\pi, 0)$ alakú pontokat tartalmazhat. Felhasználva, hogy a határhalmaz nem üres és összefüggő, megkapjuk, hogy a határhalmaz csak egy $\{(k\pi, 0)\}$ alakú, egyetlen pontot tartalmazó halmaz lehet, és a megoldás ehhez a ponthoz tart.



4.4. ábra. Az energia szintvonalai és az ingaegyenlet fázisképe

Összefoglalva: az inga minden megoldása korlátos, és az alsó vagy felső egyensúlyi helyzetek valamelyikéhez tart. Linearizálással már bebizonyítottuk, hogy az alsó egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil. Ugyanilyen könnyen belátható, hogy a felső egyensúlyi helyzet instabil. A gyakorlatban tehát az inga az alsó egyensúlyi helyzethez fog tartani, a felső egyensúlyi helyzethez való tartás nem megvalósítható.

Ellenőrző kérdések:

- Mondjuk ki a LaSalle-féle invarianciaelvet.
- Miért fontos az a feltétel, hogy a megoldás egy kompakt halmazban halad?
- Hogyan alkalmaztuk a LaSalle-féle invarianciaelvet a matematikai ingára?

4.6. Poincaré-leképezés

Egyensúlyi helyzetek stabilitását tudjuk vizsgálni linearizálás vagy Ljapunov-függvény segítségével, de periodikus megoldásokat még nem. Erre fogjuk használni a Poincaré-leképezést, amelyhez szükségesek a következő definíciók.

4.15. Definíció. Ha $x \in D$, akkor I_x jelöli azt az intervallumot, amelyen a $\varphi(x)$ megoldás értelmezve van. Ez a Picard–Lindelöf-tétel szerint (f -re szokás szerint feltéve a megfelelő regularitási feltételeket) egy nyílt intervallum, ezen túl nem folytatható a megoldás.

4.16. Definíció. Az n dimenziós tér egy *egy kodimenziós* ($n - 1$ dimenziós) *részsokasága* egy olyan $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz, amely előáll $\Sigma = \{x \in U \mid S(x) = 0\}$ alakban, ahol S az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett folytonosan differenciálható függvény, és $\text{grad } S(x) \neq 0$ az $x \in \Sigma$ pontokban.

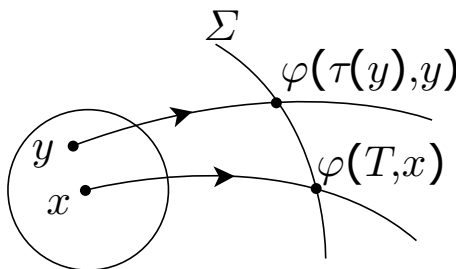
4.17. Definíció. A Σ sokaság *transzverzális* az f által meghatározott vektormezőre, ha teljesül, hogy $\langle \text{grad } S(x), f(x) \rangle \neq 0$ minden $x \in \Sigma$ esetén.

4.18. Példa. Az alábbi leképezések közül melyik határoz meg a két dimenziós térben egy egy kodimenziós sokaságot?

$$S(x, y) = x, \quad S(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad S(x, y) = x^2 - y^2 - 1, \quad S(x, y) = x^2 + y^2.$$

Ezek közül melyek transzverzálisak az $f(x, y) = (x, -y)$, $f(x, y) = (1, 0)$, $f(x, y) = (0, 1)$ vektormezőkre?

4.19. Lemma. Legyen $x \in D$ és $T \in I_x$. Legyen Σ egy f -re transzverzális egy kodimenziós sokaság úgy, hogy $\varphi_T(x) \in \Sigma$. Ekkor létezik olyan U környezete x -nek és egy $\tau \in C^1(U)$ függvény, hogy $\tau(x) = T$ és $\varphi_{\tau(y)}(y) \in \Sigma$ minden $y \in U$ -ra.



4.5. ábra. Egy transzverzális egy megfelelően kis környezetből induló többi megoldás is metsz

Bizonyítás. Tekintsük az $S(\varphi_t(y)) = 0$ egyenletet, amely teljesül (T, x) -re. Mivel Σ transzverzális f -re, és $\varphi_T(x) \in \Sigma$, ezért van olyan $I \times U$ környezete a (T, x) pontnak, hogy minden $(t, y) \in I \times U$ -ra

$$\frac{\partial}{\partial t}(S(\varphi_t(y))) = \langle \text{grad } S(\varphi_t(y)), f(\varphi_t(y)) \rangle \neq 0.$$

Az implicitfüggvény-tétel szerint (esetleg U további megszorítása mellett) van olyan $\tau \in C^1(U)$ függvény, hogy minden $y \in U$ -ra $S(\varphi_{\tau(y)}(y)) = 0$ tehát $\varphi_{\tau(y)}(y) \in \Sigma$. $\square$

4.20. Definíció. A fenti jelölésekkel, ha x egy periodikus pont és T a periódusa, akkor a $P_\Sigma(y) = \varphi_{\tau(y)}(y)$ leképezés a *Poincaré-leképezés*. Ez a leképezés Σ egy részhalmazát Σ -ra képezi, ennek minden fixpontja az egyenlet egy periodikus pályának felel meg.

4.21. Definíció. Egy $\gamma \subseteq D$ periodikus pálya stabil, ha γ minden U nyílt környezetéhez van olyan V környezete γ -nak, hogy $\varphi_t(V) \subseteq U$, $t \geq 0$.

4.22. Definíció. Egy $\gamma \subseteq D$ periodikus pálya aszimptotikusan stabil, ha γ minden U nyílt környezetéhez van olyan V környezete γ -nak, hogy $\varphi_t(V) \subseteq U$, $t \geq 0$, és minden $x \in V$ -re

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x), \gamma) = 0.$$

4.23. Példa. Polár-koordinátarendszerben az

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \phi' = -1 \end{cases}$$

egyenletrendszer origó középpontú koncentrikus köröket ad pályának. Ezt átírhatjuk Descartes-koordinátarendszerbe: $x(t) = r(t) \cos \phi(t)$ és $y(t) = r(t) \sin \phi(t)$, ahonnan

$$\begin{aligned} x' &= (r \cos \phi)' = r' \cos \phi - r \sin \phi \cdot \phi' = r \sin \phi = y \\ y' &= (r \sin \phi)' = r' \sin \phi + r \cos \phi \cdot \phi' = -r \cos \phi = -x, \end{aligned}$$

ami nem más, mint a linearizált inga elsőrendű egyenletrendszerré transzformált speciális esete. Ebben a esetben a $\Sigma = (0, \infty) \times \{0\}$ félegyenesen a Poincaré-leképezés az identitás, minden pont periodikus pályát határoz meg, amelyek nem aszimptotikusan stabilak, de stabilak.

4.24. Példa. Módosítsuk az előző egyenletrendszert:

$$\begin{cases} r' = 1 - r, \\ \phi' = -1, \end{cases}$$

ekkor

$$\begin{aligned} x' &= (r \cos \phi)' = r' \cos \phi - r \sin \phi \cdot \phi' = (1 - r) \cos \phi + r \sin \phi \\ &= \left(\frac{1}{r} - 1 \right) r \cos \phi + r \sin \phi = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) x + y, \\ y' &= (r \sin \phi)' = r' \sin \phi + r \cos \phi \cdot \phi' = (1 - r) \sin \phi - r \cos \phi \\ &= \left(\frac{1}{r} - 1 \right) r \sin \phi - r \cos \phi = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) y - x. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenletrendszeren nem igazán látszik, de az eredeti polárkoordinátás rendszerben nyilván $r(t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$ (ha $r(0) > 0$), így az origó kivételével (ahol a Descartes-féle koordinátarendszerben felírt egyenlet nincs értelmezve) minden megoldás tart egy periodikus pályához, amely egy 1 sugarú körvonal, és periódusa 2π (a ϕ -re vonatkozó egyenletből vagy a második egyenletrendszerrel egy $x^2(0) + y^2(0) = 1$ kezdeti feltételből induló megoldásból). Ebben az esetben a Poincaré-leképezés már bonyolultabb. Oldjuk meg az $r' = 1 - r$ egyenletet: $r(t) = 1 + (r(0) - 1)e^{-t}$. Ekkor $r(t + 2\pi) = 1 + (r(t) - 1)e^{-2\pi}$ is teljesül minden t -re, ez viszont a rendszer ϕ -beli 2π periodikussága miatt a $\phi(0) = 0$ kezdeti feltétellel pontosan a Poincaré-leképezést adja:

$$P(r) = 1 + (r - 1)e^{-2\pi}.$$

Ez tekinthető egy diszkrét dinamikus rendszernek, amelyről könnyen belátható, hogy minden pályája 1-hez tart. A fenti 1 sugarú körvonal egy aszimptotikusan stabil periodikus pálya.

4.25. Definíció. Egy dinamikus rendszer *zárt pályája* alatt egy nemtriviális periodikus megoldás pályáját értjük.

4.26. Tétel. A Poincaré-leképezés x fixpontja akkor és csak akkor (aszimptotikusan) stabil, ha a dinamikus rendszer $\gamma(x)$ zárt pályája (aszimptotikusan) stabil.

Bizonyítás. Ha a $\gamma(x)$ pálya (aszimptotikusan) stabil, akkor a definícióban szereplő jelöléseket használva a P Poincaré-leképezéshez x -nek minden $\tilde{U} = U \cap \Sigma$ környezethez találhatunk egy $\tilde{V} = V \cap \Sigma$ környezetét, hogy ha $y \in \tilde{V}$, akkor $P^k(y) \in \tilde{U}$ (és $P^k(y) \rightarrow x$), ami pontosan az x pont (aszimptotikus) stabilitását jelenti a Poincaré-leképezés mellett.

Fordítva tegyük fel, hogy x (aszimptotikusan) stabil fixpontja P -nek. Legyen U környezete a $\gamma(x)$ pályának, és $\tilde{U} \subseteq U \cap \Sigma$ olyan környezete x -nek Σ -ban, hogy $\varphi_t(\tilde{U}) \subseteq U$ minden $t \in [0, T + 1]$ -re, és $\tau(y) \leq T + 1$ ebben a környezetben. Mivel x stabil, ezért van olyan $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ környezete x -nek, hogy $P^k(\tilde{V}) \subseteq \tilde{U}$ minden k -ra. Legyen $V \subseteq \cup_{t \in [0, T+1]} \varphi_t(\tilde{V})$. Ekkor $y \in V$ esetén van olyan $z \in \tilde{V}$ és $t_0 \in [0, T + 1]$, hogy $y = \varphi_{t_0}(z)$. Mivel $z_k = P^k(z) \in \tilde{U}$ és $\varphi_t(y) = \varphi_s(z_k) \in U$ valamely $k \geq 0$ -ra és $s \in [0, T + 1]$ -re, ezért $\varphi_t(V) \subseteq (U)$. $\square$

4.27. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\gamma(x)$ az f periodikus pályája. Ha a Poincaré-leképezés minden sajátértéke az egységgörön belül van, akkor a periodikus pálya aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. Ha a Poincaré-leképezés fixpontja aszimptotikusan stabil, akkor készen vagyunk. Ezért elegendő belátni a következő lemmát.

4.28. Lemma. *Ha egy f diszkrét dinamikai rendszernek p egy k -periodikus pontja és $(f^k)'(p)$ minden sajátértéke az egységgörön belül van, akkor az aszimptotikusan stabil, attraktor.*

Bizonyítás. Mivel minden sajátértéke az egységgörön belül van, ezért lehet találni egy olyan normát, amelyben $\|(f^k)'(p)\| < \sigma < 1$. Mivel a norma folytonos is, ezért van olyan U környezete p -nek, hogy minden $x \in U$ -ra $\|(f^k)'(x)\| \leq \sigma$. Ekkor az is teljesül, hogy

$$\|f^k(x) - p\| = \|f^k(x) - f^k(p)\| \leq \sigma \|x - p\|,$$

amiből

$$\|f^{kl}(x) - p\| \leq \sigma^l \|x - p\| \rightarrow 0,$$

vagyis $f^{kl}(x) \rightarrow p$. □

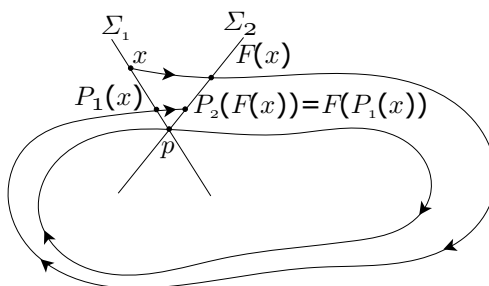
4.29. Lemma. *Ha egy f diszkrét dinamikai rendszernek p egy k -periodikus pontja és $(f^k)'(p)$ minden sajátértéke az egységgörön kívül van, akkor az repellor.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző állítást f inverzére. □

□

4.30. Tétel. *A Poincaré-leképezés sajátértékei függetlenek a Σ transzverzális választásától.*

Bizonyítás. Legyen Σ_1 és Σ_2 két transzverzális a p periodikus pontban. A 4.19. Lemma szerint a p ponthoz és a $T = 0$ -hoz is van olyan leképezés, ami a p egy környezetét rendeli a Σ_2 -höz az ott definiált módon, jelöljük ennek a leképezésnek a Σ_1 -re való megszorítását F -fel. Tehát $F: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ olyan leképezés, ami megadja a pályákon a Σ_1 -beli pontokhoz legközelebb eső Σ_2 -beli pontot. Ha $x \in \Sigma_1$ elég közel van p -hez, akkor a 4.19. Lemma alapján azt is tudjuk, hogy x pályája metszi Σ_2 -t, aztán körülbelül egy periódus múlva Σ_1 -et és újra Σ_2 -t. Legyen P_1 a Σ_1 -hez, és P_2 a Σ_2 -höz tartozó Poincaré-leképezés.



4.6. ábra. A bizonyításban használt pályák, pontok, transzverzálisok

A 4.6 ábráról leolvasható, hogy $P_2(F(x)) = F(P_1(x))$, vagyis F topologikus ekvivalenciát ad P_1 és P_2 között. Ráadásul, mivel a Σ_1 , Σ_2 -t meghatározó S_1 és S_2 leképezések folytonosan differenciálhatóak, és a dinamikus rendszert meghatározó egyenlet jobb oldala is

folytonosan differenciálható (amiből következik a kezdeti feltételektől való folytonosan differenciálható függés is), ezért a F diffeomorfizmus. Differenciáljuk a $P_2(F(x)) = F(P_1(x))$ egyenlőséget a p pontban, és használjuk ki, hogy $F(p) = p$, $P_1(p) = p$ és $P_2(p) = p$, és kapjuk, hogy

$$P'_2(p)F'(p) = P'_2(F(p))F'(p) = F'(P_1(p))P'_1(p) = F'(p)P'_1(p).$$

Mivel F invertálható, ezért a deriváltja egy nemelfajuló mátrix, annak inverzével beszorozva kapjuk, hogy $P'_1(p) = (F'(p))^{-1}P'_2(p)F'(p)$. Vagyis a $P'_1(p)$ és $P'_2(p)$ mátrixok hasonlóak, így a sajátértékeik ugyanazok. $\square$

Ellenőrző kérdések:

- Mikor nevezünk egy sokaságot transzverzálisnak?
- Hogyan definiálhatunk Poincaré-leképezést?
- Hogyan függnek a Poincaré-leképezés sajátértékei a transzverzális sokaság választásától?

4.7. A Poincaré–Bendixson-tétel

A továbbiakban kétdimenziós téren ható dinamikus rendszereket vizsgálunk. Két dimenzióban nagyon hasznos állítás a Jordan-féle görbetétel.

4.31. Tétel (Jordan-féle görbetétel). *Minden Jordan-görbe (az S_1 körvonallal homeomorf zárt görbe) az $\mathbb{R}^2$ -et pontosan 2 részre bontja.*

4.32. Definíció. $\mathbb{R}^2$ -en egy Σ egy kodimenziós sokaság egy egy dimenziós görbevonalon, amely egy folytonosan differenciálható $s(t)$ leképezéssel ($s: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$) van megadva, ahol $s'(t) \neq 0$. Az s leképezés a görbe egy paraméterezése.

Az s leképezés megad egy rendezést a Σ -n, ugyanazt a rendezést, ami a paraméteren van.

4.33. Definíció. Az f által meghatározott dinamikus rendszernek x egy reguláris pontja, ha $f'(x) \neq 0$.

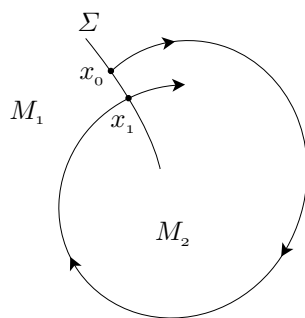
4.34. Definíció. Az x_0 pont pozitív pályája a $\gamma_+(x_0) = \{\varphi_t(x_0) \mid t \geq 0\}$.

4.35. Definíció. Az x_0 pont negatív pályája a $\gamma_-(x_0) = \{\varphi_t(x_0) \mid t \leq 0\}$.

4.36. Tétel. Legyen x_0 az f egy reguláris pontja, Σ transzverzális f -re, és $x_0 \in \Sigma$. Legyen $x_k = \varphi_{t_k}(x_0)$ a $\gamma_\sigma(x_0)$ pálya ($\sigma \in \{+, -\}$) Σ -val vett metszéspontjainak t_k szerint rendezett sorozata. Ekkor x_k monoton a Σ rendezése szerint.

Bizonyítás. Csak a $\sigma = +$ esetet vizsgáljuk, a másik eset hasonlóan belátható.

Ha $x_0 = x_1$, akkor készen vagyunk: egy periodikus pályát kaptunk, és $x_k = x_0$ nyilván rendezett. Különböztetünk az J görbét, amelyik a $\gamma_+(x_0)$ -nak x_0 -t x_1 -gyel összekötő darabjából és Σ -nak x_1 -et x_0 -al összekötő darabjából áll össze. Ez egy zárt, folytonos, önmagát nem metsző görbe, tehát Jordan-görbe. Legyenek a J által részekre bontott sík darabjai M_1 és M_2 .

4.7. ábra. A $\gamma_+ \subseteq M_2$ eset: M_2 -be csak befelé haladhat megoldás

Tekintsük a Σ -nak x_0 -t x_1 -gyel összekötő $\tilde{\Sigma}$ darabját. Ezen a görbén az f iránymezője csak egy irányba mutathat, hiszen menet közben nem válthat irányt a transzverzálitás miatt. Következésképpen a $\gamma_+(x_1) \subseteq M_1$ és a $\gamma_+(x_1) \subseteq M_2$ közül pontosan az egyik teljesül. Sőt, ha $x_0 < x_1$, akkor $\gamma_+(x_1)$ abban a komponensben kell maradjon, amely tartalmazza a Σ x_1 -nél nagyobb pontjait is, míg $x_0 > x_1$ esetén $\gamma_+(x_1)$ abban a komponensben kell maradjon, amely tartalmazza a Σ x_1 -nél kisebb pontjait is (4.7. ábra). Ezt az eljárást megismételve kapjuk az állítást. $\square$

Az alábbi állítások (megfelelően átalakítva) az α határhalmazra is beláthatóak, nem mondjuk ki azokat külön.

4.37. Következmény. Legyen Σ egy transzverzális görbe, $x_0 \in \Sigma$. Ekkor $\omega(x_0)$ legfeljebb egy pontban metszheti Σ -t.

Bizonyítás. Ha $y \in \Sigma \cap \omega(x_0)$, akkor van olyan $s_k \rightarrow \infty$ sorozat, hogy $\varphi_{s_k}(x_0) \rightarrow y$. Ekkor a 4.19. Lemma szerint találhatunk olyan $\tilde{s}_k = s_k + \tau(\varphi_{s_k}(x_0))$ pontokat, hogy $\varphi_{\tilde{s}_k}(x_0) \rightarrow y$, és $\varphi_{\tilde{s}_k}(x_0) \in \Sigma$, de akkor $\varphi_{\tilde{s}_k}(x_0)$ az x_k egy részsorozata kell legyen. Mivel a monoton x_k sorozat vagy konvergens vagy végtelenbe divergál, ezért ebből következik, hogy $x_k \rightarrow y$. Ezért nem lehet két különböző metszéspontja az $\omega(x_0)$ -nak Σ -val. $\square$

4.38. Következmény. Tegyük fel, hogy $\omega(x) \cap \gamma_+(x) \neq \emptyset$. Ekkor x periodikus, és $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma(x)$.

Bizonyítás. Legyen $y \in \omega(x) \cap \gamma_+(x)$. Ha y fixpont, akkor $\gamma(x) = \omega(x) = \alpha(x) = \{y\}$, és készen vagyunk. Ha nem ez a helyzet, akkor y reguláris, és vehetünk egy Σ transzverzálíst, ami tartalmazza y -t. Legyen $x_k \in \Sigma \cap \gamma_+(x)$ úgy, hogy $x_k \rightarrow y$. Másrészt, mivel $y \in \gamma_+(x)$, ezért $\gamma_+(y) \cap \gamma_+(x) = \gamma_+(y) \subseteq \omega(x)$, így egy küszöbszámtól kezdve $x_k \in \omega(x)$ is teljesül. Az előző állítás szerint az $\omega(x)$ csak egy pontban metszheti Σ -t, így $x_k = y$, $\gamma(y) = \gamma(x)$, tehát x periodikus. $\square$

4.39. Definíció. Egy C halmaz pozitív invariáns (a dinamikus rendszerre nézve), ha minden $x \in C$ esetén $\varphi_t(x) \in C$, $t \geq 0$.

4.40. Definíció. Egy C halmaz negatív invariáns (a dinamikus rendszerre nézve), ha minden $x \in C$ esetén $\varphi_t(x) \in C$, $t \leq 0$.

4.41. Definíció. Egy C halmaz invariáns (a dinamikus rendszerre nézve), ha pozitív és negatív invariáns is.

4.42. Következmény. Egy minimális, kompakt, pozitív invariáns C halmaz egy periodikus pálya.

Bizonyítás. Legyen $x \in C$. Ekkor $\omega(x) = C$ a pozitív invariancia és a minimalitás miatt, és így $\gamma_+(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$. Az előző következmény szerint akkor x periodikus. $\square$

4.43. Lemma. Ha $\omega(x) \neq \emptyset$, kompakt és nem tartalmaz fixpontot, akkor $\omega(x)$ egy reguláris periodikus pálya (nem fixpont és periodikus).

Bizonyítás. Legyen $y \in \omega(x)$, és vegyünk egy $z \in \omega(y) \subseteq \omega(x)$ nem fixpontot. Legyen Σ transzverzális, $z \in \Sigma$ és $y_k \in \Sigma \cap \gamma_+(y)$ egy z -hez tartó sorozat. Mivel

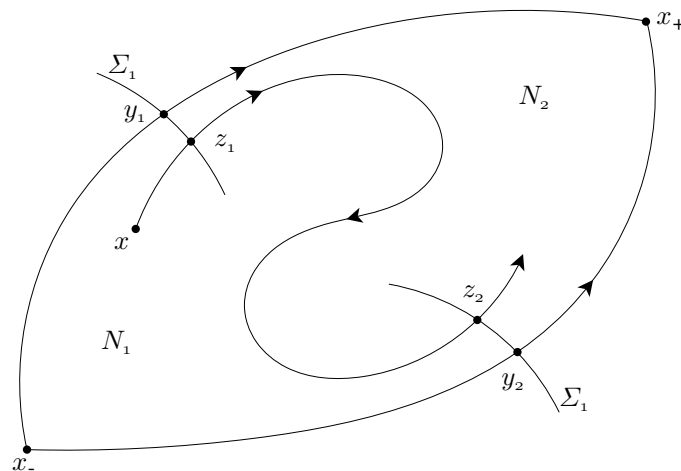
$$\Sigma \cap \gamma_+(y) \subseteq \Sigma \cap \omega(x) = \{z\},$$

ezért $y_k = z$, tehát y pályája periodikus. Az x pályája Σ -t monoton módon metszi, és a metszéspontoknak z -hez kell tartaniuk, ezért $\omega(x)$ csak az y pályája lehet, egy periodikus pálya. $\square$

4.44. Lemma. Ha $\omega(x)$ összefüggő és tartalmaz egy $\gamma(y)$ reguláris periodikus pályát, akkor $\omega(x) = \gamma(y)$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\tilde{y} \in \gamma(y)$ egy olyan pont, amelyikhez (az összefüggőségéből következően) található tetszőlegesen közel $\omega(x) \setminus \gamma(y)$ -beli z pont. Vegyünk egy Σ transzverzálisat, ami tartalmazza $\tilde{y}$ -t. Ehhez találhatunk $\varphi_{\tau(z)}(z) \in \Sigma$ pontot, de akkor $\varphi_{\tau(z)}(z) \in \Sigma \cap \omega(x) = \{\tilde{y}\}$, és $z \in \gamma(y)$, ami ellentmond z választásának. $\square$

4.45. Lemma. Legyen $x \in D$ és tegyük fel, hogy $\omega(x)$ kompakt. Legyenek $x_{\pm} \in \omega(x)$ különböző fixpontok. Ekkor legfeljebb egy olyan $\gamma(y) \subseteq \omega(x)$ pálya van, amelyik ezt a két fixpontot összeköti, vagyis amelyre $\{x_+\} = \omega(y)$ és $\{x_-\} = \alpha(y)$ vagy fordítva.



4.8. ábra. Az az eset, amikor x az y_1 és az y_2 pályája által határolt korlátos síkrészben van

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két ilyen pálya is van: $\gamma(y_1)$ és $\gamma(y_2)$. A két pályát lezárhatjuk az $x_{\pm}$ pontokkal folytonosan, és a két pálya együttesen egy J Jordan-görbét ad, amely a síkot M_1 és M_2 részre bontja. $x \in J$ nem lehetséges, mert akkor $x = x_+$ vagy $x = x_-$ és akkor a másik pont nincs $\omega(x)$ -ben, vagy $x \in \gamma(y_1)$ (például), amikor $\omega(x) = \{x_+\}$ vagy $\omega(x) = \{x_-\}$, ami megint ellentmondás. Tegyük fel, hogy $x \in M_1$. Vegyünk $\Sigma_{1,2}$

transzverzálisokat az $y_{1,2}$ pontokon keresztül. Ekkor $\gamma_+(x)$ metszi ezeket a transzverzálisokat a $z_{1,2}$ pontokban, és az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az x pozitív pályája z_1 és z_2 között már nem metszi a $\Sigma_{1,2}$ transzverzálisokat. Vegyük a következő Jordan-görbét: y_1 -től z_1 -ig a Σ_1 -en, z_2 -ig a $\gamma_+(x)$ -en, y_2 -ig a Σ_2 -n, x_+ -ig a $\gamma(y_2)$ -n és vissza az y_1 -be a $\gamma(y_1)$ -en (4.8. ábra). Ez két részre bontja M_1 -et, legyenek ezek N_1 és N_2 , méghozzá úgy, hogy $\gamma_+(z_1)$ vagy $\gamma_+(z_2)$ az egyikben belül kell maradjon, mondjuk N_2 -ben. De ekkor $\gamma_+(x)$ nem maradhat közel a $\gamma(y_{1,2}) \cap N_1$ pályához, ami ellentmond annak, hogy $\gamma(y_{1,2}) \cap N_1 \subseteq \omega(x)$. $\square$

4.46. Definíció. Két különböző fixpontot a fenti értelemben összekötő pálya egy *heteroklinikus pálya*.

4.47. Definíció. Egy fixpontot a fenti értelemben önmagával összekötő pálya egy *homoklinikus pálya*.

Ezek után kimondhatjuk a Poincaré–Bendixson-tételt.

4.48. Tétel (Poincaré–Bendixson). *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, f folytonosan differenciálható D -en, $x \in D$ és tegyük fel, hogy $\omega(x)$ nem üres, kompakt, összefüggő, és csak véges sok fixpontot tartalmaz. Ekkor a következő állítások egyike teljesül:*

- a) $\omega(x)$ egy fixpont;
- b) $\omega(x)$ egy reguláris periodikus pálya;
- c) $\omega(x)$ előáll véges sok fixpont, és az azokat egyértelmű módon összekötő pályák uniójaként.

Bizonyítás. Ha $\omega(x)$ -ben nincs fixpont, akkor az egy reguláris periodikus pálya az előző állítások szerint. Ha $\omega(x)$ -ben van egy p fixpont, de nincs reguláris pont, akkor $\omega(x) = \{p\}$ kell legyen, mert a fixpontok izoláltak, és $\omega(x)$ összefüggő.

Maradt még az az eset, amikor $\omega(x)$ -ben vannak fixpontok és reguláris pontok is. Meg kell mutatnunk, hogy ha $y \in \omega(x)$ reguláris, akkor $\omega(y)$ és $\alpha(y)$ fixpontok. Ehhez elegendő belátni, hogy ezek a halmazok nem tartalmaznak reguláris pontokat. Tegyük fel indirekt, hogy $z \in \omega(y)$ reguláris ($\alpha(y)$ -ra a bizonyítás hasonlóan megy). Vegyünk egy z -t tartalmazó Σ transzverzális, és egy $y_k \in \gamma(y) \cap \Sigma$ sorozatot úgy, hogy $y_k \rightarrow z$. Egy előbbi következmény szerint $\gamma(y) \subseteq \omega(x)$ csak egy pontban metszheti Σ -t, z -ben. Így $y_k = z$ és $\gamma(y)$ reguláris periodikus pálya, amiből $\gamma(y) = \omega(x)$, és ez ellentmond annak, hogy $\omega(x)$ fixpontokat is tartalmaz. Összefoglalva tehát a reguláris pontok pályái $\omega(x)$ fixpontjait kötik össze, ezen pályák egyértelműségéből pedig már következik az állítás. $\square$

4.49. Tétel. *Egy periodikus pálya belseje mindig tartalmaz fixpontot.*

Bizonyítás. Egy periodikus pálya belseje mindig homeomorf a körlappal. Tekintsük a φ_{t_k} leképezéseket, ahol $t_k \rightarrow 0$, és ezek fixpontjait jelöljük x_k -val. Mivel a periodikus pálya belsejének lezártja kompakt, ezért az x_k sorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat, jelöljük ezt ismét x_k -val, $x_k \rightarrow x$. Rögzítsünk egy $t > 0$ számot, és válasszuk $l_k \in \mathbb{N}_0$ -t úgy, hogy $0 \leq t - l_k t_k < t_k$ legyen. Ekkor

$$\varphi_t(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{l_k t_k}(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

és ez minden $t > 0$ -ra teljesül, tehát x valóban fixpont. $\square$

Emlékeztető: ω és α határhalmaz, ha a megoldás korlátos, akkor ezek nem üresek, zártak, összefüggőek, pozitív illetve negatív invariánsak.

4.50. Tétel.

- a) Ha x és y pályái metszik egymást, akkor $\omega(x) = \omega(y)$ és $\alpha(x) = \alpha(y)$.
- b) Ha egy C zárt halmaz pozitív invariáns és $x \in C$, akkor $\omega(x) \subseteq C$.
- c) Ha egy C zárt halmaz negatív invariáns és $x \in C$, akkor $\alpha(x) \subseteq C$.
- d) Egy C zárt, invariáns halmaz tartalmazza az összes belőle induló α és ω határhalmazt.

Bizonyítás.

- a) Legyen $z \in \omega(x)$, $\varphi_s(x) = y$ és legyen t_k olyan végtelenbe tartó sorozat, hogy $\varphi_{t_k}(x) \rightarrow z$. Ekkor $\varphi_{t_k}(x) = \varphi_{t_k-s}(\varphi_s(x)) = \varphi_{t_k-s}(y)$ és így $z \in \omega(y)$, vagyis $\omega(x) \subseteq \omega(y)$. Szimmetrikusan a másik irányú tartalmazás is belátható, tehát a két halmaz egyenlő. Hasonló módon belátható az α határhalmazok egyenlősége is.
- b) Ha $t_k \rightarrow \infty$, akkor van olyan k , amelyre már $t_k > 0$, így C pozitív invarianciája miatt $\varphi_{t_k}(x) \in C$. A C zártsága miatt, ha $\varphi_{t_k}(x) \rightarrow z$, akkor $z \in C$ tehát $\omega(x) \subseteq C$.
- c) A bizonyítás hasonló a b) rész bizonyításához.
- d) Az állítás következik a b) és c) állításokból.

□

Két dimenzióban szintén hasznos a Green-tétel, amelyet a Bendixson–Dulac-tétel bizonyításában használunk.

4.51. Tétel (Green). Legyen γ egy pozitív irányítású, szakaszonként sima, egyszerű, zárt görbe a síkon, $\text{int } \gamma$ a belseje, D egy nyílt halmaz, ami tartalmazza $\gamma \cup \text{int } \gamma$ -t. Ha f és g a D halmazon értelmezett függvények, parciális deriváltjaik folytonosak, akkor

$$\iint_{\text{int } \gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_{\gamma} (-g \, dx + f \, dy).$$

4.52. Tétel (Bendixson–Dulac). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő halmaz, legyenek $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Ha létezik $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény úgy, hogy a

$$\frac{\partial(\psi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi g)}{\partial y}$$

kifejezésnek D -ben majdnem mindenhol ugyanaz az előjele, akkor az

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

egyenletrendszernek nincs reguláris periodikus pályája D -ben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tétel feltételei teljesülnek, és

$$\frac{\partial(\psi f)}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial(\psi g)}{\partial y}(x, y) > 0$$

majdnem minden $(x, y) \in D$ -re. (Ha majdnem mindenhol negatív lenne a kifejezés, akkor ψ helyett vehetnénk a $-\psi$ függvényt, azzal már pozitív lenne.) Indirekten tegyük fel azt is, hogy D -ben van egy γ nemtriviális periodikus pálya. D egyszeresen összefüggő halmaz, ezért tartalmazza γ belsejét, alkalmazzuk a Green-tételt f és g helyett ψf -fel és ψg -vel:

$$0 < \iint_{\text{int}\gamma} \left(\frac{\partial(\psi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi g)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} (-\psi g dx + \psi f dy) = \oint_{\gamma} \psi \left(-\frac{dy}{dt} dx + \frac{dx}{dt} dy \right) = 0,$$

ahol a γ görbén pozitív irányban integráltunk. Az indirekt feltevésből kiindulva ellentmondásra jutottunk, tehát az állítás igaz. $\square$

4.53. Megjegyzés. A Bendixson–Dulac-tétel feltételeit kielégítő ψ függvényt Dulac-függvénynek nevezzük.

4.54. Példa. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - y + x^2 + y^2 \end{cases}$$

egyenletrendszernek nincs reguláris periodikus pályája.

Keressünk Dulac-függvényt az egyenletrendszerhez. Próbáljuk először a $\psi \equiv 1$ függvényt:

$$\frac{\partial(\psi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi g)}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(-x - y + x^2 + y^2)}{\partial y} = -1 + 2y.$$

Ez a kifejezés pozitív, ha $y > 1/2$, és negatív, ha $y < 1/2$. Tehát pozitív területű halmazon lesz pozitív, illetve negatív az előjele. Így ez a ψ nem lesz Dulac-függvény.

Keressük ψ -t $e^{\alpha x}$ alakban, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ konstans:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi g)}{\partial y} &= \frac{\partial(e^{\alpha x} y)}{\partial x} + \frac{\partial(e^{\alpha x}(-x - y + x^2 + y^2))}{\partial y} \\ &= \alpha e^{\alpha x} y + e^{\alpha x}(-1 + 2y) \\ &= e^{\alpha x}(-1 + (\alpha + 2)y). \end{aligned}$$

$\alpha = -2$ választással a $-e^{-2x}$ kifejezést kapjuk, ami minden $(x, y) \in \mathbb{R}$ -re negatív. Tehát a $\psi(x, y) = e^{-2x}$ Dulac-függvény, a Bendixson–Dulac-tétel miatt az egyenletrendszernek nincs nemtriviális periodikus pályája.

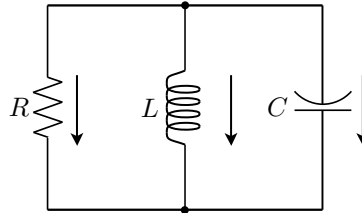
Ellenőrző kérdések:

- Mikor nevezünk egy halmazt pozitívan invariánsnak?
- Hogyan szól a Poincaré–Bendixson-tétel?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezik egy Dulac-függvény?

4.8. A Van der Pol-egyenlet

4.55. Példa. Tekintsük a 4.9. ábrán látható RLC-áramkört: egy R ellenállást, egy L indukciós tekercset és egy C kondenzátort párhuzamosan kapcsolunk. Ezeken a nyíl irányában mért áramerősséget rendre i_R, i_L, i_C -vel, a feszültséget u_R, u_L, u_C -vel jelöljük. A Kirchhoff-törvény miatt:

$$i_R + i_L + i_C = 0 \quad \text{és} \quad u_R = u_L = u_C.$$



4.9. ábra. Párhuzamos RLC-áramkör

Most matematikailag leírjuk az ellenállást, a kondenzátort és az indukciós tekercset. Az ellenállás egy összefüggést ad az áramerősség és a feszültség között ez az általánosított Ohm-törvény: $i_R = f(u_R)$, ahol f folytonosan differenciálható, páratlan függvény. Ha az ellenállás megfelel a szokásos Ohm-törvénynek (ellenállás = feszültség/áramerősség), akkor f egy lineáris függvény. Az f grafikonja az ellenállás karakterisztikája, lehet például $x^3 - x$ alakú egy alagút-dióda esetén. Nézzük, hogy időben hogyan változik a rendszer állapota. A Faraday-törvény szerint

$$Li'_L(t) = u_L(t),$$

ahol $L > 0$ az indukció. A kondenzátorra a következő egyenlet vonatkozik:

$$Cu'_C(t) = i_C(t),$$

ahol $C > 0$ a kapacitás.

Vegyük észre, hogy az $x = u_C$ és az $y = -i_L$ értékek meghatározzák az összes többi. Valóban: $u_R = u_L = x$, $i_R = f(x)$ és $i_C = -i_L - i_R = y - f(x)$. Ezek szerint a rendszer teljes állapotát leírhatjuk az x, y változókkal. Legyen az egyszerűség kedvéért $L = C = 1$. x és y idő szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} x' &= u'_C = i_C = y - f(x), \\ y' &= -i'_L = -u_L = -x, \end{aligned}$$

tehát a következő Liénard-egyenletet kapjuk:

$$\begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -x, \end{cases}$$

ha $f(x) = x^3 - x$, akkor ez a Van der Pol-egyenlet.

Először vizsgáljunk egy egyszerűbb esetet, $f(x) = Kx$, ($K > 0$). Ekkor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Az egyenletben szereplő mátrixot A -val jelölve a mátrix sajátértékeit a következőképpen tudjuk kiszámolni: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + K\lambda + 1$. Ennek az egyenletnek a gyökei negatív valós részűek, mert minden együttható pozitív, így a $(0, 0)$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil, sőt, a linearitás miatt minden megoldás tart $(0, 0)$ -hoz. Fizikai szempontból ez az ellenállás energiaelnyelő hatása miatt van. Mivel

$$\lambda_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4}}{2},$$

ezért $K < 2$ -re a gyökök komplexek, és a megoldások logaritmikus spirálban tartanak $(0, 0)$ -hoz.

Általános $f(x)$ esetén keressük meg a rendszer egyensúlyi helyzetét. A második egyenletből $x = 0$, így az első alapján $y = f(0)$, tehát az egyetlen egyensúlyi helyzet a $(0, f(0))$ pont. A linearizált egyenlet mátrixa:

$$\begin{pmatrix} -f'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei az előzőek alapján

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f'(0) \pm \sqrt{(f'(0))^2 - 4}}{2}.$$

Ebből következik, hogy az egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil, ha $f'(0) > 0$ és instabil, ha $f'(0) < 0$. Pl. a Van der Pol-egyenletnél ($f(x) = x^3 - x$) az egyensúlyi helyzet instabil (forrás).

Később hasznos lesz a következő lemma.

4.56. Lemma. *Legyen $W(x, y) = (x^2 + y^2)/2$. Ekkor W -nak a Liénard-egyenlet szerinti deriváltja*

$$W'(x, y) = xx' + yy' = x(y - f(x)) + y(-x) = -xf(x).$$

Ez az elektromos áramkörök esetén azt jelenti, hogy passzív ellenállás esetén (amikor $xf(x) > 0$ $x \neq 0$ esetén) az áramkör energiája disszipálódik, eloszlik, csökken. A LaSalle-féle invarianciaelv szerint ilyenkor az egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil, és az összes megoldás az egyensúlyi helyzethez tart.

A Van der Pol-egyenlet esetén $f(x) = x^3 - x$.

4.57. Definíció. *Nullklínának* nevezünk egy olyan halmazt, amelyen a vektormező valamelyik komponense eltűnik.

4.58. Tétel. *A Van der Pol-egyenletnek van pontosan egy nemtriviális periodikus pályája, és minden nem egyensúlyi helyzetből induló megoldás oda tart.*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy az állítást belássuk, elemezni fogjuk az egyenlet által meghatározott vektormezőt.

Határozzuk meg a nullklínákat. Az

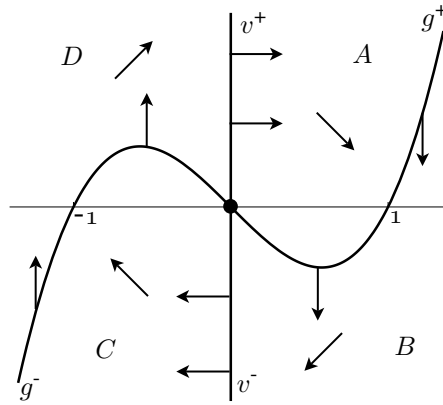
$$x' = 0 \quad \text{és} \quad y' = 0$$

egyenletek az

$$y = f(x) \quad \text{és} \quad x = 0$$

egyenletekkel ekvivalensek. Ezen görbéken és az általuk határolt síkrészekeken könnyen meghatározható a vektormező iránya, lásd az ábrát és az azon alkalmazott jelöléseket:

$$\begin{aligned} v^+ &= \{(x, y) \mid y > 0, x = 0\}, \\ g^+ &= \{(x, y) \mid x > 0, y = x^3 - x\}, \\ v^- &= \{(x, y) \mid y < 0, x = 0\}, \\ g^- &= \{(x, y) \mid x < 0, y = x^3 - x\}. \end{aligned}$$

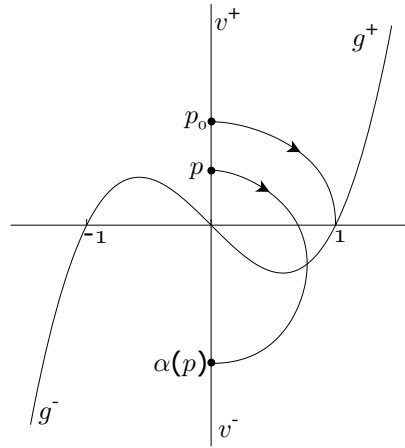


4.10. ábra. A vektormező iránya és az általuk határolt halmazokon

A 4.10. ábra szerint a megoldások az óramutató járásával egyező irányban köröznek az egyensúlyi helyzet körül. Látható, hogy minden v^+ -ről induló trajektória belép az A tartományba, és az A tartománybeli trajektóriák bele kell ütközzenek a g^+ görbébe még azelőtt, hogy bármelyik másik görbét metszenék. Hasonló módon vizsgálva a többi görbét és tartományt kapjuk, hogy a trajektóriák (az egyensúlyi helyzet kivételével) ebben a sorrendben metszik a v^+ , g^+ , v^- és g^- görbéket, és közben bejárják az A , B , C , D tartományokat. A v^+ félegyenes transzverzális (sőt most éppen merőleges) az egyenlet által meghatározott vektormezőre, tekintsük az azon értelmezett P Poincaré-leképezést. Az eddigiek alapján P az egész v^+ -on értelmezve van, és (mivel a megoldások visszafelé is folytathatóak), invertálható is. A P leképezés, mint tudjuk, monoton, így a P iterációjával kapott pontok y koordinátái monoton növekvő vagy csökkenő sorozatot alkotnak (amibe persze a konstans sorozat, más szóval a periodikus pálya is belefér). Defináljuk a 4.19. Lemma alapján a $\alpha: v^+ \rightarrow v^-$ leképezést úgy, hogy minden $(0, y) \in v^+$ -beli elemhez azt a v^- -beli elemet rendeljük, amelyik először fordul elő a $(0, y)$ -ből induló pályán. Ez is folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezés lesz. Az $(1, 0)$ pontot tartalmazó pálya $(1, 0)$ előtti első metszéspontja legyen p_0 (ld. a 4.11. ábrát).

Legyen

$$\delta(p) := \frac{\alpha(p)_2^2 - p_2^2}{2} = W(\alpha(p)) - W(p),$$



4.11. ábra. Az α leképezés v^+ -ból v^- -ba képez, a p_0 pontból indított megoldás $(1, 0)$ -ban metszi először g^+ -t

ahol a 2-es index a második koordinátát jelöli.

4.59. Lemma.

a) Ha $0 < p < p_0$, akkor $\delta(p) > 0$.

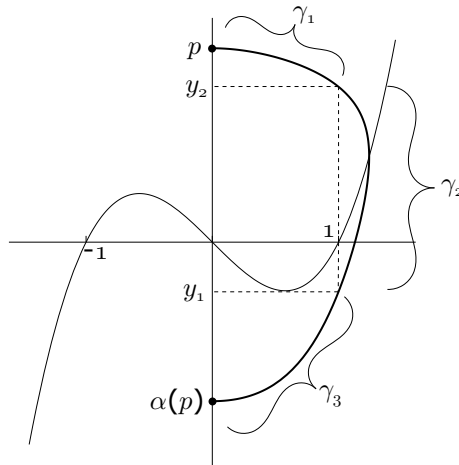
b) Ha $p > p_0$, akkor $\delta(p)$ monoton módon divergál a $-\infty$ -be, miközben $p \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Legyen $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ egy az α leképezésnél használt trajektória, amely egy $p \in v^+$ pontot összeköt egy v^- -beli ponttal, tehát $(x(0), y(0)) = p$, $(x(t_1), y(t_1)) \in v^-$ és $x(t) > 0$ ($t \in (0, t_1)$). Ekkor

$$\delta(p) = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} W(x(t), y(t)) dt = \int_0^{t_1} -x(t)((x(t))^3 - x(t)) dt = \int_0^{t_1} (x(t))^2(1 - (x(t))^2) dt.$$

Mivel $0 < p < p_0$ esetén $x(t) \in (0, 1)$ ($t \in (0, t_1)$), ezért az integrandusz pozitív, $\delta(p) > 0$, és így az a) részt beláttuk.

A $p > p_0$ esetben a 4.12. ábra szerint bontsuk három részre a γ trajektóriát.



4.12. ábra. Az $x = 1$ egyenes három részre osztja a p és $\alpha(p)$ közti pályát, ha $p > p_0$

A $\delta(p)$ -t a három részgörbe mentén külön-külön integrálva megkaphatjuk (legyenek ezek az integrálok rendre $\delta_1(p)$, $\delta_2(p)$, $\delta_3(p)$). A γ_1 -en $y(t)$ felírható, mint $x(t)$ függvénye, így helyettesítéssel való integrálással kapjuk, hogy

$$\delta_1(p) = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{x'} dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y_p(x) - f(x)} dx.$$

A p pontot mozgatva az y tengelyen felfelé $y(x) - f(x)$ növekszik, tehát $\delta_1(p)$ csökken. Ugyanez belátható a $\delta_3(p)$ -re is. A γ_2 -n x írható fel, mint y függvénye ($x = x_p(y)$), $x \geq 1$, és mivel $y' = -x$, ezért

$$\delta_2(p) = \int_{y_2}^{y_1} -x_p(y)(1 - (x_p(y))^2) dy = \int_{y_1}^{y_2} x_p(y)(1 - (x_p(y))^2) dy < 0.$$

p növekedésével az $[y_1, y_2]$ intervallum is növekszik, és a γ_2 görbe jobbra tolódik, tehát $x_p(y)$ is nő és így $x_p(y)(1 - (x_p(y))^2)$ csökken. A g^+ görbe minden pontján is át kell menjen trajektória, így azt kapjuk, hogy $\delta_2(p)$ monoton módon divergál a $-\infty$ -be, miközben $p \rightarrow \infty$, és ezzel beláttuk a b) részt is. $\square$

Most folytassuk a Van der Pol-egyenletre vonatkozó tétel bizonyítását. Vegyük észre, hogy a Van der Pol-egyenlet által megadott vektormezőt egy 180° -os egyensúlyi helyzet körüli elforgatás önmagába viszi, a

$$g(x, y) = (y - x^3 + x, -x)$$

kifejezés csak páratlan fokú monomokat tartalmaz, ezért

$$g(-x, -y) = -g(x, y).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $(x(t), y(t))$ megoldásgörbe, akkor a $(-x(t), -y(t))$ is az. A lemma alapján pontosan egy olyan $q_0 \in v^+$ pont van, amelyre $\delta(q_0) = 0$. Erre a pontra akkor teljesül, hogy $\|\alpha(q_0)\| = \|q_0\|$, vagyis $\alpha(q_0) = -q_0 = (x(t_1; q_0), y(t_1; q_0))$. Az elforgatási szimmetria miatt $(x(t_1; -q_0), y(t_1; -q_0)) = q_0$, tehát $(x(2t_1; q_0), y(2t_1; q_0)) = q_0$, q_0 az egyetlen periodikus pálya egy pontja.

A P Poincaré-leképezés a v^+ -t a v^+ -ra képezi. A v^+ -ban van egy természetes rendezés az y koordináta szerint, használjuk azt. Ekkor, ha $p \in v^+$ és $p > q_0$, akkor $\alpha(p) < -q_0$, és következésképpen $P(p) > q_0$. Másrészt tudjuk, hogy $\delta(p) < 0$, tehát $\alpha(p) > -p$ és így $P(p) < p$ lesz. A monotonitás miatt ezek alapján $P^k(p)$ monoton csökkenő lesz. Ennek határértéke a P egy fixpontja kell legyen, amiből csak egy van, a q_0 , vagyis $p > q_0$ esetén a p -ből induló pálya spirálvonalban rácsavarodik a q_0 periodikus pont pályájára. Hasonlóképpen igazolható, hogy $0 < p < q_0$ esetén is teljesül ez, és a tétel állítását beláttuk. $\square$

Ellenőrző kérdések:

- Mit mondhatunk 2-dimenzióban a nullklínák által határolt síkrészekről?
- Hol használtuk a fenti bizonyításban, hogy az $f(x)$ függvény $x^3 - x$ alakú?
- Rajzoljuk fel vázlatosan a Van der Pol-egyenlet fázisképét.

4.9. Populációdinamikai példák

A korábbiakban megismertünk néhány fogalmat, tételt, melyekkel leírhatjuk a dinamikus rendszerek viselkedését. Definiáljuk még az első integrál fogalmát, majd az eddigi eszközeink segítségével megvizsgálunk két populációdinamikai egyenletrendszert.

4.60. Definíció. Egy $H: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *első integrálja* a $\varphi_t: D \rightarrow D$ dinamikus rendszernek, ha $H(\varphi_t(x))$ konstans minden $x \in D$ -re, vagyis H konstans a dinamikus rendszer pályái mentén.

4.61. Példa (Lotka–Volterra). D’Ancona 1914 és 1923 között megfigyelte, hogy az Adriai-tengerben a ragadozó halak száma megnőtt. Ezt azzal magyarázta (bár bizonyítani nem tudta), hogy az első világháború idején a halászat gyakorlatilag megszűnt, és ez valamilyen módon kedvező hatással volt a ragadozó halakra. Volterra a következő ragadozó–zsákmány modellel próbálta igazolni a megfigyelést:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases}$$

ahol $x \geq 0$ a zsákmány, $y \geq 0$ a ragadozó populáció nagysága, a, b, c, d pozitív paraméterek. Határozzuk meg a nullklínákat: Az

$$x' = 0 \quad \text{és} \quad y' = 0$$

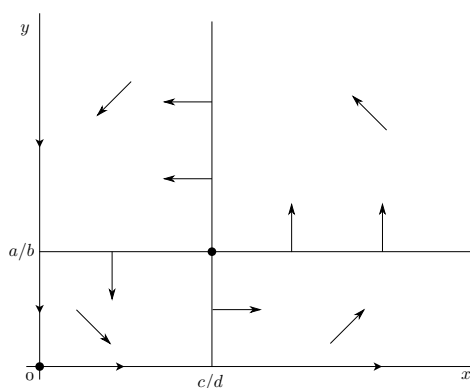
egyenletek az

$$x(a - by) = 0 \quad \text{és} \quad y(-c + dx) = 0$$

egyenletekkel ekvivalensek, melyek megoldásai

$$x = 0 \text{ vagy } y = \frac{a}{b}, \quad \text{illetve} \quad y = 0 \text{ vagy } x = \frac{c}{d}.$$

Innen az egyensúlyi helyzetek: $(0, 0)$ és $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. A nullklínákon és az általuk határolt síkrészekben az ábrán látható irányú a vektormező:



4.13. ábra. A nullklínák és a vektormező iránya

A tengelyek invariánsak, rajtuk a megoldások exponenciálisan növekednek vagy csökkennek. Tegyük fel, hogy $x, y > 0$, és írjuk fel a következő hányadost:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)} = \frac{x}{-c + dx} \cdot \frac{a - by}{y}$$

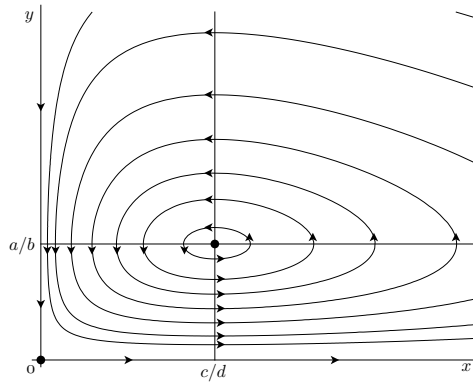
Rendezzük át, és integráljuk az egyenletet:

$$\begin{aligned}\frac{-c + dx}{x} dx &= \frac{a - by}{y} dy \\ \int \left(-\frac{c}{x} + d \right) dx &= \int \left(\frac{a}{y} - b \right) dy \\ -c \ln x + dx &= a \ln y - by + K,\end{aligned}$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Ezt átrendezve kapjuk, hogy a

$$H(x, y) = dx + by - c \ln x - a \ln y$$

kifejezés konstans a megoldások mentén, tehát első integrál. H egy konvex függvény, $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ -ben minimuma van. A szintvonalai zárt görbék, a megoldások ezek mentén haladnak. Így már fel tudjuk rajzolni a fázisképet.



4.14. ábra. A Lotka-Volterra-egyenlet fázisképe

Tekintsük az $(x(t), y(t))$ T -periodikus megoldást, $T > 0$. Integráljuk az

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t)$$

egyenletet 0-tól T -ig.

$$\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int_0^T (a - by(t)) dt,$$

$$[\ln x(t)]_0^T = [at]_0^T - b \int_0^T y(t) dt,$$

$$\ln x(T) - \ln x(0) = aT - a0 - b \int_0^T y(t) dt.$$

Az x függvény T -periodikus, ezért $\ln x(T) = \ln x(0)$, így

$$0 = \ln x(0) - \ln x(0) = aT - b \int_0^T y(t) dt,$$

$$b \int_0^T y(t) dt = aT$$

adódik. Osszuk le ezt bT -vel:

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán lévő kifejezés épp az y átlaga egy periódus alatt. Tehát a ragadozó populáció átlagos nagysága egy periodikus megoldás mentén $y_{\text{átlag}} = \frac{a}{b}$. Hasonlóan kapjuk, hogy a zsákmány populáció átlagos nagysága $x_{\text{átlag}} = \frac{c}{d}$.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor mindkét populációt a nagyságával arányos mértékben vadásszák (halásszák). Ekkor a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - ex, \\ y' = -cy + dxy - fy, \end{cases}$$

ahol e és f is pozitív paraméterek (e most egy tetszőleges paraméter, nem a nevezetes e szám). Ez az egyenletrendszer írható

$$\begin{cases} x' = (a - e)x - bxy, \\ y' = -(c + f)y + dxy \end{cases}$$

alakban, ami megegyezik a korábbi egyenletrendszerrel, csak a és c helyett $a - e$ és $c + f$ paraméterekkel. A populációk átlagai a következőképpen változnak:

1. $x_{\text{átlag}}^{\text{vad.}} = \frac{c+f}{d} > \frac{c}{d} = x_{\text{átlag}}$, a zsákmány populáció átlagos mérete nő,
2. $y_{\text{átlag}}^{\text{vad.}} = \frac{a-e}{b} > \frac{a}{b} = y_{\text{átlag}}$, a ragadozó populáció átlagos mérete csökken a vadászat hatására.

Magyarázat: bármelyik populáció vadászata a ragadozókra csak káros, hiszen vagy őket lövik, vagy az eleségüket pusztítják. Eközben a zsákmányra nézve a ragadozók vadászata pozitív hatással van, hiszen kevesebben akarják megenni őket. Ez megmagyarázza D'Ancona megfigyelését: a kevesebb vadászat a ragadozó populáció számára előnyös.

4.62. Példa. A következő egyenlet két populáció versengését írja le:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - ex^2 \\ y' = cy - dxy - fy^2, \end{cases}$$

ahol $x, y \geq 0$ a populációk nagysága, a, b, c, d, e, f pozitív paraméterek. (e most sem a nevezetes e szám.) Határozzuk meg a nullklínákat, az

$$x' = 0 \quad \text{és} \quad y' = 0$$

egyenletek az

$$x(a - by - ex) = 0 \quad \text{és} \quad y(c - dx - fy) = 0$$

egyenletekkel ekvivalensek, melyek megoldásai

$$x = 0 \text{ vagy } ex + by = a, \quad \text{illetve} \quad y = 0 \text{ vagy } dx + fy = c.$$

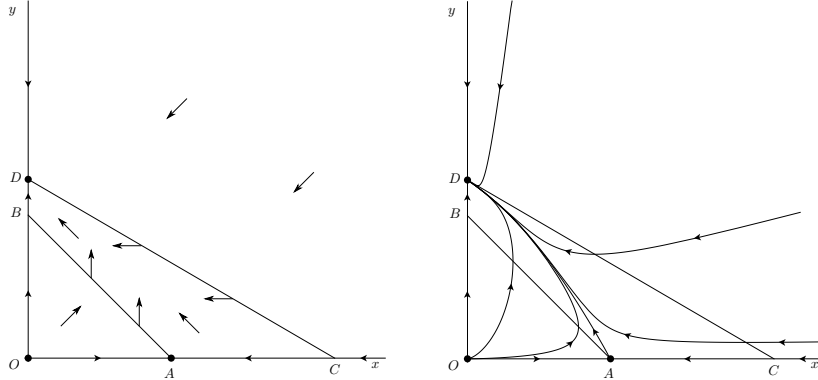
Ennek a négy egyenesnek legfeljebb $\binom{4}{2} = 6$ metszéspontja lehet, ezek

$$O(0,0), \quad A\left(\frac{a}{e}, 0\right), \quad B\left(0, \frac{c}{f}\right), \quad C\left(\frac{c}{d}, 0\right), \quad D\left(0, \frac{a}{b}\right)$$

és E , az $\begin{cases} ex + by = a \\ dx + fy = c \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása.

Ezek közül O , A , D és E az egyensúlyi helyzetek. Négy nemelfajuló eset lehetséges aszerint, hogy az A, C és B, D pontok egymáshoz képest hogyan helyezkednek el:

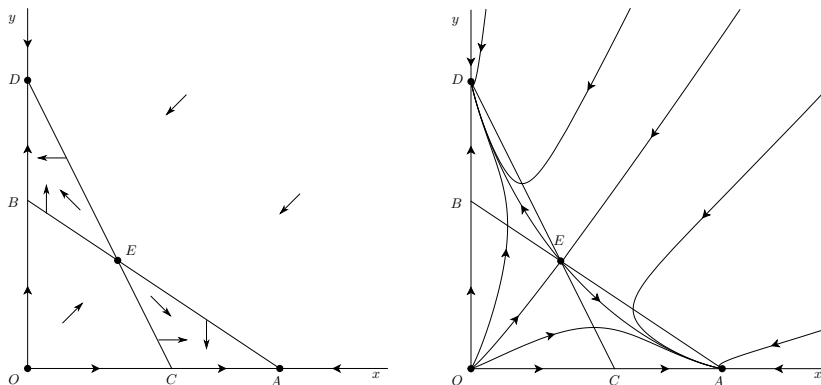
1. $\frac{a}{e} < \frac{c}{d}$ és $\frac{a}{b} < \frac{c}{f}$:



4.15. ábra. A nullklínák és a vektormező, illetve a fáziskép az 1. esetben

Az E pont nem esik az első síknegyedbe. A vektormező folytonos, így a nullklínákon, és az általuk határolt síkrészekeken könnyen meg tudjuk határozni az irányát (balra). A tengelyeken a rendszer logisztikus egyenletként viselkedik. A C pont közelében a vektormező balra mutat, az átlós nullklínán csak a D pontban válthat irányt. Hasonlóan a B pontban lefelé mutat, az átlós nullklínán csak az A pontban válthat irányt. Az OAB háromszögből csak kifelé mutat nyíl, ezért negatív invariáns, ezen belül a megoldások időben visszafelé O -ba tartanak. Az $ACDB$ négyszögbe csak befelé mutat nyíl, ezért pozitív invariáns, ezen belül a megoldások D -be tartanak. Így már könnyen felrajzolhatjuk a fázisképet (jobbra).

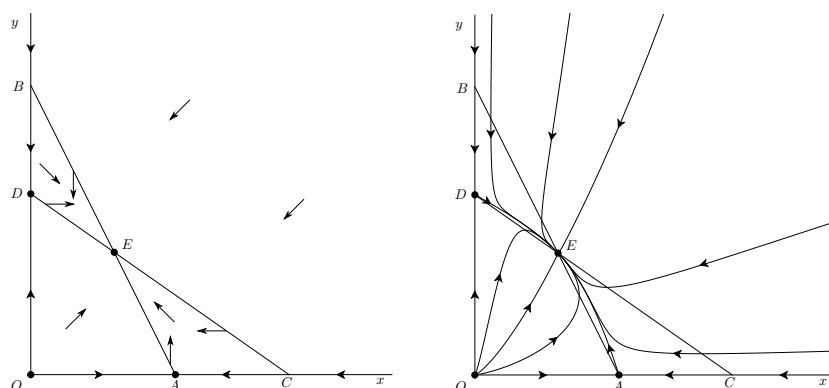
2. $\frac{a}{e} > \frac{c}{d}$ és $\frac{a}{b} > \frac{c}{f}$: Hasonló, mint az előző eset, csak az x és y koordináták szerepét kell felcserélni.
3. $\frac{a}{e} > \frac{c}{d}$ és $\frac{a}{b} < \frac{c}{f}$:



4.16. ábra. A nullklínák és a vektormező, illetve a fáziskép a 3. esetben

A nullklínákon csak az egyensúlyi helyzetekben válthat irányt a vektormező. Az $OCEB$ négyszög negatív invariáns, a CAE és BED háromszögek pozitív invariánsak.

4. $\frac{a}{e} < \frac{c}{d}$ és $\frac{a}{b} > \frac{c}{f}$:



4.17. ábra. A nullklínák és a vektormező, illetve a fáziskép a 4. esetben

Az $OAED$ négyszög negatív invariáns, az ACE és DEB háromszögek pozitív invariánsak.

Az első három esetben nullmértékű halmaz kivételével tetszőleges kezdeti pontból kiindulva, a megoldás olyan egyensúlyi helyzethez konvergál, amelynek valamelyik koordinátája 0. Ez azt jelenti, hogy az egyik populáció a versengés miatt kihal, ezt nevezik a versenykizárás elvének. A 4. esetben, ha nem valamelyik tengelyről indítjuk a megoldást, akkor az E egyensúlyba tart. Az E mindkét koordinátája pozitív, ez annak az esetnek felel meg, amikor a populációk nem zavarják egymást túlzottan.

Ellenőrző kérdések:

- Hogyan keresünk első integrált egy 2-dimenziós differenciálegyenlet-rendszerhez?
- Hogyan számítjuk ki a populációk átlagos méretét a Lotka–Volterra egyenletrendszerben?
- Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetek vonzási tartományát mind a négy esetben a két populáció versengését leíró modellben.

4.10. Határciklusok

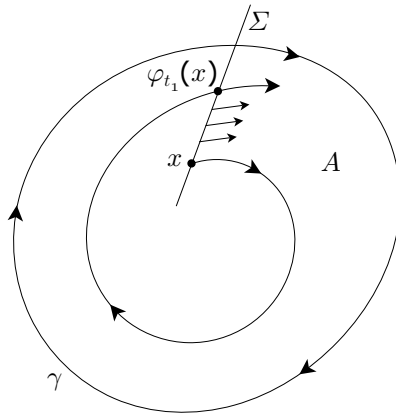
Ebben az alfejezetben határhalmazként előálló periodikus megoldásokat tekintünk.

4.63. Definíció. A *határciklus* egy olyan zárt γ pálya, amelyre van olyan $x \notin \gamma$, hogy $\gamma = \omega(x)$ vagy $\gamma = \alpha(x)$. Az első esetben γ egy ω -*határciklus*, a második esetben egy α -*határciklus*.

4.64. Tétel. Legyen $\gamma = \omega(x)$ egy *határciklus*. Ekkor van olyan V környezete x -nek, hogy $y \in V$ esetén $\gamma = \omega(y)$. Más szóval az $\{y \notin \gamma \mid \gamma = \omega(y)\}$ halmaz (a *határciklus medencéje*) *nyílt*.

Bizonyítás. A határciklusoknak „egyoldali” stabilitásuk van: a határciklus egy pontjában állított transzverzálisnak a határciklus x felőli oldalára eső „közele” trajektóriái tartani fognak a határciklushoz. Valóban, tekintsünk egy ilyen Σ transzverzálisht. Mivel $\omega(x) = \gamma$, ezért van olyan $t_1 > 0$, hogy $\varphi_{t_1}(x) \in \Sigma$. A pályák metszéspontja Σ -val monoton sorozatot

ad, $\omega(x) = \gamma$ miatt a $\varphi_t(x)$ metszéspontjai tartanak a $\gamma \cap \Sigma$ ponthoz. Legyen $t_2 > t_1$ a t_1 utáni első metszéspont ideje, vagyis $\varphi_{t_2}(x) \in \Sigma$ és $\varphi_t(x) \notin \Sigma$, ha $t \in (t_1, t_2)$. Ekkor tekintsük a γ határciklus, illetve a $\varphi_t(x)$ ($t \in [t_1, t_2]$) és a Σ -nak a $\varphi_{t_1}(x)$ és $\varphi_{t_2}(x)$ közé eső része által meghatározott zárt görbe közé eső A tartományt (ld. a 4.18. ábrát). A $\varphi_t(\cdot)$ folytonossága miatt van olyan V környezete x -nek, hogy ha $y \in V$, akkor $\varphi_{t_2}(y)$ a $\varphi_{t_2}(x)$ pont olyan elegendően kicsi környezetébe essen, hogy a $\varphi_t(y)$ a Σ -nak $\varphi_{t_1}(x)$ és $\gamma \cap \Sigma$ közötti részét metssze. Így a $\varphi_t(y)$ bekerül az A pozitív invariáns tartományba, ahonnan következik, hogy $\omega(y) = \gamma$. $\square$



4.18. ábra. Az A tartomány pozitívan invariáns

4.65. Következmény. Legyen H első integrálja egy síkbeli, folytonosan differenciálható dinamikus rendszernek, amelyik nem konstans egyetlen nyílt halmazon sem. Ekkor a dinamikus rendszernek nincsenek határciklusai.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy γ határciklus és legyen $c \in \mathbb{R}$ a H értéke a határcikluson (aminek konstansnak kell lennie, hiszen γ egy pálya). Ha $\omega(x) = \gamma$, akkor a H folytonossága miatt $H(\varphi_t(x)) \equiv c$ kell legyen. Az előző állítás szerint a γ medencéje egy nyílt halmaz, amin (ezek szerint) H a konstans c értéket veszi fel, ami ellentmondás. $\square$

4.66. Tétel. Egy nemüres, kompakt és pozitív vagy negatív invariáns K halmaz tartalmaz egy periodikus pályát vagy egy fixpontot.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy K pozitív invariáns, és vegyünk egy $x \in K$ pontot. Ekkor $\omega(x)$ nem üres, és alkalmazhatjuk a Poincaré–Bendixson-tételt. $\square$

4.67. Lemma. Legyen γ egy zárt pálya, és a dinamikus rendszer legyen értelmezve a γ belsején. Ekkor γ belsejében van egy határciklus vagy egy fixpont.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\text{int } \gamma$ nem tartalmaz sem határciklust, sem fixpontot. Ekkor a Poincaré–Bendixson-tétel szerint minden $x \in \text{int } \gamma$ esetén $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$ teljesül. Legyen Σ egy transzverzális a $z \in \gamma$ pontban. Ekkor vannak olyan $t_k \rightarrow \infty$ és $s_k \rightarrow -\infty$ sorozatok, hogy

$$\varphi_{t_k}(x) \in \Sigma, \quad \varphi_{t_k}(x) \rightarrow z \quad \text{és} \quad \varphi_{s_k}(x) \in \Sigma, \quad \varphi_{s_k}(x) \rightarrow z.$$

Ez viszont ellentmond annak, hogy egy pálya transzverzálissal vett metszéspontjainak sorozata monoton a transzverzálison. $\square$

4.68. Tétel. *Legyen γ egy zárt pálya, és a dinamikus rendszer legyen értelmezve a γ belsején. Ekkor γ belsejében van egy fixpont.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\text{int } \gamma$ nem tartalmaz fixpontot. Tekintsük az $\text{int } \gamma$ -ba eső zárt pályákat és azok belsejeinek területét. Legyen a területek infimuma $A \geq 0$, és legyenek $\gamma_k = \gamma(x_k)$ zárt pályák úgy, hogy a belsejeik területe $A_k \rightarrow A$. Mivel $\bar{\gamma} = \text{int } \gamma \cup \gamma$ kompakt halmaz, az x_k sorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat, jelöljük ezt ismét x_k -val, vagyis $x_k \rightarrow x$. Vegyünk egy Σ transzverzálisat x -ben, ekkor γ_k a Σ -t egy x -hez tartó sorozatban metszi, amiből következik, hogy a $\gamma(x)$ pálya zárt és $d(\gamma_k, \gamma(x)) \rightarrow 0$. Ebből következik, hogy a $\gamma(x)$ pálya belsejének területe éppen A lesz. De akkor a $\gamma(x)$ zárt pálya belsejében már definíció szerint nem lehet zárt pálya, a feltételek szerint fixpont sem, ami ellentmond az előző lemmának. $\square$

4.69. Tétel (Brouwer-féle fixponttétel). *Legyen $f : B^n \rightarrow B^n$ folytonos leképezése az n dimenziós B^n zárt gömbnek önmagába. Ekkor f -nek van fixpontja.*

Bizonyítás. $n = 2$ dimenzióban bizonyítjuk folytonosan differenciálható f -re. Tekintsük a $g(x) = f(x) - x$ leképezést illetve az az által meghatározott $x'(t) = g(x)$ differenciálegyenlethez tartozó vektormezőt. Mivel f a zárt körlapot önmagára képezi, ha f -nek nincs fixpontja, akkor az $f(x) - x$ vektor a körvonalon a körlap belseje felé mutat, vagyis körlap pozitív invariáns a differenciálegyenlet által meghatározott dinamikus rendszerre nézve. Egy korábbi lemma szerint a dinamikus rendszernek van egy periodikus pályája vagy fixpontja a zárt körlapon belül. Az utóbbi esetben készen vagyunk, az előbbi esetben pedig alkalmazzuk az előző tételt, és készen vagyunk. $\square$

Az

$$x' = f(x)$$

autonóm differenciálegyenlet ($x \in \mathbb{R}^n$) által meghatározott $\varphi_t(x)$ dinamikus rendszert vizsgáljuk, ahol $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz) folytonosan differenciálható. Azon belül is a periodikus pályák stabilitását nézzük.

Az alábbiakban felidézünk néhány fogalmat.

4.70. Definíció. Egy γ periodikus pálya *orbitálisan stabil*, ha γ minden U nyílt környezetéhez van olyan V környezete, hogy $x \in V$ esetén $\varphi_t(x) \subseteq U$, $t \geq 0$.

4.71. Definíció. Egy γ periodikus pálya *orbitálisan aszimptotikusan stabil*, ha orbitálisan stabil, és γ -nak van olyan V nyílt környezete, hogy $x \in V$ esetén $d(\varphi_t(x), \gamma) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

4.72. Definíció. Az x pontnak a T *aszimptotikus periódusa*, ha $d(\varphi_{t+T}(x), \varphi_t(x)) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

4.73. Megjegyzés. A Ljapunov-értelemben vett aszimptotikus stabilitás nem ugyanaz, mint az orbitális aszimptotikus stabilitás. A Ljapunov szerinti aszimptotikus stabilitás esetén a megoldások távolsága tart 0-hoz: ha $\gamma = \{p(t) \mid t \geq 0\}$, akkor $d(\varphi_t(x), p(t)) \rightarrow 0$. Ebből persze következik az orbitális aszimptotikus stabilitás is. De fordítva ez nem feltétlenül igaz: pl. ha a γ -n belüli pontok „lassabban” mozognak, mint a γ pontjai, akkor a γ -hoz a 0 időpontban közeli pont is időben „elmászhat” a $p(t)$ megoldástól, miközben persze a γ közelében marad.

4.74. Példa. Tekintsük a következő, polárkoordinátákban felírt rendszert:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \phi' = r. \end{cases}$$

Világos módon, ha $r_0 > 0$, akkor $r(t) \rightarrow 1$, $t \rightarrow \infty$, tehát az 1 sugarú körvonal egy aszimptotikusan stabil periodikus pálya. Szétválasztható változójú egyenletként megoldva az r -re vonatkozó egyenletet kapjuk, hogy

$$r(t) = \frac{e^t r_0}{1 - r_0 + e^t r_0},$$

amiből a ϕ -re vonatkozó egyenlet integrálásával

$$\phi(t) = \phi_0 + \ln(1 - r_0 + e^t r_0) = \phi_0 + t + \ln((1 - r_0)e^{-t} + r_0).$$

Ebből $\phi(2k\pi) - \phi_0 \rightarrow \ln(r_0) \bmod (2\pi)$, $k \rightarrow \infty$, tehát a megoldás aszimptotikusan 2π -periodikus.

4.75. Példa. Tekintsük a következő, polárkoordinátákban felírt rendszert:

$$\begin{cases} r' = (1 - r)^3, \\ \phi' = r. \end{cases}$$

Továbbra is teljesül, hogy $r(t) \rightarrow 1$, tehát az 1 sugarú körvonal egy aszimptotikusan stabil periodikus pálya. Szétválasztható változójú egyenletként megoldva az r -re vonatkozó egyenletet kapjuk, hogy

$$r(t) = 1 + \frac{r_0 - 1}{\sqrt{2t(r_0 - 1)^2 + 1}} \quad \left(t > -\frac{1}{2(r_0 - 1)^2} \right),$$

amiből a ϕ -re vonatkozó egyenlet integrálásával

$$\phi(t) = \phi_0 + t + \int_0^t \frac{r_0 - 1}{\sqrt{2s(r_0 - 1)^2 + 1}} ds.$$

Ebben az esetben az integrál végtelenbe divergál. Legyen $\phi_0 = 0$, és ha veszünk egy tetszőleges $r_0 < 1$ -et, illetve azt a megoldást, amelyik az $r_0 = 1$ -ből indul, akkor az első megoldás (bármilyen közel is legyen r_0 az 1-hez) lassabban körfőz: a két megoldás ϕ -jének különbsége tart végtelenbe, tehát az 1 sugarú körvonal, mint megoldás, Ljapunov értelemben nem aszimptotikusan stabil.

4.76. Példa. A Van der Pol egyenlet periodikus pályája orbitálisan aszimptotikusan stabil, ezt beláttuk. Az is bebizonyítható, hogy Ljapunov értelemben is aszimptotikusan stabil.

4.77. Tétel. Legyen γ egy T -periodikus, aszimptotikusan stabil, zárt pálya. Ekkor van egy olyan U környezete γ -nak, hogy U minden pontja aszimptotikusan T -periodikus.

Bizonyítás. Legyen U az aszimptotikus stabilitásban definiált környezet, $x \in U$ és $\varepsilon > 0$. Ekkor a folytonosság miatt van olyan $\delta \in (0, \varepsilon)$, hogy $z \in \gamma$ és $d(y, z) < \delta$ esetén $d(\varphi_T(y), \varphi_T(z)) = d(\varphi_T(y), z) < \varepsilon$. Mivel $d(\varphi_t(x), \gamma) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), van olyan $t_0 \geq 0$, hogy minden $t \geq t_0$ -ra található egy olyan $z_t \in \gamma$ pont, hogy $d(\varphi_t(x), z_t) < \delta$. Ekkor $t \geq t_0$ -ra kapjuk, hogy

$$d(\varphi_{t+T}(x), \varphi_t(x)) \leq d(\varphi_T(\varphi_t(x)), \varphi_T(z_t)) + d(\varphi_T(z_t), \varphi_t(x)) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon,$$

amivel beláttuk az állítást. □

4.78. Tétel. Legyen γ T -periodikus, zárt pálya és $p \in \gamma$. Tegyük fel, hogy a φ_T leképezés deriváltja a p pontban ($D\varphi_T(p)$, ami egy $n \times n$ -es mátrix) sajátértékei közül $(n-1)$ -nek 1-nél kisebb az abszolút értéke. Ekkor γ aszimptotikusan stabil.

4.79. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a sajátértékek függetlenek a p választásától. Valóban, ha $q \in \gamma$, akkor legyen $r \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\varphi_r(p) = q$, és így

$$D\varphi_T(p) = D(\varphi_{-r}\varphi_T\varphi_r)(p) = (D\varphi_r(p))^{-1}D\varphi_T(q)D\varphi_r(p),$$

tehát a $D\varphi_T(p)$ és $D\varphi_T(q)$ mátrixok hasonlóak. Az is világos, hogy az 1 mindig sajátérték, mert

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t+T}(p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi_t(\varphi_T(p))|_{t=0} = f(\varphi_T(p)) = f(p)$$

és

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t+T}(p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi_T(\varphi_t(p))|_{t=0} = D\varphi_T(\varphi_t(p))\frac{d}{dt}\varphi_t(p)|_{t=0} = D\varphi_T(p)f(p)$$

szerint $D\varphi_T(p)f(p) = f(p)$, vagyis $f(p) \neq 0$ az 1-hez tartozó sajátvektor. A tételben szereplő sajátértékekre vonatkozó feltétel igen erős, ilyenkor a γ periodikus attraktor, vagyis ha $d(\varphi_t(x), \gamma) \rightarrow 0$, akkor van egy olyan $z \in \gamma$, hogy $d(\varphi_t(x), \varphi_t(z)) \rightarrow 0$.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $p = 0$. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ egy a 0-t tartalmazó 1 kodimenziós ($n-1$ dimenziós) hipersík (altér), amelyet a $D\varphi_T(0)$ mátrix önmagába képez. Ezt úgy tudjuk elérni, hogy vesszük az 1-nél kisebb abszolút értékű sajátértékek általánosított sajátaltéréinek direkt összegét, ez nyilván invariáns lesz $D\varphi_T(0)$ -ra és nem tartalmazza az 1-es sajátértéket: transzverzális γ -ra a 0 pontban. Vegyük a H -nak azt a Σ részhalmazát, amely transzverzális a dinamikus rendszerre, és tekintsük az azon ható Poincaré-leképezést: $P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$, $\tau(0) = T$.

Ennek a Poincaré-leképezésnek a deriváltja ugyanaz, mint a $D\varphi_T(0)|_H$. Valóban:

$$DP(0) = [D(\varphi_{\tau(x)}(x))|_{x=0}]|_H = [f(\varphi_{\tau(0)}(0))D\tau(0) + D\varphi_T(0)]|_H.$$

Ha $D\tau(0) = 0$, akkor beláttuk a Poincaré-leképezés deriváltjára vonatkozó állítást. Legyen ℓ egy lineáris funkcionál, ami pontosan a H hipersíkon 0: ilyen könnyű találni, a H hipersík normálvektorával vett skaláris szorzat ilyen. Ezzel az ℓ -el tudjuk, hogy $\ell(\varphi_{\tau(x)}(x)) \equiv 0$. Differenciáljuk ezt és helyettesítsük be az $x = 0$ -t:

$$\ell \circ f(\varphi_T(0))D\tau(0) + \ell \circ D\varphi_T(0) = \ell \circ f(0)D\tau(0) + \ell \circ D\varphi_T(0) \equiv 0.$$

A transzverzálitás miatt $\ell \circ f(0) \neq 0$, így kapjuk, hogy

$$D\tau(0) = -\frac{\ell \circ D\varphi_T(0)}{\ell \circ f(0)}.$$

De $D\tau(0) = D\tau(0)|_H$, hiszen a τ a H síkjában hat, így mivel $D\varphi_T(0)|_H \in H$, ezért

$$D\tau(0) = -\frac{1}{\ell \circ f(0)}\ell \circ D\varphi_T(0)|_H = 0,$$

és beláttuk, hogy a Poincaré-leképezés deriváltja ugyanaz, mint a $D\varphi_T(0)|_H$.

Így tudjuk, hogy a Poincaré-leképezés deriváltjának sajátértékei 1-nél kisebb abszolút értékűek, a Poincaré-leképezés 0 fixpontja aszimptotikusan stabil, és ezzel a γ periodikus pálya is orbitálisan aszimptotikusan stabil. Most már csak azt kell belátni, hogy γ periodikus attraktor.

Elegendő a γ -hoz közeli $\varphi_t(x)$ pályák közül olyanokat tekinteni csak, ahol $x \in \Sigma$, hiszen minden γ -hoz elegendően közeli pálya metszeni fogja Σ -t. Ha $\varphi_{kT}(x)$ elegendően közel van a 0-hoz $k = 1, 2, \dots, l$ -re, akkor $\varphi_{kT}(x) = \varphi_{t_k}(P^k(x))$, ahol $t_k = t_{k-1} + T - \tau(P^{k-1}(x))$. Mivel P deriváltjának sajátértékei 1-nél kisebb abszolút értékűek, ezért van olyan norma és $\nu < 1$, hogy $\|P^k(x)\| \leq \nu\|P^{k-1}(x)\|$. Felhasználva, hogy $D\tau(0) = 0$ kapjuk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ -ra 0-hoz elegendően közeli x -ekre

$$|t_k - t_{k-1}| \leq \varepsilon\|P^{k-1}(x)\| \leq \varepsilon\nu^{k-1}\|x\|,$$

vagyis

$$|t_k - t_0| \leq \varepsilon\|x\| \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l = \frac{\varepsilon}{1-\nu}\|x\|.$$

Tehát elegendően kicsi ε -ra a fenti egyenlőtlenség akármilyen l -re teljesül, a $\varphi_{kT}(x)$ közel marad a 0-hoz és bármilyen k -ig folytatható. A t_k sorozat Cauchy-sorozat, $t_k \rightarrow s$, így $\varphi_{kT}(x) \rightarrow z = \varphi_s(0) \in \gamma$ és ezzel az állítást beláttuk. $\square$

4.80. Példa. Tekintsük a következő, polárkoordinátákban adott rendszert:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \phi' = \sin^2 \phi + \varepsilon, \end{cases}$$

ahol ε valós paraméter.

Polárkoordinátákban is van értelme nullklínákról beszélni, ezeken a vektormező sugár-irányú vagy arra merőleges. Határozzuk meg ezeket, az

$$r' = 0 \quad \text{és} \quad \phi' = 0$$

egyenleteket a következő alakra hozhatjuk:

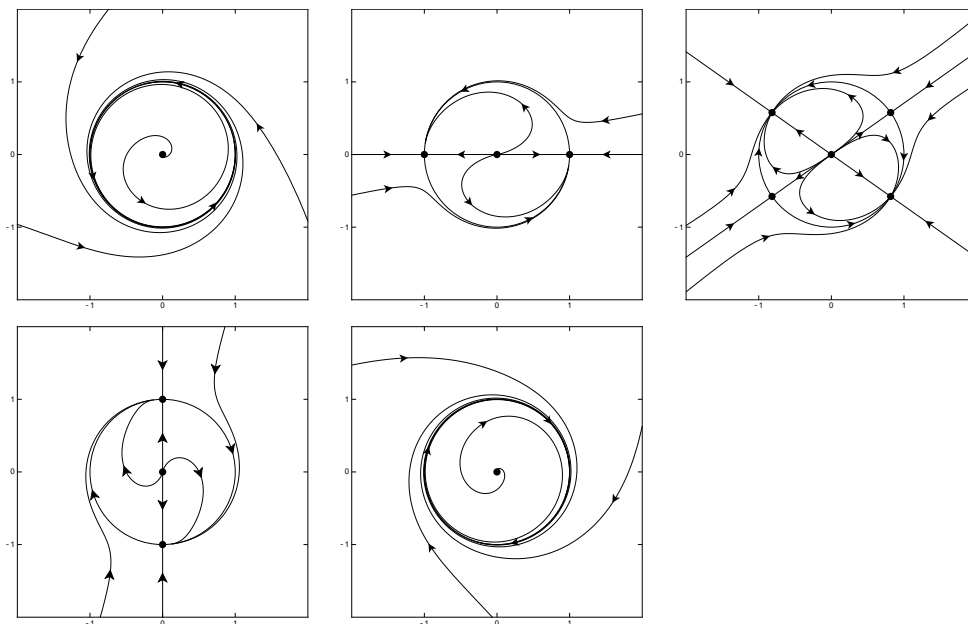
$$r = 0 \text{ vagy } r = 1, \quad \text{illetve} \quad \sin \phi = \pm\sqrt{-\varepsilon}, \quad \text{ha} \quad -1 \leq \varepsilon \leq 0.$$

Az origó mindig egyensúlyi helyzet, ε értékétől függően lehetnek további egyensúlyi helyzetek az egységkörön.

r az egységkörön belül növekszik, kívül csökken. A megoldások időben előre felé korlátosak, ezért az ω -limeszhalmazaik nemüres, kompaktak és összefüggőek, tehát teljesülnek a Poincaré-Bendixson-tétel feltételei.

Öt különböző eset lehetséges.

1. $\varepsilon > 0$: ϕ mindenhol növekszik. Az egységkör egy periodikus pálya, a belseje invariáns.
2. $\varepsilon = 0$: Ha $\phi = 0$ vagy π , akkor $\phi' = 0$. Ahol ez a két félegyenes metszi az egységkört, ott egyensúlyi helyzet van. A félkörlapok invariánsak, ezeken az r és ϕ koordináták monoton növekvőek, korlátosak, így konvergensek, csak egyensúlyi helyzetbe konvergálhatnak. A nem korlátos tartományok is invariánsak, itt r csökkenő, alulról korlátos, ϕ növekvő, felülről korlátos, a megoldás szintén egyensúlyba tart.
3. $-1 < \varepsilon < 0$: Ha $\phi = \pm \arcsin \sqrt{-\varepsilon}$ vagy $\pi \pm \arcsin \sqrt{-\varepsilon} \pmod{2\pi}$, akkor $\phi' = 0$. A félegyenesek és az egységkör 4 darab metszéspontjában egyensúlyi helyzet van. A körcikkek invariánsak.
4. $\varepsilon = -1$: Hasonlít a 2. esethez, csak $\phi' \leq 0$, és ϕ' akkor egyenlő 0-val, ha $\phi = \pi/2$ vagy $3\pi/2 \pmod{2\pi}$.
5. $\varepsilon < -1$: Hasonlít az 1. esethez, csak $\phi' < 0$.



4.19. ábra. A fáziskép az 1–5. esetekben

4.81. Példa. Tekintsük a következő, polárkoordinátákban adott rendszert:

$$\begin{cases} r' = (1 - r)^3, \\ \phi' = \sin^2 \phi + (r - 1)^2, \end{cases}$$

$r_0 > 0$. A nullklínák

$$r' = 0 \quad \text{és} \quad \phi' = 0,$$

vagyis

$$r = 1, \quad \text{illetve} \quad \sin \phi = 0 \quad \text{és} \quad r = 1$$

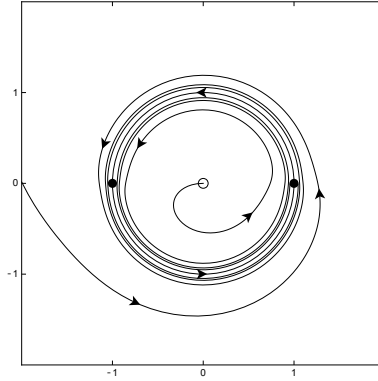
alakúak. Most a ϕ -nullklína csak két pontból áll, ez a két egyensúlyi helyzet. Az r -egyenletet korábban már megoldottuk, a megoldása:

$$r(t) = 1 + \frac{r_0 - 1}{\sqrt{2t(r_0 - 1)^2 + 1}} \quad \left(t > -\frac{1}{2(r_0 - 1)^2} \right),$$

ha $r_0 \neq 1$ és $r \equiv 1$, ha $r_0 = 1$. Tegyük fel, hogy $r_0 \neq 1$ és integráljuk a ϕ -egyenletet:

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_0^t (\sin^2 \phi(s) + (r(s) - 1)^2) ds \geq \phi_0 + \int_0^t \frac{r_0 - 1}{\sqrt{2s(r_0 - 1)^2 + 1}} ds.$$

Az integrál, és így a szög is tart végtelenbe, ahogy $t \rightarrow \infty$. Így az ω -limeszhalmaz a két egyensúlyi helyzetből, és az őket összekötő, két heteroklinikus pályából áll. Tehát most a Poincaré–Bendixson-tétel harmadik esete teljesül.



4.20. ábra. A fáziskép

Ellenőrző kérdések:

- Mit mondhatunk egy zárt pálya belsejéről?
- Mikor nevezünk egy periodikus pályát orbitálisan stabilnak?
- Mi az aszimptotikus periódus definíciója?

4.11. Hartman–Grobman-tételek

Most vizsgáljuk meg, hogy fixpontok környezetében hogyan viselkedhetnek a megoldások.

4.82. Definíció. Egy x egyensúlyi helyzet *hiperbolikus*, ha az $f'(x)$ mátrixnak nincs 0 valós részű sajátértéke.

4.83. Definíció. Egy x egyensúlyi helyzet *kritikus pont*, ha az $f'(x)$ mátrixnak van 0 valós részű sajátértéke.

Egy dimenzióban a hiperbolikus fixpontok környékén pontosan ismerjük a viselkedést: ha $f'(x) < 0$, akkor a fixpont aszimptotikusan stabil, ha $f'(x) > 0$, akkor instabil (stabilitásvizsgálat első közelítés alapján). Magasabb dimenzióban nehezebb ez a vizsgálat, ezt tárgyalja a Hartman–Grobman-tétel.

Továbbra is az

$$x' = f(x) \tag{4.5}$$

autonóm differenciálegyenlet által meghatározott $\varphi_t(x)$ dinamikus rendszert vizsgáljuk, ahol $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy összefüggő, nyílt halmaz. Legyen $p \in D$ fixpont, és tekintsük a p körül linearizált egyenletet:

$$y' = Ay, \quad \text{ahol} \quad A = f'(p) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{4.6}$$

4.84. Definíció. Egy $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ függvényre definiáljuk a $\|\cdot\|_1$ normát a következőképpen:

$$\|f\|_1 = \|f\| + \|f'\|,$$

ahol $\|\cdot\|$ a szuprémum norma.

4.85. Lemma. A (4.5) egyenlet topologikusan ekvivalens az

$$y' = f(y + p) \quad (4.7)$$

egyenlettel.

Bizonyítás. Tekintsük az $\ell(x) = x - p$ lineáris eltolás leképezést. Legyen x a (4.5) egyenlet megoldása, és $y = \ell(x) = x - p$. Ekkor y -ra teljesül a (4.7) egyenlet, amelynek a 0 fixpontja. Az ezen egyenlet által meghatározott dinamikus rendszert jelöljük ψ -vel. Könnyen látható, hogy $\psi_t(q) = \varphi_t(q + p) - p$, vagy más szóval $\ell \circ \varphi_t = \psi_t \circ \ell$: az eredeti és az eltolt dinamikus rendszer topologikusan ekvivalens. Az eltolt rendszer linearizáltja pontosan ugyanaz, mint az eredetié, ezért ha az eltolt rendszer topologikusan ekvivalens a linearizálttal, és a két rendszer is topologikusan ekvivalens egymással, akkor az eredeti rendszer is topologikusan ekvivalens a linearizáltjával. $\square$

Tehát elég a $p = 0$ esetre kimondani a tételeket.

4.86. Lemma (Kiterjesztési lemma). Legyen $f \in C^1(B_R, \mathbb{R}^n)$ (B_R az R sugarú gömb) és $A = f'(0)$. Ekkor minden $\nu > 0$ számhoz van olyan $r > 0$ és $a \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, amelyekre

i) minden $\|x\| < r$ esetén $a(x) = f(x) - Ax$,

ii) minden $\|x\| > 2r$ esetén $a(x) = 0$,

iii) $\|a\|_1 < \nu$.

A kiterjesztési lemmát nem bizonyítjuk, ahogy a Banach-féle fixponttételt sem.

4.87. Tétel (Banach-féle fixponttétel). Legyen (X, d) nemüres, teljes metrikus tér, és $T: X \rightarrow X$ egy kontrakció, azaz létezik egy $c \in [0, 1)$ konstans, hogy

$$d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y), \quad x, y \in X.$$

Ekkor T -nek pontosan egy fixpontja van X -ben.

4.88. Tétel (A Hartman–Grobman-tétel globális változata leképezésekre). Legyen $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix olyan, hogy a sajátértékei nem 1 abszolút értékűek. Ekkor létezik olyan $\mu > 0$ szám, hogy minden olyan $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ leképezéshez, amelyre $\|F\|_1 < \mu$, létezik egyetlen $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ korlátos leképezés, hogy $H(x) = x + g(x)$ esetén

$$H \circ (L + F) = L \circ H.$$

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben csináljuk. Legyen E_s és E_u az $\mathbb{R}^n$ azon alterei, amelyen az L által meghatározott diszkrét dinamikus rendszer stabil, illetve instabil. Ezek pontosan megfelelnek a stabil és instabil halmazoknak, annyi különbséggel, hogy ilyenkor ezek a halmazok (az L linearitása miatt) alterek. Legyen $L_s = L|_{E_s}$ és $L_u = L|_{E_u}$. Mivel L -nek az egységkörön nincsenek sajátértékei, megfelelően választott norma esetén

$$r := \max\{\|L_s\|, \|L_u^{-1}\|\} < 1.$$

Legyen $\mu < (1 - r)/2$, és vegyünk egy olyan $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ leképezést, amelyre $\|F\|_1 < \mu$. Ha μ elegendően kicsi, akkor az $L + F$ is invertálható lesz, hiszen annak deriváltja ($L + F' \in \mathbb{R}^{n \times n}$) nemelfajuló mátrix lesz, mivel L nemelfajuló volt. A bizonyítandó $H \circ (L + F) = L \circ H$ egyenlőségből

$$F + g \circ (L + F) = L \circ g. \quad (4.8)$$

Jobbról $(L + F)^{-1}$ -gyel, balról L^{-1} -gyel szorozva kapjuk, hogy

$$g = -F \circ (L + F)^{-1} + L \circ g \circ (L + F)^{-1}$$

és

$$g = L^{-1} \circ F + L^{-1} \circ g \circ (L + F).$$

Mivel $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u$, ezért bevezethetjük az F és g leképezéseknek ezen alterekre való projekcióját: $F_s, g_s : \mathbb{R}^n \rightarrow E_s$, $F_u, g_u : \mathbb{R}^n \rightarrow E_u$, és $g = g_s + g_u$, $F = F_s + F_u$. Nyilván g korlátosságából következik g_s és g_u korlátossága is. Definiáljuk a $T : C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ operátort a következőképpen:

$$T(g) = L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1} + L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u.$$

Legyen g fixpontja a T operátornak. Ekkor bármilyen $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1})(x) \in E_s \quad \text{és} \quad (L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u)(x) \in E_u.$$

így a $g = g_s + g_u$ egyértelmű felbontás miatt a $T(g) = g$ egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$$L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1} = g_s \quad \text{és} \quad L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u = g_u.$$

Ezeket átrendezve kapjuk, hogy

$$F_s + g_s \circ (L + F) = L \circ g_s \quad \text{és} \quad F_u + g_u \circ (L + F) = L \circ g_u,$$

amit összeadva és felhasználva L linearitását megkapjuk a (4.8) egyenlőséget. A g létezésének és egyértelműségének bizonyításához tehát keresni kell a T -nek egy egyértelmű fixpontját.

Nyilvánvaló, hogy T értelmezve van az egész $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ téren, és a $T(g)$ leképezés folytonos, tehát T a $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ térbe képez. Az is világos, hogy T korlátos operátor, hiszen korlátos leképezésekből raktuk össze. Definiáljuk a $\|g\|_* = \|g_s\|_0 + \|g_u\|_0$ normát a $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tér korlátos függvényein. Könnyen belátható, hogy így egy Banach-teret kapunk ezzel a normával. Megmutatjuk, hogy T ezzel a normával kontrakció. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$(T(g))_s = L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1} \quad \text{és} \quad (T(g))_u = L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u.$$

Mivel $(g + \bar{g})_s = g_s + \bar{g}_s$ és $(g + \bar{g})_u = g_u + \bar{g}_u$ ezért

$$\begin{aligned} & \|T(g) - T(\bar{g})\|_* \\ &= \|(T(g) - T(\bar{g}))_s\|_0 + \|(T(g) - T(\bar{g}))_u\|_0 \\ &= \|L \circ (g_s - \bar{g}_s) \circ (L + F)^{-1}\|_0 + \|L^{-1} \circ (g_u - \bar{g}_u) \circ (L + F)\|_0 \\ &= \sup_x \|(L \circ (g_s - \bar{g}_s) \circ (L + F)^{-1})(x)\| + \sup_x \|(L^{-1} \circ (g_u - \bar{g}_u) \circ (L + F))(x)\| \\ &\leq \|L_s\| \|g_s - \bar{g}_s\|_0 + \|L_u^{-1}\| \|g_u - \bar{g}_u\|_0 \leq r(\|g_s - \bar{g}_s\|_0 + \|g_u - \bar{g}_u\|_0) \\ &\leq r\|g - \bar{g}\|_*. \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $r < 1$ kapjuk, hogy T kontrakció és a Banach-féle fixponttétel szerint pontosan egy fixpontja van.

Be kell még látnunk, hogy a $H = \text{id} + g$ leképezés homeomorfizmus. Vegyük észre, hogy ha H -nak lenne inverze, akkor arra teljesülnie kell az $(L + F) \circ H^{-1} = H^{-1} \circ L$ egyenlőségnek. A fentiekhez hasonlóan belátható, hogy egyetlen olyan $g^* \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ korlátos leképezés van, amelyre $(L + F) \circ (\text{id} + g^*) = (\text{id} + g^*) \circ L$. Megmutatjuk, hogy H inverze éppen ez a $H^* = \text{id} + g^*$.

Az $F \equiv 0$ leképezésre kapott

$$L \circ (\text{id} + g) = (\text{id} + g) \circ L \quad (4.9)$$

egyenlőségnek a $g \equiv 0$ az egyetlen korlátos megoldása. A fenti egyenlőségekből

$$L \circ H \circ H^* = H \circ (L + F) \circ H^* = H \circ H^* \circ L.$$

Legyen $\bar{g} = H \circ H^* - \text{id}$, így $\bar{g}$ a (4.9) egyenlet megoldása. Ha $\bar{g}$ korlátos, akkor $\bar{g}$ csak az azonosan 0 leképezés lehet a fentiek alapján, és $H \circ H^* = \text{id}$. Valóban

$$\bar{g} = H \circ H^* - \text{id} = (\text{id} + g) \circ (\text{id} + g^*) - \text{id} = g^* + g \circ (\text{id} + g^*),$$

és a jobb oldalon álló leképezések korlátosak. Hasonlóan belátható, hogy $H^* \circ H = \text{id}$, tehát H valóban homeomorfizmus és ezzel beláttuk a tétel állítását. $\square$

Vegyük észre, hogy a leképezésekre vonatkozó globális Hartman–Grobman-tétel lényegében ugyanaz, mint a következő:

4.89. Tétel (Hartman–Grobman-tétel diszkrét dinamikus rendszerekre). *Tegyük fel, hogy f lokális diffeomorfizmus, $A = f'(0)$ és A -nak nincs sajátértéke az 1 sugarú körvonalon. Ekkor van egy olyan $H(x) = x + g(x)$ homeomorfizmus, hogy $H \circ A = f \circ H$ teljesül az origó egy elegendően kicsi környezetében, vagyis az f és a linearizáltja lokálisan topologikusan ekvivalens.*

4.90. Tétel (A Hartman–Grobman-tétel globális változata). *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hiperbolikus mátrix. Ekkor létezik olyan $\nu > 0$ szám, hogy ha $a \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a(0) = 0$, a kompakt tartójú (egy adott sugarú körön kívül azonosan 0), $f = A + a$, és $\|a\|_1 < \nu$, akkor van olyan $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, amelyre*

$$h \circ \varphi_t = e^{At} \circ h.$$

Bizonyítás. A konstansvariációs formula szerint az $x' = Ax + a(x)$ differenciálegyenlet $x(0) = x_0$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása felírható

$$\varphi_t(x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}a(\varphi_s(x_0)) \, ds$$

alakban. Ezt $t = 1$ -re alkalmazva

$$\varphi_1(x_0) = e^A x_0 + \int_0^1 e^{A(1-s)}a(\varphi_s(x_0)) \, ds.$$

Legyen

$$L = e^A \quad \text{és} \quad F(x_0) = \int_0^1 e^{A(1-s)}a(\varphi_s(x_0)) \, ds.$$

A 4.88. Tétel szerint L -hez létezik egy $\mu > 0$ szám; könnyen belátható, hogy van olyan $\nu > 0$, hogy $\|a\|_1 < \nu$ esetén $\|F\|_1 < \mu$.

Mivel az A mátrix sajátértékei nem 0 valós részűek, ezért L sajátértékei nem 1 abszolút értékűek. Így teljesülnek a 4.88. Tétel feltételei, tehát létezik egyetlen olyan korlátos $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, amelyre

$$(\text{id} + g) \circ (L + F) = L \circ (\text{id} + g) \quad (4.10)$$

(ahol id az identikus leképezés). Megmutatjuk, hogy $h = \text{id} + g$ választással teljesül az állítás. Ehhez elegendő belátni, hogy az $\alpha(x) = e^{-At}h(\varphi_t(x))$ megegyezik $h(x)$ -szel, vagy más szóval az $e^{-At}h(\varphi_t(x)) - x$ függvény $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -beli, korlátos és teljesíti a (4.10) egyenlőséget, hiszen a g egyértelmű volt. A kettőt külön bizonyítjuk.

A (4.10) egyenlőség szerint $h(\varphi_1(x)) = e^A h(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re, így

$$\begin{aligned} [\alpha \circ (L + F)](x) &= \alpha(\varphi_1(x)) = e^{-At}h(\varphi_t(\varphi_1(x))) = e^{-At}h(\varphi_{t+1}(x)) = e^{-At}h(\varphi_1(\varphi_t(x))) \\ &= e^{-At}e^A h(\varphi_t(x)) = e^A e^{-At}h(\varphi_t(x)) = (L \circ \alpha)(x), \end{aligned}$$

tehát az $\alpha - \text{id}$ függvény is megfelelő g a (4.10) egyenlőségben. Másrészt

$$(\alpha - \text{id})(x) = e^{-At}h(\varphi_t(x)) - x = e^{-At}(h(\varphi_t(x)) - \varphi_t(x)) + (e^{-At}\varphi_t(x) - x).$$

A jobb oldal első tagja korlátos, mert $h - \text{id}$ korlátos $\mathbb{R}^n$ -en, a második pedig azért, mert elegendően nagy $\|x\|$ -re $a(x) = 0$, így az egyenlet lineáris, tehát $\varphi_t(x) = e^{At}x$. Ezzel beláttuk, hogy $\alpha - \text{id} \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ és korlátos, amiből következik az állítás. $\square$

4.91. Tétel (A Hartman–Grobman-tétel lokális változata). *Tegyük fel, hogy a p hiperbolikus fixpont. Ekkor a (4.5) és (4.6) egyenletek által generált dinamikus rendszer lokálisan topologikusan ekvivalens, azaz létezik a p egy U környezete, az origó egy V környezete, egy $h : U \rightarrow V$ homeomorfizmus, amelyre*

$$h \circ \varphi_t = e^{At} \circ h. \quad (3)$$

Bizonyítás. A 4.85. Lemma szerint elegendő az állítást $p = 0$ -ra bizonyítani. Vegyük a 4.90. Tételben szereplő ν -t, amely csak az A mátrixtól függ. A kiterjesztési lemma szerint válasszuk ehhez a ν -höz a megfelelő $r > 0$ számot és a leképezést. Legyen $\bar{f} = A + a$ és az ehhez tartozó dinamikus rendszer $\bar{\varphi}$. Mivel a B_r gömbön f és $\bar{f}$ megegyeznek, ezért $x \in B^r$ és $\varphi_t(x) \in B^r$ esetén $\bar{\varphi}_t(x) = \varphi_t(x)$. Az a függvényre teljesülnek a 4.90. Tétel feltételei, ezért van olyan $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, amelyre $\bar{h} \circ \bar{\varphi}_t = e^{At} \circ \bar{h}$. Az $U = B_r$, $h = \bar{h}|_U$, $V = h(U)$ választással teljesül az állítás. $\square$

Most már tudjuk, hogy egy nemlineáris differenciálegyenlet által meghatározott dinamikus rendszer hiperbolikus fixpont környékén ugyanúgy viselkedik, mint a linearizáltja. Most kategorizálni fogjuk a lineáris differenciálegyenletek origó körüli viselkedését.

4.92. Tétel. *Tegyük fel, hogy az A és B mátrixoknak nincs 0 valós részű sajátértéke. Ha az origó stabil és instabil altereinek dimenziói megegyeznek az A és B által generált folytonos dinamikus rendszerben, akkor a két dinamikus rendszer topologikusan ekvivalens.*

Bizonyítás. Lineáris transzformációt alkalmazva feltehetjük, hogy a stabil és instabil alterek $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^u$ alakban írhatóak fel mindkét mátrix esetén. Mivel a mátrixok által generált leképezést a direkt összeg tagjain adott leképezések teljes mértékben meghatározzák, elegendő a stabil és instabil alterre külön-külön megadni egy homeomorfizmust.

Így speciálisan elegendő az $s = n$ és $u = n$ eseteket megoldani, sőt az $u = n$ eset belátható az $s = n$ esetből alkalmazva azt A^{-1} -re és B^{-1} -re.

Tegyük fel hát, hogy $s = n$, vagyis mindkét mátrix sajátértékeinek valós része negatív. Találhatunk tehát egy olyan $\|\cdot\|_A$ normát, amelyben $\|e^{At}x\|_A \leq e^{-\alpha t}\|x\|_A$ teljesül valamilyen $\alpha > 0$ számra és $t \geq 0$ -ra. Megfordítva az időt (t helyett $-t$ -vel) és x helyett $e^{At}x$ -et beírva kapjuk, hogy $\|e^{At}x\|_A \geq e^{-\alpha t}\|x\|_A$ $t \leq 0$ -ra. Ebből $t \geq 0$ -ra

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|_A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|e^{As}x(t)\|_A - \|x(t)\|_A}{s} \leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha s} - 1}{s} \|x(t)\|_A = -\alpha \|x(t)\|_A,$$

vagyis minden $\|x_0\|_A > 1$ -re van olyan $\tau_A(x_0) > 0$ időpont, amelyre $\|e^{A\tau_A(x_0)}x_0\|_A = 1$. Hasonlóan, $t \leq 0$ -ra

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|_A \geq -\alpha \|x(t)\|_A,$$

és minden $\|x_0\|_A < 1$ -re van olyan $\tau_A(x_0) < 0$ időpont, amelyre $\|e^{A\tau_A(x_0)}x_0\|_A = 1$. Világos módon az egységkör transzverzális a dinamikus rendszerre, és az is teljesül, hogy $\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t$. Hasonlóan definiálhatjuk a τ_B függvényt is.

Az ötlet ugyanaz, mint korábban: keresünk alaphalmazokat, azon definiáljuk a homeomorfizmust, és azt kiterjesztjük az egész térre. Most az A és B norma szerinti egység-gömbök felszíne az origóval lesznek az alaphalmazok. A $h_{AB}(x) = x/\|x\|_B$ folytonos leképezés az A -norma szerinti egység-gömböt a B norma szerinti egység-gömbre képezi. Ennek inverze a $h_{BA} = x/\|x\|_A$ leképezés, tehát ezek homeomorfizmusok. Tekintsük a

$$h(x) = e^{-B\tau_A(x)}h_{AB}(e^{A\tau_A(x)}x), \quad x \neq 0$$

leképezést, ami egy homeomorfizmus, hiszen az inverze az

$$e^{-A\tau_B(x)}h_{BA}(e^{B\tau_B(x)}x)$$

leképezés, mert $\tau_B(y) = \tau_A(x)$, ha $y = h(x)$. Mivel $\tau(x) \rightarrow -\infty$, ha $x \rightarrow 0$, ezért

$$\|h(x)\| \leq c\|e^{-B\tau_A(x)}\| \rightarrow 0,$$

és így h kiterjeszthető folytonosan az egész $\mathbb{R}^n$ -re a $h(0) = 0$ egyenlőséggel.

A h pedig topologikus ekvivalencia, hiszen

$$h(e^{At}x) = e^{B(t-\tau_A(x))}h_{AB}(e^{A(\tau_A(x)-t)}e^{At}x) = e^{Bt}h(x)$$

felhasználva, hogy $\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t$. □

Ellenőrző kérdések:

- Mikor nevezünk egy egyensúlyi helyzetet hiperbolikusnak?
- Mondjuk ki a Banach-féle fixponttételt.
- Milyen sorrendben bizonyítottuk a Hartman–Grobman-tétel változatait?

5. fejezet

Dinamikus rendszerek magasabb dimenzióban

Ebben a fejezetben egy fizikai alkalmazást tekintünk.

5.1. Definíció. Egy *erőtér* egy olyan vektormező az $\mathbb{R}^n$ -ben, amelynek vektorait az azon a ponton átmenő pontszerű anyagi testre ható erőként értelmezzük:

$$mx'' = F(x).$$

5.2. Definíció. Egy $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *erőtér konzervatív*, ha van olyan $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $F(x) = -\text{grad } V(x)$.

5.3. Megjegyzés. Konzervatív erőterben egy anyagi pont pontosan az

$$mx'' = -\text{grad } V(x)$$

differenciálegyenlet megoldásai mentén mozog. A pályák a legmeredekebb irányba gyorsulnak „lefelé” (ezért van a negatív előjel), és a gyorsulás merőleges a V szintvonalaira. A V függvény a potenciálfüggvény (helyzeti energia). A rendszer teljes energiája a helyzeti és mozgási energiából áll össze, ahol a mozgási energia:

$$M(x') = \frac{1}{2}m\|x'\|^2 = \frac{1}{2}m\langle x', x' \rangle.$$

Vegyük észre, hogy a helyzeti energia csak a helytől, a mozgási energia csak a sebességtől függ.

5.4. Tétel. *Konzervatív erőter által meghatározott rendszerben teljesül az energiamegmaradás törvénye.*

Bizonyítás. A teljes energia

$$E(x, x') = V(x) + M(x') = V(x) + \frac{1}{2}m\langle x', x' \rangle.$$

Skaláris szorzatnál a differenciálás ugyanúgy megy, mint skalár értékek szorzatánál (a skaláris szorzat skalár értékek szorzatainak összege), így

$$\frac{d}{dt}E(x, x') = \langle \text{grad } V(x), x' \rangle + m\langle x', x'' \rangle = \langle x', mx'' + \text{grad } V(x) \rangle = 0,$$

mert a szorzatban a második tényező 0. □

5.5. Definíció. Egy $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ erőter *centrális (középponti)*, ha van olyan $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $F(x) = \lambda(x)x$.

5.6. Megjegyzés. Centrális erőterénél az erő mindig az origóból x -be mutató vektor valamely skalárszorosa, vagyis az erőter az origó felé vagy az origótól elfelé mutat. A középpont tehát az origó. Gyakran előfordul, hogy az origót kizárjuk az erőterből, ott nem definiáljuk, vagyis az anyagi pont nem mehet át az origón (pl. gravitációs tér).

5.7. Tétel. Legyen F egy konzervatív erőter. Ekkor a következők ekvivalensek:

- a) F centrális erőter;
- b) $F(x) = f(\|x\|)x$;
- c) $F(x) = -\text{grad } V(x)$, ahol $V(x) = g(\|x\|)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy c) teljesül. Ekkor

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g(\|x\|)}{\partial x_i} = g'(\|x\|) \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = g'(\|x\|) \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} = \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x_i,$$

így b) teljesülni fog az $f(\|x\|) = -g'(\|x\|)/\|x\|$ választással.

A b) pontból nyilvánvalóan következik az a) pont.

Ahhoz, hogy az a) pontból belássuk a c) pontot, be kell bizonyítanunk, hogy a V potenciálfüggvény konstans minden gömbfelületen. Legyen $r > 0$ és

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}.$$

Mivel bármelyik két pont S_r -en összeköthető egy folytonosan differenciálható görbével S_r -en belül, ezért elegendő belátni, hogy V konstans értéket vesz fel bármilyen folytonosan differenciálható görbén S_r -en belül. Legyen tehát $u: [a, b] \rightarrow S_r$ folytonosan differenciálható leképezés, és tekintsük a $V(u(s))$ összetett leképezést, ennek deriváltjáról kell belátnunk, hogy azonosan 0. Differenciáljuk ezt a leképezést:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(V(u(s))) &= \langle \text{grad } V(u(s)), u'(s) \rangle = \langle -F(u(s)), u'(s) \rangle \\ &= \langle -\lambda(u(s))u(s), u'(s) \rangle = -\lambda(u(s))\langle u(s), u'(s) \rangle \\ &= \frac{-\lambda(u(s))}{2} \frac{d}{ds} \langle u(s), u(s) \rangle = 0, \end{aligned}$$

mert $\langle u(s), u(s) \rangle = \|u(s)\|^2 \equiv r^2$ konstans, hiszen az r sugarú gömbfelületen vagyunk. $\square$

5.8. Tétel. Legyen F egy centrális erőter. Ekkor az erőterben mozgó anyagi pont egy két dimenziós síkban mozog.

Bizonyítás. Vegyük az anyagi pont kezdeti helyvektora és sebességvektora által meghatározott 2-dimenziós S síkot (ha ez a két vektor egy egymás skalárszorosa lenne, akkor ez lehet 1- vagy 0-dimenziós is, de a továbbiakban is síkról fogunk beszélni). Azt állítjuk, hogy az anyagi pont mindig ebben a síkban fog mozogni. Ezt az origón átmenő síkot teljes mértékben meghatározza az arra merőleges vektorok $S^\perp$ halmaza, legyen $y \in S^\perp$ és x a megoldás. Differenciáljunk kétszer az $\langle x, y \rangle$ skaláris szorzatot:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x, y \rangle = \langle x'', y \rangle = \left\langle \frac{\lambda(x)}{m} x, y \right\rangle = \frac{\lambda(x)}{m} \langle x, y \rangle.$$

Ezt tekinthetjük az $\langle x, y \rangle$ kifejezésre vonatkozó nemautonóm, másodrendű, lineáris differenciálegyenletnek azzal a megszorítással, hogy a $\frac{\lambda(x)}{m}$ -ben is szerepel az x , de az tetszőleges t -től függő függvény lehetne. A

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle x, y \rangle = \frac{\lambda(x)}{m} \langle x, y \rangle, \\ \langle x(0), y \rangle = 0, \\ \langle x'(0), y \rangle = 0 \end{cases}$$

kezdetiérték-probléma megoldása csak az azonosan 0 függvény lehet, vagyis $\langle x, y \rangle \equiv 0$, tehát a megoldás mentén haladva az y vektorra mindig merőleges lesz a helyvektor. Mivel ezt minden S -re merőleges y vektorra be tudjuk bizonyítani, ezért a helyvektor mindig az S síkban lesz. $\square$

5.9. Megjegyzés. A továbbiakban a centrális erőterben mozgó anyagi pontok mozgását tekinthetjük arra kétdimenziós síkra megszorítva, amit a kezdeti feltétel a fenti módon meghatároz. Koncentráljunk most a konzervatív, centrális erőterekre. Vagyis az erőter $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, a potenciálfüggvény $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = -\text{grad } V(x) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)\right).$$

Két dimenzióban áttérhetünk az (r, ϕ) polárkoordinátákra, ahol $r = \|x\|$.

5.10. Definíció. Egy anyagi pont *(előjeles) perdületét, forgási momentumát* az $mr^2\phi'$ kifejezés adja meg.

5.11. Tétel. Centrális erőter által meghatározott rendszerben teljesül a perdületmegmaradás törvénye.

Bizonyítás. Legyen $i = x/\|x\|$ az x irányába mutató egységvektor és j egy erre merőleges, az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányú egységvektor. Az i és a j idő szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} i' &= (\cos \phi, \sin \phi)' = (-\sin \phi \cdot \phi', \cos \phi \cdot \phi') = \phi' j, \\ j' &= (-\sin \phi, \cos \phi)' = (-\cos \phi \cdot \phi', -\sin \phi \cdot \phi') = -\phi' i, \end{aligned}$$

és így

$$x' = (ri)' = r'i + ri' = r'i + r\phi'j.$$

Ezt még egyszer differenciálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x'' &= r''i + r'i' + r'\phi'j + r\phi''j + r\phi'j' \\ &= r''i + r'\phi'j + r'\phi'j + r\phi''j - r(\phi')^2i \\ &= (r'' - r(\phi')^2)i + \frac{1}{r}(2rr'\phi' + r^2\phi'')j \\ &= (r'' - r(\phi')^2)i + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\phi')j. \end{aligned}$$

Mivel centrális erőterről van szó, ezért az erő x -re (más szóval i -re) merőleges komponensének 0-nak kell lennie, vagyis j együtthatója 0:

$$\frac{d}{dt}(r^2\phi') \equiv 0,$$

és ezt kellett belátni. $\square$

5.12. Megjegyzés. A perdület állandó voltából következik, hogy ϕ' előjeltartó. A $\phi' = 0$ eset kevésbé érdekes: ekkor az anyagi pont egy origót is tartalmazó egyenes vonalú pályán mozog. Minden más esetben a ϕ' előjeltartásából következik, hogy ϕ szigorúan monoton, és r kifejezhető ϕ függvényében.

5.13. Tétel (Kepler második törvénye). *A Naptól a Földhöz húzott vezérsugár egyenlő időközök alatt egyenlő területeket sűrol.*

Bizonyítás. A vezérsugár által a (ϕ_0, ϕ) középponti szögek között sűrolt terület kiszámolható egy polárkoordinátás integrállal, amelyben most r -et ϕ függvényének tekintjük:

$$A(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{1}{2} r^2(\psi) d\psi.$$

Ezt t szerint differenciálva

$$\frac{d}{dt}(A(\phi)) = \frac{1}{2} r^2(\phi) \phi'.$$

A jobb oldali kifejezés a perdület konstansszorosa, tehát állandó. Ezek szerint az $A(\phi)$ függvény, mint t függvénye lineáris: azonos időtartamokhoz azonos terület-változás tartozik, és ezt kellett belátni. $\square$

5.14. Megjegyzés. Kepler második törvénye minden centrális erőterben igaz.

Ellenőrző kérdések:

- Mi a pontszerű test mozgási energiájának definíciója?
- Adjunk három ekvivalens definíciót a centrális erőterre.
- Hogyan bizonyítjuk a perdületmegmaradás törvényét?

Előismeretek

6.15. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel). *Ha f folytonos a korlátos, zárt $[a, b]$ intervallumon és differenciálható a nyitott (a, b) -n, akkor van olyan c belső pont, ahol*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

6.16. Definíció. *Közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan függvényegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény egyváltozós, és a deriváltja(i) is előfordul(nak) az egyenletben a változó ugyanazon t értékénél. Az ismeretlen függvény változóját általában t -vel jelöljük.

A differenciálegyenlet *rendjét* az ismeretlen függvénynek az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltja határozza meg.

Legyen $n \geq 1$ egész szám.

6.17. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyitott halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az

$$x' = f(t, x) \tag{6.1}$$

elsőrendű differenciálegyenlethez tartozó *kezdetiérték-problémának* nevezzük azt a feladatot, amikor adott az f értelmezési tartományának egy (t_0, x_0) pontja, és a (6.1) egyenletnek egy olyan $x(t)$ megoldását keressük valamely I intervallumon, amelyre $t_0 \in I$ és $x(t_0) = x_0$ teljesül. Következésképpen jelöljük:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{6.2}$$

6.18. Tétel (Peano). *Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyitott halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Ekkor bármely $(t_0, x_0) \in D$ ponthoz van olyan I nyílt intervallum, $t_0 \in I$, amelyen létezik az $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ megoldása a (6.2) kezdetiérték-problémának.*

6.19. Lemma (Gronwall–Bellman). *Legyenek $u, v: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív, folytonos függvények, és legyen $c \geq 0$. Ha*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^t u(s)v(s) \, ds \quad \text{minden } t \in [\alpha, \beta]\text{-ra,}$$

akkor

$$u(t) \leq c e^{\int_{\alpha}^t v(s) \, ds} \quad \text{minden } t \in [\alpha, \beta]\text{-ra.}$$

6.20. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyitott halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az f függvény *lokálisan Lipschitz-folytonos* x -ben, ha bármely (t_1, x_1) pontnak van olyan U nyílt környezete D -ben és olyan $L = L(t_1, x_1) \geq 0$, hogy

$$\|f(t_1, x_2) - f(t_1, x_1)\| \quad \text{minden } (t_1, x_2) \in U\text{-ra.}$$

6.21. Tétel (Picard–Lindelöf). Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyitott halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, f lokálisan Lipschitz-folytonos x -ben. Ekkor bármely $(t_0, x_0) \in D$ ponthoz van olyan I nyílt intervallum, $t_0 \in I$, amelyen létezik és egyértelmű az $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ megoldása a (6.2) kezdetiérték-problémának.

6.22. Definíció. Legyenek $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $y: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ a (6.1) egyenlet megoldásai. Azt mondjuk, hogy y az x folytatása, ha $I \subset J$, $I \neq J$ és $x(t) = y(t)$ minden $t \in I$ -re.

Az x megoldást *nem folytathatónak* nevezzük, ha nincs folytatása.

6.23. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyitott halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, f lokálisan Lipschitz-folytonos x -ben. Ekkor, ha $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nem folytatható megoldása a (6.1) egyenletnek, akkor I nyitott intervallum.

Minden folytatható x megoldáshoz van olyan nem folytatható y megoldás, amely az x folytatása.

6.24. Tétel. Bármely $(t_0, x_0) \in D$ esetén a (6.2) kezdetiérték-probléma $\varphi(t; t_0, x_0)$ nem folytatható megoldásának (α, β) értelmezési tartományára az alábbi két eset lehetséges:

- a) $\beta = \infty$;
- b) $\beta < \infty$, és minden $K \subset D$ korlátos és zárt halmazhoz van $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $(t, \varphi(t; t_0, x_0)) \notin K$, ha $t \in (\beta - \varepsilon, \beta)$.

Hasonló állítás igaz α -ra is.

6.25. Tétel. Legyen $(t_0, x_0) \in D$ és $\varphi(\cdot; t_0, x_0): (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a (6.2) kezdetiérték-probléma nem folytatható megoldása. Bármely $\varepsilon > 0$ -hoz és az (α, β) korlátos és zárt részintervallumához létezik $\delta = \delta(t_0, x_0, \varepsilon, I) > 0$ úgy, hogy minden $(t_1, x_1) \in D$, $|t_1 - t_0| < \delta$ és $\|x_1 - x_0\| < \delta$ esetén az

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

kezdetiérték-probléma $\varphi(\cdot; t_1, x_1)$ nem folytatható megoldásának értelmezési tartománya tartalmazza I -t, és

$$\|\varphi(t; t_1, x_1) - \varphi(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad \text{minden } t \in I \text{ esetén.}$$

Ellenőrző kérdések:

- Mondjuk ki a Gronwall–Belman-lemmát.
- Mi a különbség a Peano- és Picard–Lindelöf-tétel feltételei között?
- Hová tarthat egy nem folytatható megoldás, ha csak korlátos intervallumon van értelmezve?

Tárgymutató

- alaptartomány, 20
- α -határhalmaz, 49, 68, 69, 71, 82, 83
- aszimptotikus periódus, 84, 86
- attraktor, 8, 14, 66
- autonóm differenciálegyenlet, 46

- Banach-féle fixponttétel, 90, 92
- Bendixson–Dulac-tétel, 71
- bifurkáció, 21–23, 25, 26, 35, 37, 87
- Brouwer-féle fixponttétel, 84

- Cantor-függvény, 36
- Cantor-halmaz, 17–19, 43
- C^r -távolság, 19, 22

- Denjoy-leképezés, 35
- diffeomorfizmus, 6, 20, 30, 31, 33–35, 67, 92
- dinamikus rendszer, 6
- diszkrét dinamikus rendszer, 6, 65, 90, 92

- egyensúlyi helyzet, 51
- első integrál, 78
- érzékeny függés, 27

- Feigenbaum-diagram, 26
- felemelt, 30–34, 36
- Fibonacci-sorozat, 11
- fixpont, 6
- folytatás, 100
- folytonos dinamikus rendszer, 6, 46

- Green-tétel, 71, 72
- Gronwall–Bellman-lemma, 99

- Hartman–Grobman-tétel, 90, 92, 93
- határciklus, 82, 83
- heteroklinikus pálya, 70, 89
- hiperbolikus fixpont, 8, 21, 89, 93
- hiperbolikus periodikus pont, 8
- homeomorfizmus, 6, 19, 29, 32, 35, 39, 45
- homoklinikus pálya, 70

- instabil halmaz, 7, 44, 90

- instabil periodikus pont, 8
- integrálgörbe, 46
- invariáns halmaz, 68, 71

- Jordan-féle görbetétel, 67

- káosz, 28, 41, 44
- karakterisztikus egyenlet, 10, 12, 13, 55
- kezdetiérték-probléma, 11, 54, 99, 100
- kiterjesztési lemma, 90, 93
- kodimenzió, 63, 67, 86
- közönséges differenciálegyenlet, 99
- kritikus pont, 89

- Lagrange-féle középértéktétel, 8, 9, 18, 26, 99
- LaSalle-féle invarianciaelv, 60, 74
- Liénard-egyenlet, 73
- linearizált egyenlet, 57, 59, 74, 89
- Ljapunov első tétele, 52, 55
- Ljapunov második tétele, 53, 55, 56, 59
- Ljapunov-függvény, 53
- logisztikus leképezés, 14, 25, 29, 38, 41, 43
- lokális Lipschitz-folytonosság, 99
- lokális strukturális stabilitás, 21
- lokális topologikus ekvivalencia, 25, 92, 93
- Lotka–Volterra-egyenlet, 78, 79

- matematikai inga, 54, 56, 60, 61, 63

- negatív definit függvény, 51, 53, 55, 58
- negatív invariáns halmaz, 68, 71, 81, 83
- negatív pálya, 43, 67
- nem folytatható megoldás, 46, 63, 100
- nullklína, 74, 78, 87
- nyereg-csomó bifurkáció, 22, 37, 87

- ω -határhalmaz, 49, 50, 60, 68–71, 82, 83
- orbitális stabilitás, 84, 85, 87

- pálya, 46
- Peano-tétel, 99
- periódusduplikáció, 26

- periodikus pálya, 16, 17, 23, 25–28, 65, 69–72, 74, 75, 77, 83–85, 87, 88
- periodikus pont, 6, 8, 15, 16, 20, 25, 26, 28, 30–32, 34, 35, 40, 44, 64, 66, 77
- periódusduplikáció, 25
- Picard–Lindelöf-tétel, 54, 63, 100
- Poincaré–Bendixson-tétel, 70, 83, 87, 89
- Poincaré-leképezés, 63–66, 75, 77, 86
- pókhálódigram, 9, 14–16, 23, 24
- polárkoordináták, 64, 65, 85, 87, 97, 98
- pozitív definit függvény, 51, 53, 55, 58
- pozitív invariáns halmaz, 68, 71, 81, 83
- pozitív pálya, 42, 43, 67
- reguláris pont, 67, 70
- rend, 99
- rendszer szerinti derivált, 51, 74
- repellor, 8, 9, 14, 66
- rotációs szám, 31–35
- Smale-patkó, 42
- sokaság, 63, 67
- stabil halmaz, 7, 44, 45, 90
- stabil periodikus pálya, 64
- stabil periodikus pont, 8, 26
- strukturális stabilitás, 20, 22, 23
- szimbolikus dinamika, 38, 43
- topologikus ekvivalencia, 19–21, 27–30, 35, 41, 44, 66, 90, 93, 94
- topologikus tranzitivitás, 27, 28
- transzverzális sokaság, 63, 66, 67, 69, 70, 75, 83, 86, 94
- Van der Pol-egyenlet, 73, 74, 77, 85
- vasvilla-bifurkáció, 23

Irodalomjegyzék

- [1] R. L. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [2] P. HARTMAN, *Ordinary differential equations*, Classics in Applied Mathematics, Vol. 38, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2002.
- [3] HATVANI L., KRISZTIN T., MAKAY G., *Dinamikus modellek a közgazdaságban*, Polygon, 2001.
- [4] M. W. HIRSCH, S. SMALE, R. L. DEVANEY, *Differential equations, dynamical systems & an introduction to chaos*, Elsevier Academic Press, 2005.
- [5] Y. A. KUZNETSOV, *Elements of applied bifurcation theory*, Springer, New York, 1995.
- [6] N. ROUCHE, P. HABETS, M. LALOY, *Stabilitáselmélet: A Ljapunov-féle direkt módszer*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [7] TERJÉKI J., *Differenciálegyenletek*, Polygon, 1997.
- [8] G. TESCHL, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, American Mathematical Society, 2012.
- [9] TÓTH J., SIMON L. P., *Differenciálegyenletek*, második kiadás, Typotex, 2009.
- [10] S. WIGGINS, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer, New York, 1990.