Valószínűségszámítás közgazdászoknak

Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2018/19 őszi félév

Tudnivalók a kurzusról

- Az előadás és a gyakorlat külön kreditelt, mindkettőt ötfokozatú minősítéssel értékeljük.
- A gyakorlatokon leadott anyag és a számonkérés egységes. A félév folyamán két 45 perces dolgozat iratunk 25-25 pontért. A 25 pontból 18 pont feladatmegoldás, 7 pont elméleti számonkérés a honlapomon található elméleti összefoglaló alapján.
- A két zh közül az egyik, de csak az egyik pótolható vagy javítható a félév végi pótdolgozaton, a vizsgaidőszak első hetén.
- A kollokviumjegyet a vizsgaidőszakban tartott írásbeli vizsgákon lehet megszerezni. A vizsga 50%-ban elméleti számonkérést és 50%-ban feladatmegoldást tartalmaz.
- A jó és jeles gyakorlati jegyeket megajánljuk kollokviumjegynek.
- Egyéni tanulmányi rendes hallgatók: egyéni számonkérés.
- További információ, tematika, előadásanyag, órai és gyakorló feladatok: `http://www.math.u-szeged.hu/~szucsg/`

Mi is az a valószínűségszámítás?

A **valószínűségszámítás** (másnéven **sztochasztika**) a matematikának a véletlen tömegjelenségekkel foglalkozó területe.

Véletlen kísérletek

Egy jelenséget **tömegjelenségnek** nevezünk, ha változatlan körülmények között tetszőlegesen sokszor előidézhető vagy megfigyelhető. Egy jelenség **véletlen jelenség**, ha a jelenség lefolyását az általunk figyelembe vehető tényezők nem határozzák meg egyértelműen. **Véletlen kísérletnek** vagy **valószínűségi kísérletnek** nevezzük egy véletlen tömegjelenség előidézését vagy megfigyelését.

Példa. Véletlen kísérlet-e egy dobókocka feldobása?

- Tömegjelenség, hiszen a dobás tetszőlegesen sokszor végrehajtható változatlan körülmények között.
- Véletlen jelenség, hiszen nem tudjuk előre megmondani a kockadobás eredményét.

Egy véletlen kísérlet lehetséges eredményeit **kimeneteleknek** nevezzük, és **eseményeknek** hívjuk a kísérlet eredményére vonatkozó állításokat. Akkor mondjuk, hogy egy esemény **bekövetkezik**, ha a kísérlet végrehajtásakor az esemény, mint állítás, igaz.

Példa.

- Véletlen kísérlet: Feldobunk egy szabályos dobókockát.
- A kísérlet lehetséges kimenetelei: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Egy esemény: „páratlan számot dobunk". Ez az esemény akkor következik be (akkor igaz), ha a kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5.

A valószínűségszámítás elsődleges célja az események **valószínűségének** meghatározása. Egy esemény valószínűsége azt fejezi ki, hogy a kísérletet változatlan körülmények között sokszor megismételve az adott esemény a végrehajtások mekkora hányadában következik be. Ezért fontos, hogy a kísérlet tömegjelenség legyen.

Példa. Egy szabályos dobókocka esetében a „páratlan számot dobunk" esemény valószínűsége 1/2, ugyanis sok dobást elvégezve az esetek felében kapunk páros számot.

A valószínűségszámítás néhány alkalmazási területe

Habár a valószínűségszámítás a matematika egy fiatal területe, az utóbbi néhány évtizedben az alkalmazások miatt nagyon fontossá vált. Az alábbi alkalmazási területek közül néhányat mi is érinteni fogunk a félév folyamán:

- **Pénzügyi matematika:** Mit mondhatunk egy eszköz (értékpapír, árú, energia, stb.) jövőbeli áráról? Hogyan számszerűsíthető egy befektetés kockázata? Hogyan optimalizálható egy portfólió hozam és kockázat szempontjából? Mennyi legyen az ára bizonyos kockázatos pénzügyi termékeknek? (opciók, határidős üzletek, CDO)
- **Szerencsejátékok:** Mennyi a nyerés esélye egy játékban? Mekkora az átlagos nyeremény? Mekkora legyen a nyeremény, hogy a játék vonzó legyen, de a kaszinó hosszútávon mégis jól járjon?
- **Biztosítások:** Mit mondhatunk el egy adott kártípus nagyságáról? Milyen gyakoriak a kiugróan nagy károk? Mekkora legyen a biztosítási díj? Mekkora az „igazságos biztosítási díj”?

- **Időjáráselőrejelzés, katasztrófavédelem:** Hogyan modellezhető az időjárás matematikai módszerekkel? Milyen gyakoriak a kiugróan nagy, és emiatt különösen veszélyes természeti csapások? Földrengések (Japán, Kalifornia), óriáshullámok (Hollandia, tengeri fúrótornyok), árvizek (Tisza), stb.
- **Gyógyszerkísérletek, közvéleménykutatások, szociológiai felmérések:** Milyen matematika módszerekkel lehet kiértékelni egy statisztikai felmérés eredményét? Hogyan bizonyítható be például, hogy egy adott gyógyszer hat vagy nem hat? Hogyan kell adatokat gyűjteni, hogy az adatgyűjtés módszertana ne vezessen helytelen eredményre? Mi az a reprezentatív minta?
- **Data mining:** Milyen hasznos információ szűrhető ki egy vállalat (általában hatalmas) forgalmi adatbázisából? (Pl: Google, TESCO)
- **Fizika:** statisztikus fizika, kvantummechanika.
- **A hétköznapi ember oldaláról:** Mi a valószínűség és a nagy számok törvénye, és mit jelentenek ezek az életünkre nézve?

Néhány bevezető feladat

Kimenetel, eseménytér, esemény

Egy véletlen kísérlet lehetséges eredményeit **kimeneteleknek** vagy **elemi eseményeknek** nevezzük. Jelük a kis omega: ω. A kísérlet kimeneteleinek a halmaza az **eseménytér**, melynek jele a nagy omega: Ω.

Eseményeknek nevezzük a kísérlet aktuális kimeneteléhez kapcsolódó állításokat. Az eseményeket az ábécé nagy betűivel jelöljük: $A, B, C, \ldots$ Azt mondjuk, hogy egy esemény **bekövetkezik**, ha a kísérlet aktuális végrehajtásakor olyan kimenetelt kapunk, melyre ez az állítás igaz.

Egy adott kísérlet esetén a hozzá kapcsolódó összes esemény halmazát **eseményalgebrának** nevezzük. Jele: $\mathcal{A}$. Két nevezetes esemény:

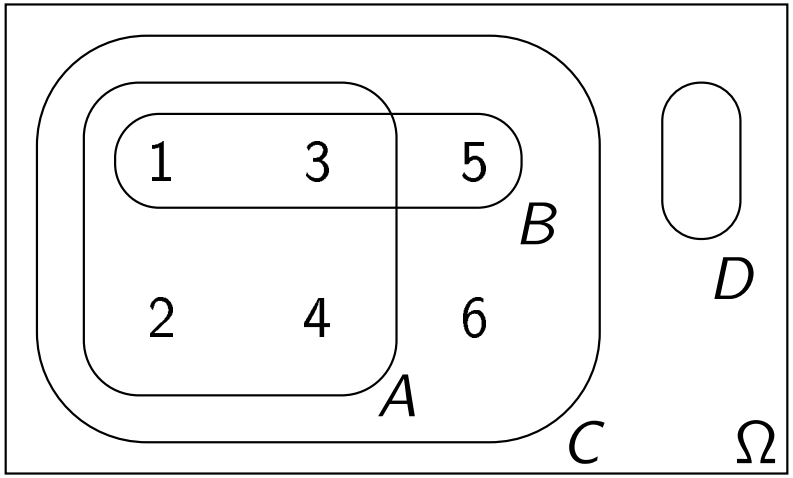
- Egy eseményt **biztos eseménynek** nevezük, ha a kísérlet minden lehetséges kimenetele esetén bekövetkezik.
- Egy eseményt **lehetetlen eseménynek** nevezük, ha a kísérletnek nincs olyan kimenetele, melyre ez az esemény bekövetkezne.

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát. Ekkor az eseménytér az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz. Tekintsünk néhány eseményt:

$A =$ 5-nél kisebbet dobunk $\qquad C =$ egész számot dobunk

$B =$ páratlan számot dobunk $\qquad D =$ negatív számot dobunk

A továbbiakban az eseményeket az eseménytér részhalmazaival fogjuk majd reprezentálni. Ez úgy történik, hogy összegyűjtjük azokat a kimeneteleket, melyekre az egyes események bekövetkeznek. Ennek a reprezentációnak az az egyik előnye, hogy kombinatorikus módszerekkel meg tudjuk határozni, hogy az egyes események hány kimenetel esetén következnek be. Például a fentiekben bevezetett eseményekre az alábbi reprezentációkat kapjuk:



$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ (biztos esemény)

$D = \emptyset$ (lehetetlen esemény)

Mennyi ezeknek az eseményeknek a valószínűsége? Mivel a feladat szövege szerint szabályos kockával dobunk, minden kimenetelnek $1/6$ az esélye. Ebből kapjuk az alábbi valószínűségeket:

$P(A) = P(\text{5-nél kisebbet dobunk }) = 4 \cdot 1/6 = 4/6 = 2/3$

$P(B) = P(\text{páratlan számot dobunk}) = 3 \cdot 1/6 = 3/6 = 1/2$

$P(C) = P(\text{egész számot dobunk}) = 6 \cdot 1/6 = 6/6 = 1 = 100\%$

$P(D) = P(\text{negatív számot dobunk}) = 0 \cdot 1/6 = 0/6 = 0$

Vegyük észre, hogy az események valószínűsége most csak attól függ, hogy hány kimenetel esetén következnek be, attól már nem, hogy melyek is ezek a kimenetelek. Formálisan a következő szabályt alkalmaztuk:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetel száma}}$$

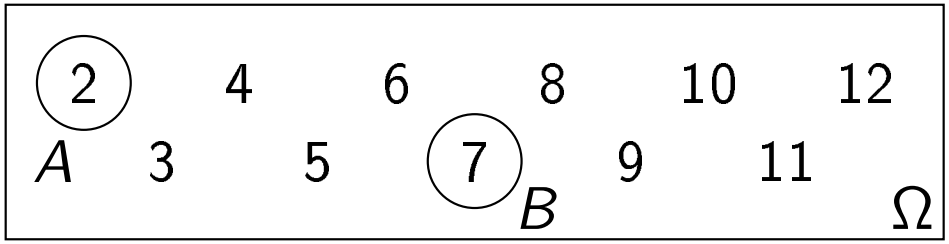
Ez a formula a **valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja**, és CSAK akkor lehet alkalmazni, ha teljesül a következő két feltétel:

- A kísérletnek csak véges sok kimenetele van.
- Minden kimenetelnek azonos az esélye.

Feladat. Feldobunk két szabályos dobókockát, egy pirosat és egy zöldet. Adjuk meg az alábbi események valószínűségét:

$A =$ a dobott számok összege 2, $\qquad B =$ a dobott számok összege 7.

1. Megközelítés. A kísérlet lehetséges kimenetelei a lehetséges összegek. Az eseménytér, illetve a két esemény halmazos reprezentációja:



$$\Omega = \{2, 3, ..., 12\},$$
$$A = \{2\}, \quad B = \{7\}.$$

A kísérletnek összesen 11 lehetséges kimenetele van, és az A és a B esemény pontosan 1 kimenetel esetén következik be. A kedvező/összes formula alkalmazásával kapjuk, hogy $P(A) = 1/11$ és $P(B) = 1/11$.

Ez a megoldás nem lehet jó, ugyanis a tapasztalatok szerint két kockával dobva a 7 sokkal gyakrabban jön ki, mint a 2. Ez azt jelenti, hogy a két értéknek nem lehet azonos a valószínűsége. De mit rontottunk el?

A hiba oka az, hogy az egyes kimenetelnek nem azonos a valószínűsége, és emiatt nem használhatjuk a kedvező/összes formulát.

2. Megközelítés. Legyenek a kimenetelek a lehetséges dobáspárok. A dobáspárok (i, j) alapban írhatóak fel, ahol i a piros kockával, j pedig a zölddel dobott érték. Az eseménytér az összes ilyen dobáspár halmaza. A kísérletnek ebben a megközelítésben összesen $6 \times 6 = 36$ kimenetele van. Mivel a kocka szabályos, feltehető, hogy ezeknek a kimeneteleknek azonos a valószínűsége. Ebben a modellben a kedvező/összes formula alkalmazásával

	1	2	3	4	5	6
1	2					7
2					7	
3				7		
4			7			
5		7				
6	7					

$$P(\text{a számok összege } 2) = \frac{1}{36}, \qquad P(\text{a számok összege } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ezek az eredményeket már összhangban vannak a gyakorlati tapasztalattal, ezért ezt fogadjuk el helyes megoldásnak.

A kérdésnek ezen megközelítése Galilei nevéhez fűződik. 1589-ben Toscana nagyhercege neki tette fel a következő kérdést: Miért van az, hogy három szabályos dobókockával dobva a 9 gyakrabban jön ki, mint a 10?

Feladat. Miben változik a megoldás, ha nem egy piros és egy zöld, hanem két ugyanolyan színű kockát dobunk fel egyszerre?

1. Megközelítés. Kevesebb kimenetelünk lesz, ugyanis a két dobókocka között nem tudunk különbséget tenni. Tehát például nem lesz külön $(1,2)$ és $(2,1)$ kimenetel, hiszen mindkettő azt reprezentálja, hogy az egyik kockával 1-et, a másikkal 2-t dobunk. Ebben a megközelítésben a kísérletnek összesen 21 kimenetele van, és

	1	2	3	4	5	6
1	2					7
2					7	
3				7		
4			7			
5		7				
6	7					

$$P(\text{a számok összege } 2) = \frac{1}{21}, \qquad P(\text{a számok összege } 7) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$

Probléma: Ez az eredmény ismét ellentmond a tapasztalatnak.

2. Megközelítés. Anyagi tulajdonságaiban mindig van különbség a két kocka között, a kettő sosem megkülönböztethetetlen. Emiatt úgy kell eljárnunk, mintha két különböző színű kockával végeznénk el a kísérletet. A természet/Isten meg tudja különböztetni a kockákat, és a matematika szabályait ő írja.

Összeszámlálási feladatok

Ahhoz, hogy a kedvező/összes formulát alkalmazzuk, meg kell határoznunk az egyes események számosságát, tehát meg kell mondanunk, hogy hány kimenetel található bennük. Az ilyen típusú feladatokat **összeszámlálási problémáknak** nevezzük, és ez a kérdéskör a matematika **kombinatorika** nevű ágához tartozik. Mi három fontosabb összeszámlálási problémával foglalkozunk:

- **Sorbaállítási feladatok:** Ha adott egy véges halmaz, akkor hányféleképpen állíthatjuk sorba a halmaz elemeit? Az elemek lehetséges sorbaállításait **permutációknak** nevezzük, és a kérdés úgy is feltehető, hogy hány permutációja van a halmaznak.
- **Kiválasztási feladatok:** Adott egy véges (mondjuk n-elemű) halmaz. Hányféleképpen választhatunk ki k darabot az elemek közül? Ha a kiválasztást visszatevés nélkül végezzük, akkor a lehetséges mintákat **kombinációknak** nevezzük. Ha a kiválasztás visszatevéssel történi, akkor a kapott mintákat **variációknak** hívjuk.

Permutációk. Adott egy halmaz n különböző elemmel. Hányféleképpen állíthatjuk sorba a halmaz elemeit?

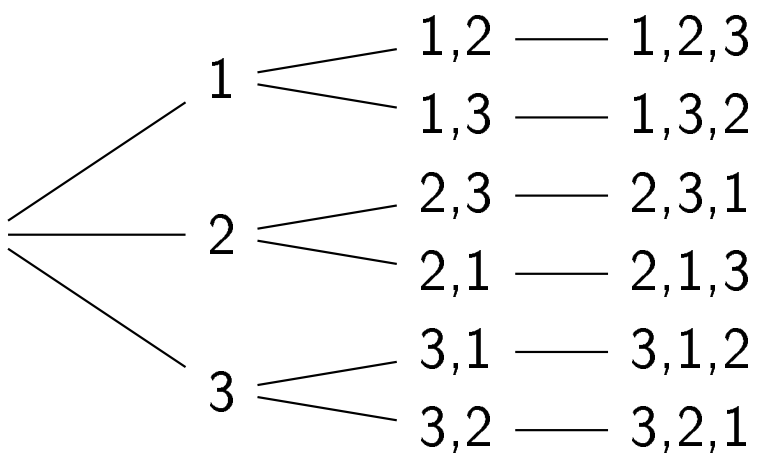
Ha sorba akarjuk állítani az elemeket, akkor az első pozícióba a halmaz elemei közül bármelyiket betehetjük, tehát n lehetőségünk van. Ezek után a második helyre a megmaradt $n-1$ elem közül kell választanunk egyet, ami $n-1$ lehetőség. És így tovább... Az utolsó pozícióba az egyetlen megmaradt elemet kell beraknunk, amit 1-féleképpen tehetünk meg:

Pozíciók:	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$	$\square$	$\square$
Lehetőségek száma:	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1

Ezeket az értékeket össze kell szorozni, hiszen minden pozíció egy elágazást jelent a teljes sorbaállítás felé vezető úton. A lehetséges sorbaállítások száma ***n*-faktoriális**: $n(n-1)\cdots 1 = n!$

Konvenció: $0! = 1$

Például $n = 3$ esetén a lehetséges sorbaállítások száma $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$.



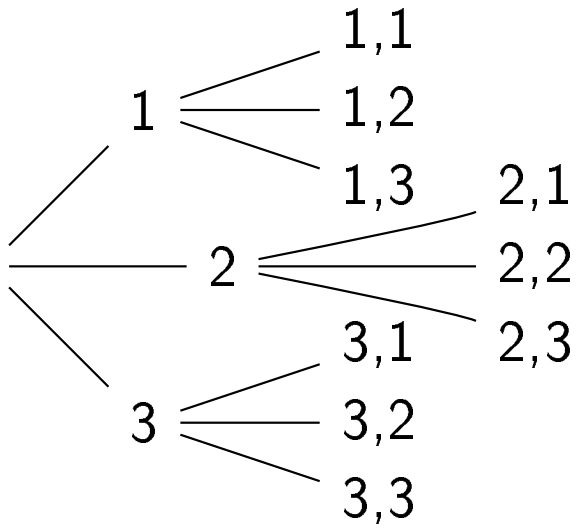
Variációk. Adott egy halmaz n különböző elemmel. Hányféleképpen választhatunk ki k elemet visszatevéssel?

Mivel egy-egy elemet többször is kivehetünk, visszatevéses mintavételezés esetén mindig figyelembe vesszük a kiválasztás sorrendjét. Ez azt jelenti, hogy különbözőnek tekintjük azokat a mintákat, ahol ugyanazokat az elemeket húzzuk ki, de eltérő sorrendben.

Pozíciók:	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$	$\square$	$\square$
Lehetőségek száma:	n	n	n	$\cdots$	n	n

Mivel a kiválasztást visszatevéssel végezzük, minden pozícióba n elem közül választhatunk. A lehetséges minták száma n^k.

Például, ha egy $n = 3$ elemű halmazból akarunk kiválasztani $k = 2$ elemet, akkor összesen $3^2 = 9$ lehetőségünk van:

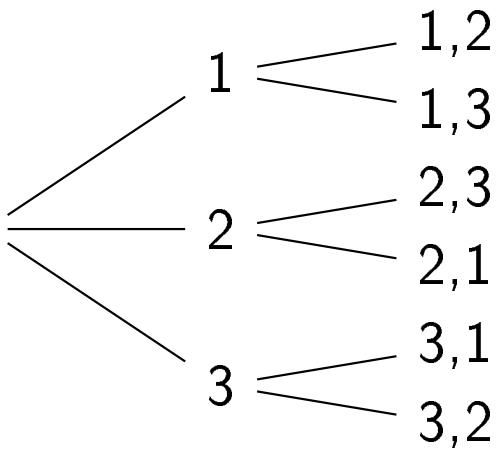


Kombinációk. Adott egy halmaz n különböző elemmel. Hányféleképpen választhatunk ki $k \leqslant n$ elemet visszatevés nélkül?

Mivel egy-egy elemet legfeljebb egyszer húzhatunk ki, a visszatevés nélküli esetben nem vesszük figyelembe az elemek kihúzásának a sorrendjét. A kiválasztott elemek az alaphalmaz egy részhalmazát alkotják, ezért a kérdés úgy is megfogalmazható, hogy hány k-elemű részhalmaza van az n-elemű alaphalmaznak.

Feladat. Hányféleképpen lehet kiválasztani 2 elemet visszatevés nélkül az $\{1, 2, 3\}$ háromelemű alaphalmazból?

Ha a kiválasztás sorrendjét is figyelembe vennénk, akkor összesen $3 \cdot 2 = 6$ mintát kapnánk, mint a jobb oldali diagrammon. Mivel most a kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe, az 1,2 és a 2,1 mintát nem különböztetjük meg. Hasonló módon nem alkot különböző mintát az 1,3 és 3,1, illetve a 2,3 és 3,2 kiválasztás. Ez azt jelenti, hogy ha a sorrendet nem vesszük figyelembe, akkor $6/2 = 3$ minta lehetséges.



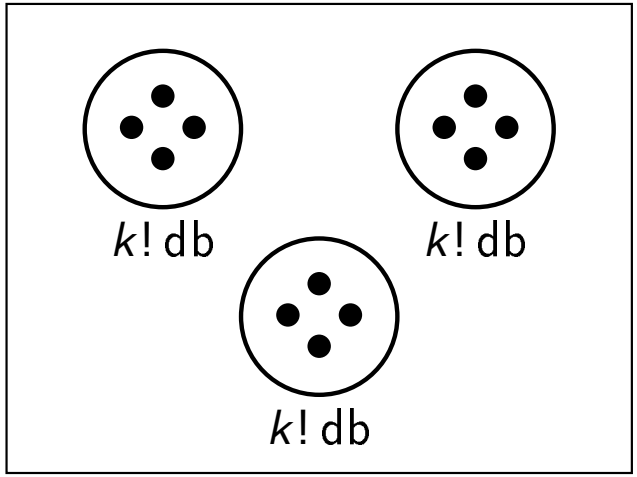
Térjünk vissza az eredeti kérdésre: hányféleképpen lehet kiválasztani n elemből k darabot visszatevés nélkül? Először azt nézzük meg, hogy hányféleképpen lehet kiválasztani k elemet visszatevés nélkül úgy, hogy a kihúzás sorrendjét is figyelembe vesszük:

Pozíciók:	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$	$\square$	$\square$
Lehetőségek száma:	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	$n-k+2$	$n-k+1$

A lehetőségek száma: $n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1) = n!/(n-k)!$

A következő lépésben felejtsük el, hogy milyen sorrendben húztuk ki az elemeket. Ez azt fogja eredményezni, hogy egyes minták, melyeket a sorrend figyelembevételekor még megkülönböztettünk, a sorrend elfelejtése után már nem lesznek megkülönböztethetőek. Ha tekintünk k rögzített elemet, akkor ezeket $k!$ különböző sorrendben húzhatjuk ki, tehát ezek az elemek $k!$ különböző sorrendes mintát alkothatnak. Ha a sorrendet nem vesszük figyelembe, akkor ezekből az elemekből már csak 1 minta alkotható. Ez azt jelenti, hogy a sorrendes minták száma $k!$-szorosa a sorrend nélküli mintáknak. (Lásd ábra a következő oldalon.)

Az ábrán minden pont egy mintát jelöl még a sorrend figyelembevételével. Azon minták kerültek azonos karikába, melyekben azonos elemek szerepelnek, csak más sorrendben. Minden karikába pontosan $k!$ darab minta került. Ha megfeledkezünk a húzás sorrendjéről, akkor az egyazon karikába került sorrendes minták ugyanazt a sorrend nélküli mintát adják. Ez azt jelenti, hogy



a sorrend nélküli minták száma azonos a karikák számával:

$$\frac{\text{sorrendes minták száma}}{\text{minták száma egy-egy karikában}} = \frac{n!/(n-k)!}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Az $\binom{n}{k}$ szimbólumot **binomiális együtthatónak** nevezzük, és úgy olvassuk, hogy „n alatt a k”. Például $n = 3$ és $k = 2$ esetén

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(2\cdot 1)\cdot 1} = 3\,.$$

Ez az az érték, ami már korábban is megkaptunk.

Feladat. Mik az ötöslottó sorsolás, mint véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei? Hány kimenetel van? Feltehető, hogy a kimeneteleknek azonos a valószínűsége?

Az ötöslottó sorsolás lehetséges kimenetelei a kihúzható számötösök, tehát a kimenetelek az 1 és 90 közötti egész számok halmazának ötelemű részhalmazai. Maga a sorsolás egy visszatevés nélküli mintavételezés $n = 90$ és $k = 5$ paraméterekkel. A lehetséges kimenetelek száma:

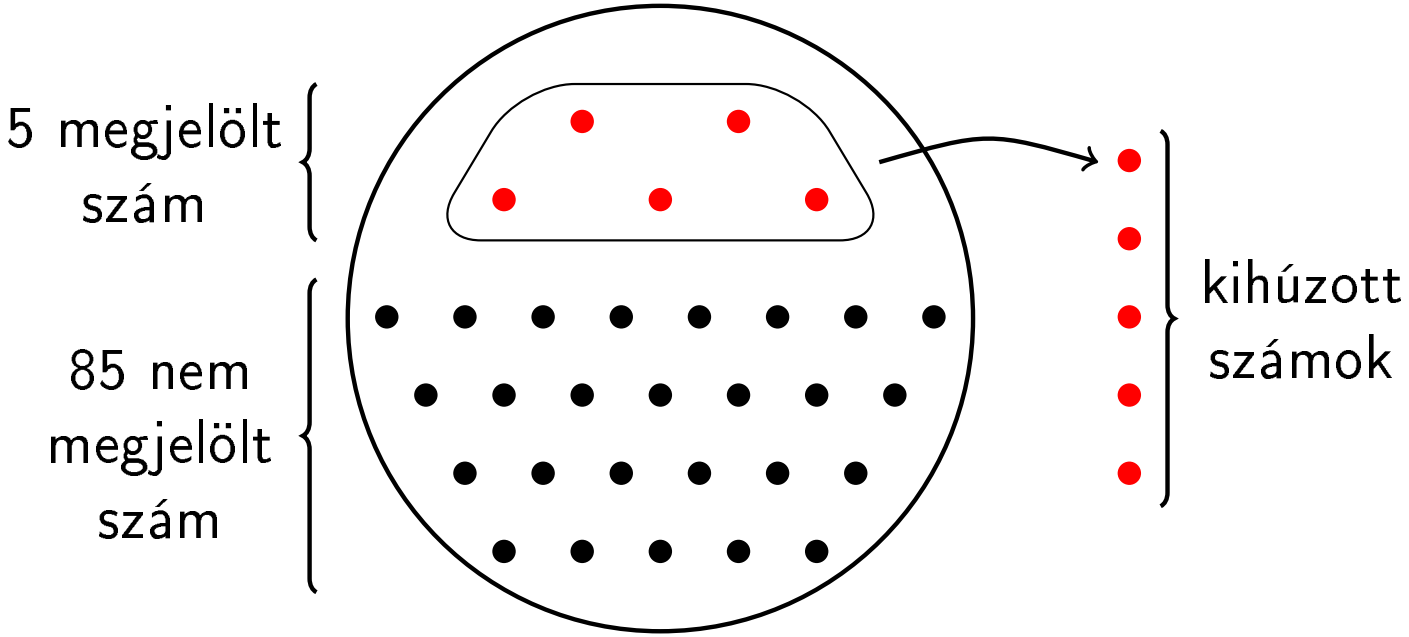
$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot (90-5)!} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = 43.949.268$$

A lottósorsoláson feltehető, hogy azonos a kimenetelek valószínűsége. A közjegyző jelenlétének és a bonyolult sorsolási metódusnak pontosan az a célja, hogy egyik szám se legyen nagyobb valószínűséggel kihúzva, mint a másik. (Mindazonáltal a városi legenda szerint régen, még a kézi sorsolás idején a szervezők időnként csaltak a lottósorsoláson. Vajon hogyan?)

Feladat. Egy szelvénnyel játszunk az ötöslottón. Mennyi az esélye annak, hogy telitalálatot érünk el?

Telitalálatot akkor érünk el, ha pontosan az általunk megjelölt öt számot húzzák ki. Ez azt jelenti, hogy most csak egy kedvező kimenetel van. A telitalálat valószínűsége:

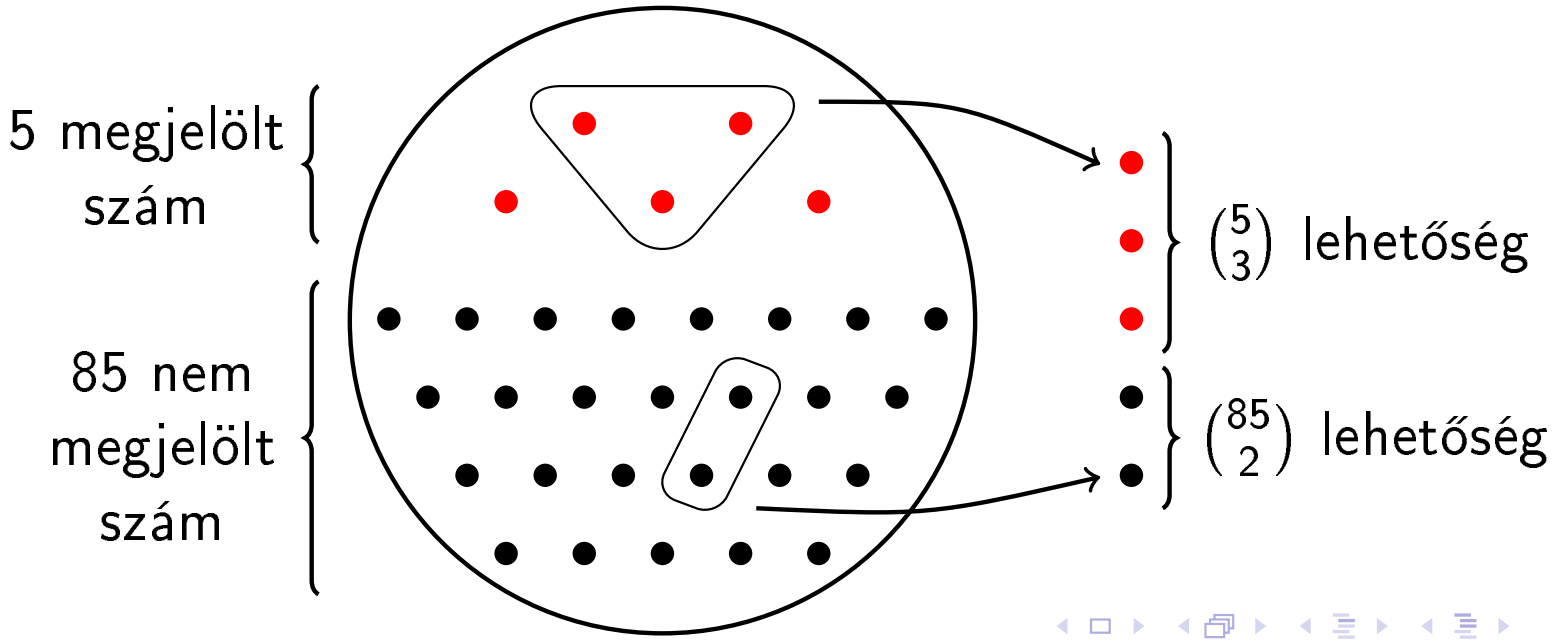
$$P(\text{telitalálat}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43.949.268}$$



Feladat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan 3 találatot érünk el?

Pontosan 3 találatot akkor érünk el, ha a mi számaink közül 3-at, a többi szám közül pedig 2-őt húznak ki. Az általunk megjelölt 5 számból 3-at $\binom{5}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani. Az általunk nem megjelöltek közül a maradék 2 számot $\binom{85}{2}$-féleképpen lehet kihúzni. Ez azt jelenti, hogy pontosan 3 találatot összesen ennyiféleképpen érhetünk el: $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$. Ezért

$$P(\text{pontosan 3 találat}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx \frac{1}{1231}.$$



Feladat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan k találatot érünk el?

A kérdés az előző oldal gondolatmenetével oldható meg. A mi számaink közül k darabot $\binom{5}{k}$-féleképpen húzhatnak ki. A rossz számok közül a maradék $5-k$ nyerőszámot $\binom{85}{5-k}$-féleképpen húzhatják ki. Tehát pontosan k találatot ennyiféleképpen érhetünk el: $\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}$. Ebből

$$P(\text{pontosan } k \text{ találat}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Az alábbi táblázat az egyes találatok valószínűségét tartalmazza:

Találat	Valószínűség
5	$\approx 1 : 44.000.000$
4	$\approx 1 : 100.000$
3	$\approx 1 : 1000$
2	$\approx 2{,}25\%$
1	$\approx 23\%$
0	$\approx 74{,}6\%$

Feladat. Ha egy szelvénnyel játszunk, akkor mennyi annak az esélye, hogy nyerünk pénzt a lottón?

Az ötöslottón akkor nyerünk pénzt, ha legalább 2 találatot akkor érünk el, vagyis a találatok száma pontosan 2, 3, 4 vagy 5. Ekkor a kedvező esetek száma:

$$\binom{5}{2}\binom{85}{3}+\binom{5}{3}\binom{85}{2}+\binom{5}{4}\binom{85}{1}+1$$

Ebből következik, hogy a kérdéses valószínűség értéke:

$$P(\text{nyerünk pénzt})=\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}+\binom{5}{3}\binom{85}{2}+\binom{5}{4}\binom{85}{1}+1}{\binom{90}{5}}\approx 2{,}33\%.$$

Műveletek eseményekkel

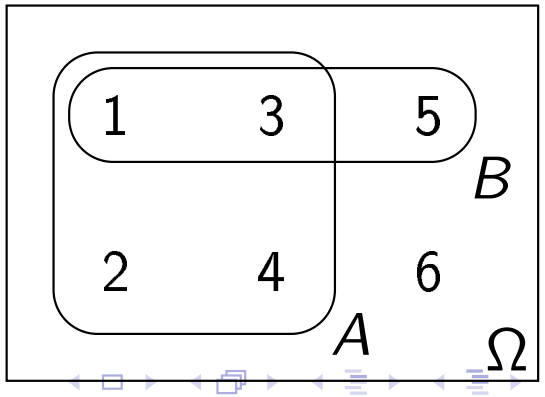
Az előző részben történt:

- Véletlen kísérlet: egy véletlen jelenség előidézése vagy megfigyelése.
- Kimenetelek: a véletlen kísérlet lehetséges eredményei.
- Eseménytér (Ω): az összes lehetséges kimenetel halmaza.
- Esemény: a kísérlet kimenetelével kapcsolatot állítás.
- Egy esemény akkor következik be, ha a kísérlet végrehajtásakor olyan kimenetelt kapunk, melyre ez az esemény igaz.
- Egy szövegesen megfogalmazott eseménynek megfeleltettük az eseménytér egy részhalmazát: azon kimenetelek halmazát, melyre ez az esemény bekövetkezik.

Példa. Dobjunk fel egy dobókockát, és tekintsük a következő két eseményt:

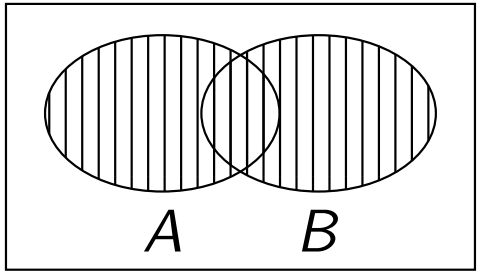
$A =$ 5-nél kisebbet dobunk $= \{1, 2, 3, 4\}$,

$B =$ páratlan számot dobunk $= \{1, 3, 5\}$.

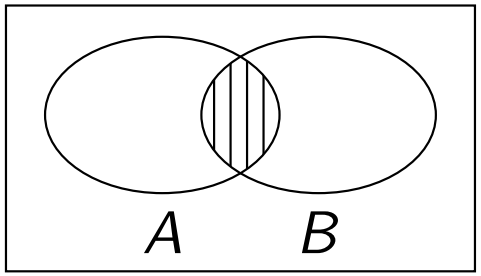


Két halmazon az alábbi **halmazelméleti műveleteket** hajthatjuk végre:

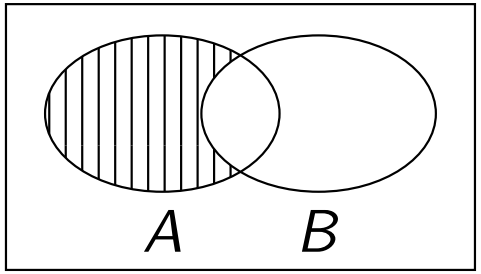
- A két halmaz **egyesítése** vagy **uniója** azon elemek halmaza, melyek a kettő közül valamelyik halmazban benne vannak. Jele: $A \cup B$.



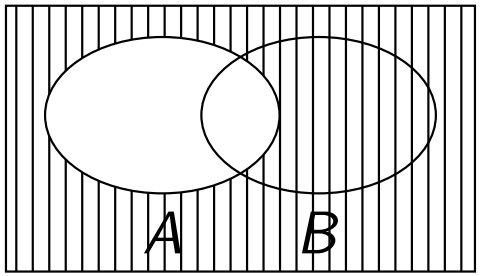
- A két halmaz **metszete** azon elemek halmaza, melyek mindkét halmazban benne vannak. Jele: $A \cap B$.



- Az A és a B halmaz **különbsége** azon elemek halmaza, melyek benne vannak A-ban, de nincsenek benne B-ben. Jele: $A \backslash B$.



- Az A halmaz **komplementere** azon elemek halmaza, melyek nincsenek benne A-ban. Jele: $\overline{A}$.



Milyen műveleteket végezhetünk el az eseményeken?

Műveletek eseményekkel

- Két esemény „vagy” logikai művelettel való összekapcsolását a két esemény **összegének** nevezzük. Két esemény összege azonos a két esemény halmazelméleti uniójával:

$$A + B = A \text{ vagy } B = A \cup B$$

- Két esemény „és” logikai művelettel való összekapcsolását a két esemény **szorzatának** nevezzük. Két esemény szorzata azonos a két esemény halmazelméleti metszetével:

$$A \cdot B = A \text{ és } B = A \cap B$$

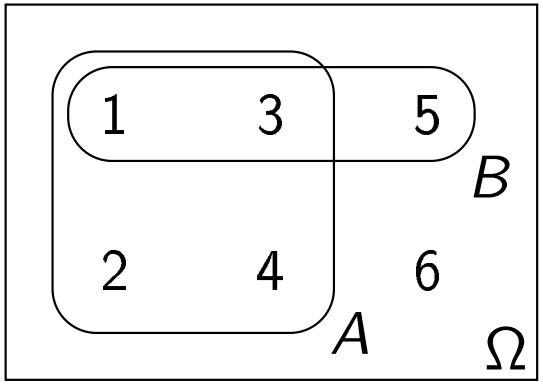
Példa. Dobókockával dobunk.

$A =$ 5-nél kisebbet dobunk $= \{1, 2, 3, 4\}$

$B =$ páratlan számot dobunk $= \{1, 3, 5\}$

A vagy $B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A \cup B$

A és $B = \{1, 3\} = A \cap B$



Műveletek eseményekkel (folytatás)

- Az „A bekövetkezik, de B nem” kifejezést az A és a B esemény **különbségének** nevezzük. Két esemény különbsége megegyezik a két esemény halmazelméleti különbségével:

$$A - B = A \text{ igen, de } B \text{ nem} = A \backslash B$$

- Egy esemény **tagadása** megegyezik az esemény halmazelméleti komplementerével:

$$-A = \text{nem } A = \overline{A}$$

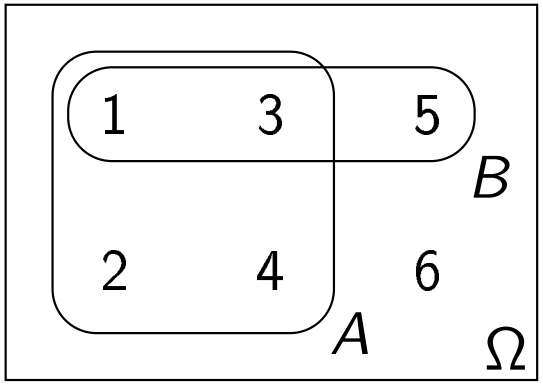
Példa. Dobókockával dobunk.

$A = 5$-nél kisebbet dobunk $= \{1, 2, 3, 4\}$

$B =$ páratlan számot dobunk $= \{1, 3, 5\}$

A igen, de B nem $= \{2, 4, \} = A \backslash B$

nem $A = \{5, 6\} = \overline{A}$



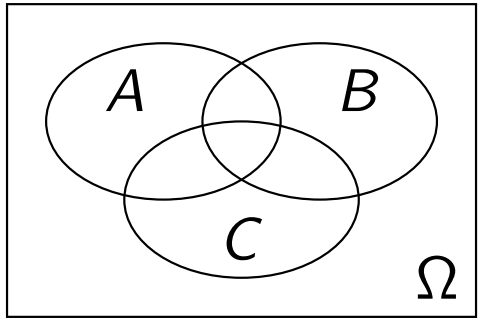
Feladat. Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül és 30 százaléka franciául. Hogyan modellezhető a társaság a bevezetett eszköztárral?

Valószínűségszámításban mindig kell egy véletlen kísérlet! Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a társaságból. A kísérlet lehetséges kimenetelei az emberek a társaságban, tehát az Ω eseménytér (a kimenetelek halmaza) maga a társaság. Vezessük be továbbá a következő eseményeket:

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

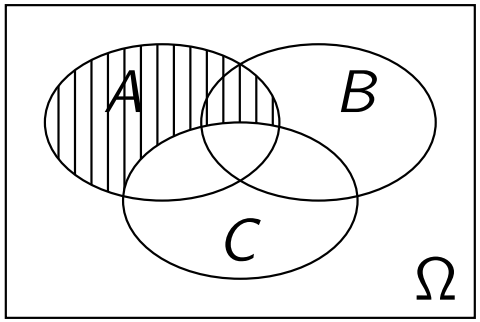
C = a kiválasztott ember beszél franciául



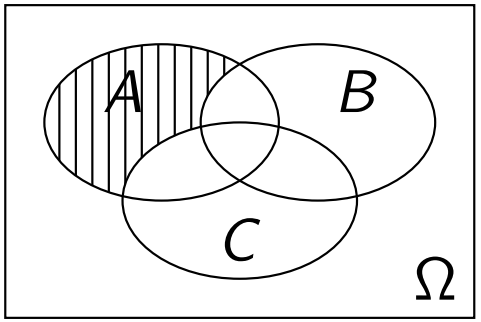
Ekkor A, B illetve C azon emberek halmaza, akik beszélnek angolul, németül, illetve franciául. A feladat szövege szerint ezen halmazok részaránya a teljes társaságon belül rendre 40, 35 és 30 százalék.

Írjuk fel az A, B, C események segítségével a következő eseményeket:

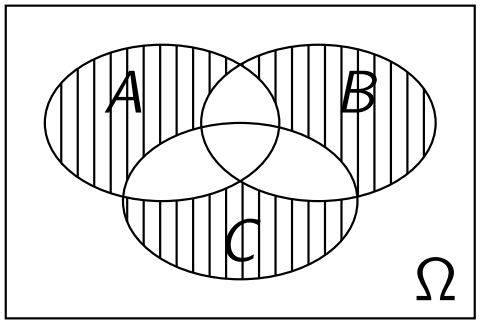
- a kiválasztott ember beszél angolul, de nem beszél franciául $= A$ bekövetkezik, de C nem $= A \backslash C$
- a kiválasztott ember beszél angolul, és nem beszél franciául $= A$ bekövetkezik, és C nem következik be $= A \cap \overline{C}$
- a kiválasztott ember beszél angolul, de németül és franciául már nem $= A$ bekövetkezik, de B és C nem $= A \backslash (B \cup C)$
- $D =$ a kiválasztott ember pontosan egy nyelvet beszél a három közül $=$ beszél angolul, de németül és franciául nem; vagy beszél németül, de angolul és franciául nem; vagy beszél franciául, de angolul és németül nem $= \left[A \backslash (B \cup C)\right] \cup \left[B \backslash (A \cup C)\right] \cup \left[C \backslash (A \cup B)\right]$



$A \backslash C = A \cap \overline{C}$

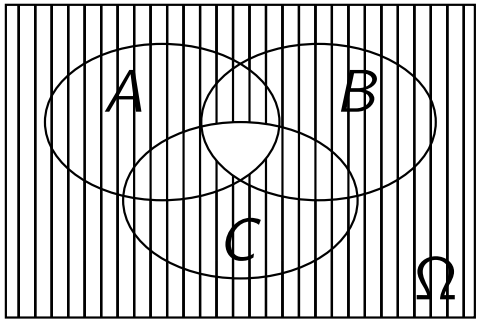


$A \backslash (B \cup C)$

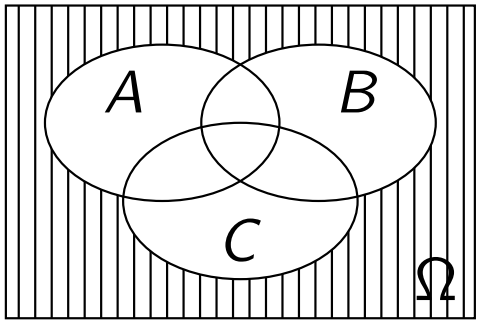


D

- a kiválasztott ember nem beszéli mindhárom nyelvet = nem $A \cap B \cap C = \overline{A \cap B \cap C}$
- nem beszél angolul, vagy nem beszél németül, vagy nem beszél franciául
  = nem A, vagy nem B, vagy nem $C = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$



- a kiválasztott ember egyik nyelvet sem beszéli
  = nem A, és nem B, és nem $C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
- nem igaz, hogy a kiválasztott ember valamelyik nyelvet beszéli = nem $A \cup B \cup C = \overline{A \cup B \cup C}$



De Morgan-azonosságok

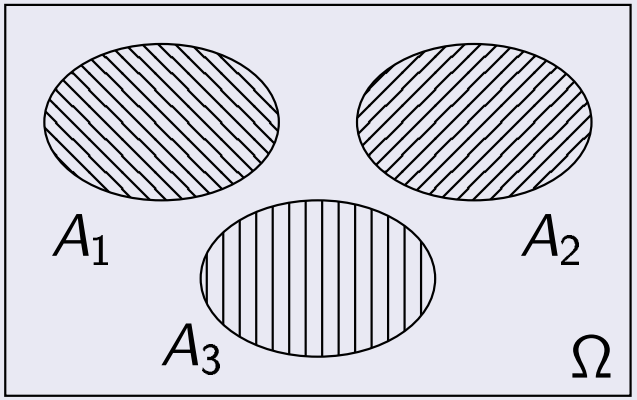
Legyen $A_1, A_2, \ldots$ tetszőleges eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata. Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots, \qquad \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots$$

Milyen kapcsoltban állhat egymással két vagy több esemény?

Kizáró események

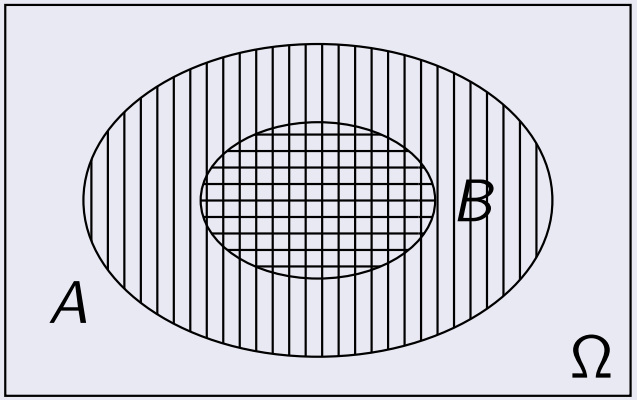
Legyen $A_1, A_2, \ldots$ eseményeknek véges vagy végtelen sorozata. Azt mondjuk, hogy ezek az események **páronként kizáróak** avagy **páronként diszjunktak**, ha bármely kettőt kiválasztva azoknak üres a metszete.



A kizáró események közül legfeljebb egy következhet be egyszerre, hiszen nincs olyan kimenetel, melyet két vagy több esemény is tartalmazna.

Egymást tartalmazó események

Azt mondjuk, hogy a B esemény **maga után vonja** az A eseményt, ha $B \subset A$, tehát B minden eleme az A halmaznak is eleme. Ez azt jelenti, hogy ha a B esemény bekövetkezik, akkor az A esemény is feltétlenül bekövetkezik.



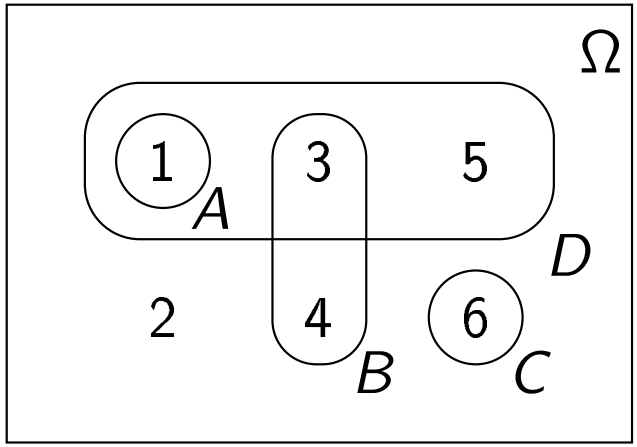
Feladat. Feldobunk egy dobókockát. Milyen kapcsolat áll fenn az alábbi események között?

$A =$ 1-est dobunk

$B =$ 3-ast vagy 4-est dobunk

$C =$ 6-ost dobunk

$D =$ páratlan számot dobunk



- Az A, B, C események páronként kizáróak, hiszen bármely kettőt kiválasztva azoknak nem lesz közös eleme. Ezen események közül nem következhet be több egyszerre.
- A C és a D esemény szintén kizárja egymást.
- Az A esemény maga után vonja D-t: ha A bekövetkezik, akkor D is bekövetkezik.
- A B és a D esemény között egyik tanult kapcsolat sem áll fenn: nem zárják ki egymást, és egyik sem vonja maga után a másikat.

A valószínűség fogalma és tulajdonságai

Az előző órán azt mondtuk, hogy egy esemény valószínűsége azt mutatja meg, hogy a kísérletet többször megismételve a vizsgált esemény a végrehajtások mekkora hányadában következik be. Ez az értelmezés így nem teljesen precíz. Egy szabályos dobókocka esetén a páratlan dobás valószínűsége 1/2. De a kockát mondjuk 99-szer feldobva nem lehetséges, hogy pontosan a dobások felében kapunk páratlan értéket. A valószínűség precíz definiálásához először szükségünk van egy másik fogalomra.

Bekövetkezési gyakoriság és relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérletet, és egy ehhez kapcsolódó A eseményt. Hajtsuk végre a kísérletet egymás után n alkalommal, és jelölje $k_n(A)$ azt, hogy A hányszor következett be a végrehajtások során. Ezt nevezzük az A esemény **bekövetkezési gyakoriságának**. Az A **relatív gyakorisága** az $r_n(A) = k_n(A)/n$ hányados, ami azt mutatja meg, hogy az A esemény a végrehajtások mekkora hányadában következett be.

Tapasztalati tény, hogy egy kísérletet újra és újra végrehajtva egy A esemény relatív gyakorisága egy meghatározott érték körül ingadozik, és a köznyelv ezt az értéket nevezi az esemény valószínűségének:

$$r_n(A) = \frac{k_n(A)}{n} \approx P(A).$$

Sőt, ennél többet is mondhatunk. A relatív gyakoriság konvergál ehhez az értékhez:

$$r_n(A) \to P(A)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Régen pontosan ezzel a konvergenciával definiálták a valószínűséget, tehát a relatív gyakoriság limeszeként. A valószínűségszámítás modern felépítése nem így deniálja az események valószínűségét, ez a konvergencia egy tétel lesz majd. De akkor hogyan deniáljuk? Első kérdés: egyáltalán milyen tulajdonságokat várunk el az események valószínűségétől?

- Egy A esemény relatív gyakorisága mindig 0 és 1 közés esik.

  Elvárás: Legyen $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ minden A eseményre.
- A biztos esemény relatív gyakorisága:

$$r_n(\Omega) = k_n(\Omega)/n = n/n = 1$$

  Elvárás: A biztos esemény valószínűsége legyen $P(\Omega) = 1$.
- Ha A és B kizáró események, akkor

$$r_n(A \cup B) = \frac{k_n(A \cup B)}{n} = \frac{k_n(A) + k_n(B)}{n} = r_n(A) + r_n(B)$$

  Hasonló módon mutatható meg, hogy ha $A_1, A_2, \ldots$ páronként kizáró eseményeknek véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$r_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = r_n(A_1) + r_n(A_2) + \cdots$$

  Elvárás: Az ilyen eseményekre legyen

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

Valószínűség, valószínűségi mező

Tekintsünk az Ω eseményteret, és a $\mathcal{A}$ az eseményalgebrát, tehát az események halmazát. Azt mondjuk, hogy a $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ függvény **valószínűség** vagy **valószínűségi mérték** az eseményalgebrán, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

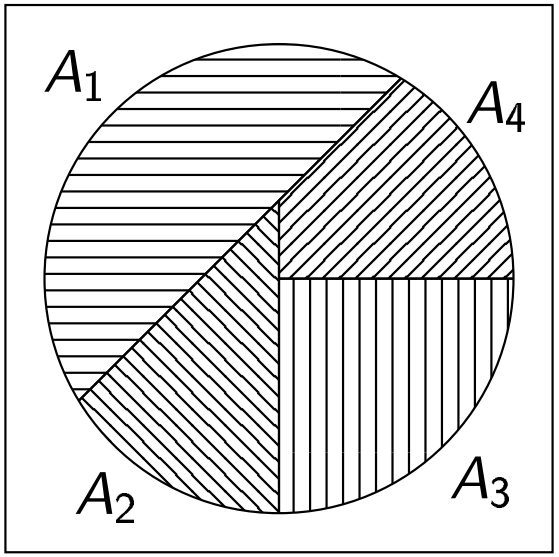
- A biztos esemény valószínűsége $P(\Omega) = 1$.
- **Additivitás**: Ha $A_1, A_2, \ldots$ páronként kizáró eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor az egyesítésük valószínűsége

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

Tehát, a valószínűségi mérték egy olyan függvény, mely az eseményekhez 0 és 1 közötti számokat rendel hozzá. Az A eseményhez rendelt $P(A)$ értéket úgy nevezzük, hogy az A **valószínűsége**. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast **valószínűségi mezőnek** hívjuk.

A véletlen kísérleteket mindig egy megfelelően konstruált valószínűségi mezővel írjuk le. Az Ω alaphalmaz a kísérlet kimeneteleinek a halmaza (eseménytér), a $\mathcal{A}$ eseményalgebra a vizsgált események rendszere, és végül a P függvény mondja meg az egyes események valószínűségét.

Az additivitási tulajdonság a következőt fejezi ki. Ha van egy esemény, melyet feldarabolunk véges vagy végtelen sok részre, akkor a részek valószínűségeinek az összege egyenlő a kiindulási esemény valószínűségével. Ez a tulajdonság jellemző minden mérésre, például a terület vagy a tömeg mérésére is. Ezért nevezzük a valószínűséget „mértéknek”.



A valószínűséget úgy érdemes elképzelni, hogy egységnyi nagyságú súlyt széttertünk az eseménytéren, a kimenetelek halmazán. Ekkor egy A esemény $P(A)$ valószínűsége nem más, mint az A halmaz összsúlya.

A valószínűség definíciójából matematikai módszerekkel levezethető, hogy az alábbi tulajdonságok is teljesülnek:

A valószínűség tulajdonságai

- Komplementer esemény: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Lehetetlen esemény valószínűsége:

$$P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

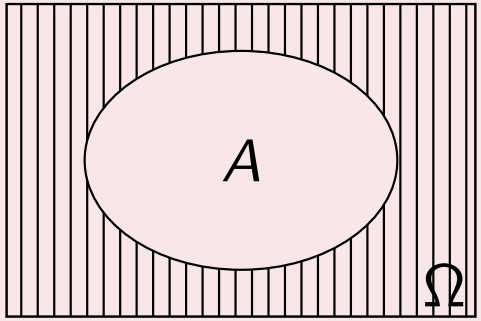
- **Kivonási szabály**: tetszőleges A és B esemény mellett

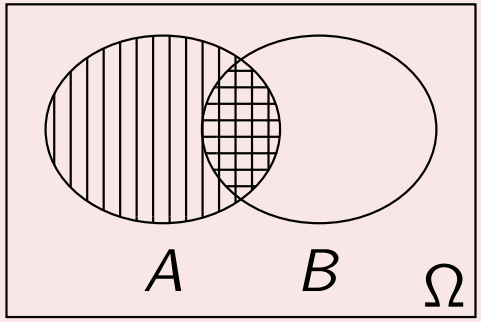
$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B).$$

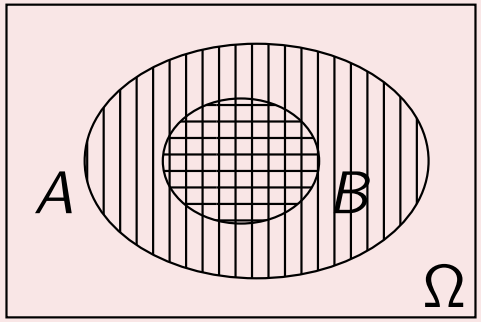
Speciálisan, ha B maga után vonja az A eseményt, akkor

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(B).$$

- **Monotonitás**: ha B maga után vonja az A eseményt, akkor $P(B) \leqslant P(A)$.



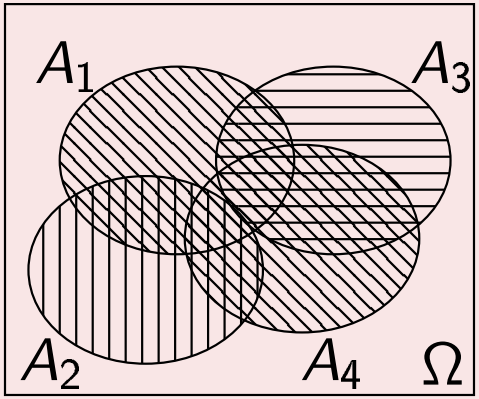




A valószínűség további tulajdonságai

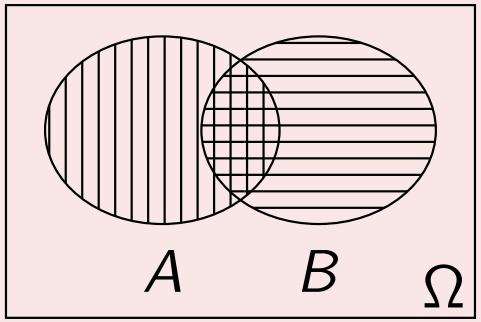
- **Szubadditivitás**: Ha $A_1, A_2, \ldots$ tetszőleges eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$



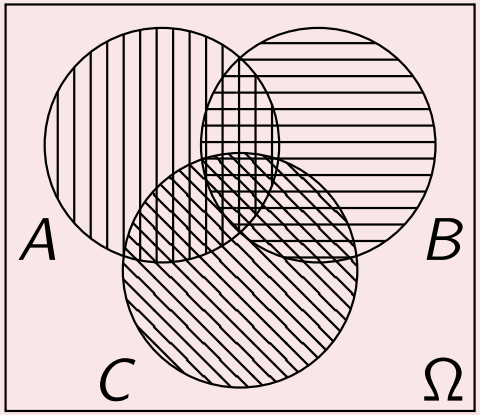
- Két esemény összegének a valószínűsége: tetszőleges A és B esetén

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- Három esemény összegének a valószínűsége: tetszőleges A, B és C esemény mellett

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



A valószínűség további tulajdonságai

- **Poincaré-formula** avagy **szitaformula**: tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ események mellett

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n \\ \text{különböző egészek}}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Ugyanez részletesebben:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) \\ &- \text{ketteses metszetek valószínűsége} \\ &+ \text{hármas metszetek valószínűsége} \\ &- \text{négyes metszetek valószínűsége} \\ &\vdots \\ &\pm P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

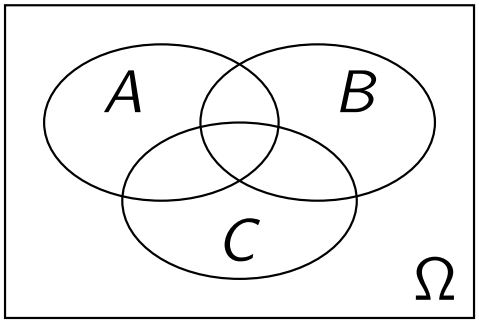
Feladat. Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául, 15 százaléka angolul és németül, 20 százaléka angolul és franciául, 20 százaléka németül és franciául, végül az emberek 10 százaléka beszél mindhárom nyelven. Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a társaságból.

A kísérlet lehetséges kimenetelei az emberek a társaságban, tehát az eseménytér maga a társaság. Tekintsük a következő eseményeket:

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

C = a kiválasztott ember beszél franciául



Amikor véletlenszerűen választunk ki egy embert, akkor ezt úgy értjük, hogy minden ember esetén azonos annak a valószínűsége, hogy éppen ő lesz kiválasztva. Most például az emberek 40 százaléka beszél angolul, így 0,4 annak az esélye, hogy egy angolul beszélő embert választunk ki. Kapjuk:

$$P(A) = 0{,}4, \quad P(B) = 0{,}35, \quad P(C) = 0{,}3, \quad P(A \cap B \cap C) = 0{,}1,$$
$$P(A \cap B) = 0{,}15, \quad P(A \cap C) = 0{,}2, \quad P(B \cap C) = 0{,}2.$$

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember...

- nem beszél angolul=nem $A = \overline{A}$

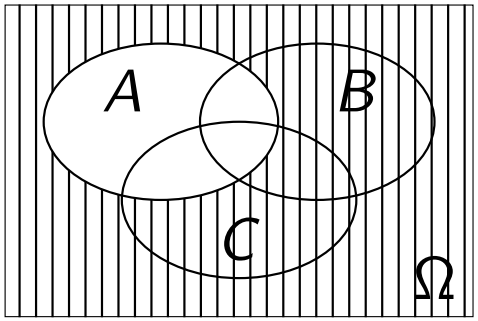
  $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$
- beszél angolul, de nem beszél franciául= A teljesül, de C nem=$A \backslash C$

  Most $C \nsubseteq A$, ezért $P(A \backslash C) \neq P(A) - P(C)$

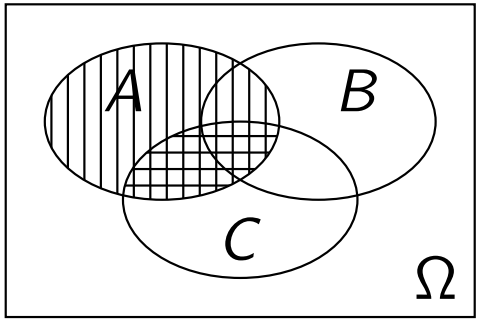
  Helyes megoldás: $P(A \backslash C) = P(A) - P(A \cap C) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$
- beszél angolul, de németül és franciául már nem

  $= A$ teljesül, de B és C nem $= A \backslash (B \cup C)$

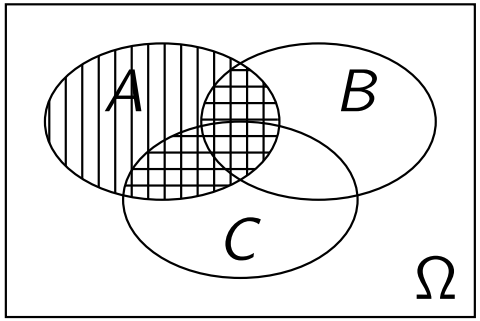
$$P\big(A \backslash (B \cup C)\big) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0{,}4 - 0{,}15 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}15$$



$\overline{A}$



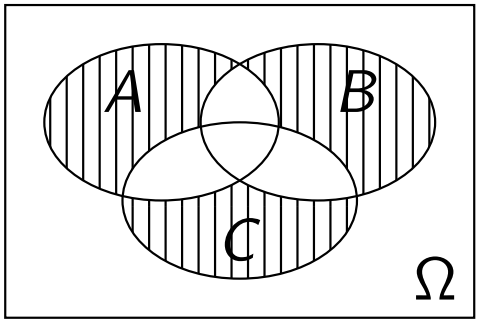
$A \backslash C$



$A \backslash (B \cup C)$

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember...

- D = pontosan egy nyelven beszél a három közül
  = beszél angolul, de németül és franciául nem;
  vagy beszél németül, de angolul és franciául nem;
  vagy beszél franciául, de angolul és németül nem
  $= \big[A\backslash(B\cup C)\big]\cup\big[B\backslash(A\cup C)\big]\cup\big[C\backslash(A\cup B)\big]$



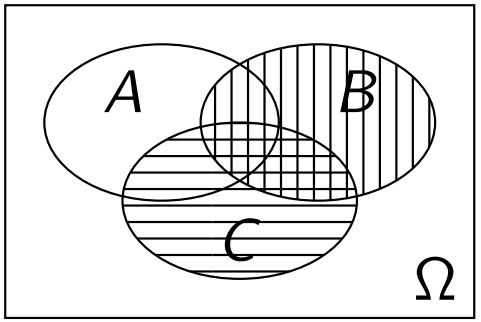
  Mivel D három kizáró esemény uniója, az additivitási szabály szerint

$$P(D) = P\big(A\backslash(B\cup C)\big) + P\big(B\backslash(A\cup C)\big) + P\big(C\backslash(A\cup B)\big)$$

  A három valószínűség közül az első értékét már ismerjük, a másik kettőt hasonló módon lehet meghatározni. Házi feladat befejezni...

- beszél németül vagy franciául $= B\cup C$

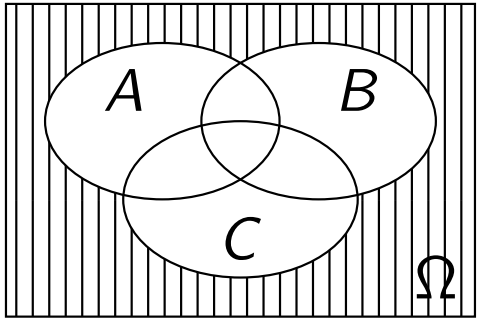
  Mivel most vannak olyan emberek a társaságban, akik németül is és franciául is beszélnek, B és C nem kizáró események. Ekkor az additivitási szabály nem alkalmazható, helyette:



$$P(B\cup C) = P(B) + P(C) - P(B\cap C) = 0{,}35 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}45$$

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember...

- egyik nyelvet sem beszéli = nem beszél angolul, és nem beszél németül, és nem beszél franciául = nem A, és nem B, és nem $C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$



Nincsen formulánk az események metszetének a valószínűségére. Térjünk át események uniójára!

A De Morgan-azonossággal és a komplementer esemény formulájával:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = P\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

Kevésbé formálisan felírva ugyanezt:

$$P(\text{egyik nyelvet sem beszéli}) = 1 - P(\text{beszéli valamelyik nyelvet})$$

Három tetszőleges esemény összegének a valószínűsége:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0{,}4 + 0{,}35 + 0{,}3 - 0{,}15 - 0{,}2 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6 \end{aligned}$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Diszkrét valószínűségi mezők

A következőkben olyan kísérleteket vizsgálunk, ahol a kísérletnek aránylag kevés lehetséges kimenetele van. Az „aránylag kevés” itt most azt jelenti, hogy a kimenetelek felsorolhatóak egy véges vagy végtelen sorozatban.

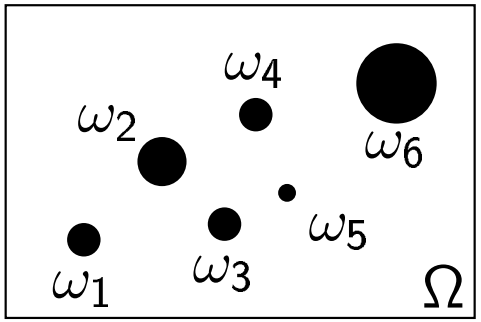
Diszkrét valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy valószínűségi mező **diszkrét valószínűségi mező**, ha a kísérlet lehetséges kimenetelei egy véges vagy végtelen sorozatot alkotnak. Ekkor az eseménytér: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

Ha diszkrét valószínűségi mezővel dolgozunk, de nincs további információnk a kísérletről, akkor semmi sem garantálja, hogy minden kimenetelek azonos a valószínűsége. Emiatt diszkrét valószínűségi mezőn az események valószínűsége általában nem határozható meg a kedvező/összes formulával. Ezen formula alkalmazását egyes feladatokban az is akadályozza, hogy a kísérletnek végtelen sok kimenetele van.

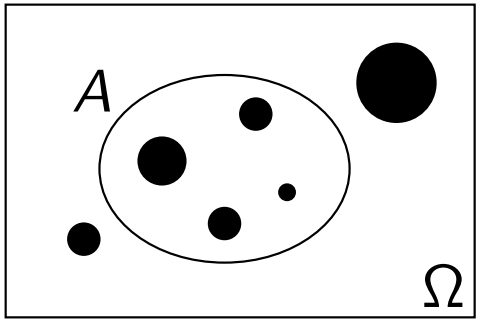
Mivel a biztos esemény valószínűsége 1, az additivitás miatt egy diszkrét valószínűségi mezőn a kimenetelek valószínűségének az összege 1:

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= P\big(\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}\big) \\ &= P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots \end{aligned}$$



Ezt fogalmaztuk meg korábban úgy, hogy szétterítünk 1 nagyságú súlyt az eseménytéren. Legyen A egy tetszőleges esemény. Ekkor a valószínűség additív tulajdonsága szerint az A esemény valószínűsége felírható úgy, mint a benne található kimenetelek valószínűségeinek az összege:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)\,,$$



Eszerint diszkrét valószínűségi mezőn elég a kimenetelek valószínűségeit meghatározni, ebből az események valószínűsége már kiszámolható.

Klasszikus valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ valamilyen N pozitív egész számra, tehát a kísérletnek csak véges sok lehetséges kimenetele van;
- minden kimenetelnek azonos a valószínűsége.

Vegyük észre, hogy a klasszikus valószínűségi mező a diszkrét valószínűségi mezőnek a speciális esete. Emiatt a klasszikus valószínűségi mezőn is teljesül, hogy 1 a kimenetelek valószínűségeinek az összege. Mivel most minden kimenetelnek azonos az esélye, minden kimenetelnek pontosan $1/N = 1/|\Omega|$ a valószínűsége. Ebből már következik a következő tétel:

Események valószínűsége klasszikus valószínűségi mezőn

Klasszikus valószínűségi mezőn egy tetszőleges A esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetel száma}}$$

Feladat. Egy szabályos pénzérmét feldobunk n alkalommal, ahol n egy rögzített pozitív egész. Milyen eseménytérrel írható le a kísérlet?

A kísérlet lehetséges kimenetelei az n-hosszú fej-írás dobássorozatok. Ezek a kimenetelek formálisan $(x_1, \ldots, x_n)$ alakban írhatóak fel, ahol $x_1, \ldots, x_n$ a „fej" és az „írás" értéket veheti fel. Most a pénzérme szabályos, ezért minden kimenetelnek azonos a valószínűsége. Ez azt jelenti, hogy a kísérletet leíró valószínűségi mező egy klasszikus valószínűségi mező, vagyis használhatjuk a kedvező/összes formulát.

Mivel összesen 2^n ilyen dobássorozat létezik, az eseménytér számossága: $|\Omega| = 2^n$. Ebből következik, hogy minden kimenetelnek, tehát minden lehetséges dobássorozatnak $1/2^n$ a valószínűsége.

Kérdés. Mennyi annak az A eseménynek a valószínűsége, hogy az első írást az n-dik, tehát az utolsó dobásra dobjuk?

Most a kedvező esetek száma 1, hiszen egy darab kedvező kimenetel van, a $(\text{fej}, \ldots, \text{fej}, \text{írás})$ dobássorozat. Tehát az A esemény valószínűsége: $P(A) = 1/2^n$.

Kérdés. Mennyi annak a B eseménynek a valószínűsége, hogy az n darab dobás során pontosan k darab írást kapunk?

Az írások számának lehetséges értékei $0, 1, \ldots, n$. Ha most k nem ezen értékek egyike, akkor a B esemény nem következhet be, azaz $B = \emptyset$ a lehetetlen esemény. Ez azt jelenti, hogy

$$P(B) = P(\emptyset) = 0.$$

Ha k a $0, 1, \ldots, n$ értékek valamelyike, akkor a kedvező kimenetelek azon n-hosszú dobássorozatok, melyek pontosan k darab írást tartalmaznak. Ilyen dobássorozat $\binom{n}{k}$ darab van, hiszen az összesen n dobásból kell visszatevés nélkül k dobást kiválasztani, amelyek az írás eredményt adják, míg a többi dobásnál fejet kapunk. Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$P(B) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

Feladat. Határozzuk meg az $1 + x + x^2 + \cdots$ végtelen tagszámú összeg értékét, ahol x olyan valós szám, hogy $|x| < 1$.

A fenti összeget **mértani sornak** nevezzük, és az összeg a következő módon határozható meg:

$$1 + x + x^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \cdots + x^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \cdots + x^n\right) \frac{1-x}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-0}{1-x}$$

Speciálisan $x = 1/2$ esetén

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2\,.$$

Feladat. Addig dobunk egy szabályos pénzérmével, míg írást nem kapunk. Milyen valószínűségi mezővel írható le a kísérlet?

A kísérletnek kétfajta kimenetele van:

- Véges sok dobás után kapunk egy írást, és utána nem dobunk többet. Legyen ω_n az a kimenetel, amikor az első írást pontosan az n-dik dobásra kapjuk: $\omega_n = (\underbrace{\text{fej}, \dots, \text{fej}}_{n-1 \text{ darab}}, \text{írás}), \quad n = 1, 2, \dots$
- Az is megtörténhet, hogy végtelen sokat dobunk, de mindig csak fejet kapunk: $\omega_\infty = (\text{fej}, \text{fej}, \dots)$.

Most a kimenetelek egy végtelen sorozatot alkotnak, és az eseménytér:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\infty\}.$$

Ezek szerint a kísérletet leíró $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy diszkrét valószínűségi mező. Azonban ez a mező nem klasszikus valószínűségi mező, hiszen végtelen sok kimenetel van, továbbá azt is látni fogjuk majd, hogy a kimeneteleknek nem azonos a valószínűsége.

Kérdés. Mekkora az egyes kimenetelek valószínűsége?

Korábban már láttuk, hogy n dobást végrehajtva $1/2^n$ annak az esélye, hogy az első írás pontosan az n-dik dobásra jön. Ez azt jelenti, hogy most $P(\omega_n) = 1/2^n$, vagyis

$$P(\text{előbb-utóbb dobunk írást}) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right] = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\,.$$

Mivel az összes kimenetel valószínűségének az összege pontosan 1, a fenti számolásból következik, hogy az ω_∞ kimenetel valószínűsége 0. Ez egy meglepő eredményt, hiszen semmi sem zárja ki, hogy az ω_∞ kimenetel bekövetkezzen, tehát egymás után végtelen sok fejet dobjunk. Ennek ellenére ennek mégis 0 a bekövetkezési valószínűsége. Látni fogjuk majd, hogy ez nem ellentmondás! Azt is látni fogjuk, annak sincs jelentősége, hogy az érme szabályos-e. Akármilyen kicsi is az írás dobásának az esélye, az kimenetel valószínűsége 0 lesz, tehát 1 annak a valószínűsége, hogy előbb-utóbb dobunk egy írást.

Kérdés. Melyiknek nagyobb a valószínűsége? Annak, hogy az első írást páros sorszámú, vagy annak, hogy első írást páratlan sorszámú dobásra kapjuk?

Vezessük be a következő eseményeket:

$A =$ az első írást páratlan sorszámú dobásra kapjuk $= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots\}$,

$B =$ az első írást páros sorszámú dobásra kapjuk $= \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots\}$.

A kimenetelek valószínűsége ismert, ezért

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_5) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Azt is vegyük észre, hogy

$$P(A) + P(B) = P(\text{valamikor írást dobunk}) = 1,$$

amiből $P(B) = 1/3$. Tehát kétszer akkora annak a valószínűsége, hogy az első írás páratlan sorszámú dobásra jön, mint annak az esélye, hogy páros sorszámú dobásra jön.

Feladat. Egy cég úgy próbálja meg népszerűsíteni az általa forgalmazott chipset, hogy a zacskókba a Micimackó című mese figuráit rejti el: Micimackót, Malackát, Tigrist és Fülest. Minden zacskóban pontosan egy figura található, és minden figurának azonos a gyakorisága. Mi addig vásároljuk a terméket, míg meg nem kapjuk a teljes kollekció, tehát míg végül mindegyik figurából lesz legalább egy darab. Mennyi annak az esélye, hogy ehhez elég 4 darab chipset kell megvenni? Mi annak a valószínűsége, hogy elég 6 zacskót megvásárolni?

A feladat egy általános témakör speciális esete. Adott egy kísérlet, melynek véges sok lehetséges kimenetele van. A kérdés az, hogy a kísérletet többször elvégezve mekkora valószínűséggel fog az összes lehetséges kimenetel megjelenni. Ezt a problémakört nevezzük a **kupongyűjtő problémájának.** Az eredeti feladat több különböző szöveggel is megfogalmazható. Például:

- Tízszer feldobok egy szabályos dobókockát. Mennyi az esélye, hogy a dobások között az 1, 2, 3, 4, 5, 6 értékek mindegyike megjelenik?
- Mennyi a valószínűsége, hogy a Totó játékban a futballmérközések eredményei között az 1, 2 és x eredmények mindegyike megjelenik?

Nyílvánvaló, hogy a teljes kollekcióért legalább négy zacskó chipset meg kell vásárolnunk. Annak az esélye, hogy négy zacskó elég lesz:

$$P\big(\text{a 4 zacskóban 4 különböző figura lesz}\big) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{4!}{4^4} = 0{,}09\,.$$

Sajnos 4-nél több zsacskó megvásárlása esetén a megoldás már kicsit nehezebb, de van sablon módszer. Vezessük be a következő eseményeket:

$$A_i = \text{az } i\text{-dik figurát egyik zacskóban sem találjuk meg,} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$\begin{aligned} P\big(\text{a 6 zacskóból összeáll a teljes kollekció}\big) &= P\big(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4\big) \\ &= P\big(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}\big) = 1 - P\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\big) \\ &= 1 - P\big(\text{valamelyik figurát nem kapjuk meg}\big) \end{aligned}$$

A Poincaré-formulával az unió valószínűsége:

$$\begin{aligned} P\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\big) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ &- \text{kettes metszetek} + \text{hármas metszetek} - P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\big) \end{aligned}$$

A felírt metszetek valószínűségei:

$$P(A_1) = P\big(6 \text{ zacskóból nem kapunk Micimackót}\big) = 3^6/4^6,$$
$$P(A_1 \cap A_2) = P\big(\text{nem kapunk Micimackót és Malackát}\big) = 2^6/4^6,$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P\big(\text{csak Fülest kapunk}\big) = 1/4^6,$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P\big(\text{semmit sem kapunk}\big) = 0/4^6.$$

Vegyük észre, hogy a 4 darab eseményből $\binom{4}{2}$ darab kettes és $\binom{4}{3}$ darab hármas metszet képezhető. Ekkor annak a valószínűsége, hogy 6 zacskó megvásárlásával valamelyik figurát nem kapjuk meg:

$$P\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\big) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^6 - \binom{4}{2}\left(\frac{2}{4}\right)^6 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^6 - 0 \approx 0{,}62$$

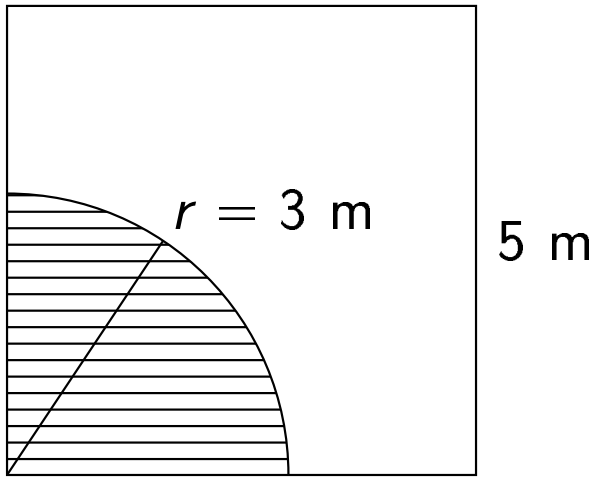
Ebből a kérdéses valószínűség már azonnal jön:

$$P\big(\text{a 6 zacskóból teljes kollekció}\big) = 1 - P\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\big) \approx 0{,}38$$

Geometriai valószínűségi mezők

Feladat. Adott egy 5×5 méteres négyzet alakú kert, melynek egyik sarkában egy harapós kutya van kikötve egy $r = 3$ méteres láncon. A kert mellett gyerekek játszanak egy gumilabdával, és véletlenszerűen beejtik a labdát a kertbe. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kutya eléri, és ezáltal kiharapja a labdát?

A kert területe 25 m^2, ebből a kutya egy $r^2\pi/4 = 7{,}07\ \text{m}^2$ területű negyedkört ér el. Azt, hogy a labda véletlenszerűen esik be, úgy értjük, hogy annak a valószínűsége, hogy a labda a kutya által elérhető területre esik, arányos ennek a területnek a nagyságával. Tehát a kérdéses valószínűség:



$$P\big(\text{a kutya eléri a labdát}\big) = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{7{,}07}{25} = 0{,}28$$

Milyen tanulságai vannak az előző feladatnak?

- Azt a kísérletet hajtjuk végre, hogy a gyerekek beejtenek egy labdát a kertbe. A kísérlet lehetséges kimenetelei azok a helyek, ahol a labda földet érhet, vagyis a kert pontjai. Az eseménytér most egy geometriai alakzat, maga a négyzet alakú kert. Mivel a kísérletnek végtelen sok kimenetele van, a feladat nem oldható meg kombinatorikus módon.
- A gyerekek véletlenszerűen rugják be a labdát a kertbe, ami azt jelenti, hogy a kertnek nincsen olyan része, ahová a labda nagyobb valószínűséggel esne. Annak az esélye, hogy a labda a kertnek egy adott részébe esik, független ennek a résznek az elhelyezkedésétől és alakjától, csak attól függ, hogy mekkora a területe. Ezt úgy is szoktuk mondani, hogy a labda **egyenletes eloszlás szerint** esik be a kertbe. Emiatt alkamazhattuk a kedvező/összes formulát a területekre.
- Különböző dimenziós esetekben különböző módon mérjük a geometriai alakzatok nagyságát:
  - az egyenesek részhalmazait (például a szakaszokat) a hosszúságukkal;
  - a sík részhalmazait (például a síkidomokat) a területükkel;
  - a tér részhalmazait (például a mértani testeket) a térfogatukkal.

A hosszúságot, a területet, és a térfogatot összefoglaló néven **mértéknek** nevezzük. Egy A geometriai alakzat mértékére (hosszúságára, területére vagy térfogatára) a $\mu(A)$ jelölést szokás alkalmazni.

Geometriai valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **geometriai valószínűségi mező**, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

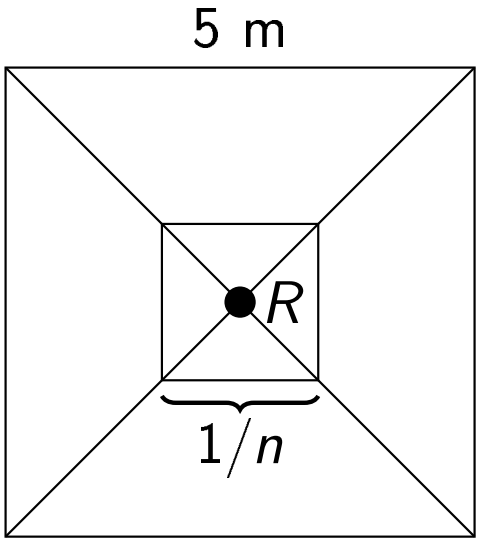
- Az Ω eseménytér egy olyan geometriai alakzat, melynek a mértéke: $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
- **Egyenletességi hipotézis:** Az események valószínűsége egyenesen arányos az események mértékével. Tehát, minden $A \subseteq \Omega$ eseményre

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{kedvező hosszúság/terület/térfogat}}{\text{összes hosszúság/terület/térfogat}}$$

Az egyenletességi hipotézis azt fogalmazza meg, hogy egy A esemény valószínűsége csak attól függ, hogy mekkora az A halmaz nagysága, de attól már nem, hogy ez a halmaz hol helyezkedik el az eseménytéren belül.

Kérdés. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a gyerekek pontosan az 5×5 méteres négyzet alakú kert geometriai középpontjára ejtik a labdát?

A kert geometriai középpontja egyetlen egy pont, a négyzet két átlójának metszéspontja. A geometriai valószínűségi mező deníciója szerint a valószínűséget kedvező terület/összes terület formulával kell számolni, tehát az a kérdés, hogy mennyi egy pont területe. Tetszőleges n pozitív egész szám esetén az R pont lefedhető egy $1/n$ oldalhosszúságú kis négyzettel. Azt kapjuk, hogy



$$0 \leqslant \mu(R) \leqslant \text{a kis négyzet területe} = 1/n^2 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Ekkor a rendőr-elvből következik, hogy az R pont területe: $\mu(R) = 0$. Tehát annak a valószínűsége, hogy a labda pontosan az R pontra esik:

$$\frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{0}{25} = 0$$

Az előző oldalon bemutatott módszer a négyzet alakú kert összes pontjára alkalmazható. Minden pontnak 0 a területe, és ezért minden egyes pont esetén 0 annak a valószínűsége, hogy a labda pontosan arra a pontra esik.

Az alábbi állításokat is hasonló módszerrel lehet bebizonyítani:

- minden pontnak 0 a hosszúsága, a területe és a térfogata;
- minden szakasznak illetve egyenesnek 0 a területe és a térfogata;
- minden síkidomnak 0 a térfogata. (Példa: mértani testek lapjai.)

Bekövetkezhet az, hogy a gyerekek az R pontra ejtik a labdát? Igen, ezt semmi sem zárja ki. Attól, hogy egy eseménynek 0 a valószínűsége, ez az esemény még bekövetkezhet. (Ilyen példát már korábban is láttunk.)

A hétköznapi szóhasználatban ha azt mondjuk, hogy valaminek 0 az esélye, az alatt azt értjük, hogy az a valami nem következhet be. Ez az értelmezés matematikailag nem helyes. Egyetlen egy olyan esemény van, mely nem következhet be, a lehetlen esemény. Ennek 0 a valószínűsége, de rajta kívül egy adott kísérlet esetében lehetnek további olyan események, melyeknek 0 a valószínűsége.

Kérdés. Hogyan következhet be egy esemény, ha 0 a valószínűsége? Ez miért nem matematikai ellentmondás?

Egy A esemény valószínűségének az a szemléletes jelentése, hogy a kísérletet sokszor elvégezve az A esemény relatív gyakorisága konvergál a valószínűséghez:

$$r_n(A) = \frac{k_n(A)}{n} \to P(A)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Abból, hogy az esemény $P(A)$ valószínűsége 0, még nem következik, hogy az esemény sosem következhet be, tehát $k_n(A) = 0$. Előfordulhat, hogy az esemény nagyon ritkán következik be, és így a relatív gyakoriság nullához konvergál. (Pl: $k_n(A) \approx \sqrt{n}$.)

Hasonló okok miatt abból, hogy egy eseménynek 1 a valószínűsége, még nem következik, hogy ez az esemény a kísérlet minden egyes végrehajtása során biztosan bekövetkezik. A relatív gyakoriság úgy is konvergálhat 1-hez, hogy a bekövetkezési gyakoriság kisebb, mint n. (Pl: $k_n(A) = n - 3$.)

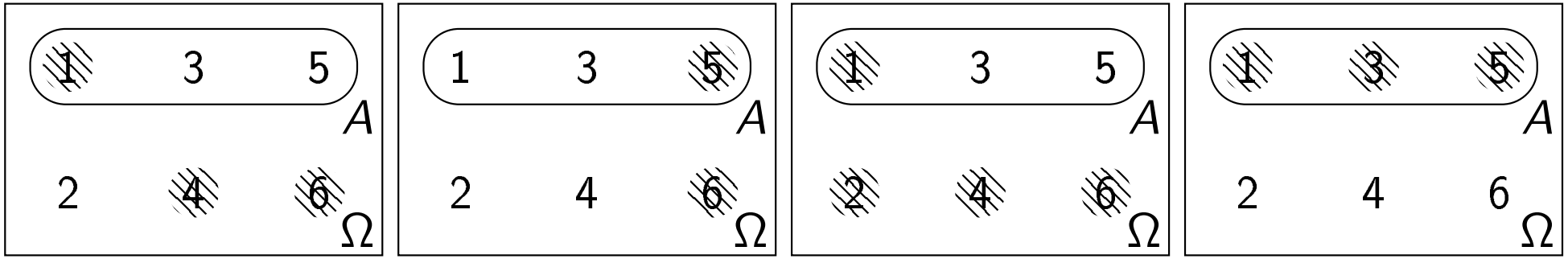
A feltételes valószínűség

Időnként előfordul, hogy ugyan a véletlen kísérletet véghajtva nem ismerjük a kisérlet aktuális kimenetelét, de rendelkezünk valamilyen információval ezzel a kimenetellel kapcsolatban, és ezen háttérinformáció mellett szeretnénk bizonyos események valószínűségét meghatározni. Például:

- Időjárás: A sokéves tapasztalat alapján már a mai napon is nyilatkozhatunk arról, hogy 2015. január 1-én milyen idő várható. Viszont ezen dátum előtt egy héttel az decemberi időjárás ismeretében már sokkal pontosabb rövidtávú előrejelzés lesz majd adható.
- Pénzügyi matematika: Ha modellezni szeretnénk egy értékpapír jövőbeli árát, akkor ebben előnyt jelent, ha ismerjük az árfolyam múltbéli alakulását.
- Póker: A Texas Hold'em pókerben kiszámolható, hogy mekkora valószínűséggel lesz pókerünk. Viszont ha kézbe két azonos értékű lapot kapunk, akkor a póker valószínűsége megnő.

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor az A valószínűsége $P(A) = 1/2$. Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információkkal.

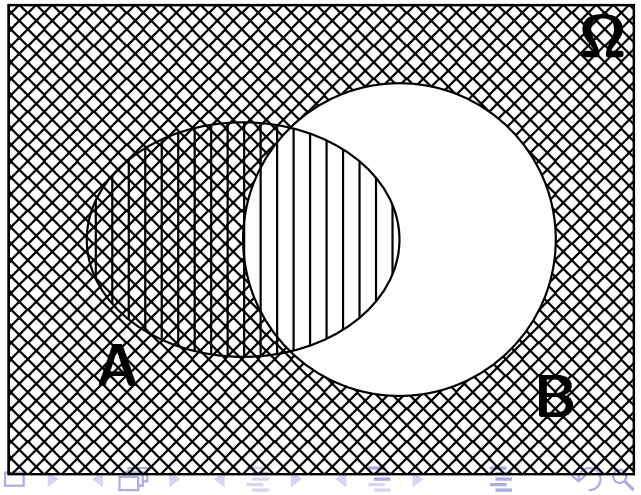
- Tudjuk, hogy prímszámot dobtunk. Ekkor az $1, 4, 6$ kimenetelek nem következhettek be, ezért $P(A) = 2/3$.
- Tudjuk, hogy 5-nél kisebbet dobtunk. Ekkor az 5 és a 6 kimenetel nem következhetett be, ezért $P(A) = 2/4 = 1/2$.
- Tudjuk, hogy 3-ast vagy 5-öst dobtunk. Ekkor $P(A) = 2/2 = 1$, ugyanis most a háttérinformáció maga után vonja az A eseményt.
- Tudjuk, hogy páros számot dobtunk. Ekkor $P(A) = 0/3 = 0$, ami nem meglepő, hiszen most a háttérinformáció kizárja az A eseményt.



Feltételes valószínűség

Tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes valószínűsége** $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. A feltételes valószínűség megmutatja, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezik.

A fenti formulára a következő szemléletes magyarázatot is lehet adni. Ha tudjuk, hogy a kísérlet végrehajtásakor a B esemény bekövetkezett, akkor a B eseményen kívüli kimeneteleket akár ki is dobhatjuk, hiszen ezek biztosan nem következtek be. Gyakorlatilag a B egy szűkített eseménytérként funkcionál, ez tartalmazza azokat a kimeneteleket, melyek bekövetkezhettek. Mi arra vagyunk kíváncsiak, hogy az A eseménynek mekkora a súlya ezen a szűkített eseménytéren belül. Mivel most a B eseményen kívüli kimenetelek nem számítanak, az A esemény csak úgy következhet be, ha az $A \cap B$ metszet bekövetkezik. Vagyis A súlya a B szűkített eseménytéren belül $P(A \cap B)/P(B)$.



Feladat. Jelölje A azt az esemény, hogy egy szabályos dobókockát feldobva páratlan számot dobunk. Adjuk meg A feltételes valószínűségét az alábbi B feltételekre nézve:

- B = prímszámot dobunk

  Kombinatorikus módszerrel már megmutattuk, hogy A valószínűsége a B háttérinformáció mellett $2/3$. Ugyanez a definícióból is kijön:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\text{páratlan és prím})}{P(\text{prím})} = \frac{2/6}{1/2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- B = 5-nél kisebbet dobunk

  Már megmutattuk, hogy A valószínűsége a B háttérinformáció mellett $1/2$. Ugyanez a definíció alkalmazásával:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\text{páratlan és 5-nél kisebb})}{P(\text{5-nél kisebb})} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

  Most a B esemény nem változtatja meg az A valószínűségét. Erre fogjuk később azt mondani, hogy a két esemény független egymástól.

Feladat. Ha feldobok egy szabályos pénzérmét, akkor $1/2$ annak az esélye, hogy fejet kapok. Tegyük fel, hogy 10 egymást követő dobás során mindig írást dobtam. Vajon ez megnöveli vagy lecsökkenti annak az esélyét, hogy a következő dobásom fej legyen?

Amióta van rulett, azóta vannak tutibiztos nyerő stratégiák is. Az egyik ilyen stratégia úgy szól, hogy ha sokszor (mondjuk 10-szer) egymás után ugyanaz a szín jön ki, akkor be kell szállni, és a másik színre kell tenni. Ezt azzal magyarázzák, hogy a piros és a fekete színnek azonos a valószínűsége, vagyis hosszútávon azonos lesz a relatív gyakoriságuk. Ha most többször egymás után az egyik szín jött ki, akkor a sors kompenzálni fog, és a másik színnek meg fog nőni az esélye, hogy ezzel helyreálljon az egyensúly. Mások ezzel szemben éppen úgy gondolják, hogy ha az egyik szín sokszor kijött egymás után, akkor azon a napon annak a színnek nagyobb kell, hogy legyen az esélye, és éppen ezért arra a színre kell tenni, nem szabad váltani.

Hasonló tapasztalható a lottó esetében is. Sokan úgy gondolják, hogy ha több héten keresztül nincs telitalálat, akkor ez megnöveli annak az esélyét, hogy a következő héten valaki nyerjen.

Térjünk vissza a pénzérméhez, és tekintsük az alábbi eseményeket:

$$B = 10 \text{ dobásból 10 írást kaptunk}, \qquad A = \text{a 11-dik dobás fej.}$$

Vajon mennyi a $P(A|B)$ valószínűség, nagyobb vagy kisebb, mint $1/2$?

Tíz érmedobást végrehajtva összesen 2^{10} darab kölünböző sorozatot kaphatunk. Ezeknek azonos az esélye, tehát annak a valószínűsége, hogy mind a tíz dobás írás lesz: $P(B) = 1/2^{10}$.

Hasonló módon, 11 dobást végrehajtva összesen 2^{11} különböző sorozatot kaphatunk, és így annak a valószínűsége, hogy 10 írást és utána egy fejet kapunk: $P(A \cap B) = 1/2^{11}$.

Ekkor annak az esélye, hogy a 11-dik dobás fej, ha előtte 10 darab írást kaptunk:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2^{11}}{1/2^{10}} = \frac{1}{2} = P(A)$$

A kapott egyenlőségnek az a magyarázata, hogy a dobások függetlenek, tehát az, hogy mi volt az első 10 dobás eredménye, nem befolyásolhatja a 11-edik dobás eredményét.

A feltételes valószínűség tulajdonságai

Felmerülhet a kérdés, hogy a feltételes valószínűség valóban valószínűség, azaz valószínűségi mérték-e. A valószínűség deníciója a következő tulajdonságokat követeli meg:

- A valószínűség egy olyan függvény, mely az eseményekhez 0 és 1 közötti értékeket rendel hozzá.
- A biztos esemény valószínűsége 1.
- Teljesül az additivitás.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a tulajdonságok teljesülnek a feltételes valószínűségre, így igaz az alábbi tétel. Ez egyben azt is jelenti, hogy a feltételes valószínűségre teljesülnek a valószínűségi mértékek korábban vett azonosságai.

A feltételes valószínűség valószínűség

Legyen B pozitív valószínűségű esemény. Ekkor a B eseményre vett feltételes valószínűség valószínűségi mérték.

A tétel értelmében teljesülnek az alábbi azonosságok:

- Minden A eseményre $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$.
- A biztos és a lehetetlen esemény: $P(\Omega|B) = 1$, $P(\varnothing|B) = 0$.
- Monotonitás: Ha $A_1 \subseteq A_2$, akkor $P(A_1|B) \leqslant P(A_2|B)$.
- A komplementer esemény valószínűsége: $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.
- Additivitás: ha $A_1, A_2, \ldots$ kizáró eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor
$$P\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \mid B\big) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$$
- Két esemény uniójának a valószínűsége:
$$P\big(A_1 \cup A_2 \mid B\big) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P\big(A_1 \cap A_2 \mid B\big).$$

FONTOS: A fenti azonosságokban a B esemény rögzített! A feltételes valószínűségben a feltételt nem lehet ilyen könnyen manipulálni. Például, általában $P(A|\overline{B}) \neq 1 - P(A|B)$.

A továbbiakban a feltételes valószínűség olyan tulajdonságait ismertetjük, melyek nem következnek abból, hogy a feltételes valószínűség valószínűségi mérték. Az első tétel egy hiánypótló formula, mely események metszetének a valószínűségére ad számolási szabályt.

Láncszabály

Legyen $A_1, \ldots, A_n$ olyan esemény, melyre $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. Ekkor

$$P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) = P(A_1)P\big(A_2 \mid A_1\big)P\big(A_3 \mid A_1 \cap A_2\big) \cdots P\big(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\big)\,.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definícióját többször alkalmazva

$$\begin{aligned} &P(A_1)P\big(A_2 \mid A_1\big)P\big(A_3 \mid A_1 \cap A_2\big) \cdots P\big(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\big) \\ &= P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})} \\ &= P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n\big)\,. \end{aligned}$$

Feladat. Adott n ember, akik ki akarnak sorsolni maguk közül egy vesztest. Fognak hát n darab egyforma gyufaszálat, egynek letörik a fejét, és egymás után húznak. Aki a rövidebbet húzza, az lesz a vesztes. Igazságos-e ez a sorsolás, tehát függ-e annak az esélye, hogy valaki vesztes lesz attól, hogy hanyadikként húz?

Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az az esemény, hogy az első, a második, és így tovább, az utolsó ember húzza a rövidebbet. A sorsolás akkor igazságos, ha mindegyik esemény valószínűsége azonos, tehát $1/n$.

1. Megközelítés. Csak addig követjük figyelemmel a kísérletet, amíg valaki ki nem húzza a rövid szálat, a továbbiaknak úgy sincs jelentősége. Az első ember n gyufaszál közül húz, és ezek közül 1 a rövid, tehát ő ezt $1/n$ eséllye kapja meg. A második ember, ha húz, akkor már csak $(n-1)$ szálból húz, és ezek között még mindig ott a rövid, azaz ő ezt a szálat $1/(n-1)$ valószínűséggel kapja meg. Vagyis azt kapjuk, hogy

$$P(A_1) = 1/n \qquad \text{és} \qquad P(A_2) = 1/(n-1).$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy a sorsolás nem szabályos. De hát akkor miért sorsolnak így már évszázadok óta? Itt valami nem stimmel.

2. Megközelítés. Az előző oldalon elkövettünk egy hibát. Az addig rendben van, hogy az első ember esetében $P(A_1) = 1/n$. A második ember viszont csak akkor húzhatja ki a rövidet, HA egyáltalán húz, tehát HA az első ember nem húzta ki már előtte a rövid szálat. Tehát most nem az A_2 esemény feltétel nélküli valószínűségét ismerjük, hanem az $\overline{A}_1$ eseményre vett feltételes valószínűségét: $P(A_2|\overline{A}_1) = 1/(n-1)$.

Vegyük észre, hogy $A_2 = \overline{A}_1 \cap A_2$, amiből a láncszabály alkalmazásával

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1 \cap A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2|\overline{A}_1) = (n-1)/n \cdot 1/(n-1) = 1/n.$$

És ezt így lehet folytatni. Az utolsó ember esetében ismét az a helyzet, hogy ő csak akkor húz, ha előtte a többiek nem húzták ki a rövidet, azaz

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P\big(\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n\big) \\ &= P(\overline{A}_1)P\big(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1\big)P\big(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\big) \\ &\quad \cdots P\big(\overline{A}_{n-1} \mid \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-2}\big)P\big(A_n \mid \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1}\big) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tehát azt kapjuk, hogy a sorsolás szabályos.

Bayes-formula

Legyen A és B pozitív valószínűségi esemény. Ekkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}\,.$$

Bizonyítás. A láncszabály alkalmázásával:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}\,.$$

Feladat. Egy gyárban anyaghibás és méterhibás gyártmányok is készülnek, és ezek a teljes mennyiség 25 illetve 40 százalékát teszik ki. A mérethibás darabok ötöde anyaghibás is egyben. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy anyaghibás gyártmányt, akkor ez mekkora eséllyel lesz mérethibás is?

$$P\big(\text{mérethibás} \mid \text{anyaghibás}\big) = \frac{P\big(\text{anyaghibás} \mid \text{mérethibás}\big) \cdot P(\text{mérethibás})}{P(\text{anyaghibás})}$$

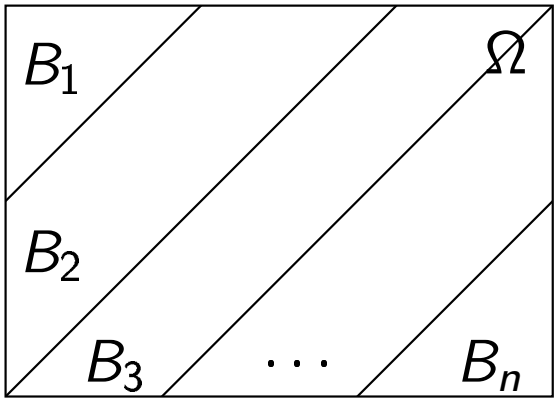
$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}25} = 0{,}32\,.$$

Teljes eseményrendszer

Azt mondjuk, hogy a $B_1, \ldots, B_n$ események **teljes eseményrendszert** (t.e.r.) alkotnak, ha teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- páronként diszjunktak, tehát tetszőleges $i \neq j$ esetén $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- együttesen lefedik az eseményteret: $B_1 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$;
- mindegyik eseménynek pozitív a valószínűsége.

A teljes eseményrendszer az eseménytér egy partíciója, felbontása egymást kizáró pozitív valószínűségű eseményekre. A kísérletet végrehajtva a teljes eseményrendszer elemei közül pontosan egy következik be, így

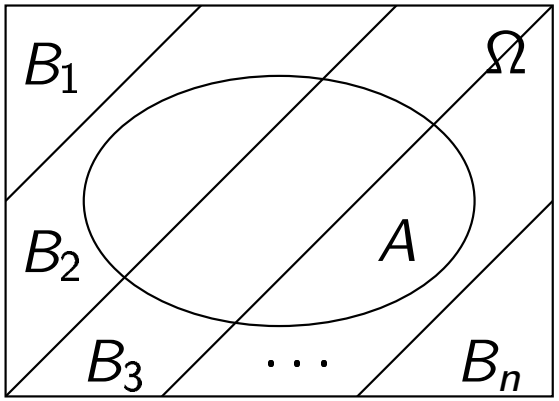


$$P(B_1) + \cdots + P(B_n) = P\big(B_1 \cup \cdots \cup B_n\big) = P(\Omega) = 1.$$

Feladat. Szeretnénk meghatározni az országos munkanélküliségi rátát, de sajnos a foglalkoztatási adatok csak regionális szinten állnak rendelkezésre. Hogyan kapható meg ezekből az országos ráta? Arra is kíváncsiak vagyunk, hogy a munkanélküliek mekkora hányada él az egyes régiókban.

Vegyük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy munkaképes korú állampolgárt, és legyen A az az esemény, hogy a kiválasztott ember munkanélküli. Legyen továbbá $B_1, B_2, \ldots, B_7$ az az esemény, hogy a kiválasztott ember az első, a második, stb., a hetedik régióban él. Ekkor a $B_1, \ldots, B_7$ ese mények teljes eseményrendszer alkotnak, továbbá

- $P(A)$ = országos munkanélküliségi ráta,
- $P(B_i)$ = az állampolgárok ekkora hányada él az i-edik régióban, (ismert)
- $P(A|B_i)$ = munkanélküliségi ráta az i-edik régióban, (ismert)
- $P(B_i|A)$ = a munkanélküliek ekkora hányada él az i-edik régióban.



A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel

Legyen $B_1, \ldots, B_n$ teljes esemény rendszer, és tekintsünk egy tetszőleges A eseményt. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggvések:

- **Teljes valószínűség tétele:**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

- **Bayes-tétel:** Ha $P(A) > 0$, akkor

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Bizonyítás. Az additivitás és a láncszabály alkalmazásával:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)\,. \end{aligned}$$

A Bayes-formulával és a teljes valószínűség tételével:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}\,.$$

Feladat. A két oldallal ezelőtt elkezdett feladat folytásaként tekintsük az alábbi fiktív adatokat:

i	1	2	3	4	5	6	7
$P(A\|B_i)$	5%	8%	10%	5%	12%	8%	5%
$P(B_i)$	40%	10%	10%	10%	10%	10%	10%

- Határozzuk meg, hogy hogyan aránylik a munkanélküliek száma az egyes régiókban a teljes munkaképes lakossághoz.

  Az i régióban élő munkanélküliek aránya a teljes munkaképes lakosságon belül:

$$P\big(\text{munkanélküli és az } i\text{-edik régióban él}\big) = P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i).$$

  Ezek a szorzatok a fenti táblázatban könnyen kiszámolhatóak, csak az egymás alatti értékeket kell összeszorozni.

i	1	2	3	4	5	6	7
$P(A\|B_i)$	5%	8%	10%	5%	12%	8%	5%
$P(B_i)$	40%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
$P(A \cap B_i)$	2%	0,8%	1%	0,5%	1,2%	0,8%	0,5%

- Határozzuk meg az országos munkanélküli rátát.

  A teljes valószínűség tételének értelmében az előző táblázat utolsó sorában szereplő értékeket kell összeadni. Kapjuk:

  $$P(A) = \sum_{i=1}^{7} P(A|B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{7} P(A \cap B_i) = 6{,}8\%$$

- Adjuk meg, hogy a munkanélküliek mekkora hányada el az egyes régiókban.

  A feltételes valószínűség definíciójával:

  $$P\big(\text{az } i\text{-edik régióban él} \mid \text{munkanélküli}\big) = P(B_i|A) = P(A \cap B_i)/P(A)$$

  Tehát a kérdéses arányok megkaphatóak úgy, hogy az előző táblázat utolsó sorát végigosztjuk a $P(A) = 6{,}8\%$ értékkel.

i	1	2	3	4	5	6	7
$P(A\|B_i)$	5%	8%	10%	5%	12%	8%	5%
$P(B_i)$	40%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
$P(A \cap B_i)$	2%	0,8%	1%	0,5%	1,2%	0,8%	0,5%
$P(B_i\|A)$	29,4%	11,7%	14,7%	7,4%	17,6%	11,7%	7,4%

Feladat. Adott két urna. Az egyikben 2 piros és 6 zöld, a másikban 3 piros és 1 zöld golyót található. Véletlenszerűen kiválasztok egy urnát, és kiveszek belőle egy golyót. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

- Mennyi annak az esélye, hogy pirosat húzok?

  Legyen B_1 és B_2 az az esemény, hogy az 1. illetve a 2. urnából húzok, továbbá jelölje A azt, hogy pirosat kapok. Ekkor

  $$P(B_1) = P(B_2) = 1/2, \qquad P(A|B_1) = 2/8, \qquad P(A|B_2) = 3/4.$$

  A teljes valószínűség tételével:

  $$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

- Összeöntöm a két urna tartalmát, és ezek után húzok ki egy golyót. Mekkora eséllyel kapok pirosat ebben az esetben?

  Az összeöntés után 5 piros és 7 zöld golyó van egy urnában, így

  $$P(A) = 5/12 \approx 0{,}42.$$

- Térjünk vissza a kéturnás elrendezéshez. Mennyi annak az esélye, hogy pirosat kapok ÉS az első urnából húzok?

  A láncszabály alkalmazásával

$$P(A \cap B_1) = P(B_1)P(A|B_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}125$$

- Feltéve, hogy zöld golyót kapok, mennyi annak a valószínűsége, hogy az 1. urnából húztam?

  Most $\overline{A}$ az az esemény, hogy zöld golyót kapok, és

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}5, \qquad P(\overline{A}|B_1) = 1 - P(A|B_1) = 0{,}75.$$

  Ekkor a Bayes-formula alkamazásával

$$P(B_1|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}75$$

Két esemény függetlensége

Azt tapasztaltuk, hogy a háttérinformáció néha megváltoztatja a vizsgált esemény valószínűségét, néha viszont nem. Például:

- Ha egyszer dobunk egy dobókockával, akkor
$$P\big(\text{a dobás páros} \mid \text{a dobás prím}\big) = 1/3 \neq 1/2 = P\big(\text{a dobás páros}\big)$$
- Ha 11-szer dobunk egy szabályos pénzérmével, akkor
$$P\big(\text{a 11-edik fej} \mid \text{az első 10 írás}\big) = 1/2 = P\big(\text{a 11-edik fej}\big)$$

A második pont egyenlőségét azzal magyaráztuk, hogy a 11-dik dobás „független” az első 10-től. A függetlenség a közbeszédben egy gyakran alkalmazott kifejezés, de hogyan lehetne matematikailag definiálni?

Két esemény függetlensége

Legyen A és B két tetszőleges esemény. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

De ennek vajon mi köze van a hétköznapi értelemben vett függetlenséghez?

A függetlenséggel ekvivalens tulajdonságok

Ha A és B pozitív valószínűségű, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- A és B független egymástól.
- $P(A|B) = P(A)$.
- $P(B|A) = P(B)$.

A tétel szerint két pozitív valószínűségű esemény pontosan akkor független, ha egyik sem szolgáltat használható háttérinformációt a másikra nézve. A használható itt azt jelenti, hogy hiába tudom például, hogy a B esemény bekövetkezik, ez az információ nem változtatja meg az A valószínűségét. Éppen ez az, amit a hétköznapi szóhasznalátban függetlenségnek nevezünk.

Bizonyítás. Ha A és B független, akkor

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)P(B)/P(B) = P(A).$$

A fordított irányért, ha $P(A|B) = P(A)$, akkor a láncszabállyal

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B).$$

Kérdés. Ha feldobunk két szabályos dobókockát, akkor nyilvánvaló, hogy a kísérletnek 36 lehetséges kimenetele van. De vajon miért teljesül az, hogy mindegyik kimenetelnek azonos a valószínűsége?

Két kockával dobva a kapott értékek nem hatnak egymásra. Például az, hogy az első kockával mondjuk 1-est dobunk, nem növeli, és nem csökkenti annak az esélyét, hogy a második kockával mondjuk 2-est kapunk. Ez nem egy matematikai tétel, hanem a természettudományos tudásunkon alapuló észrevétel. Ez az észrevétel matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy a két kocka feldobása független eredményeket ad. Tehát, tetszőleges i és j értékek esetén az alábbi események függetlenek egymástól:

$$A = \text{az 1. kockával } i\text{-t dobunk}, \qquad B = \text{a 2. kockával } j\text{-t dobunk}.$$

Ekkor a függetlenség alkalmazásával:

$$\begin{aligned} &P\big(\text{az 1. kockával } i\text{-t, a 2. kockával } j\text{-t dobunk}\big) \\ &= P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36\,. \end{aligned}$$

Összefoglalva: Az, hogy minden (i, j) párnak azonos a valószínűsége, abból a feltevésből következik, hogy a dobások függetlenek egymástól.

Kérdés. Mi a kapcsolat a diszjunktság és a függetlenség között?

Az egyik leggyakoribb hiba, amit a hallgatók elkövetnek, hogy keverik a kizáróság és a függetlenség fogalmát, pedig a kettőnek nincs sok köze egymáshoz. Legyen A és B pozitív valószínűségű esemény, és tekintsük a következő eseteket:

- Ha a két esemény kizáró, akkor nem következhetnek be egyszerre. Tegyük fel most, hogy a B esemény bekövetkezik. Megváltoztatja ez a háttéringformáció A valószínűségét? Persze! Mivel a két esemény kizáró, A nem következhet be, tehát a feltételes valószínűsége 0. Ez pedig azt jelenti, hogy a két esemény nem lehet független. Formálisan:

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0/P(B) = 0 \neq P(A) > 0.$$

- Ezzel szemben, ha a két esemény független, akkor nem lehetnek kizáróak, ugyanis $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$.

Fontos megjegyezni, hogy a fenti gondolatmenet pozitív valószínűségű eseményekre vonatkozott. Ha az egyik esemény valószínűsége 0, akkor A és B lehet egyszerre kizáró és független.

Több esemény függetlensége

A továbbiakban több esemény függetlenségét fogjuk definiálni.

Több esemény függetlensége

Legyen $A_1, A_2, \ldots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata.

- Azt mondjuk, hogy az események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független egymástól, tehát tetszőleges A_i és A_j különböző eseményeket kiválasztva teljesül, hogy $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.
- Azt mondjuk, hogy az események **(teljesen) függetlenek**, ha közülük tetszőleges $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ különböző eseményeket kiválasztva

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n}) .$$

A feladatokban, ha csak az ellenkezőjét külön nem hangsúlyozzuk, akkor függetlenség alatt teljes függetlenséget értünk.

A páronkénti függetlenség azt jelenti, hogy akárhogyan is választunk ki két különböző eseményt, a kiválasztott események független lesz egymástól. A függetlenségből következik hogy $P(A_j|A_i) = P(A_j)$, ami azt fejezi ki, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ sorozatban egyik esemény sem tartalmaz információt semelyik másik eseményre sem.

A teljes függetlenség ennél többet fejez ki, azt, hogy semmilyen kapcsolat sincs az események között. A teljes függetlenségből következik, hogy tetszőleges $A_{i_1}, \ldots, A_i, A_j$ különbőző eseményeket kiválasztva

$$P\big(A_j \mid A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}\big) = \frac{P\big(A_j \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}\big)}{P\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}\big)}$$
$$= \frac{P(A_j)P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_n})}{P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_n})} = P(A_j)$$

Kapcsolat a kétfajta függetlenség között

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek. Az állítás megfordítása nem igaz, tehát a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.

Bizonyítás. Ha az események teljesen függetlenek, akkor $n = 2$ mellett azonnal következik a páronkénti függetlenség. A következő példa pedig illusztrálja, hogy az állítás nem megfordítható.

Feldobunk két szabályos pénzérmét, egy 10 és egy 20 forintost. Legyen A és B az az esemény, hogy a 10 illetve a 20 forintos érmével fejet dobunk, és jelölje C azt az eseményt, hogy összesen 1 fejet dobunk. Ekkor megmutatható, hogy a három esemény páronként független, ez házi feladat. Ezzel szemben a három esemény nem teljesen független, ugyanis

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) > 0.$$

Vagy ugyanez feltételes valószínűséggel:

$$P\big(C \mid A \cap B\big) = 0 \neq P(C) = 1/4.$$

Feladat. Egy vizsgán a hallgatók egy 10 tételből álló tételsorból húznak. A tételek közül 4 „nehéz”, ezeket a vizsgázók nem szeretik, és 6 „könnyű”. Egy napon hárman vizsgáznak, és visszatevéssel húznak egy-egy tételt a tételsorból. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

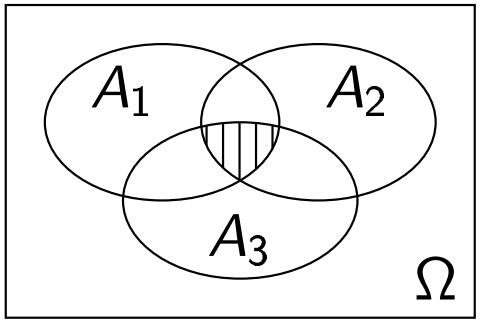
- Mennyi az esélye, hogy mindhárom vizsgázó könnyű tételt húz?

  Legyen rendre A_1, A_2, A_3 azaz esemény, hogy az első, a második illetve a harmadik vizsgázó könnyű tételt húz. Mivel visszatevéssel húznak, a három esemény független, továbbá

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 6/10\,.$$

  Ebből a függetlenség alkalmazásával következik, hogy

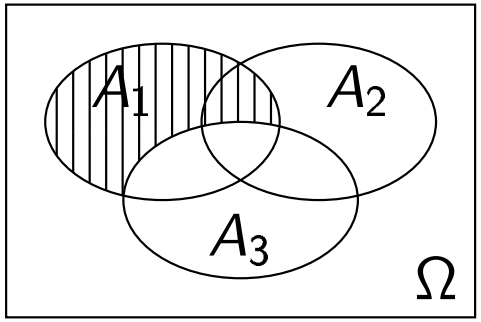
$$\begin{aligned} &P\big(\text{mindhárom vizsgázó könnyű tételt húz}\big) \\ &= P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= (6/10)^3 = 0{,}216 \end{aligned}$$



- Mennyi az esélye, hogy az első vizsgázó könnyű, a harmadik pedig nehéz tételt húz?

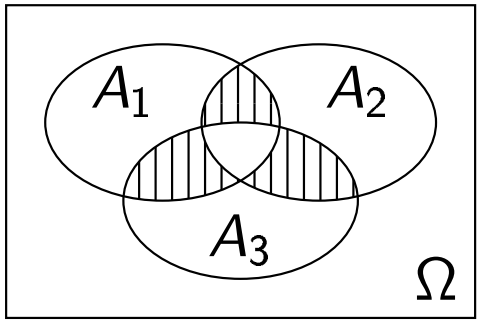
A kérdéses esemény $A_1 \cap \overline{A}_3$ alakban írható fel. A húzás visszatevés nélkül történik, ezért A_1 és $\overline{A}_3$ függetlenek. Emiatt

$$P\big(A_1 \cap \overline{A}_3\big) = P(A_1)P(\overline{A}_3) = (6/10) \cdot (4/10)$$



- Mennyi az esélye annak, hogy a három hallgató közül pontosan ketten húznak könnyű tételt?

$$\begin{aligned}
&P\big(\text{pontosan két hallgató húz könnyű tételt}\big)\\
&= P\big(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\big) + P\big(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\big)\\
&\qquad + P\big(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\big)\\
&= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)\\
&\qquad + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) = 3\big[(4/10) \cdot (6/10)^2\big] = 0{,}432
\end{aligned}$$



A fenti számolásban felhasználtuk, hogy egy-egy metszeten belül csak független események találhatóak.

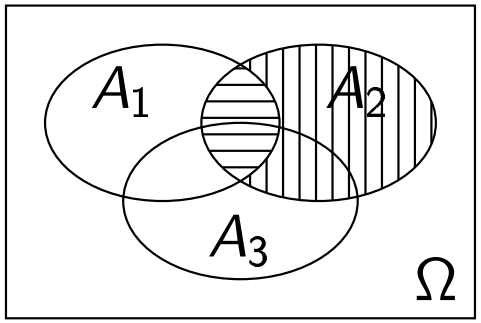
Feladat. Tekintsük az előző feladatot azzal a módosítással, hogy a három vizsgázó visszatevés nélkül húz tételt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

- Melyik hallgatónál a legnagyobb az esély arra, hogy könnyű tételt húz? (Mit érdemes egy ilyen szituációban csinál? Várni a vizsga végéig, hogy a többiek kihúzzák a nehéz tételeket, vagy bemenni a vizsga elején?)

  Legyen továbbra is A_1, A_2, A_3 az az esemény hogy az első, a második és a harmadik vizsgázó könnyű tételt húz. Ekkor $P(A_1) = 0{,}6$.

  A második hallgatónál a láncszabállyal

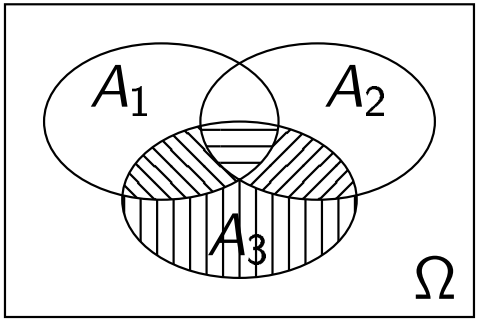
$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1) \\ &= (6/10) \cdot (5/9) + (4/10) \cdot (6/9) = 0{,}6 \end{aligned}$$



  A fenti számolás mögött a következő gondolatmenet húzódik meg. Az első hallgató az esetek 6/10 részében húz könnyű tételt. Ezeken az eseteken belül 5/9 részt képviselnek azok az esetek, amikor a második hallgató is könnyű tételt húz. Ezáltal az összes eset $6/10 \cdot 5/9$ részében fordul elő, hogy mindkét hallgató könnyű tételt húz.

A harmadik hallgatónál:

$$P(A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$+ P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$$
$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/10 = 0{,}6$$



A tagok közül mi csak az elsőt levetjük le, a többi tag hasonló módon számolható ki, házi feladat. Az első tag a láncszabállyal kapható meg:

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

Tehát minden hallgató azonos valószínűséggel kap könnyű tételt.

- Független egymástól az A_1, A_2, A_3 esemény?

A három esemény nem független, ugyanis

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) = 1/6 \neq (0{,}6)^3 = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\,.$$

Az, hogy az események nem függetlenek onnan is látszik, hogy már A_1 és A_2 sem független: $P(A_2|A_1) = 5/9 \neq 0{,}6 = P(A_2)$.

- Mennyi az esélye annak, hogy az első hallgató könnyű tételt húzott, ha tudjuk, hogy a második hallgató könnyű tételt húzott? Hat a második húzás az első húzásra?

  A Bayes-formula alkalmazásával

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{5/9 \cdot 0{,}6}{0{,}6} = \frac{5}{9}$$

  Mivel $P(A_1) = 0{,}6$, a második húzás hat az első húzásra, az A_2 esemény csökkenti az A_1 esemény valószínűségét.

  Ez az eredmény első pillantásra meglepő lehet, ugyanis az első tétel kihúzásakor a második húzás még nem történt meg. Hogyan hathat a későbbi húzás a korábbira? A magyarázat egyszerű. A két húzás nem fizikailag hat egymásra, hanem a $P(A_1|A_2)$ valószínűség azt fejezi ki, hogy a rendelkezésünkre álló információ (a második tétel könnyű) mellett mekkorák az első húzásra vonatkozó valószínűségek. Mivel tudjuk, hogy a második vizsgázó könnyű tételt kapott, ezt a tételt az első vizsgázó nem húzhatta ki. Az első vizsgázó maradék 5 könnyű és 4 nehéz tétel közül kapott egyet, innen jön az 5/9 valószínűség.

Valószínűségi változók

Számos véletlen kísérletnél előfordul, hogy a felhasználó nem is a kísérlet kimenetelére, hanem a kísérlettel kapcsolatban egy véletlen nagyságú mennyiségre kíváncsi. Például:

- Az ötöslottó játékban a sorsolásnak $\binom{90}{5}$ különböző kimenetele van. A játékost viszont ténylegesen nem is a konkrét nyerőszámok érdeklik, hanem inkább az, hogy hány találata van, illetve az, hogy mekkora a nyereménye. A találatok száma és a nyeremény véletlen valós szám.
- Az, hogy egy adott időpontban hány fok van Szegeden, számos tényezőtől függ: légnyomás, páratartalom, szélerősség, borultság, stb. Ezek a (véletlennek tekintett) tényezők együttesen határozzák meg Szeged időjárását, és ezek a tényezők egy nagyon bonyolult eseményteret alkotnak. De minket mindez nem érdekel, csak az, hogy hány fok van. A hőmérséklet szintén egy véletlen valós szám.

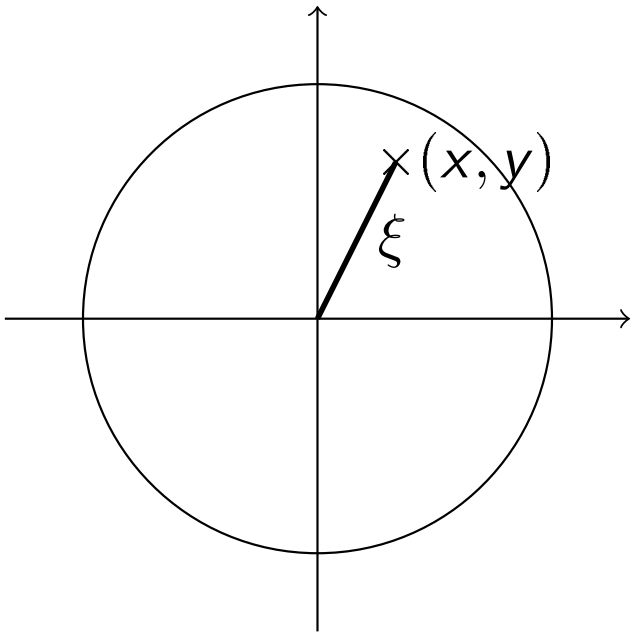
A következő hetekben azt vizsgáljuk meg, hogy hogyan írhatóak le a véletlen kísérletekből származtatott valós mennyiségek, a véletlen számok.

Példa. Ha feldobunk három szabályos pénzérmét, akkor a kísérletnek nyolc lehetséges kimenetele van, és a lehetséges kimeneteleket olyan (k_1, k_2, k_3) hármasok, ahol a k_1, k_2, k_3 komponensek a fej és az írás értéket vehetik fel. Legyen ξ a dobott fejek száma. Vegyük észre, hogy a ξ véletlen szám értéke csak a kísérlet kimenetelétől függ. A fejek száma egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, mely az alábbi formulávan van definiálva:

$$\xi : (k_1, k_2, k_3) \mapsto \text{a fejek száma a } k_1, k_2, k_3 \text{ eredmények között}$$

Példa. Véletlenszerűen választunk egy pontot az egységnyi sugarú és origo középpontú körben. Ekkor a kísérlet lehetséges kimenetelei a kör pontjai, így az eseménytér maga a kör. Legyen ξ a véletlen pontnak az origotól való távolsága. A ξ egy véletlen szám, és értéke csak a választott pont (x, y) koordinátáitól függ:

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Valószínűségi változók

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy tetszőleges véletlen kísérletet leíró valószínűségi mező. Az eseményteret a valós számok halmazába képező $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényeket **valószínűségi változóknak** vagy **véletlen változóknak** nevezzük. A véletlen változó egy olyan véletlen szám, melynek értéke csak a kísérlet kimenetélétől függ, más tényezőktől nem.

A fenti denícióban egy kicsit pontatlanok voltunk, ugyanis a valószínűségi változóknak teljesíteniük kell még egy további feltételt is, **mérhetőeknek** kell lenniük. A mérhetőségi feltétel egy barátságtalan követelmény, de szerencsére ezt a félév során vett feladatoknál nem kell ellenőrizni, ugyanis a legtöbb épeszű gyakorlati problémánál ez a feltétel teljesül. Éppen ezért ezt a követelményt most nem foglaltuk bele a denícióba.

Egy véletlen szám véletlensége általában nem abból származik, hogy nem ismerjük a hozzárendelési szabályt. Ez a hozzárendelési szabály lehet egyszerű vagy bonyolult, de a legtöbbször leírható matematika formulákkal. Egy véletlen szám attól véletlen, hogy nem tudjuk előre megmondani, hogy a kísérlet aktuális végrehajtásakor melyik kimenetel fog majd bekövetkezni.

Milyen épeszű matematikai célokat lehet kitűzni egy valószínűségi változó vizsgálatakor? A legjobb az lenne, ha meg tudnánk jósolni a ξ változó értékét, de erre sajnos nincsen lehetőség. A ξ attól véletlen szám, hogy nem lehet előre megmondani az értékét. De akkor mit lehet mondani róla?

Egy valószínűségi változó vizsgálatakor elsősorban az alábbi kérdésekre fogunk majd koncentrálni:

- Mekkora valószínűséggel vesz fel a változó bizonyos értékeket? Mekkora valószínűséggel esik a változó bizonyos intervallumokba? Formalizálva a kérdést, adott a és b valós számok esetén mennyi az alábbi valószínűségek értéke:

$$P(\xi = a), \qquad P(\xi < a), \qquad P(a < \xi < b).$$

- Mennyi a változó átlagos értéke illetve középértéke? Ez a két mennyiség azonos, vagy van közöttük különbség?
- Hogyan írható le a változó szóródása, tehát az, hogy mennyire vannak a változónak szélsőségesen nagy illetve kicsi értékei?

Diszkrét valószínűségi változók

Feladat. Telintsük azt a kísérletet, hogy feldobunk három szabályos pénzérmét. Ekkor a kísérletnek összesen 8 lehetséges kimenetele van, és a kimenetelek olyan (k_1, k_2, k_3) hármasok, ahol a komponensek a fej és az írás értéket vehetik fel. Ha feltesszük, hogy a dobások függetlenek, akkor egy (k_1, k_2, k_3) kimenetel valószínűsége:

$$P(k_1, k_2, k_3) = P(\text{az első érmével } k_1\text{-et dobunk})$$
$$\cdot P(\text{a másodikkal } k_2\text{-t dobunk}) \cdot P(\text{a harmadikkal } k_3\text{-at dobunk})$$
$$= 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

Tehát a dobások függetlenségéből következik, hogy minden kimenetelnek 1/8 valószínűsége. Tehát ez egy klasszikus valószínűségi mező.

Legyen ξ a dobott fejek száma, ami egy valószínűségi változó. Ekkor a változó értékkészlete az $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$ halmaz, és a ξ változó a lehetséges értékeit az alábbi valószínűségekkel veszi fel:

$$P(\xi = 0) = 1/8, \quad P(\xi = 1) = 3/8, \quad P(\xi = 2) = 3/8, \quad P(\xi = 3) = 1/8.$$

Diszkrét valószínűségi változók

A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete egy megszámlálható halmaz, tehát egy véges vagy végtelen sorozat: $R_\xi = \{x_1, x_2, \dots\}$. Egy diszkrét valószínűségi változó **eloszlása** vagy **valószínűségeloszlása** a lehetséges értékek valószínűségei:

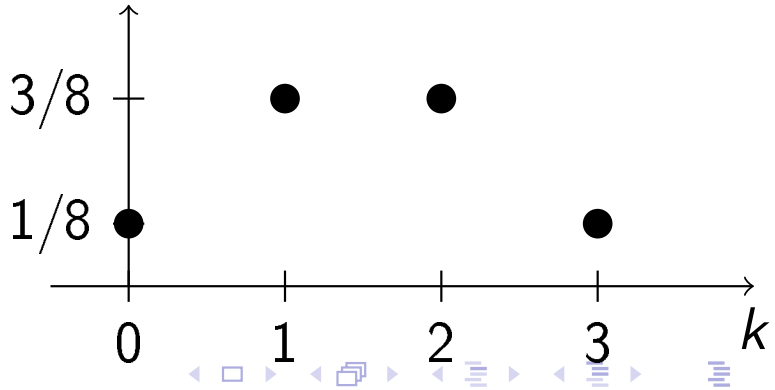
$$p_{x_k} = P(\xi = x_k) \qquad x_k \in R_\xi.$$

Példák. Az alábbi esetekben a ξ valószínűségi változó diszkrét:

- ha a változónak véges sok lehetséges értéke van;
- ha a lehetséges értékek mind egész számok.

Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlását **eloszlástáblázatban** vagy grakonon is ábrázolhatjuk. Például az előző feladatban:

k	0	1	2	3
p_k	1/8	3/8	3/8	1/8



Feladat. Képzeljük el, hogy a három pénzérmét nem csak egyszer dobjuk fel, hanem egymás után n alkalommal, ahol n egy rögzített egész szám. Mit mondhatunk, mennyi lesz a kapott fejek számának az átlaga?

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a kapott fejek száma az egyes dobások során. A meghatározott valószínűségek szerint a kísérletet többször megismételve közelítőleg a dobások $1/8$, $3/8$, $3/8$ illetve $1/8$ részében kapunk pontosan 0, 1, 2 illetve 3 fejet. Ekkor a dobásonként kapott fejek átlagos száma:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \approx \frac{(n/8)\cdot 0 + (3n/8)\cdot 1 + (3n/8)\cdot 2 + (n/8)\cdot 3}{n}$$
$$= 1/8 \cdot 0 + 3/8 \cdot 1 + 3/8 \cdot 2 + 1/8 \cdot 3 = 1{,}5$$

Azt kapjuk, hogy a dobott fejek számának átlagos értéke közelítőleg 1,5. Vegyük észre, hogy a legutóbbi formula úgy is felírható, mint a változó lehetséges értékeinek a valószínűségekkel vett súlyozott összege:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \approx 0 \cdot P(\xi = 0) + 1 \cdot P(\xi = 1) + 2 \cdot P(\xi = 2) + 3 \cdot P(\xi = 3)$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, és az értékkészlete legyen $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Ekkor a ξ változó várható értéke

$$E(\xi) = \sum_{x \in R_\xi} xP(\xi = x) = x_1 P(\xi = x_1) + x_2 P(\xi = x_2) + \cdots$$

A várható érték azt mutatja meg, hogy közelítőleg mennyi a ξ változó átlagos értéke, ha többször egymás után elvégezzük a kísérletet.

A várható érték jele, az E betű az angol „expected value" kifejezésből származik. A várható értékre az $M(\xi)$ jelölést is szokták alkalmazni, ahol M az angol „mean" szó rövidítése.

A várható érték kifejezést sokan félre szokták érteni, és azt hiszik, hogy a várható érték a változó legnagyobb valószínűségű értéke, az az érték, amit a leginkább várunk, amire a leginkább számítunk. Vegyük észre, hogy az érmés példánál a várható érték 1,5, ami nincs is benne a változó értékkészletében, tehát ez nem lehet a legnagyobb valószínűségű érték. A várható érték helyes értelmezése az, hogy ez a változó „átlagos értéke".

Legyen ξ egy valószínűségi változó, tehát egy véletlen szám, és tekintsünk egy $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor a $h(\xi)$ mennyiség szintén véletlen szám, azaz valószínűségi változó lesz. Hogyan határozható meg ennek a transzformált változónak a várható értéke?

Diszkrét valószínűségi változók transzformáltjai

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor a $h(\xi)$ transzormált változó várható értéke az alábbi formulával határozható meg:

$$E\big(h(\xi)\big) = \sum_{x \in R_\xi} h(x) P(\xi = x) = h(x_1) P(\xi = x_1) + h(x_2) P(\xi = x_2) + \cdots$$

Például $h(x) = x^2$ esetén $E(\xi^2) = \sum_{x \in R_\xi} x^2 P(\xi = x)$.
Az $E(\xi^2)$ várható értéket a ξ **második momentumának** nevezzük.

Példa. Tekintsük azt a kísérletet, hogy feldobunk három szabályos érmét, és legyen ξ a kapott fejek száma. Ekkor a ξ második momentuma:

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= 0^2 \cdot P(\xi = 0) + 1^2 \cdot P(\xi = 1) + 2^2 \cdot P(\xi = 2) + 3^2 \cdot P(\xi = 3) \\ &= 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 4 \cdot 3/8 + 9 \cdot 1/8 = 3 \end{aligned}$$

Egy valószínűségi változó várható értéke azt mutatja meg, hogy mennyi a vátozó átlagos értéke, de semmit sem mond arról, hogy a változó lehetséges értékei mennyire szóródnak. A szóródást most úgy értjük, hogy a változónak milyen mértékben vannak nagyon nagy és nagyon kicsi értékei. A szóródás mérésére természetes módon adódik az az ötlet, hogy tekintsük a $|\xi - E(\xi)|$ valószínűségi változót, ami a ξ véletlen számnak az átlagtól való eltérése, és vegyük ennek az eltérésnek a várható értékét:

$$E\Big(\big|\xi - E(\xi)\big|\Big)$$

Ezt a mennyiséget a **várható értéktől vett várható eltérésnek** nevezzük.

Példa. A pénzérmés feladatnál a $h(x) = |x - E(\xi)| = |x - 1{,}5|$ transzformáló függvényt alkalmazva kapjuk, hogy

$$E\Big(\big|\xi - E(\xi)\big|\Big) = E\big(h(\xi)\big) = \sum_{k=0}^{3} h(k)P(\xi = k)$$

$$= |0 - 1{,}5| \cdot \frac{1}{8} + |1 - 1{,}5| \cdot \frac{3}{8} + |2 - 1{,}5| \cdot \frac{3}{8} + |3 - 1{,}5| \cdot \frac{1}{8} = 0{,}75$$

Az előző oldalon deniált mutatószámmal az a problémája, hogy nincsenek szép matematikai tulajdonságai. Emiatt a valószínűségi változók szóródását nem ezzel, hanem az úgynevezett szórással mérjük.

Variancia és szórás

Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót, és tegyük fel, hogy véges a várható értéke. Ekkor a ξ változó **varianciája** vagy **szórásnégyzete**

$$\mathrm{Var}(\xi) = D^2(\xi) = E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]^2\Big)$$

A változó **szórása** a variancia négyzetgyöke: $D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}$.

A szórás deníciójában kis hibától eltekintve a várható érték és a gyökvonás sorrendje felcserélhető, és azt kapjuk, hogy

$$D(\xi) = \sqrt{E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]^2\Big)} \approx E\Big(\sqrt{\big[\xi - E(\xi)\big]^2}\Big) = E\Big(\big|\xi - E(\xi)\big|\Big)$$

Tehát, a szórás közelítőleg azt mutatja meg, hogy mennyi a változónak a várható értéktől való átlagos eltérése.

Habár egy valószínűségi változó varianciája a deniáló formula segítségével is meghatározható, a legtöbb esetben kényelmesebb az alábbi azonosságot alkalmazni.

A szórás meghatározása

Ha ξ olyan valószínűségi változó, melynek véges a várható értéke, akkor

$$\mathrm{Var}(\xi) = E(\xi^2) - \big(E(\xi)\big)^2.$$

Példa. A pénzérmés feladatban a várható érték $E(\xi) = 1{,}5$, a második momentum $E(\xi^2) = 3$. Ekkor a ξ változó varianciája

$$\mathrm{Var}(\xi) = E(\xi^2) - \big(E(\xi)\big)^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75,$$

amiből a változó szórása $D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866.$

Vegyük észre, hogy ebben a példában a szórás értéke (0,866) nem azonos a változónak a várható értéktől vett várható eltérésével (0,75). A szórás csupán egy közelítése az utóbbi mutatószámnak. Ennek ellenére általában az alkalmazásokban a szórással szoktuk dolgozni, ugyanis ennek szebb matematikai tulajdonságai vannak.

Feladat. Szükségünk van egy működőképes biztosítékra. Egy fiókban van 5 biztosítékunk, de ezek közül 3 kiégett, tehát csak 2 használható. Egymás után megvizsgáljuk a biztosítékokat egészen addig, míg nem találunk egy használhatót. Jelölje a ξ valószínűségi változó azt, hogy hanyadik húzásra kapjuk meg az első működőképes biztosítékot. Adjuk meg ξ értékkészletét, eloszlását, várható értékét és szórását.

A változó lehetséges értékei: $R_\xi = \{1, 2, 3, 4\}$. Mivel a változónak csak véges sok lehetséges értéke van, a ξ diszkrét változó.

Egy diszkrét valószínűségi változó esetén először az eloszlást határozzuk meg. Kombinatorikus úton vagy a láncszabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$p_1 = P(\xi = 1) = \frac{2}{5} = 0{,}4\,, \qquad p_2 = P(\xi = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3\,,$$

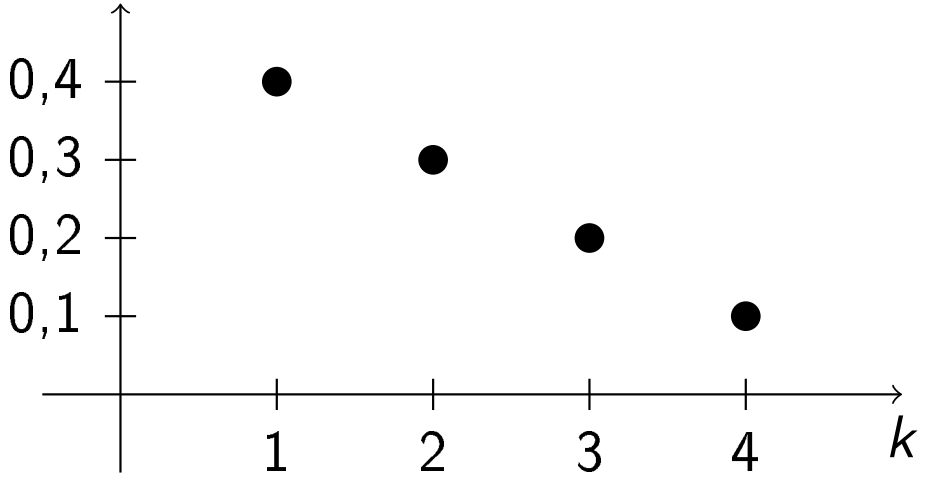
$$p_3 = P(\xi = 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}2\,, \quad p_4 = P(\xi = 4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 0{,}1\,.$$

Például a p_3 valószínűség a láncszabály alkalmazásával így kapható meg:

$$\begin{aligned} P(\xi = 3) &= P\big(\text{két rossz és utána egy jó biztosíték}\big) \\ &= P\big(\text{az első rossz}\big) \\ &\quad \cdot P\big(\text{a második rossz} \mid \text{az első rossz}\big) \\ &\quad \cdot P\big(\text{a harmadik jó} \mid \text{az első és a második rossz}\big) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}2 \end{aligned}$$

Az eloszlás táblázatban illetve grafikonon ábrázolva:

k	1	2	3	4
p_k	0,4	0,3	0,2	0,1



A ξ valószínűségi változó várható értéke és második momentuma:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{4} kP(\xi = k) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2\,,$$

$$E(\xi^2) = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(\xi = k) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}1 = 5\,,$$

Ezekből a változó varianciája és szórása:

$$\mathrm{Var}(\xi) = E(\xi^2) - \big(E(\xi)\big)^2 = 5 - 2^2 = 1\,, \qquad D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} = 1\,.$$

Feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 2-nél több biztosítékot kell megvizsgálnunk? Mennyi az esélye, hogy a megvizsgált biztosítékok száma legalább 2, de kisebb, mint 4?

$$P(\xi > 2) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3\,,$$

$$P(2 \leqslant \xi < 4) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5\,.$$

Az eddigi feladatokban a valószínűségi változók eloszlását a feladat szövegéből kinyert információk alapján valószínűségszámítási módszerekkel írtuk fel. Időnként előfordul, hogy valaki csak elénk tesz egy számsorozatot, és el kell donteni, hogy az valószínűségeloszlás-e. A következő tétel a diszkrét valószínűségi változók eloszlásait karakterizálja.

A valószínűségeloszlások karakterizációja

Egy $p_0, p_1, \ldots$ sorozatot pontosan akkor egy nemnegatív egész értékű diszkrét véletlen változó eloszlása, ha teljesül az alábbi két feltétel:

- a sorozat elemei nemnegatívak, tehát $p_n \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots;$
- a sorozat elemeinek az összege 1, tehát $p_0 + p_1 + \cdots = 1.$

Ezen tulajdonságok nem meglepőek. Ha a $p_0, p_1, \ldots$ számsorozat egy ξ nemnegatív egész értékű változó eloszlása, akkor

- $p_n = P(\xi = n) \geqslant 0,$ hiszen a valószínűség nem lehet negatív;
- az additivitási tulajdonság értelmében

$$p_0 + p_1 + \cdots = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + \cdots = P(\Omega) = 1.$$

Feladat. Mennyi legyen az a paraméter, hogy a p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 értékek eloszlást alkossanak? Mennyi ekkor az eloszlás várható értéke?

$$p_1 = 0{,}15a\,, \quad p_2 = 0{,}5\,, \quad p_3 = a^2\,, \quad p_4 = 0{,}25a\,, \quad p_5 = 0{,}18\,.$$

A p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 értékek pontosan akkor alkotnak eloszlást, ha nemnegatívak, és az összegük 1. Az összeget ellenőrizve az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = a^2 + 0{,}4a + 0{,}68\,,$$

A megoldóképlet alkalmazásával az egyenlet két gyöke: $a = 0{,}4$ és $a = -0{,}8$. Vegyük észre, hogy $a = -0,8$ esetén $p_1 < 0$, tehát ez nem lehet a feladat megoldása. Az $a = 0{,}4$ esetben a sorozat elemei nemnegatívak, tehát ez már megoldás:

$$p_1 = 0{,}06\,, \quad p_2 = 0{,}5\,, \quad p_3 = 0{,}16\,, \quad p_4 = 0{,}1\,, \quad p_5 = 0{,}18\,.$$

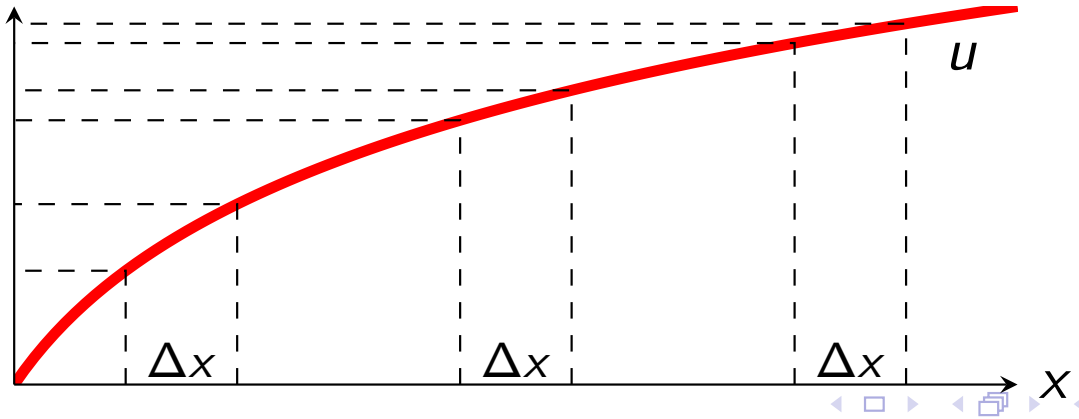
A várható érték:

$$E(\xi) = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = 2{,}84\,.$$

A mikroökonómia kurzuson mindenki megtanulta, hogy az egyének a rendelkezésükre álló fogyasztói kosarakat (például a vagyoni helyzetüket) általában nem ezen javak nagyságával mérik, hanem az ezen javak által elért hasznossággal. Ha egy adott jószágból (mondjuk pénzből) x mennyiség áll rendelkezésre, akkor ennek az egyén $u(x)$ hasznosságot tulajdonít, ahol u az egyén preferenciáit leíró **hasznossági függvény**. Az u hasznossági függvény általában rendelkeznek két tulajdonsággal:

- monoton növekvő: nagyobb jószágkosár révén nagyobb hasznosság;
- csökkenő meredekségű (konkáv): Gossen I. törvénye, azaz a csökkenő határhaszon elve szerint az újabb és újabb pótlólagos jószágegységek révén elért hasznosságnövekedés egyre kisebb lesz.

A hasznosság növekedése azonos pótlólagos jószágmennyiség hatására:



Ha a jószágkosár maga is véletlen, (például egy kockázatos befektetés eredménye,) akkor az elért hasznosság nagysága is véletlen. Hogyan lehet véletlen nagyságú hasznosságokkal dolgozni? Az ilyen esetekben általában az elért hasznosság várható értékét határozzuk meg. Amennyiben pedig több véletlen jószágkosár közül szeretnénk választani, akkor azt választjuk, amelyiknek nagyobb a várható hasznossága.

Feladat. Tegyük fel, hogy az előző feladatban szereplő p_k valószínűség azt fejezi ki, hogy mekkora valószínűséggel érek el egy tervezett befektetés révén k nagyságú jövedelmet. Mennyi az elért hasznosság várható értéke, ha a hasznosságot az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvénnyel mérem?

Legyen ξ a realizált jövedelem nagysága. Ekkor az elért hasznosság $u(\xi) = \sqrt{\xi}$, aminek a lehetséges értékei: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$.
A realizált hasznosság eloszlása a következő táblázatban foglalható össze:

k	1	2	3	4	5
$u(k)$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$
p_k	0,06	0,5	0,16	0,1	0,18

Az elért hasznosság várható értéke:

$$E\big(u(\xi)\big) = \sum_{k=1}^{5} u(k)P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}p_k$$
$$= \sqrt{1}\cdot 0{,}06 + \sqrt{2}\cdot 0{,}5 + \sqrt{3}\cdot 0{,}16 + \sqrt{4}\cdot 0{,}1 + \sqrt{5}\cdot 0{,}18 = 1{,}647\,.$$

Feladat. Tegyük fel, hogy ez a tervezett befektetés egy 2,5 nagyságú kezdőtőkét igényel. Hasznosságelméleti szempontból megéri nekem ez a befektetés? Hasznosságelméleti szempontból mi a befektetés „igazságos" kezdőtőkéje?

A kezdőtőke hasznossága $u(2{,}5) = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$, ami kisebb, mint a befektetés révén elért hasznosság várható értéke. A racionális döntés a nagyobb hasznosságú (fogyasztói kosár) pénzösszeg választása, ezért megéri feláldozni ezt a kezdőtőkét.

A kezdőtőke akkor tekinthető igazságosnak, ha a befektetés eredményének várható hasznossága egyenlő a feláldozott hasznossággal. Az igazságos C kezdőtőkére $u(C) = E\big(u(\xi)\big)$, amiből $C = 1{,}647^2 = 2{,}71$.

Nevezetes diszkrét eloszlások

Számos feladattípusnál előfordul, hogy a vizsgált valószínűségi változók hasonlóan viselkednek abban az értelemben, hogy a változók értékét kialakító véletlen mechanizmusok hasonlóan működnek, és emiatt a változók hasonló eloszlást követnek. A következőkben bevezetünk néhány nevezetes eloszlást, olyan eloszlásokat, melyek a gyakorlati feladatok során gyakran megjelennek, és emiatt az ismeretük nagyban megkönnyíti a munkát.

Feladat. A 2022-es foci világbajnokság döntőjét a parádésan szereplő magyar csapat játsza a rendező katariak ellen. A hosszabbítások után döntetlen eredmény alakul ki, ezért a meccset tizenegyesekkel döntik el. Feltehető, hogy a magyar fiúk az egyes büntetőket egymástól függetlenül rendre $p = 0{,}8$ valószínűséggel értékesítik. Jelölje ξ a magyar gólok számát az $n = 5$ büntetőrúgás után. Írjuk fel a ξ változó eloszlását.

A ξ változó értékkészlete: $R_\xi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik focista belövi a bűntetőjét.

- Egyféleképpen fordulhat elő az, hogy 5 gól sem születik, úgy, hogy mindeki belövi a büntetőjét. A függetlenség miatt ennek az esélye:

$$P(\xi = 5) = P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\big)$$
$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) = 0{,}8^5 \approx 0{,}33\,.$$

- 4 gól akkor születik, ha pontosan egy rúgó hagyja ki a bűntetőt. Ez megtörténhet például úgy, hogy az utolsó játékos hagyja ki:

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5\big)$$
$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(\overline{A}_5) = 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}082\,.$$

Összesen 5-féleképpen választhatjuk ki azt a játékost, aki kihagyja a tizenegyest, de mind az 5 esetben ugyanekkora annak az esélye, hogy a kiválasztott focista elrontja, a többi pedig értékesíti a büntetőt. Tehát

$$P(\xi = 4) = 5 \cdot \big(0{,}2 \cdot 0{,}8^4\big) \approx 0{,}41\,.$$

- Három gól születik akkor, ha hárman értékesítik, és ketten kihagyják a büntetőjüket. Ez megtörténhet például úgy, hogy a rúgást az utolsó kettő focista rontja el:

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5\big)$$
$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)P(\overline{A}_5) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}02\,.$$

Összesen $\binom{5}{3} = 10$ szereposztással születhet pontosan 3 gól, és minden szereposztásnak azonos az esélye, ezért

$$P(\xi = 3) = 10 \cdot \big(0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3\big) \approx 0{,}2\,.$$

- A fentiek alapján már látható az általános séma. Az, hogy pontosan k gól születik $\binom{5}{k}$ különböző szereposztásban fordulhat elő, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki azt a k focistát, aki értékesíti a büntetőjét. Minden egyes szereposztásnak $0{,}8^k 0{,}2^{5-k}$ az esélye, ezért

$$P(\xi = k) = \binom{5}{k} 0{,}8^k 0{,}2^{5-k}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5\,.$$

Bernoulli-kísérlet

Egy kísérlet Bernoulli-kísérlet, ha kétfajta kimenetele van, egy $0 < p < 1$ valószínűségű kedvező és egy $1 - p$ valószínűségű kedvezőtlen.

Binomiális eloszlás

Azt mondjuk, hogy egy ξ valószínűségi változó binomiális eloszlást követ n és p paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

A binomiális eloszlás várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = np, \qquad D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Legyen adva egy Bernoulli-kísérlet, ahol p a kedvező kimenetel esélye. Ha ezt a kísérletet egymástól függetlenül n alkalommal megismételjük, akkor az összesen kapott kedvező kimenetelek száma binomiális eloszlást követ n és p paraméterrel.

Példa. A focis feladatban a gólok ξ száma binomiális eloszlást követ $n = 5$ és $p = 0{,}8$ paraméterrel, hiszen 5 alkalommal ismételtük meg a kísérletet, és a kedvező kimenetel (gól) valószínűsége 0,8. A gólszám várható értéke $E(\xi) = np = 4$, szórása $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)} \approx 0{,}89$.

Példa. Korábban már tekintettük azt a feladatot, hogy feldobunk három pénzérmét, és megszámoljuk a fejek számát. Egy pénzérme feldobása egy Bernoulli-kísérlet, ahol 0,5 a kedvező kimenetel (fej) esélye. A kísérletet 3 alkalommal ismételjük meg, vagyis a fejek száma binomiális eloszlást követ $n = 3$ és $p = 0{,}5$ paraméterrel. Ekkor a fejek számának az eloszlása

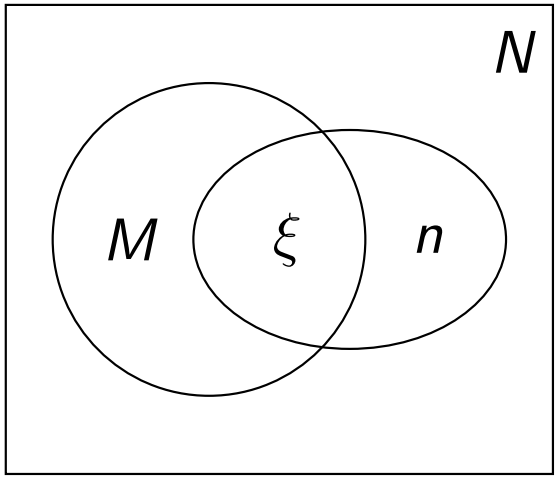
$$P(\xi = k) = \binom{3}{k} 0{,}5^k (1 - 0{,}5)^{3-k} = \binom{3}{k} 0{,}5^3\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a fenti formula a már korábban is meghatározott valószínűségeket adja vissza:

$$P(\xi = 0) = 1/8, \quad P(\xi = 1) = 3/8, \quad P(\xi = 2) = 3/8, \quad P(\xi = 3) = 1/8.$$

Továbbá: $E(\xi) = np = 1{,}5$, $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{0{,}75}$.

Tegyük fel, hogy adott egy halmaz N elemmel, melyek közül M elem meg van különböztetve valamilyen módon. (Például kék golyók a piros golyók között.) Véletlenszerűen kiválasztunk n elemet az alaphalmazból, és jelölje ξ a megkülönböztetett elemek számát a mintában. Az a kérdés, hogy mi a ξ változó eloszlása. Az ilyen feladatokat **mintavételezési problémáknak** nevezzük.



A mintavételezési problémáknak két típusát különböztetjük meg:

- **Visszatevéses mintavételezés** esetén a kihúzott elemeket rendre visszatesszük a halmazba, emiatt előfordulhat, hogy egy elemet többször is kihúzunk. A visszatevéses esetben figyelembe vesszük az elemek kihúzásának a sorrendjét.
- **Visszatevés nélküli mintavétezés** esetén a kihúzott elemeket nem tesszük vissza, tehát egy elem legfeljebb egyszer szerepelhet a mintában. Ebben az esetben a húzás sorrendjét nem szoktuk figyelembe venni.

Feladat. Egy raktárban a gyártmányok 5 százaléka selejtes. Minőségellenőrzéskor visszatevéssel kivesznek 10 mintaelemet, és megvizsgálják őket. Jelölje ξ a selejtes termékek számát a mintában. Határozzuk meg a ξ eloszlását. Mennyi az esélye, hogy nem lesz selejtes darab a mintában?

Tekintsük azt a Bernoulli-kísérletet, hogy kiválasztunk egy elemet, és megvizsgáljuk, selejtes-e. Mivel most a selejtes darabokat számoljuk, a selejtes kimenetel lesz a kedvező, aminek a valószínűsége $p = 0{,}05$. Az ellenőrzéskor ezt a Berboulli-kísérletet ismétlik meg $n = 10$ alkalommal, és ξ jelöli a selejtes darabok számát. Ekkor a ξ változó binomiális eloszlást követ $n = 10$ és $p = 0{,}05$ paraméterrel, tehát az eloszlása

$$P(\xi = k) = \binom{10}{k} 0{,}05^k 0{,}95^{10-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 10\,.$$

Annak az esélye, hogy nem lesz selejtes darab a mintában:

$$P(\xi = 0) = \binom{10}{0} 0{,}05^0 0{,}95^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}95^{10} \approx 0{,}6\,.$$

Feladat. Mekkora lehet a selejtarány, ha az a cél, hogy legfeljebb 0,1 valószínűséggel legyen selejtes darab a 10 elemű mintában?

Jelölje p az ismeretlen selejtarányt. Az a célunk, hogy a $P(\xi > 0) \leqslant 0{,}1$ egyenlőtlenség teljesüljön. De ez éppen azt jelenti, hogy legalább 0,9 valószínűséggel egyik mintaelem sem selejtes, tehát

$$0{,}9 \leqslant P(\xi = 0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = (1-p)^{10}\,.$$

Az egyenlőtlenség megoldásával kapjuk, hogy

$$1 - p \geqslant \sqrt[10]{0{,}9} \approx 0{,}99\,, \qquad \text{vagyis} \qquad p \leqslant 1 - \sqrt[10]{0{,}9} \approx 0{,}01\,.$$

Tehát a cél csak úgy érhető el, hogy a selejtarányt leszorítjuk 1% alá.

Megjegyzés. Az előző oldalon bemutatott gondolatmenet a visszatevéses mintavételezésre általában is alkalmazható. Ha N jelöli a teljes halmaz elemszámát, és M a megkülönböztetett elemek számát, akkor egy-egy húzás alkalmával $p = M/N$ valószínűséggel kapunk megkülönböztetett elemet. Mivel ezt a húzást n alkalommal ismételjük meg, a mintában a megkülönböztetett elemek száma binomiális eloszlású n és $p = M/N$ paraméterrel.

Feladat. Egy szelvénnyel játszunk az ötöslottón. Határozzuk meg a találatok számának az eloszlását.

Jelölje ξ a találatok számát. A ξ értékkészlete: $R_\xi = \{0,1,2,3,4,5\}$, tehát ez egy diszkrét valószínűségi változó. Feltehető, hogy a sorsoláson minden számötös azonos valószínűséggel kerül kihúzásra, így használhatjuk a kedvező/összes formulát. Összesen $\binom{90}{5}$ eset van, hiszen ennyiképpen húzhatnak ki 5 számot a 90-ből visszatevés nélkül, ha a sorrend nem számít. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan k találatunk lesz, ahol most $k \in R_\xi$ tetszőleges érték? Ehhez az kell, hogy az általunk megjelölt 5 számból pontosan k darabot, és az általunk nem megjelölt 85 számból pedig pontosan $5-k$ darabot húzzanak ki, tehát a kedvező esetek száma $\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}$. Ebből kapjuk, hogy a ξ változó eloszlása

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}, \qquad k = 0,1,\ldots,5\,.$$

Vegyük észre, hogy a lottósorsolás egy visszatevés nélküli mintavételezés. Az alaphalmaz az $N = 90$ szám, melyek közül $M = 5$ számot mi megjelölünk a szelvényünkön. A sorsolás során kihúznak egy $n = 5$ elemű mintát, és a találatok száma nem más, mint a megkülönböztetett elemek száma a mintában.

Hipergeometrikus eloszlás

Egy ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlást követ N, M és n paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

A hipergeometrikus eloszlás várható értéke $E(\xi) = nM/N$.
Visszatevés nélküli mintavételezés esetén a kiválasztott elemek között található megkülönböztetett elemek száma hipergeometrikus eloszlást követ N, M és n paraméterrel.

Ebből következik, hogy a lottósorsoláson a találatok számának a várható értéke: $E(\xi) = 25/90 \approx 0{,}28$.

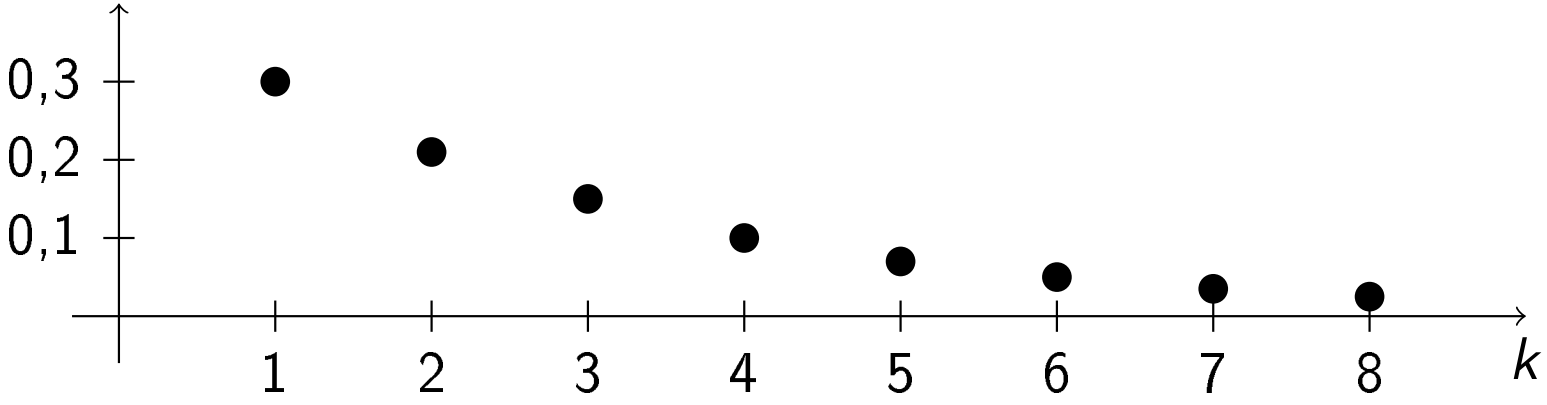
Feladat. Piri néni szeretne venni egy szép pálmát a közeli faiskolából, de sajnos nem mindig talál neki tetszőt. A faiskolába minden nap érkezik új áru, de ebben csak 0,3 valószínűséggel van olyan csemete, amivel Piri néni elégedett. Éppen ezért Piri néni minden nap elmegy a faiskolába egészen addig, míg nem talál egy neki tetsző pálmát, amit végre meg tud vásárolni. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kell elmennie a faiskolába. Határozzuk meg a ξ változó eloszlását. (Feltehető, hogy az áru minősége az egyes napokon független egymástól.)

A ξ változó lehetséges értékei a pozitív egész számok: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$. Emiatt ξ egy diszkrét valószínűségi változó. Mivel az egyes napkon egymástól független az áru minősége, tetszőleges k pozitív egész szám esetén

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= P\big(\text{az első } (k-1) \text{ napon rossz áru, és a } k\text{-dik napon jó áru}\big) \\ &= P\big(\text{az első napon rossz áru}\big) \cdot P\big(\text{a második napon rossz áru}\big) \\ &\quad \cdots P\big(\text{a } (k-1)\text{-edik napon rossz áru}\big) \cdot P\big(\text{a } k\text{-adik napon jó áru}\big) \\ &= 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdots 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}7^{k-1} 0{,}3\,. \end{aligned}$$

Az eloszlás értékei $1 \leqslant k \leqslant 8$ esetén

k	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0,3	0,21	0,15	0,1	0,07	0,05	0,035	0,025



Feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Piri néni 5 nap alatt talál neki tetsző pálmát?

Annak az esélye, hogy 5 nap alatt nem tud pálmát venni:

$$P(\xi > 5) = P\big(5 \text{ napon át csak rossz pálma}\big) = 0{,}7^5 = 0{,}168$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy 5 nap alatt talál neki tetsző pálmát:

$$P(\xi \leqslant 5) = 1 - P(\xi > 5) = 0{,}832 = 83{,}2\%$$

Feladat. Milyen k értékre teljesül, hogy k nap alatt Piri néni legalább 95% százalék eséllyel talál neki tetsző pálmát?

Az előző megoldás mintájára annak az esélye, hogy k nap alatt nem talál szép pálmát: $P(\xi > k) = 0{,}7^k$. Ekkor annak az esélye, hogy k nap alatt sikerül pálmát vennie:

$$0{,}95 \leqslant P(\xi \leqslant k) = 1 - P(\xi > k) = 1 - 0{,}7^k\,,$$

amiből $0{,}05 \geqslant 0{,}7^k$. Mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$\lg 0{,}05 \geqslant \lg 0{,}7^k = k \lg 0{,}7\,, \qquad \text{vagyis} \qquad k \geqslant \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}7} = 8{,}4\,.$$

Tehát $k \geqslant 9$ esetén teljesül az, hogy k nap alatt legalább 95% valószínűséggel talál szép pálmát.

Az előző feladatban a korábbi szóhasználatunkat alkalmazva a következő történt. Adott egy Bernoulli-kísérlet, az, hogy Piri néni elmegy a faiskolába, és megnézi a facsemetéket. A kísérletnek két kimenetele lehet: vagy talál neki tetsző pálmát, vagy nem. A kedvező kimenetel az, ha tud fát venni, aminek $p = 0{,}3$ a valószínűsége. Ezek után a Bernoulli-kísérletet addig hajtjuk végre egymástól függetlenül újra meg újra, míg a kedvező kimenetel be nem következik, tehát míg végül Piri néni meg nem tudja venni a fáját.

Geometriai eloszlás

Egy ξ valószínűségi változó **geometriai eloszlást** követ $0 < p < 1$ paraméterrel, ha értékkészlete $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, míg az eloszlása

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Az eloszlás várható értéke és szórása: $E(\xi) = 1/p$, $D(\xi) = \sqrt{1-p}/p$.

Legyen adva egy Benoulli-kísérlet p sikervalószínűséggel. Amennyiben ezt a kísérletet addig ismételjük, míg kedvező kimenetelt nem kapunk, akkor a kísérlet végrehajtásainak a száma geometriai eloszlást követ.

Gyakori hiba, hogy keverik a binomiális és a geometriai eloszlást, ugyanis mind a két esetben egy Bernoulli-kísérletet ismétlünk meg több alkalommal. A különbség az, hogy míg a binomiális esetben a végrehajtások száma előre rögzített (n), és az a kérdés, hogy hány kedvező kimenetelt kapunk, addig a geometriai eloszlás esetében az van megadva, hogy hány kedvező kimenetelt akarunk (1), és a szükséges végrehajtások száma a véletlen.

Binomiális eloszlás:

ξ db kedvező kimenetel

✔ ✘ ✘ ✔ ✘ ✔

n db ismétlés

Geometriai eloszlás:

1 db kedvező kimenetel

✘ ✘ ✘ ✘ ✘ ✔

ξ db ismétlés

A Poisson-eloszlás

Azt mondjuk, hogy egy ξ valószínűségi változó **Poisson-eloszlást** követ $\lambda > 0$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

A Poisson-eloszlás várható értéke és szórása: $E(\xi) = \lambda$, $D(\xi) = \sqrt{\lambda}$.
(A fenti formulában $e \approx 2{,}72$ az Euler-féle szám.)

A Poisson-eloszlást ritkán bekövetkező események modellezésére szoktuk alkalmazni. A következő mennyiségek gyakran Poisson-eloszlást követnek:

- Műszaki meghibásodások: egy gép meghibásodásai egy adott időtartam (hónap, év) alatt, balsetek száma egy adott útvonalon.
- Biztosításmatematika: egy biztosítótársasághoz érkező kárbejelentések száma egy adott időtartam alatt.
- Tömegkiszolgálási problémák: egy internetes adatszerverre érkező lekérdezések száma, ügyfelek száma egy pénzfelvevő autómatánál.
- Egyéb: hullócsillagok száma egy nyári éjszakán.

Feladat. Egy biztosítóhoz egy-egy napon véletlen számú kárbejelentés érkezik. A statisztikai adatok szerint az egy napra jutó bejelentések száma egy Poisson-eloszlású ξ valószínűségi változó, melynek λ paramétere ismeretlen. Tudjuk viszont, hogy a napon 5%-ában nem érkezik bejelentés. Mennyi az egy napra jutó kárbejelentések átlagos száma. Mennyi annak az esélye, hogy egy adott napon egynél több kárbejelentés érkezik?

A feladat szövege szerint $P(\xi = 0) = 0{,}05$, vagyis

$$0{,}05 = P(\xi = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}, \quad \text{tehát} \quad \lambda = -\ln 0{,}05 \approx 3\,.$$

Mivel $E(\xi) = \lambda = 3$, egy-egy napon átlagosan 3 kárbejelentés érkezik. Annak valószínűsége, hogy egy napon egynél több bejelentés érkezik:

$$P(\xi > 1) = 1 - \Big[P(\xi = 0) + P(\xi = 1)\Big] = 1 - \left[\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda}\right]$$
$$= 1 - [0{,}05 + 0{,}15] = 0{,}8$$

Folytonos valószínűségi változók

A korábbiak a diszkrét valószínűségi változókkal ismerkedtünk meg, melyeknek az a jellemzője, hogy relatíve kicsi az értékkészletük, kevés értéket vehetnek fel. Sajnos nem minden valószínűségi változó tartozik bele a diszkrét valószínűségi változók családjába. Ez nem nyilvánvaló, de ha például egy változó egy adott intervallumról bármilyen számot felvehet értékül, akkor ez a változó nem lehet diszkrét. Például:

- testmagasság, testsúly, vérnyomás, stb.
- hőmérséklet, csapadékmennyiség, légnyomás, stb.

Olyan eset is előfordul, hogy egy változó diszkrét ugyan, de mi mégsem diszkrétként kezeljük, ugyanis technikailag nehéz vele így dolgozni. Ilyenek például a tőzsdei árfolyamok, melyek mindig egész pénzegységben vannak kifejezve, tehát egész értékűek, de mivel nagyon sok lehetséges értékük van, nehéz felírni az eloszlásukat. Ehelyett ezekre a változókra úgy szoktunk tekinteni, hogy az értékük tetszőleges szám lehet egy véges vagy végtelen intervallumon, és a hivatalos árfolyam ennek a kerekítése.

Folytonos valószínűségi változók, sűrűségfüggvény

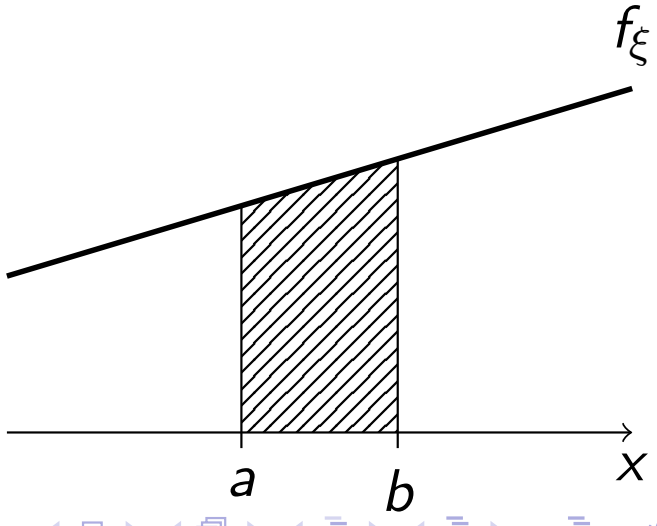
Egy ξ valószínűségi változó **folytonos eloszlású**, ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $a \leqslant b$ valós számok esetén

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b f_\xi(x)\, dx\,.$$

Ekkor az f_ξ függvényt a ξ változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

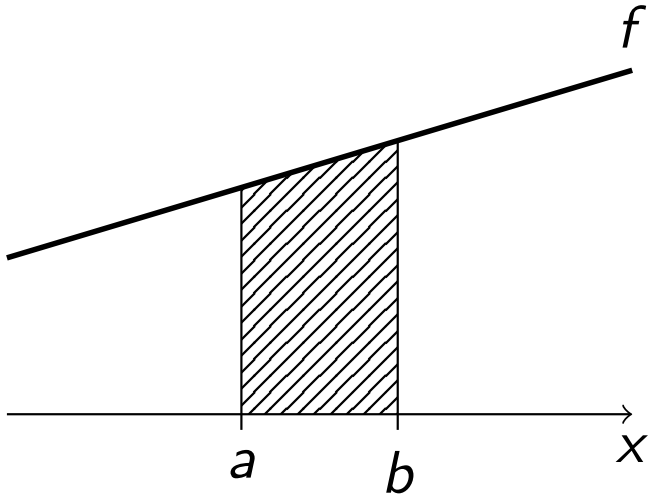
Ezen a kurzuson, ha egy valószínűségi változó értékkészlete egy véges vagy végtelen intervallum, akkor az a változó folytonos eloszlású.

A fenti formula azt fejezi ki, hogy a ξ változó akkora valószínűséggel esik egy adott $[a, b]$ intervallumba, amekkora a sűrűségfüggvény görbéje alatti terület ezen az intervallumon.



Ismétlés. Mi az a határozott integrál, és hogyan számoljuk ki?

Egy f függvény **határozott integrálja** az $[a, b]$ intervallumon azt mutatja meg, hogy mennyi a függvénygörbe alatti terület előjeles nagysága. A határozott integrált „szép" függvények esetén a következő módszerrel lehet meghatározni:



- 1. lépés: Meghatározzuk az f függvény egy **primitív függvényét**. A primitív függvény egy olyan F függvény, melyre teljesül, hogy a deriváltja maga az f, tehát $F' = f$. A primitív függvényt **határozatlan integrálnak** is nevezzük, jelölése: $\int f(x)\,dx$.
- 2. lépés: Alkalmazzuk a **Newton–Leibnitz-formulát**, ami szerint

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b, \qquad \text{ahol} \qquad \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Tehát ehhez a témakörhöz tudni kell valamennyire deriválni és integrálni...

Néhány fontosabb függvény deriválási és integrálási szabálya, nekünk a félév folyamán csak ezekre lesz szükségünk (a rögzített valós szám):

Hatvány- és konstansfüggvények deriváltja:

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a)' = 0\,.$$

Hatványfüggvények primitív függvénye:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\,, \quad \text{ha} \quad a \neq -1\,, \qquad \int x^{-1} dx = \ln x = \log_e x\,.$$

Exponenciális függvények deriváltja és primitív függvénye:

$$(a^x)' = a^x \ln a\,, \qquad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}\,, \qquad a > 0\,.$$

Speciálisan:

$$(e^x)' = e^x\,, \qquad \int e^x\, dx = e^x\,.$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

- $f(x) \geqslant 0$ minden x valós szám esetén;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, tehát a függvény görbéje alatti teljes terület 1.

Miért is kell teljesülnie ennek a két tulajdonságnak?

- Ha a függvény valamilyen $[a, b]$ intervallumon negatív értéket venne fel, akkor ott az integrálja is negatív lenne. Ekkor pedig

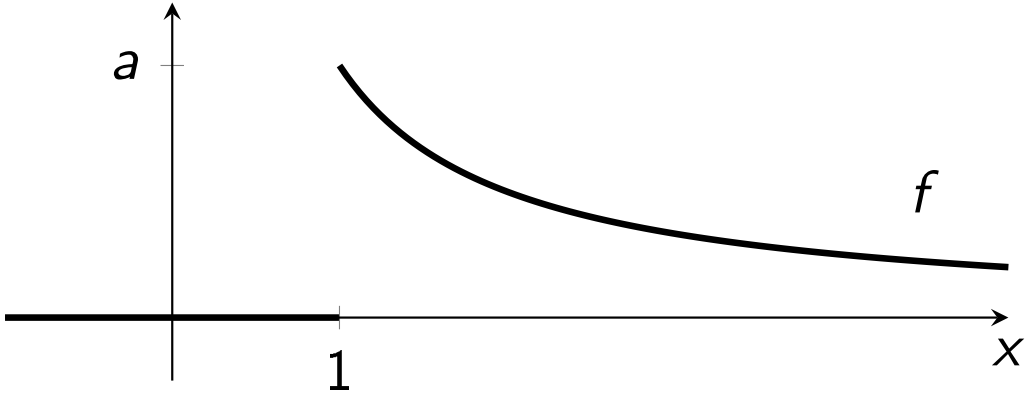
$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b f_\xi(x)\, dx < 0\,,$$

  ami nem lehetséges.
- A sűrűségfüggvény definícióját az $a = -\infty$ és $b = \infty$ esetre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty \leqslant \xi \leqslant \infty) = 1\,.$$

Feladat. Mennyi legyen az a paraméter értéke, ha azt akarom, hogy az alábbi függvény sűrűségfüggvény legyen?

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leqslant 1\,, \\ a/x^3\,, & x > 1\,. \end{cases}$$



Az a értéket úgy kell választani, hogy teljesüljenek az előző oldalon vett tulajdonságok. Az $x < 1$ tartományon a függvény értéke 0, tehát

$$\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx = 0\,.$$

Az f függvény primitív függvénye az $x \geqslant 1$ tartományon:

$$\int \frac{a}{x^3}\,dx = a\int x^{-3}\,dx = a\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{a}{2x^2}$$

Ekkor az f függvény integrálja:

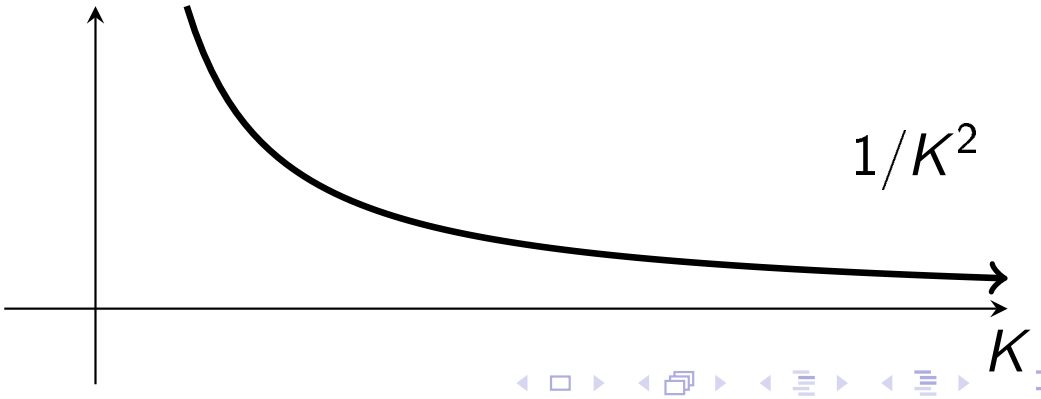
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^3}\,dx = 0 + \lim_{K\to\infty} \int_{1}^{K} \frac{a}{x^3}\,dx$$

$$= \lim_{K\to\infty} \left[-\frac{a}{2x^2} \right]_1^K = \lim_{K\to\infty} \left[\left(-\frac{a}{2\cdot K^2} \right) - \left(-\frac{a}{2\cdot 1^2} \right) \right]$$

$$= -\frac{a}{2} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^2} + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}\cdot 0 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Mivel a görbe alatti teljes terület 1, azt kapjuk, hogy $a = 2$ az egyetlen megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $f(x) \geqslant 0$ minden x valós számra, tehát valóban sűrűségfüggvényt kaptunk. A határértéket az $1/K^2$ függvény grafikonjáról olvastuk le:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^2} = 0$$



Folytonos valószínűségi változók értékkészlete

Egy ξ folytonos valószínűségi változó értékkészlete azon x valós számoknak a halmaza, ahol az f_ξ sűrűségfüggvény értéke pozitív:

$$R_\xi = \{x \in \mathbb{R} : f_\xi(x) > 0\}$$

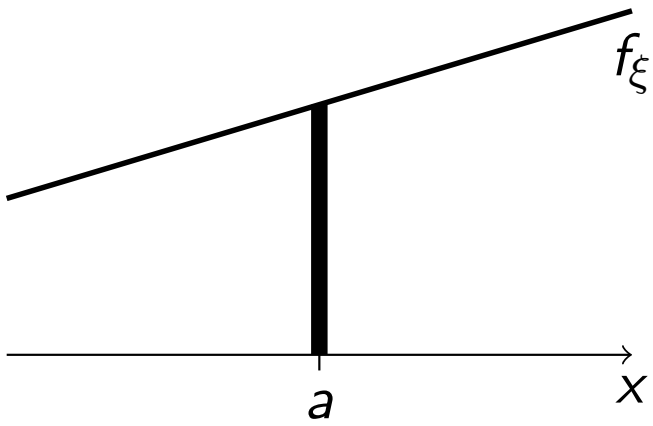
Feladat. Legyen ξ egy olyan valószínűségi változó, melynek az előző oldalon kapott f függvény a sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg a ξ értékkészletét.

Mivel $f(x) = 0$ a $(-\infty, 1)$ intervallumon, és $f(x) > 0$ az $[1, \infty)$ intervallumon, a ξ változó értékkészlete: $R_\xi = [1, \infty)$.

Ez az eredmény nem meglepő. Ahol a függvény értéke 0, ott a görbe alatti terület is 0, tehát oda a ξ változó 0 valószínűséggel esik. Ahol a sűrűségfüggvény pozitív, ott a görbe alatti terület nagysága is pozitív, tehát erre a tartományra a változó már pozitív valószínűséggel eshet.

Gyakori hiba, hogy a hallgatók (tévesen) úgy értelmezik a sűrűségfüggvény nagyságát egy adott a pontban, hogy ekkora valószínűséggel esik a változó ebbe a pontba, tehát: $f(a) = P(\xi = a)$. Ez az egyenlőség jellemzően NEM teljesül, ugyanis a sűrűségfüggvény definícióját az $a = b$ esetre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$P(\xi = a) = P(a \leqslant \xi \leqslant a) = \int_a^a f_\xi(x)\,dx = 0.$$



Hiszen most a görbe alatti tartomány egy szakasz, aminek 0 a területe.

Intervallumba esési valószínűségek folytonos változó esetén

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ a sűrűségfüggvénnyel. Ekkor minden a valós szám esetén $P(\xi = a) = 0$. Ebből következik, hogy tetszőleges $a \leqslant b$ valós számok mellett

$$P(a < \xi < b) = P(a < \xi \leqslant b) = P(a \leqslant \xi < b) = \int_a^b f_\xi(x)\,dx\,.$$

Feladat. Tekintsük a korábbi oldalakon bevezetett f sűrűségfüggvényt, továbbá a hozzá tartozó ξ valószínűségi változót.

- Mekkora eséllyel veszi fel a változó a 3-as értéket?

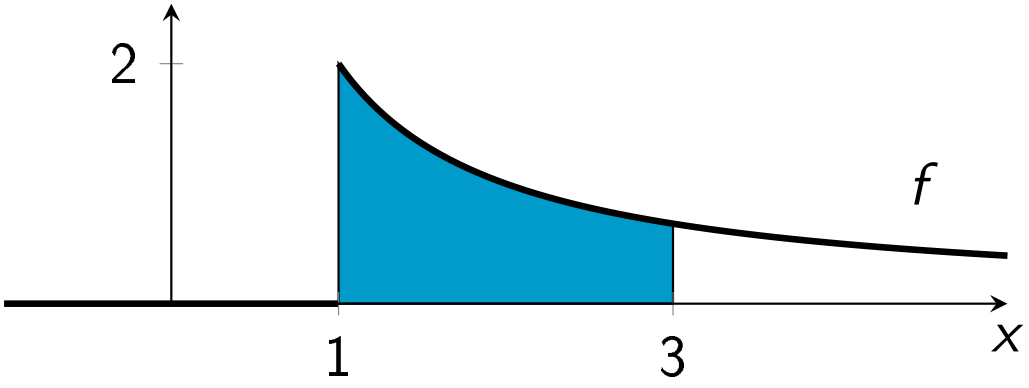
  Minden értéknek 0 a valószínűsége, ezért $P(\xi = 3) = 0$.

- Mekkora valószínűséggel esik a ξ változó 0 és 3 közé?

  A sűrűségfüggvény definíciójából $a = 0$ és $b = 3$ választással:

$$P(0 \leqslant \xi \leqslant 3) = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^3 \frac{2}{x^3}\,dx = 0 + 2\int_1^3 x^{-3}\,dx$$

$$= 0 + 2\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = 2\left(\frac{3^{-2}}{-2} - \frac{1^{-1}}{-2}\right) = 2\left(\frac{1}{-18} - \frac{1}{-2}\right) = \frac{8}{9}$$



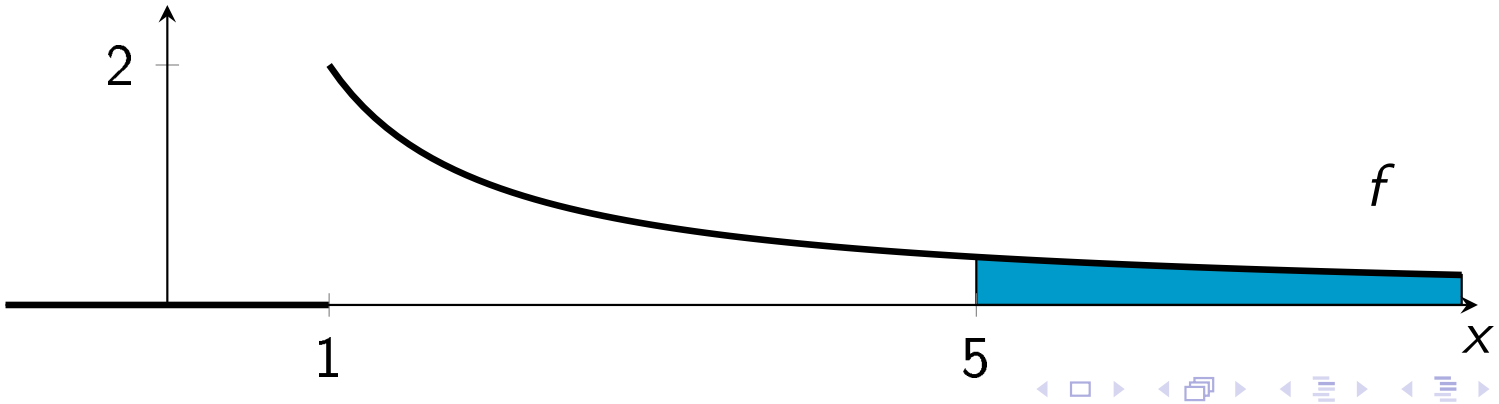
- Hogyan változik az előző feladat megoldása, ha nem engedjük meg, hogy a változó felvegye a 3 értéket?

  Mivel a ξ minden egyes konkrét értéket 0 valószínűséggel vesz fel, azt kapjuk, hogy $P(0 \leqslant \xi < 3) = P(0 \leqslant \xi \leqslant 3) = 8/9$.
- Mennyi annak az esélye, hogy ξ értéke nagyobb, mint 5?

$$P(\xi > 5) = P(5 \leqslant \xi \leqslant \infty) = \int_5^\infty f(x)\,dx = \lim_{K\to\infty} 2\int_5^K x^{-3}\,dx$$

$$= 0 + 2\lim_{K\to\infty}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_5^K = 2\lim_{K\to\infty}\left[\left(\frac{1}{-2\cdot K^2} - \frac{1}{-2\cdot 5^2}\right)\right]$$

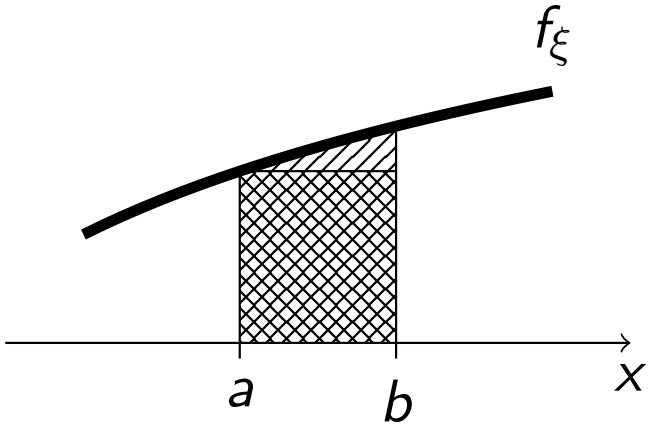
$$= 2\left(-\frac{1}{2}\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K^2} + \frac{1}{50}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}0 + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{25}$$



Tekintsünk egy ξ folytonos valószínűségi változót, és legyen f_ξ a sűrűségfüggvénye. A korábbiakban láttuk, hogy az f_ξ függvény értéke egy a pontban nem mutatja meg azt, hogy a változó mekkora valószínűséggel lesz egyenlő a-val. Lehet valamilyen jelentést mégis tulajdonítani a függvény értékeinek?

Tegyük fel, hogy az f_ξ függvény folytonos egy $[a, b]$ intervallumon. Ha ez az intervallum kellően rövid, akkor a függvény nem sokat változik ezen az intervallumon, majdhogynem konstans. Ekkor viszont

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b f_\xi(x)\,dx \approx (b-a) f_\xi(a)\,.$$



Ez a szemléletes jelentése annak, hogy mennyi az f_ξ függvény értéke egy adott a pontban.

A diszkrét esethez hasonlóan a folytonos valószínűségi változókra is definiálni kívánjuk a várható érték és a szórás fogalmát. A várható értékre természetesen kell egy új formula, hiszen a folytonos változókat a sűrűségfüggvényükkel írjuk le. Ezzel szemben a variancia és a szórás pontosan úgy lesz definiálva, mint a diszkrét esetben.

Folytonos valószínűségi változók várható értéke és szórása

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a változó **várható értéke**

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\, dx\,,$$

amennyiben ez az integrál létezik. A változó **varianciája** illetve **szórása**:

$$\mathrm{Var}(\xi) = E\Big(\big|\xi - E(\xi)\big|^2\Big)\,, \qquad D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}\,.$$

A várható érték azt mutatja meg, hogy mennyi a ξ változó átlagos értéke, míg a szórás a várható értéktől vett átlagos eltérés.

Folytonos valószínűségi változók transzformáltjai

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, és tekintsünk egy $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor a $h(\xi)$ transzformált változó várható értéke

$$E\big(h(\xi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_\xi(x)\, dx\,,$$

amennyiben ez az integrál létezik. Speciálisan a változó **második momentuma**:

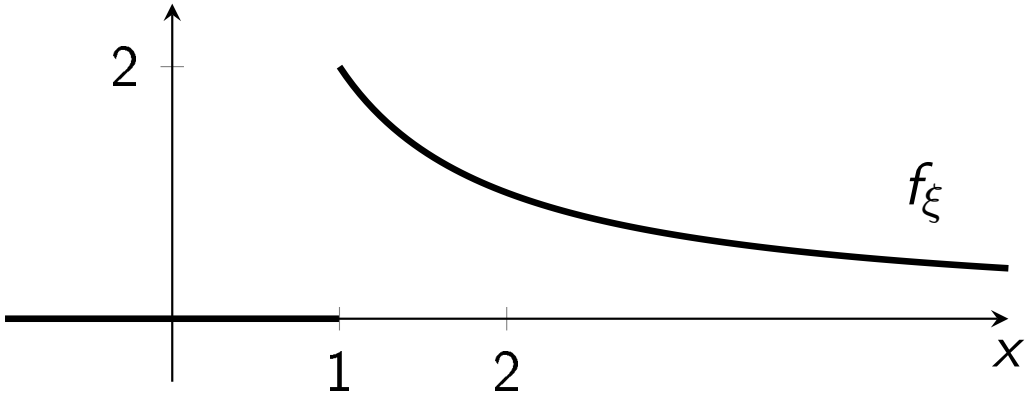
$$E\big(\xi^2\big) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\, dx\,.$$

Ennek segítségével a variancia az alábbi formulával is meghatározható:

$$\mathrm{Var}(\xi) = E\big(\xi^2\big) - \big(E(\xi)\big)^2\,.$$

Feladat. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek az alábbi f_ξ a sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg a változó várható értékét és szórását.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leqslant 1\,, \\ 2/x^3\,, & x > 1\,. \end{cases}$$



A várható érték, tehát a változó „átlagos értéke”:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\,dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + 2 \lim_{K\to\infty} \int_{1}^{K} x^{-2}\,dx = 0 + 2 \lim_{K\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty}$$

$$= 2 \lim_{K\to\infty} \left[\frac{1}{-x}\right]_1^{K} = 2 \lim_{K\to\infty} \left(\frac{1}{-K} - \frac{1}{-1}\right) = 2\Big(0 - (-1)\Big) = 2\,.$$

Azt utolsó sorban azt használtuk fel, hogy $\lim_{K\to\infty} 1/K = 0$.
A grafikont lásd két oldallal később.

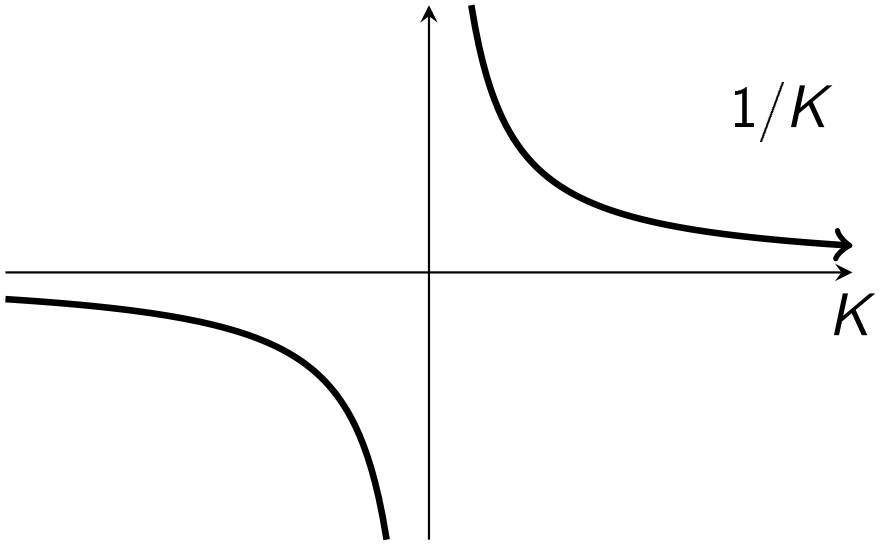
Hasonló módon a második momentum:

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{2}{x^3}\,dx$$
$$= 0 + 2 \lim_{K\to\infty} \int_1^K x^{-1}\,dx = 2 \lim_{K\to\infty} \big[\ln x\big]_1^K$$
$$= 2 \lim_{K\to\infty} \big(\ln K - \ln 1\big) = 2\big(\infty - 0\big) = \infty\,,$$

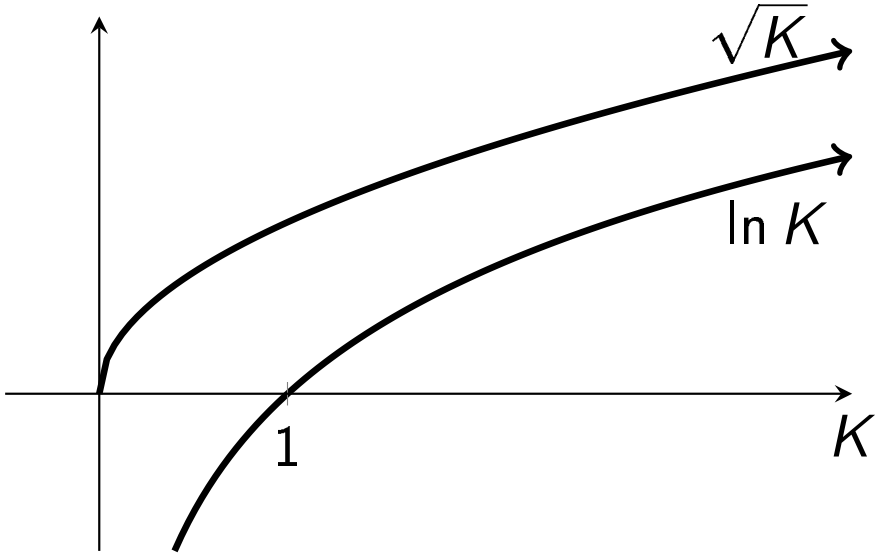
hiszen $\lim_{K\to\infty} \ln K = \infty$. Ekkor a variancia és a szórás:

$$\mathrm{Var}(\xi) = E\big(\xi^2\big) - \big(E(\xi)\big)^2 = \infty - 2^2 = \infty\,,$$

$$D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} = \sqrt{\infty} = \infty\,.$$



$$\lim_{K\to\infty} 1/K = 0$$



$$\lim_{K\to\infty} \ln K = \infty$$

$$\sqrt{\infty} = \lim_{K\to\infty} \sqrt{K} = \infty$$

Értelmezzük, hogy mit is kaptunk:

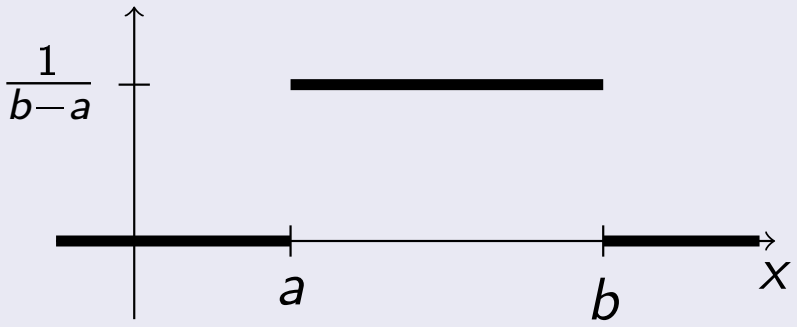
- A ξ várható értéke 2, ez meglepő eredmény lehet. Most a változó tetszőleges nagy számot felvehet értékül, nincsen felső korlát az értékeire. Azt várhatnánk, hogy ekkor az átlagos érték is nagy lesz. Ebben az esetben viszont a nagy értékek ritkán fordulnak elő, ezért az átlagot „lehúzzák” a sokkal gyakoribb 1-hez közeli értékek.
- A változónak a várható értéktől való átlagos eltérése végtelen. Ez nem egy hibás eredmény, a szórás lehet végtelen. Ezt most éppen az okozza, hogy az értékkészlet nem véges, és amikor azt vizsgáljuk, hogy a változó mennyivel térhet el a várható értéktől, akkor tetszőlegesen nagy különbségek megjelenhetnek. Ezen különbségek átlagos értéke pedig végtelen lesz.
- Abból, hogy egy változó értékkészlete nem korlátos, (tehát tetszőleges nagy számokat felvehet értékül,) még nem következik, hogy a változó várható értéke vagy szórása mindenképpen végtelen. Az ilyen esetekben a várható érték és a szórás lehet véges vagy végtelen is, a pontos eredményhez ki kell számolni az integrálokat.

A következőkben egy nevezetes folytonos eloszlással fogunk megismerkedni.

Az egyenletes eloszlás

Azt mondjuk, hogy egy ξ változó **egyenletes eloszlást** követ az $[a, b]$ intervallumon, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/(b-a)\,, & a \leqslant x \leqslant b\,, \\ 0\,, & \text{különben.} \end{cases}$$



Az egyenletes eloszlás várható értéke illetve szórása:

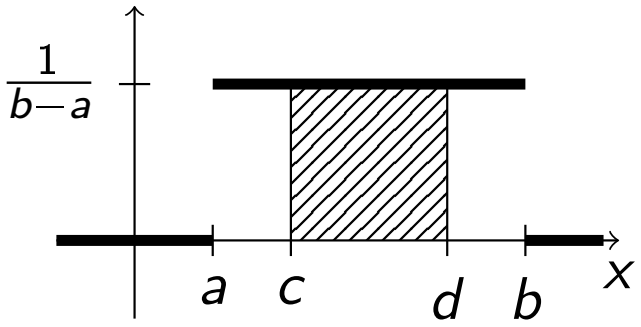
$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}\,, \qquad D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}\,.$$

Megjegyzések:

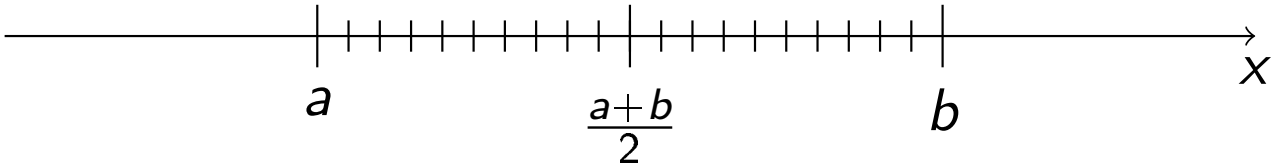
- Az f_ξ függvény valóban sűrűségfüggvény, hiszen a görbe alatti tartomány egy téglalap, aminek a területe 1.
- Az egyenletes eloszlás értékkészlete $R_\xi = [a, b]$.

- Ha egy ξ változó egyenletes eloszlású az $[a,b]$ intervallumon, akkor teljesíti az egyenletességi hipotézist. Tekintsünk ugyanis egy olyan $[c,d]$ intervallumot, melynek végpontjaira $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$. Ekkor

$$P(c \leqslant \xi \leqslant d) = \int_c^d f_\xi(x)\,dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx$$
$$= (d-c)\frac{1}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} = \frac{\text{kedvező hossz}}{\text{összes hossz}}$$



- Vegyük észre, hogy az egyenletes eloszlás várható értéke pontosan az $[a,b]$ intervallum felezéspontja, és ennek egyszerű oka van. Mivel teljesül az egyenletességi hipotézist, a változó sok értékét mefigyelve az értékek mindenhol azonos sűrűséggel jelennek meg. Ez azt okozza, hogy az átlagos érték pontosan az intervallum felezéspontja.

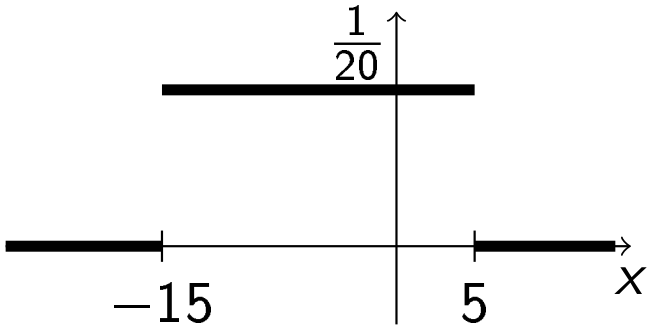


Feladat. Magyarországon januárban a napi középhőmérséklet egy olyan valószínűségi változó, ami közelítőleg egyenletes eloszlást követ -15 °C és 5 °C között. Amennyiben a napi középhőmérséklet x °C, akkor hazánkban azon a napon összesen $55 - 3x$ millió köbméter gázt használnak el fűtésre.

- Jelölje ξ a napi középhőmérsékletet egy véletlenszerűen választott januári napon. Adjuk meg a változó sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását.

  Mivel a feladat szövege szerint ξ egyenletes eloszlású a $[-15, 5]$ intervallumon, azt kapjuk, hogy

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/20\,, & -15 \leqslant x \leqslant 5\,, \\ 0\,, & \text{különben.} \end{cases}$$



Ekkor a várható érték és a szórás:

$$E(\xi) = \frac{-15+5}{2} = 5\,, \qquad D(\xi) = \frac{5-(-15)}{\sqrt{12}} = \frac{20}{\sqrt{12}} \approx 5{,}77\,.$$

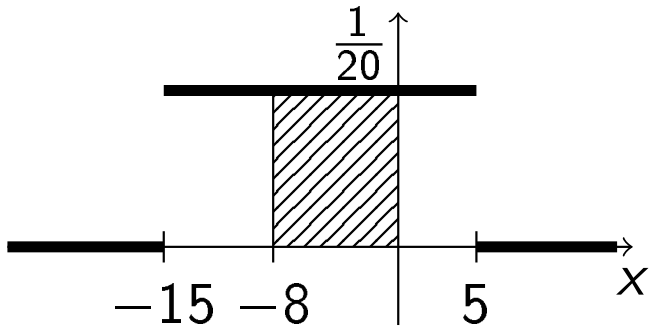
- Mennyi annak az esélye, hogy egy véletlenszerűen választott napon a napi középhőmérséklet -8 °C és 0 °C közé esik?

  Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényének integrálásával:

$$P(-8 \leqslant \xi \leqslant 0) = \int_{-8}^{0} f_\xi(x)\,dx = \int_{-8}^{0} \frac{1}{20}\,dx = \frac{1}{20}\int_{-8}^{0} x^0\,dx$$

$$= \frac{1}{20}\left[\frac{x^1}{1}\right]_{-8}^{0} = \frac{1}{20}\left(\frac{0^1}{1} - \frac{(-8)^1}{1}\right) = \frac{1}{20}\cdot 8 = 0{,}4$$

Ez az eredmény a kedvező/összes formulából is megkapható, hiszen most a ξ változó teljesíti az egyenletességi hipotézist, tehát a valószínűség:



$$P(-8 \leqslant \xi \leqslant 0) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{8}{20}$$

- Jelölje η a gázfogyasztás millió köbméterben kifejezve egy véletlenszerűen választott napon. Adjuk meg az η változót a ξ függvényeként, majd adjuk meg az értékkészletét. Mennyi annak az esélye, hogy a gázfogyasztás 85 millió m^3 fölé emelkedik?

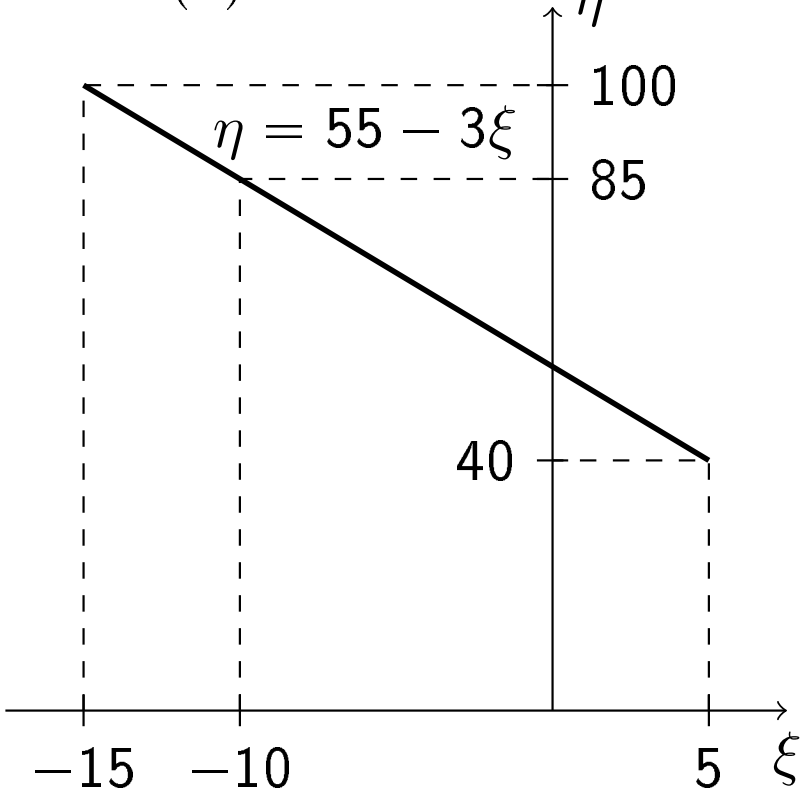
A feladat szövege szerint $\eta = h(\xi)$, ahol $h(x) = 55 - 3x$.

Az ábra alapján az η változó legkisebb és legnagyobb értéke:

$$h(5) = 40, \qquad h(-15) = 100.$$

Emiatt: $R_\eta = [40, 100]$.

A $h(x) \geqslant 85$ egyenletlőtlenség megoldásával azt kapjuk, hogy a gázfogyasztás pontosan akkor nagyobb, mint 85, ha a napi középhőmérséklet -10 °C alá megy. Tehát:



$$P(\eta \geqslant 85) = P(\xi \leqslant -10) = P(-15 \leqslant \xi \leqslant -10) = 5/20 = 25\%$$

- Januárban mekkora a napi átlagos gázfogyasztás?

A feladat a gázfogyasztás, tehát az η változó várható értékére kíváncsi. Sajnos az η változó sűrűségfüggvényét nem ismerjük. Ennek meghatározása nem lehetetlen, de további matematikai eszközöket igényelne. Ehelyett ezt a várható értékét az $\eta = h(\xi)$ összefüggés alkalmazásával számoljuk ki.

$$E(\eta) = E\big(h(\xi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_\xi(x)\, dx = \int_{-15}^{5} (55 - 3x) \frac{1}{20}\, dx$$

$$= \frac{55}{20} \int_{-15}^{5} x^0\, dx - \frac{3}{20} \int_{-15}^{5} x^1\, dx = \frac{55}{20} \left[\frac{x^1}{1} \right]_{-15}^{5} - \frac{3}{20} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-15}^{5}$$

$$= \frac{55}{20} \left(\frac{5^1}{1} - \frac{(-15)^1}{1} \right) - \frac{3}{20} \left(\frac{5^2}{2} - \frac{(-15)^2}{2} \right)$$

$$= \frac{55}{20} \cdot 20 - \frac{3}{20} \cdot (-100) = 55 + 15 = 70$$

Tehát az átlagos napi gázfogyasztás 70 millió köbméter.

Az eloszlásfüggvény és az exponenciális eloszlás

Amikor egy valószínűségi változót vizsgálunk, akkor általában az alábbi kérdésekre keressük a választ:

- Mekkora valószínűséggel esik a változó egy adott intervallumba?
- Mekkora a változó átlagos értéke, tehát mi a várható érték?
- Milyen mértékű a változó értékeinek szóródása, tehát mennyi a szórás?

A fenti kérdésekre diszkrét változók esetén az eloszlás, folytonos változók esetén a sűrűségfüggvény segítségével tudtunk válaszolni. Ugyan ilyen példával nem fogunk majd találkozni ezen kurzus keretei között, de léteznek olyan valószínűségi változók is, melyek se nem diszkrétek, se nem folytonosak. Emiatt szükségünk lenne egy olyan eszközre, mely

- minden fontos információt tartalmaz a kapcsolatos valószínűségi változóval kapcsolatban;
- de nem csak a diszkrét vagy a folytonos esetben alkalmazható, hanem tetszőleges valószínűségi változó esetén is.

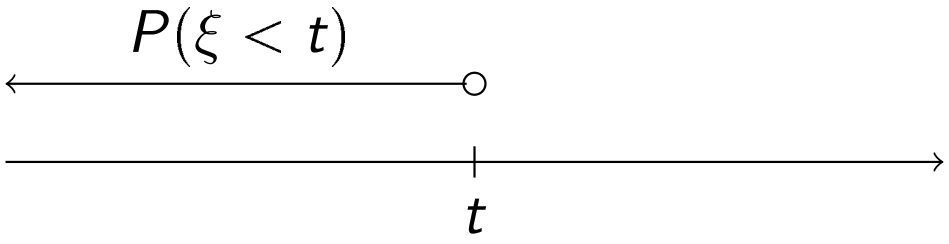
Meglepő módon ilyen univerzális eszköz létezik.

Eloszlásfüggvény

Legyen ξ egy tetszőleges valószínűségi változó. A ξ eloszlásfüggvénye az az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény, melyet az alábbi formulával definiálunk:

$$F_\xi(t) = P(\xi < t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tetszőleges t valós szám esetén az $F_\xi(t)$ érték azt mutatja meg, hogy a ξ változó mekkora valószínűséggel esik a a számegyenesen a t-től balra, tehát a $(-\infty, t)$ intervallumba:

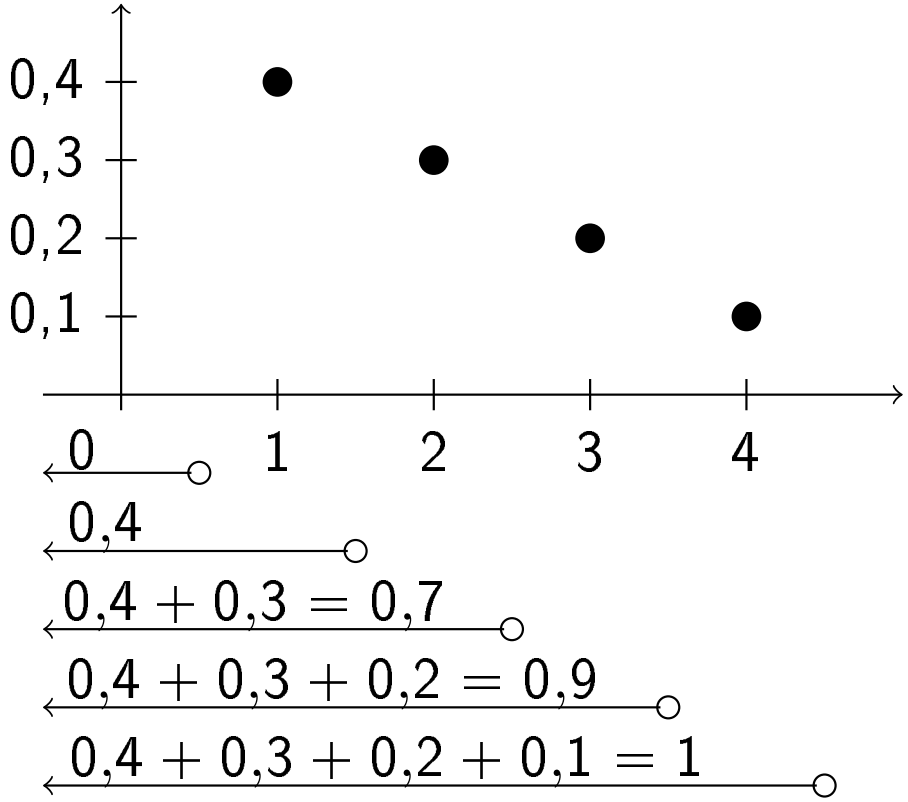


Az eloszlásfüggvény tetszőleges valószínűségi változó esetén létezik, nem csak a diszkrét vagy a folytonos esetben. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy mik a fontosabb tulajdonságai, továbbá milyen kapcsolatban áll az eloszlással illetve a sűrűségfüggvénnyel.

Feladat. Néhány hete találkoztunk egy olyan ξ diszkrét valószínűségi változóval, melynek az értékkészlete $R_\xi = \{1, 2, 3, 4\}$, és az eloszlása

$$P(\xi = 1) = 0{,}4, \quad P(\xi = 2) = 0{,}3, \quad P(\xi = 3) = 0{,}2, \quad P(\xi = 4) = 0{,}1.$$

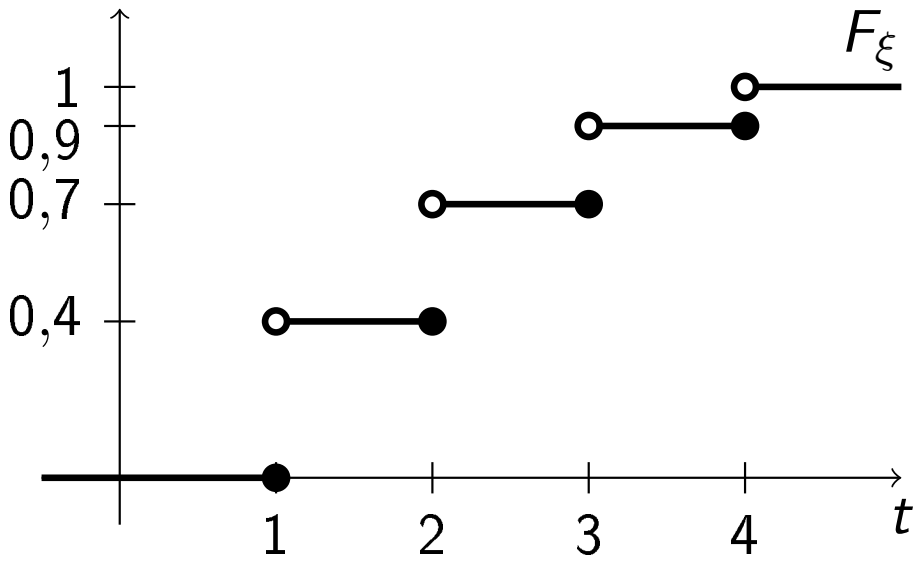
Határozzuk meg a változó eloszlásfüggvényét.



Az $F_\xi(t)$ érték azt mutatja meg, hogy a ξ változó mekkora valószínűséggel esik a t-től balra:

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leqslant 1\,, \\ 0{,}4\,, & 1 < t \leqslant 2\,, \\ 0{,}7\,, & 2 < t \leqslant 3\,, \\ 0{,}9\,, & 3 < t \leqslant 4\,, \\ 1\,, & 4 < t\,. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény grafikonja:



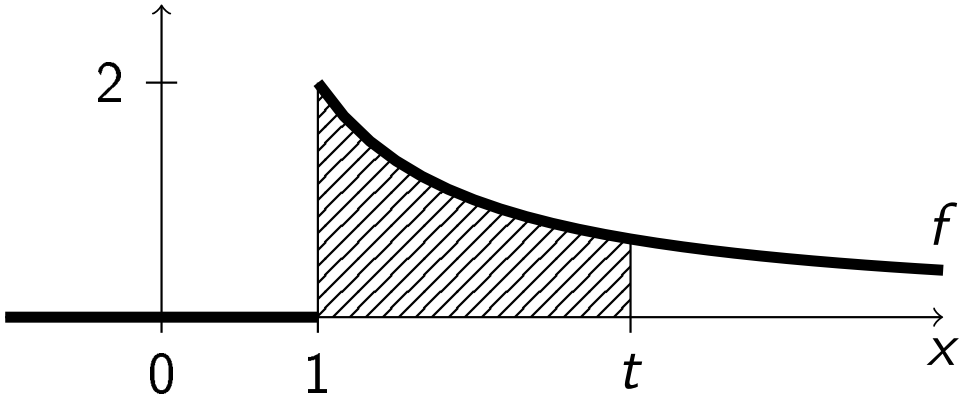
Diszkrét valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye egy olyan lépcsős függvény, mely pontosan a változó lehetséges értékeiben ugrik, és egy $t \in R_\xi$ helyen az ugrás nagysága $P(\xi = t)$.

A fenti tétel segítségével egy diszkrét valószínűségi változó esetében az eloszlás és az eloszlásfüggvény könnyen átírható egymásba.

Feladat. Egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 1\,, \\ 2/x^3\,, & x \geqslant 1\,. \end{cases}$$



Határozzuk meg a változó eloszlásfüggvényét.

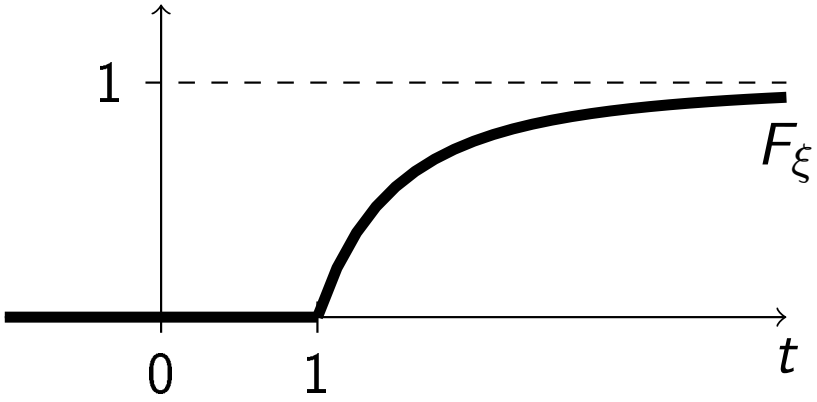
- Ha $t \leqslant 1$, akkor $F_\xi(t) = P(-\infty < \xi < t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(x)\,dx = 0$.
- Ha $t > 1$, akkor

$$F_\xi(t) = P(-\infty < \xi < t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + 2\int_{1}^{t} x^{-3}\,dx$$

$$= 0 + 2\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^t = 2\left(\frac{1}{-2\cdot t^2} - \frac{1}{-2\cdot 1^2}\right) = 1 - \frac{1}{t^2}\,.$$

Tehát a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leqslant 1\,, \\ 1 - 1/t^2\,, & t > 1\,. \end{cases}$$



Az eloszlásfüggvény deriválásával visszakapjuk a sűrűségfüggvényt:

- Ha $t \leqslant 1$, akkor $F'_\xi(t) = (0)' = 0 = f_\xi(t)$.
- Ha $t > 1$, akkor $F'_\xi(t) = (1 - t^{-2})' = 0 - (-2)t^{-3} = 2/t^3 = f_\xi(t)$.

Folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

Egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye mindehol folytonos.
Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény kapcsolata:

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(x)\,dx \qquad \text{és} \qquad f_\xi(t) = F'_\xi(t)$$

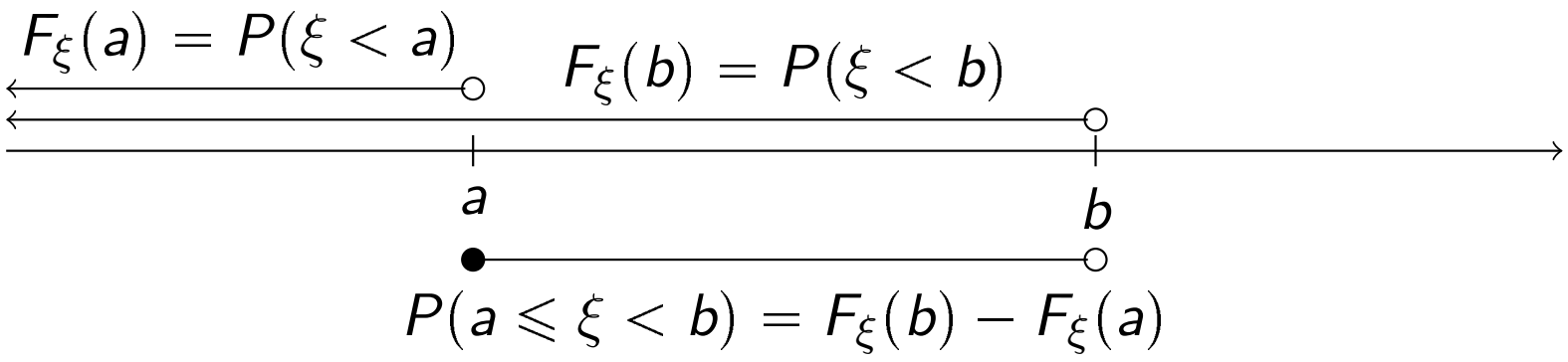
Kérdés: De végül is mire jó az eloszlásfüggvény?

Valószínűségek számítása az eloszlásfüggvény segítségével

Legyen ξ valószínűségi változó, és legyen F_ξ az eloszlásfüggvénye.

- Tetszőleges $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ számok esetén
$$P\big(a \leqslant \xi < b\big) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$
- Tetszőleges a valós szám esetén az F_ξ függvény pontosan akkorát ugrik az a pontban, mint amekkora a $P(\xi = a)$ valószínűség.

Az első állítás könnyen bizonyítható, a másodikat higgyük el.



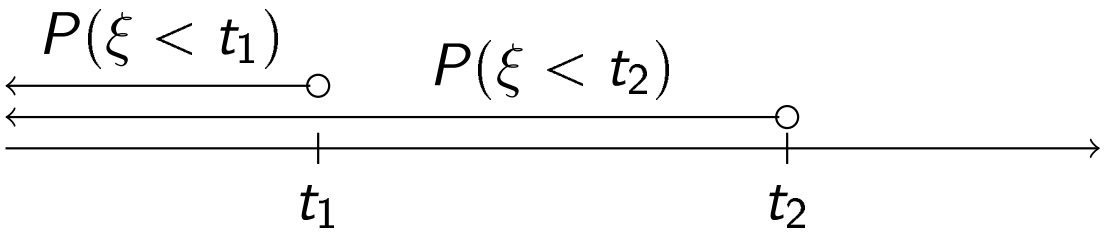
Az eloszlásfüggvény általános tulajdonságai

Egy $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény pontosan akkor eloszlásfüggvény, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- F monoton növekvő;
- $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ és $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$;
- F mindenhol balról folytonos, (tehát a függvénygrafikonon „felülre rakjuk az üres karikát.”)

Tegyük fel, hogy F valóban egy ξ változó eloszlásfüggvénye.

- Ha $t_1 < t_2$, akkor $F(t_1) = P(\xi < t_1) \leqslant P(\xi < t_2) = F(t_2)$.

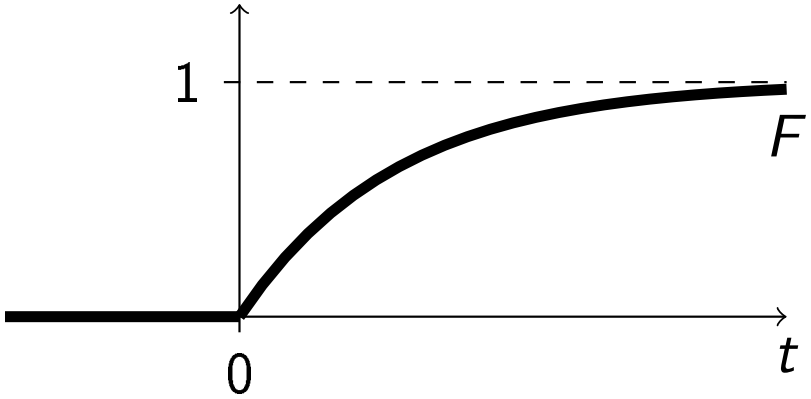


- Az eloszlásfüggvény értéke a két végtelenben:

$$\lim_{x\to-\infty} F(t) = F(-\infty) = P(\xi < -\infty) = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} F(t) = F(+\infty) = P(\xi < +\infty) = 1.$$

Feladat. Legyen a λ tetszőleges pozitív szám. Eloszlásfüggvény-e az alábbi függvény? Ha igen, akkor határozzuk meg a sűrűségfüggvényét.

$$F(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leqslant 0\,, \\ 1 - e^{-\lambda t}\,, & t > 0\,. \end{cases}$$



Az F függvény eloszlásfüggvény, ugyanis monoton növekvő és mindenhol folytonos, továbbá a határértékei a végtelenben $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

A kapcsolatos sűrűségfüggvény deriválással kapható meg:

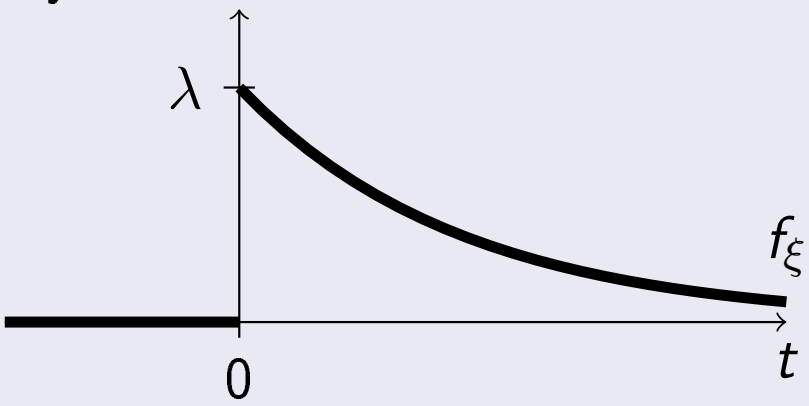
- Ha $t \leqslant 0$, akkor $f(t) = (0)' = 0$.
- Ha $t > 0$, akkor az összetett függvények deriválási szabályával

$$f(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)' = (1)' - \left(e^{-\lambda t}\right)' = 0 - (-\lambda)e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}\,.$$

Az exponenciális eloszlás

Egy ξ folytonos valószínűségi változó **exponenciális eloszlást** követ $\lambda > 0$ paraméterrel, a sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leqslant 0\,, \\ \lambda e^{-\lambda t}\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

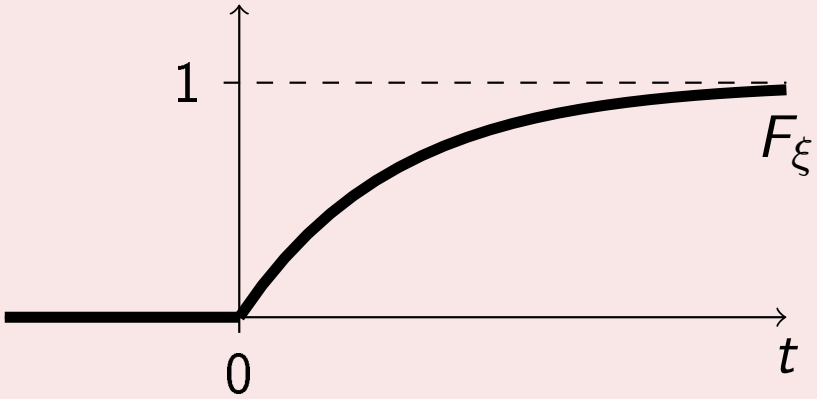


Az exponenciális eloszlás tulajdonságai

Az exponenciális eloszlás várható értéke és szórása: $E(\xi) = D(\xi) = 1/\lambda$.

Az eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leqslant 0\,, \\ 1 - e^{-\lambda t}\,, & t > 0\,. \end{cases}$$



Feladat. Egy adott típusú izzó élettartarama exponenciális eloszlást követ ismeretlen λ paraméterrel. A tapasztalatok szerint az izzók 10% megy tönkre 500 óra használat során. Mekkora az izzók átlagos élettratama? Az izzók mekkora hányada éri el a 10 ezer órás élettartamot?

Legyen ξ egy izzó 1000 órában számolt élettartama. Ekkor

$$0{,}1 = P(\xi < 0{,}5) = F_\xi(0{,}5) = 1 - e^{-\lambda \cdot 0{,}5}$$

Az egyenlet rendezésével azt kapjuk, hogy

$$e^{-0{,}5\lambda} = 0{,}9\,, \qquad \text{vagyis} \qquad \lambda = -\frac{\ln 0{,}9}{0{,}5} = 0{,}21\,.$$

Tehát az izzók átlagos élettartama: $E(\xi) = 1/\lambda = 1/0{,}21 = 4{,}76$ ezer óra. Annak az esélye, hogy egy izzó élettartama eléri az 10 ezer órát:

$$\begin{aligned} P(\xi \geqslant 10) &= 1 - P(\xi < 10) = 1 - F_\xi(10) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 10}) = e^{-0{,}21 \cdot 10} = 0{,}12\,. \end{aligned}$$

Feladat. Tekintsük csak azon izzókat, melyek teljes élettartma eléri a 10 ezer órát. Ezek mekkora hányada fog még legalább 500 órán át működni?

A feladat a következő feltételes valószínűségre kíváncsi:

$$P\big(\xi \geqslant 10{,}5 \mid \xi \geqslant 10\big) = \frac{P(\xi \geqslant 10{,}5 \text{ és } \xi \geqslant 10)}{P(\xi \geqslant 10)} = \frac{P(\xi \geqslant 10{,}5)}{P(\xi \geqslant 10)}$$

$$= \frac{1 - F_\xi(10{,}5)}{1 - F_\xi(10)} = \frac{1 - \big(1 - e^{-\lambda \cdot 10{,}5}\big)}{1 - \big(1 - e^{-\lambda \cdot 10}\big)} = \frac{e^{-0{,}21 \cdot 10{,}5}}{e^{-0{,}21 \cdot 10}} = 0{,}9\,.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a 10 ezer órás üzemidőt megélt, tehát öregnek számító izzók 90% fog még legalább 500 órán át működni. Vegyük észre, hogy a gyárból kiderült új izzók esetében is 90% azoknak az aránya, melyek elérik az 500 órás élettartamot. Ez azt jelenti, hogy az öreg izzóknak nem rosszabbak az esélyeik, mint egy vadonat új darabnak: mindkét esetben 90% az esély arra, hogy az izzó működni fog még 500 órán át. Ezt úgy szoktuk mondani, hogy az izzó élettartama egy **örökifjú** változó.

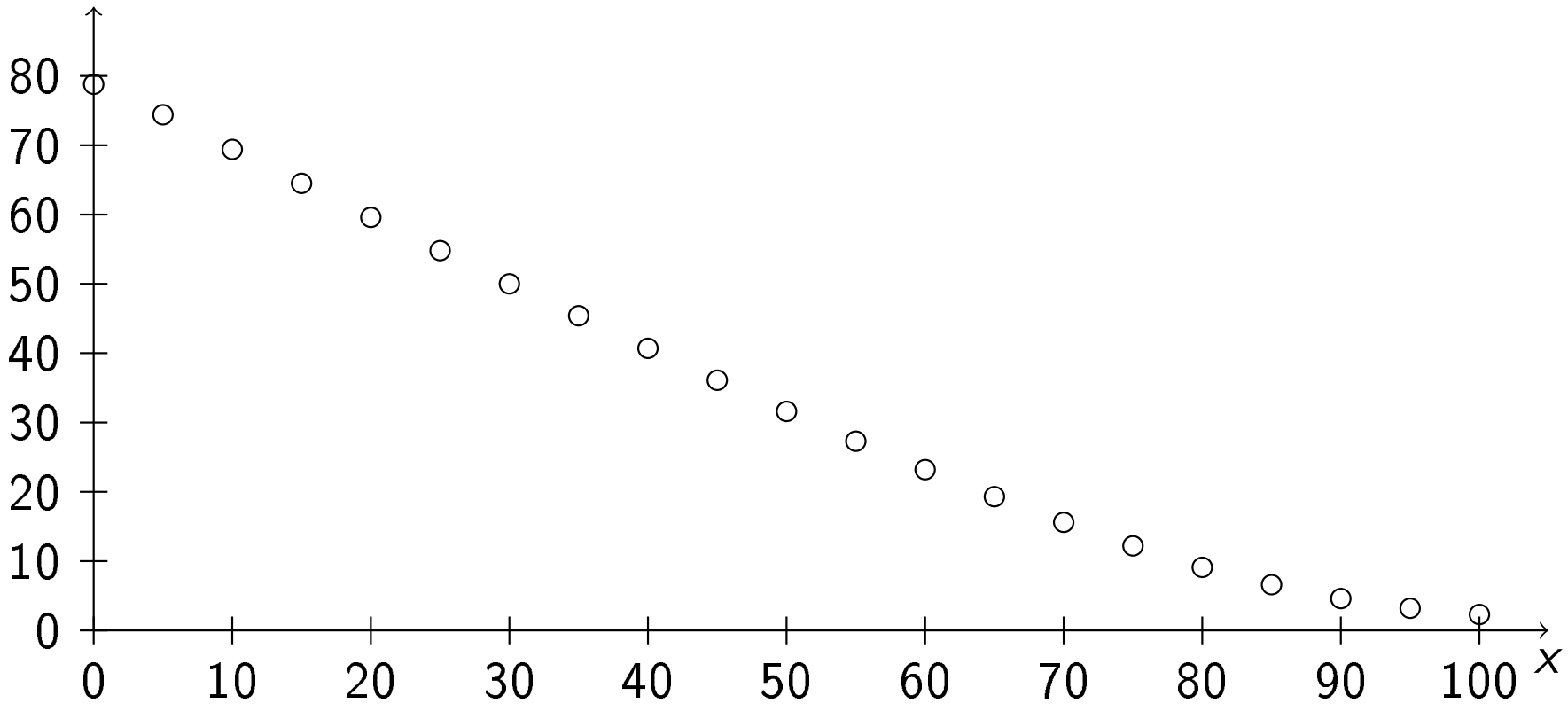
Örökifjú tulajdonság

Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó tetszőleges $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor bármely $x, y > 0$ valós számok esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$P\big(\xi \geqslant x + y \mid \xi \geqslant x\big) = P(\xi \geqslant y)$$

A tétel bizonyítása az előző oldalon bemutatott gondolatmenettel megy, csak annyi a különbség, hogy paraméteresen kell számolni. Az örökifjú tulajdonság azt fejezi ki, hogy ha nézzük annak a valószínűségét, hogy egy x kort megélt egyed megél még y kort, akkor ez a valószínűség azonos annak az esélyével, hogy egy új egyed eléri az y élettartamot. Tehát a fiatal és az öreg egyednek azonos esélye van még y ideig élni.

Biztosításmatematikában és a műszaki tudományokban fontos kérdés a **hátralévő átlagos élettartam** fogalma. Ez azt fejezi ki, hogy a mondjuk x kort megélt egyedek átlagosan mennyi ideig fognak élni még. Az alábbi táblázat ötévenkénti lépésközzel adja meg a hátralévő várható élettartamot az Egyesült Államokban. (2013-as adatok.)



A biológiai szervezetek és a mechanikus berendezések esetében a várható hátralévő élettartam jellemzően(!) egy csökkenő függvény, tehát az idősebb egyedeknek rosszabb életesélyeik vannak, mint a fiataloknak. Ennek az oka a biológiai öregedés és a mechanikus kopás. Ezzel szemben egyszerűbb elektronikai berendezéseknél a kopás nem jelenik meg, fizikai állapotát tekintve egy régi, de működőképen izzó vagy LED (közel) olyan, mint egy teljesen új. Ez egyben azt is jelenti, hogy ilyen esetekben a hátralévő várható élettartam közel konstans. Ez az oka annak, hogy az ilyen berendezések élettartamát exponenciális eloszlással szokták modellezni.

Az öregedés teljes hiánya a természetben csak egy helyen figyelhető meg, az elemi részecskék világában. Az, hogy egy rádioaktív atom nem bomlott le x év alatt, nem is csökkenti le, és nem is növeli meg a lebomlásáig hátralévő időt. Az elemi részecskék örökifjúak, és emiatt a teljes élettartamuk pontosan exponenciális eloszlást követ.

Hasonló gondolatmenettel indokolható, miért exponenciális eloszlással modellezik például azt is, hogy mennyi idő telik el két közlekedési baleset között, milyen időközönként érkeznek az emberek egy pénzfelvevő automatához, vagy milyen gyakran láthatunk hullócsillagot az égen.

A normális eloszlás és tulajdonságai

A normális eloszlás

Legyen μ valós szám, σ pedig pozitív valós szám. Azt mondjuk, hogy az η valószínűségi változó **normális eloszlást** avagy **Gauss-eloszlást** követ μ és σ paraméterrel, ha a sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Speciálisan, a $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterértékekhez tartozó normális eloszlás **standard normális eloszlásnak** nevezzük, amire ezen a kurzuson az $\eta_{0,1}$ jelölést alkalmazzuk.

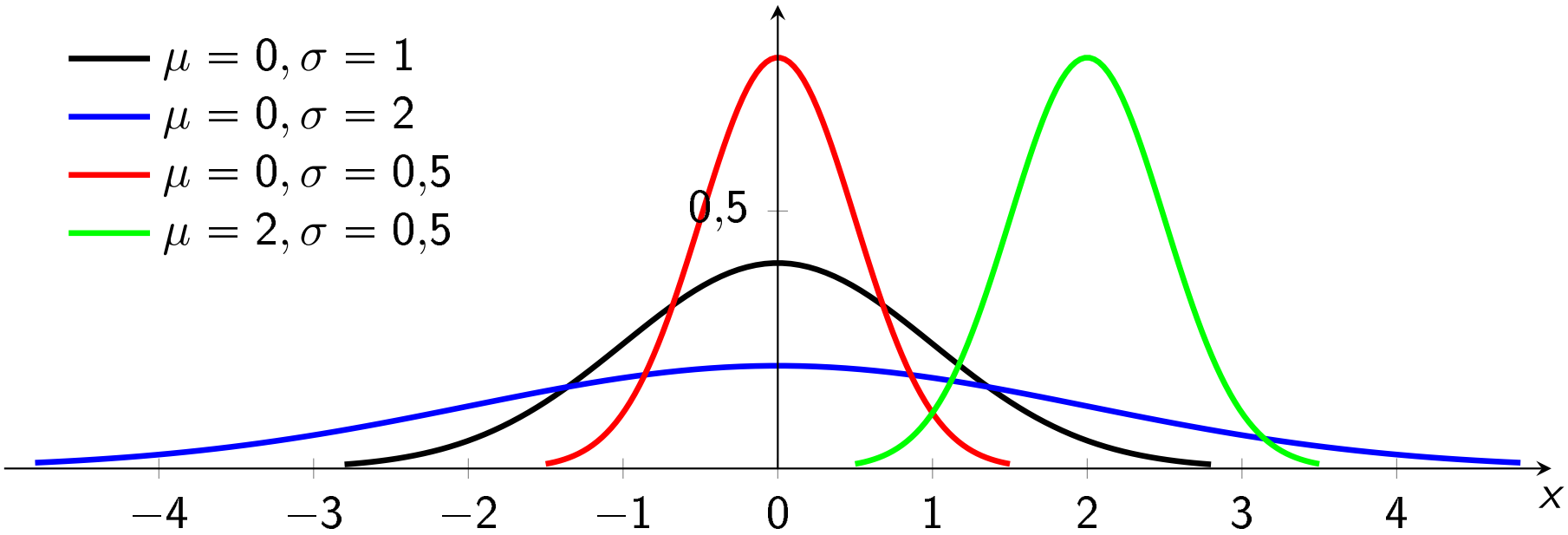
A standard normális eloszlás sűrűségfüggvényére általában nem az f, hanem a φ jelölést használjuk:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A normális eloszlás várható értéke és szórása

Az f_η sűrűségfüggvény mindenhol pozitív, ezért a normális eloszlás értékkészlete $R_\eta = \mathbb{R}$. A μ illetve σ paraméter rendre az eloszlás várható értéke illetve szórása, tehát $E(\eta) = \mu$ és $D(\eta) = \sigma$.

A normális eloszlás sűrűségfüggvényét **Gauss-görbének** vagy másnéven **haranggörbének** nevezzük. A görbe annál karcsúbb, minél kisebb a szórás, hiszen kis szórás esetén a változó nagy valószínűséggel μ várható érték közelében vesz fel értékeket. Néhány példa a sűrűségfüggvényre:



Ha η normális eloszlású μ és σ paraméterrel, akkor tetszőleges a és b valós számok esetén

$$P\big(a \leqslant \eta \leqslant b\big) = \int_a^b f_\eta(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx\,.$$

Meglepő módon a fenti integrál nem számíthatóak ki olyan módon, ahogyan azt a hallgatóság az analízis kurzuson tanulta. Ennek az az oka, hogy az f_η sűrűségfüggvénynek nem létezik véges zárt alakban felírható primitív függvénye, és ezért nem alkalmazhatjuk a Newton–Leibniz-formulát. De ekkor hogyan számolhatunk különféle valószínűségeket a normális eloszlásra? Erre a kérdésre a következő tétellel tudunk válaszolni:

Standardizálás

Legyen η normális eloszlású valószínűségi változó $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterrel. Ekkor az

$$\frac{\eta - \mu}{\sigma}$$

változó standard normális eloszlású.

A továbbiakban jelölje Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét:

$$\Phi(t) = P(\eta_{0,1} < t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\, dx\,.$$

Ekkor tetszőleges $A < B$ valós számok esetén

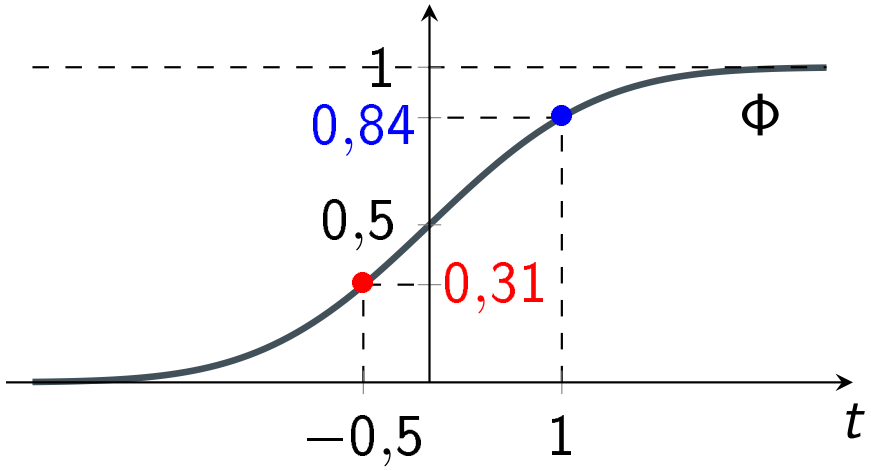
$$P\big(A \leqslant \eta_{0,1} \leqslant B\big) = P\big(A \leqslant \eta_{0,1} < B\big) = \Phi(B) - \Phi(A)\,.$$

Térjünk most vissza az előző oldal kérdésére: Ha η normális eloszlású változó tetszőleges μ és σ paraméterekkel, akkor az η változó standardizálásával a következőt kapjuk:

$$P\big(a \leqslant \eta \leqslant b\big) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{\eta-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

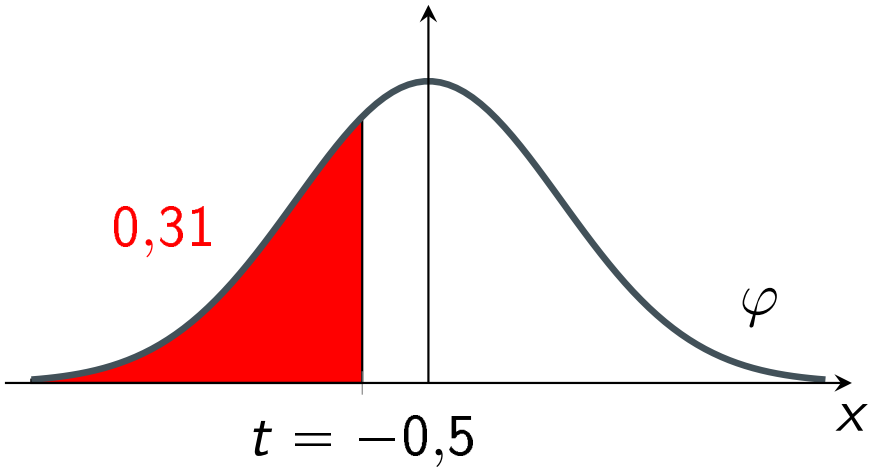
Tehát ha ki tudjuk számolni a Φ függvény értékeit, akkor a kérdéses valószínűség meghatározható. Sajnos a Φ függvényre nem létezik könnyen számolható matematikai formula. Ehelyett a függvény értékeit egy táblázatból fügjuk majd kinézni.

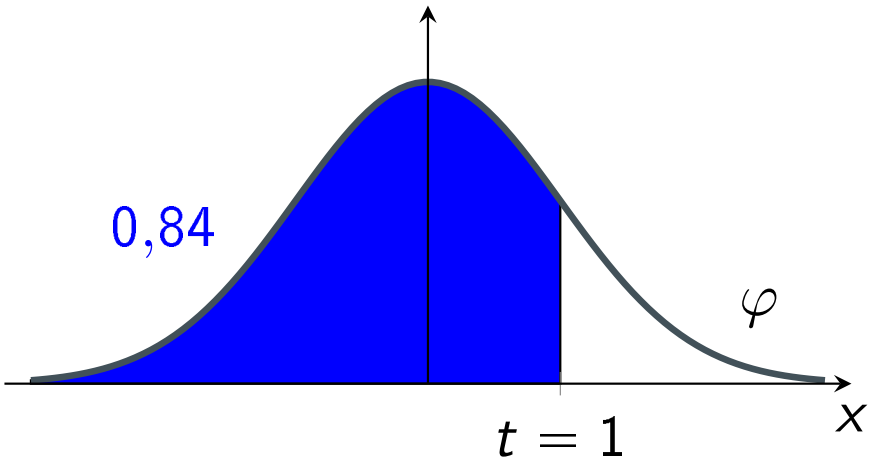
A Φ eloszlásfüggvény értékei az alábbi módón kaphatóak meg a φ sűrűségfüggvényből:



$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\, dx\,,$$

$$\Phi(-0{,}5) = 0{,}31\,,\ \Phi(1) = 0{,}84$$





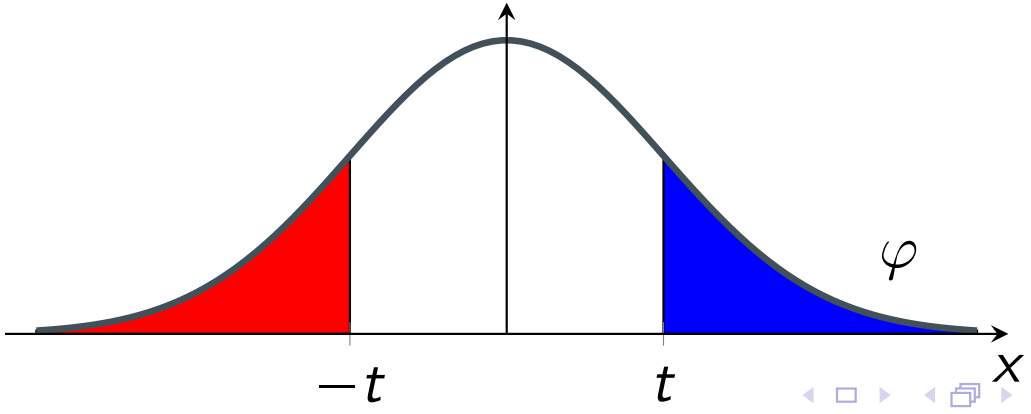
A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye

A Φ eloszlásfüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Monoton nő, $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$, (hiszen eloszlásfüggvény.)
2. Folytonos, (hiszen egy folytonos változó eloszlásfüggvénye.)
3. Az eloszlásfüggvény értéke a 0 pontban $\Phi(0) = 0{,}5$, és ezáltal $\Phi(t) < 0{,}5$, ha $t < 0$, és $\Phi(t) > 0{,}5$, ha $t > 0$.
4. Tetszőleges t érték esetén $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

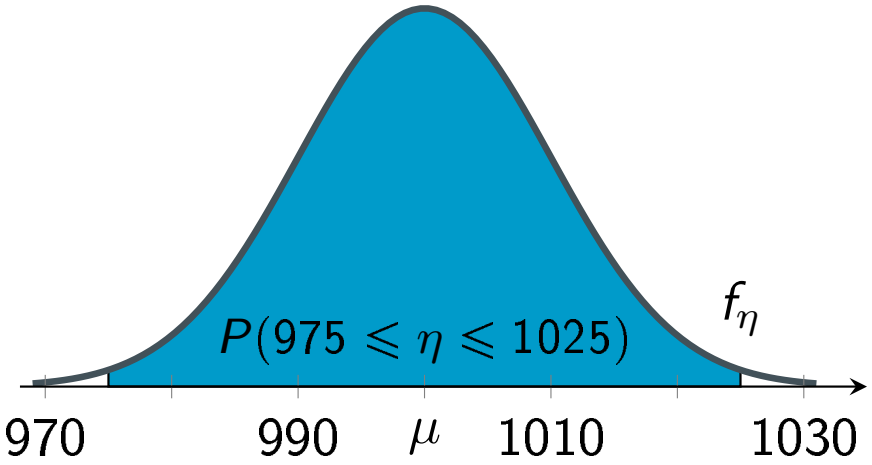
Az utolsó állításnak a következő észrevétel a bizonyítása:

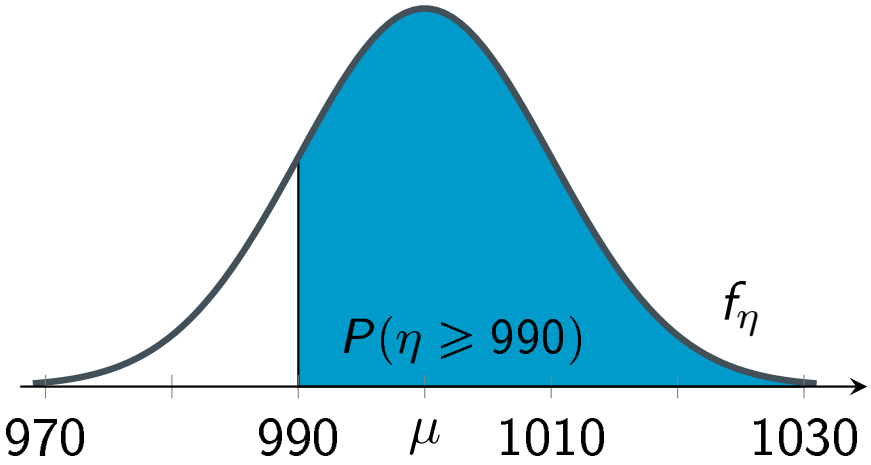
$$\Phi(-t) = \int_{-\infty}^{-t} \varphi(x)\,dx = \int_{t}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = P(\eta_{0,1} \geqslant t) = 1 - \Phi(t)\,.$$



Feladat. Egy tejgyárban az 1 literes dobozos tej csomagolását automata töltőberendezés végzi, és a dobozokba töltött mennyiség egy normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke a névleges tartalom és szórása $\sigma = 10$ ml. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a doboz tartalma legfeljebb 2,5%-kal tér el a névleges tartalomtól? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobozban legalább 990 ml tejet találunk?

Legyen η a kiválasztott dobozban található mennyiség. Az η változó normális eloszlású $\mu = 1000$ ml várható értékkel és $\sigma = 10$ ml szórással. A kérdéses valószínűségek az f_η sűrűségfüggvény alatti területek nagysága:





Jegyezzük meg ismét, hogy a kérdéses valószínűségek nem határozhatóak meg a sűrűségfüggvény integrálásával. Ehelyett standardizálni kell, és a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét alkalmazni. (A Φ függvény értékeit az eloszlástáblázatból lehet kilesni.) Azt kapjuk, hogy

$$P\big(975 \leqslant \eta \leqslant 1025\big) = P\left(\frac{975-1000}{10} \leqslant \frac{\eta-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{1025-1000}{10}\right)$$
$$= P\big(-2{,}5 \leqslant \eta_{0,1} \leqslant 2{,}5\big) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}0062\,,$$

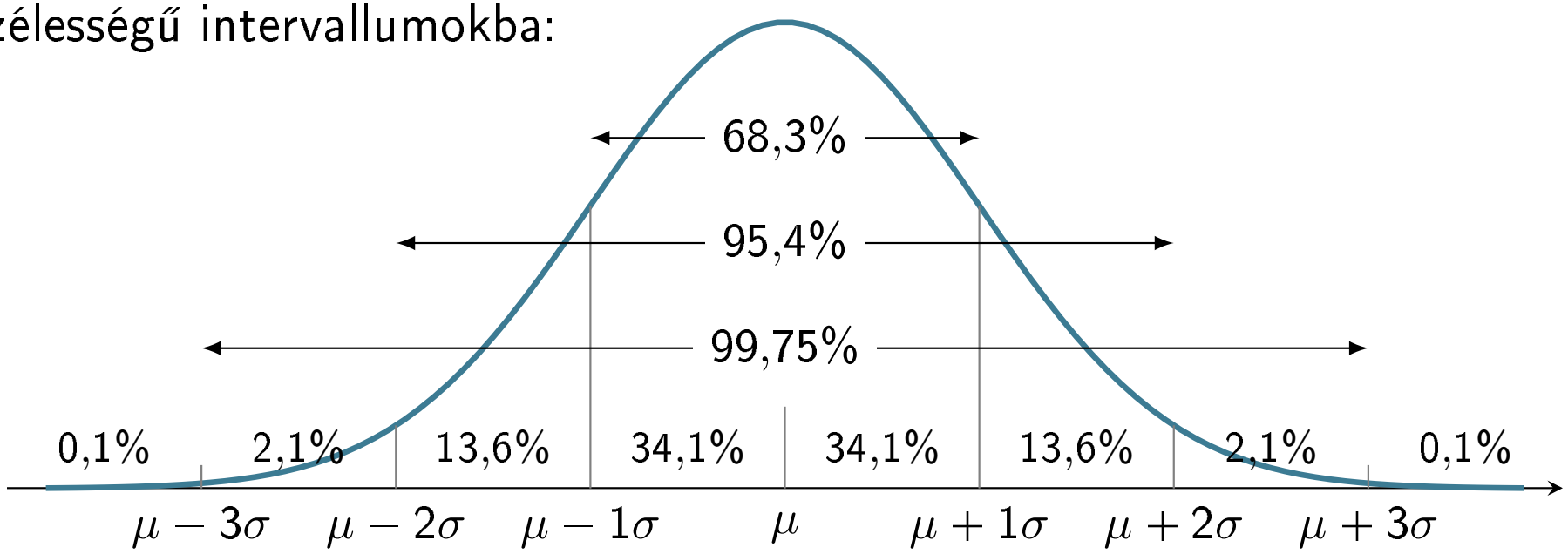
aminek 0,9876 az értéke. Ez azt jelenti, hogy a tejesdobozok 98,76%-a tartalmaz 975 ml és 1025 ml közötti tejet. Itt felhasználtuk azt, hogy

$$\Phi(-2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062\,.$$

A második valószínűség az első mintájára határozható meg:

$$P(\eta \geqslant 990) = P\left(\frac{\eta-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{990-1000}{10}\right) = P\big(\eta_{0,1} \geqslant -1\big)$$
$$= 1 - P\big(\eta_{0,1} < -1\big) = 1 - \Phi(-1) = 1 - \big[1 - \Phi(1)\big]$$
$$= 1 - \big[1 - 0{,}84\big] = 0{,}84\,.$$

Az alábbi ábra azt mutatja meg, hogy egy η normális eloszlású változó mekkora valószínűséggel esik a várható érték két oldalára felmért σ szélességű intervallumokba:



1σ-, 2σ- és 3σ-szabály

Legyen η normális eloszlású változó tetszőleges μ várható értékkel és σ szórással. Ekkor:

$$P\big(\mu - \sigma \leqslant \eta \leqslant \mu + \sigma\big) \approx 68\%, \qquad P\big(\mu - 2\sigma \leqslant \eta \leqslant \mu + 2\sigma\big) \approx 95\%,$$

$$P\big(\mu - 3\sigma \leqslant \eta \leqslant \mu + 3\sigma\big) \approx 99{,}75\%.$$

Feladat. Mondjunk egy olyan $[a, b]$ intervallumot, amire teljesül, hogy a tejesdobozok 95%-a ebbe az intervallumba esik: $P(a \leqslant \eta \leqslant b) = 0{,}95$.

1. Megoldás. Az intervallumot $[\mu - c, \mu + c]$ alakban fogjuk keresni. Ismét csak standardizálással:

$$0{,}95 = P\big(\mu - c \leqslant \eta \leqslant \mu + c\big) = P\left(-\frac{c}{10} \leqslant \frac{\eta - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{c}{10}\right)$$
$$= \Phi(c/10) - \Phi(-c/10) = \Phi(c/10) - \big[1 - \Phi(c/10)\big] = 2\Phi(c/10) - 1\,.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $\Phi(c/10) = 0{,}975$, amiből $c/10 = 1{,}96$, vagyis $c = 19{,}6$. Tehát a kérdéses intervallum: $[980{,}4, 1019{,}6]$.

2. Megoldás. A 3σ-szabály alkalmazásával:

$$95\% \approx P\big(\mu - 2\sigma \leqslant \eta \leqslant \mu + 2\sigma\big) = P(980 \leqslant \eta \leqslant 1020)$$

Tehát a $[980, 1020]$ intervallum is egy jó közelítő eredmény. Jegyezzük meg azt is, hogy

$$99{,}75\% \approx P\big(\mu - 3\sigma \leqslant \eta \leqslant \mu + 3\sigma\big) = P(970 \leqslant \eta \leqslant 1030).$$

Tehát a dobozok több, mint 99%-a 970 ml és 1030 ml közé esik.

Feladat. A statisztika adatok szerint Magyarországon az emberek 30 százaléka dohányzik rendszeresen. Ha megállítunk az utcán 100 embert, akkor mennyi annak az esélye, hogy közöttük legalább 25, de legfeljebb 35 dohányos lesz?

Legyen ξ a dohányosok száma a megkérdezettek között. A ξ változó binomiális eloszlást követ $n = 100$ és $p = 0{,}3$ paraméterrel. Jegyezzük meg, hogy $E(\xi) = np = 30$ és $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)} = 4{,}6$, továbbá a kérdéses valószínűség:

$$P\big(25 \leqslant \xi \leqslant 35\big) = \sum_{k=25}^{35} P(\xi = k) = \sum_{k=25}^{35} \binom{100}{k} 0{,}3^k 0{,}7^{100-k}$$

A kapott formulával az a probléma, hogy nehezen számolható:

- egyrészt a formula sok tagból áll, melyeket külön ki kellene számolni;
- másrészt a formulában szereplő binomiális együtthatók meghatározása is macerás.

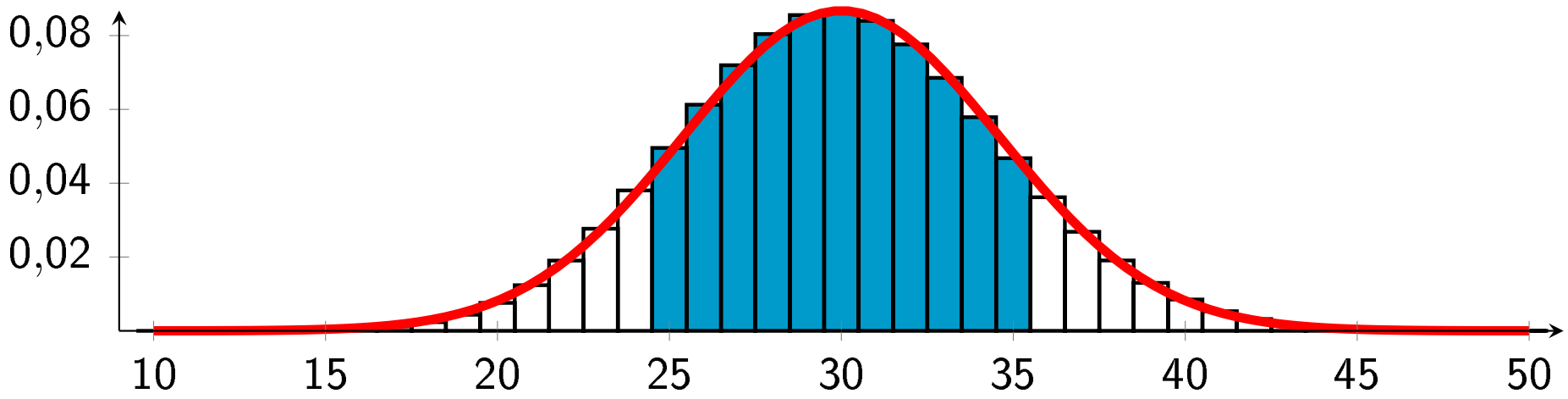
És ezek a problémák jóval komolyabbak lennének, ha nem csak 100, hanem mondjuk 1000 emberrel számolnánk.

Az ábrán a ξ változó eloszlása látható oszlopdiagrammal ábrázolva. Az oszlopok szélessége 1, és a k érték feletti oszlop magassága $P(\xi = k)$. Ekkor a kék tartomány összterülete pontosan a kérdéses valószínűség:

$$\sum_{k=25}^{35} 1 \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=25}^{35} P(\xi = k) = P\big(25 \leqslant \xi \leqslant 35\big)$$

Legyen η normális eloszlású változó $\mu = 30$ és $\sigma = 4{,}6$ paraméterrel. Piros színnel az η sűrűségfüggvénye van ábrázolva. Vegyük észre, hogy a 25 és a 35 érték között a sűrűségfüggvény alatti terület jó közelítéssel megegyezik a kék színű tartomány területével, ami azt jelenti, hogy

$$P\big(25 \leqslant \xi \leqslant 35\big) \approx \int_{25}^{35} f_\eta(x)\,dx = P\big(25 \leqslant \eta \leqslant 35\big)$$



Az előző oldal észrevételét a következő tételben mondjuk ki, bár kissé slendrián módon. A tételnek van egy precíz kimondása is, akit érdekel, az megtalálhatja azt a változatot bármelyik valószínűségszámítás könyvben, vagy az interneten is. Mi azért ebben a formában mondjuk ki a tételt, mert ilyen alakban fogjuk majd alkalmazni, és így a lényeg is jobban látszik.

de Moivre–Laplace-tétel

Legyen ξ binomiális eloszlású változó n és p paraméterrel, továbbá legyen η egy normális eloszlású változó $\mu = np$ és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ paraméterrel. Ekkor tetszőleges a és b számok esetén

$$P\big(a \leqslant \xi \leqslant b\big) \approx P\big(a \leqslant \eta \leqslant b\big)\,,$$

és a közelítés annál pontosabb, minál nagyobb az n paraméter értéke.

A fenti közelítés $n \geqslant 20$ esetén már szokták használni, de a tapasztalatok szerint $n \geqslant 50$ esetén válik igazán pontossá.

Feladat. Mennyi annak az esélye, hogy a megkérdezett 100 emberből legalább 25, legfeljebb 35 dohányzik? Adjunk meg egy olyan intervallumot, amelybe a dohányosok száma 90% valószínűséggel beleesik.

Most $n = 100$, ezért alkalmazhatjuk a de Moivre–Laplace-tételt:

$$P\big(25 \leqslant \xi \leqslant 35\big) \approx P\big(25 \leqslant \eta \leqslant 35\big) = P\left(\frac{25-30}{4{,}6} \leqslant \frac{\eta-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{35-30}{4{,}6}\right)$$
$$= P\big(-1{,}09 \leqslant \eta_{0,1} \leqslant 1{,}09\big) = \Phi(1{,}09) - \Phi(-1{,}09) = 0{,}86 - (1-0{,}86)\,,$$

ami 0,72. A kérdéses intervallum nem határozható meg a 3σ-szabállyal, hiszen az csak 68, 95 és 99,75% megbízhatóságú intervallumot ad. Most:

$$0{,}9 = P\big(30-c \leqslant \xi \leqslant 30+c\big) \approx P\big(30-c \leqslant \eta \leqslant 30+c\big)$$
$$= P\left(-\frac{c}{4{,}6} \leqslant \frac{\eta-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{c}{4{,}6}\right) = \Phi(c/4{,}6) - \Phi(-c/4{,}6)$$
$$= \Phi(c/4{,}6) - \big[1-\Phi(c/4{,}6)\big] = 2\Phi(c/4{,}6) - 1$$

Tehát $\Phi(c/4{,}6) = 0{,}95$, azaz $c/4{,}6 = 1{,}65$, amiből kis kerekítéssel $c = 8$. Tehát a kérdéses intervallum: $[22, 38]$.

A várható érték és a szórás tulajdonságai

Már megtanultuk, hogy hogyan lehet kiszámolni egy diszkrét vagy folytonos valószínűségi változó várható értékét és szórását, ha ismerjük az eloszlást vagy a sűrűségfüggvényt. Gyakran előfordul, hogy több változó összegével kell dolgoznunk, de az összeg eloszlását illetve sűrűségfüggvényét már nehéz lenne meghatározni. Felmerül a kérdés, hogy ki lehet-e számolni egy ilyen összegnek a várható értékét és a szórását csak az egyes tagok várható értékeiből és szórásaiból. Ehhez meg kell ismernünk a várható érték és a szórás néhány műveleti tulajdonságát.

A várható érték és a szórás tulajdonságai

Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, és legyen a valós szám.

1. Konstans várható értéke: Ha $P(\xi = a) = 1$, akkor $E(\xi) = a$.
2. Egy változónak pontosan akkor 0 a szórása, ha a változó konstans, tehát $P(\xi = a) = 1$ valamilyen a valós számra. Ekkor $a = E(\xi)$.
3. Konstansszoros: $E(a\xi) = aE(\xi)$, $D(a\xi) = |a|D(\xi)$.

Mi ezeknek a tulajdonságoknak a magyarázata? Tegyük fel, hogy n alkalommal megfigyeljük a változó értékét, és legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a megfigyelt értékek.

- Az $E(\xi)$ várható érték a ξ változó átlagos értéke. Precízebben fogalmazva, a megfigyelt értékek átlaga konvergál a várható értékhez:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to E(\xi)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Ha a ξ konstans, akkor minden megfigyelt érték egyenlő a-val, azaz

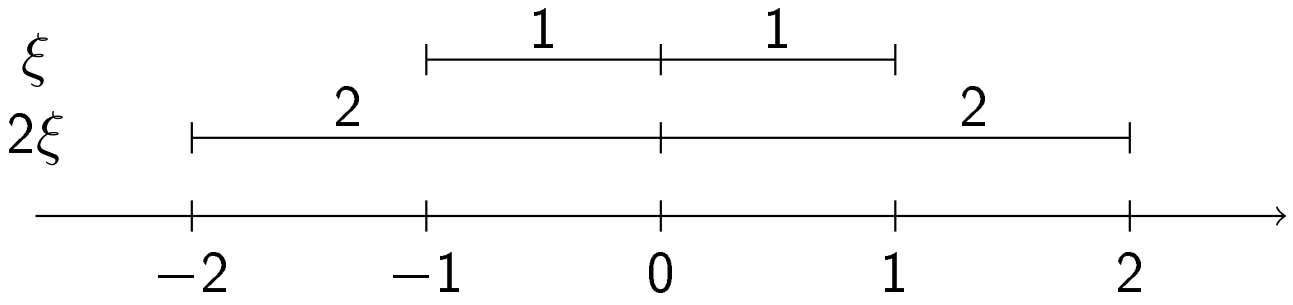
$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = \frac{a + \cdots + a}{n} = a \to a\,.$$

Tehát ebben az esetben $E(\xi) = a$.
Ha tekintjük az $a\xi$ változót, akkor erre az $a\xi_1, \ldots, a\xi_n$ megfigyelt értékekket kapjuk, melyek átlagos értéke:

$$\frac{a\xi_1 + \cdots + a\xi_n}{n} = a\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to aE(\xi)\,.$$

Tehát $E(a\xi) = aE(\xi)$.

- A szórás a szóródásnak a mértéke, azt mutatja meg, hogy mennyi a változónak a várható értéktől való átlagos eltérése. A szórás pontosan akkor 0, ha a változó értékei nem szóródnak, tehát a változó mindig pontosan a várható értékét veszi fel értékül, tehát $P(\xi = E(\xi)) = 1$.
- A $D(a\xi) = aD(\xi)$ azonosság illsuztrálására tekintsünk egy példát. Legyen a ξ egy olyan változó, ami a $+1$ és a -1 értéket veszi fel 1/2–1/2 valószínűséggel. Kiszámolható, hogy ekkor $E(\xi) = 0$ és $D(\xi) = 1$. Mivel a változó minden értéke 1 távolságra van a várható értéktől, a várható értéktől való átlagos eltérés, (a szórás,) szintén 1.



Legyen most $a = 2$. Ekkor az $a\xi = 2\xi$ változó lehetséges értékei $+2$ és -2, továbbá $E(2\xi) = 0$ és $D(2\xi) = 2$. Valóban, ebben az esetben az értékek átlagos eltérése a várható értékről 2-re nőtt.

Összeg várható értéke és varianciája

Legyen $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}$ tetszőleges valószínűségi változó, és tekintsünk $a_1, \ldots, a_m$ valós számokat. Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok.

1. A változók összegének a várható értéke:

$$E\left(\xi^{(1)} + \cdots + \xi^{(m)}\right) = E\left(\xi^{(1)}\right) + \cdots + E\left(\xi^{(m)}\right).$$

   Ebből az is következik, hogy

$$E\left(a_1\xi^{(1)} + \cdots + a_m\xi^{(m)}\right) = a_1 E\left(\xi^{(1)}\right) + \cdots + a_m E\left(\xi^{(m)}\right).$$

2. A változók összegének a varianciája: ha $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}$ független, akkor

$$D^2\left(\xi^{(1)} + \cdots + \xi^{(m)}\right) = D^2\left(\xi^{(1)}\right) + \cdots + D^2\left(\xi^{(m)}\right).$$

   Ebből az is következik, hogy

$$D^2\left(a_1\xi^{(1)} + \cdots + a_m\xi^{(m)}\right) = a_1^2 D^2\left(\xi^{(1)}\right) + \cdots + a_m^2 D^2\left(\xi^{(m)}\right).$$

Egy kis indoklás az 1. állításhoz. Tegyük fel, hogy $m = 2$, és a könnyebb írásmódért két változót jelöljük $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ helyett ξ-vel és η-val. Tegyük fel továbbá, hogy ezekre a változókra van nehány megfigyelésünk. Ekkor a megfigyelések számtani átlaga:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to E(\xi)\,, \qquad \frac{\eta_1 + \cdots + \eta_n}{n} \to E(\eta)\,.$$

Ha a $\xi + \eta$ összegváltozót vizsgáljuk, akkor erre is vannak megfigyelések, és $\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n$ alakban állnak elő. Vegyük észre, hogy az összeg átlagos értéke azonos az átlagok összegével:

$$\frac{(\xi_1 + \eta_1) + \cdots + (\xi_n + \eta_n)}{n} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} + \frac{\eta_1 + \cdots + \eta_n}{n} \to E(\xi) + E(\eta)\,.$$

Másrészt viszont a várható érték jelentése szerint:

$$\frac{(\xi_1 + \eta_1) + \cdots + (\xi_n + \eta_n)}{n} \to E(\xi + \eta)\,.$$

Tehát $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$. Ebből az 1. pont második állítása:

$$E(a_1\xi + a_2\eta) = E(a_1\xi) + E(a_2\eta) = a_1 E(\xi) + a_2 E(\eta)\,.$$

Feladat. Egy cég úgy próbálja meg népszerűsíteni az általa forgalmazott chipset, hogy a zacskókba a Micimackó című mese figuráit rejti el: Micimackót, Malackát, Tigrist és Fülest. Minden zacskóban pontosan egy figura található, és minden figurának azonos a gyakorisága. Mi addig vásároljuk a terméket, míg meg nem kapjuk a teljes kollekció, tehát míg végül mindegyik figurából lesz legalább egy darab. Várhatóan hány zacskó chipset kell megvennünk? mennyi a vásárolt chipsek számának a szórása?

Jelölje ξ a vásárolt chipsek számát. Értékkészlete: $R_\xi = \{4, 5, \dots\}$, tehát a változó diszkrét eloszlású. Mi korábban elég sok munkával már meghatároztunk egy valószínűséget:

$$P(6 \text{ chips elég}) = P(\xi \leqslant 6) \approx 0{,}38.$$

Ha minden k-ra sikerülne meghatározni a $P(\xi \leqslant k)$ valószínűséget, akkor ebből meglenne az eloszlás, hiszen

$$P(\xi = k) = P(\xi \leqslant k) - P(\xi \leqslant k-1), \qquad k = 4, 5, \dots$$

Ebből pedig a várható érték és a szórás számolható lenne. Ez egy járható út, de nagyon nehéz. Éppen ezért egy másik módszert fogunk alkalmazni.

Jelölje η_i, $i = 1, 2, 3, 4$, azt, hogy hány további chipset kell vásárolnunk ahhoz, hogy legyen i darab különböző figuránk, azok után, hogy már van $i - 1$ különböző figuránk. Tehát, például, az η_3 változó azt mondja meg, hogy ha már megtaláltunk két különböző figurát a teljes készletből, akkor hány további chips megvásárlása árán fogjuk a harmadik darabot is meglelni. Például:

$$\underbrace{\text{Mi}}_{\eta_1} \quad \underbrace{\text{Mi} \quad \text{F}}_{\eta_2} \quad \underbrace{\text{F} \quad \text{Mi} \quad \text{T}}_{\eta_3} \quad \underbrace{\text{F} \quad \text{Ma}}_{\eta_4}$$

Ekkor a következő észrevételeket tehetjük meg:

- Az η_1 változó értéke mindig 1.
- Ha már van egy figuránk, akkor egy-egy újabb chips megvásárlásakor $3/4$ valószínűséggel kapunk egy új darabot a készletből. Mivel az η_2 azt mutatja meg, hogy hány zacskó chips szükséges egy új figurához, a változó geometriai eloszlást követ $p = 3/4$ paraméterrel.
- Hasonló meggondolásból következik, hogy az η_3 és az η_4 változó is geometriai eloszlású rendre $p = 1/2$ és $p = 1/4$ paraméterrel.

Vegyük észre azt is, hogy $\xi = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4$, amiből

$$E(\xi) = E(\eta_1) + E(\eta_2) + E(\eta_3) + E(\eta_4) = 1 + \frac{1}{3/4} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/4} \approx 8{,}33\,.$$

Jegyezzük meg azt is, hogy az $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ változók függetlenek, amiből

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2) + D^2(\eta_3) + D^2(\eta_4) \\ &= 0 + \frac{1-3/4}{(3/4)^2} + \frac{1-1/2}{(1/2)^2} + \frac{1-1/4}{(1/4)^4} \approx 14{,}44\,. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} \approx 3{,}8$. Tehát a változó várható értéke 8,33, és a változónak a várható értéktől való átlagos eltérése 14,44.

Feladat. Ha egy zacskó chips ára 300 forint, akkor mennyi az összesen elköltött pénzünk várható értéke és szórása?

Most ξ chipset vásárolunk meg, aminek 300ξ forint az ára. Az elköltött pént várható értéke illetve szórása:

$$E(300\xi) = 300E(\xi) = 2500 \qquad \text{és} \qquad D(300\xi) = |300|D(\xi) \approx 1140\,.$$

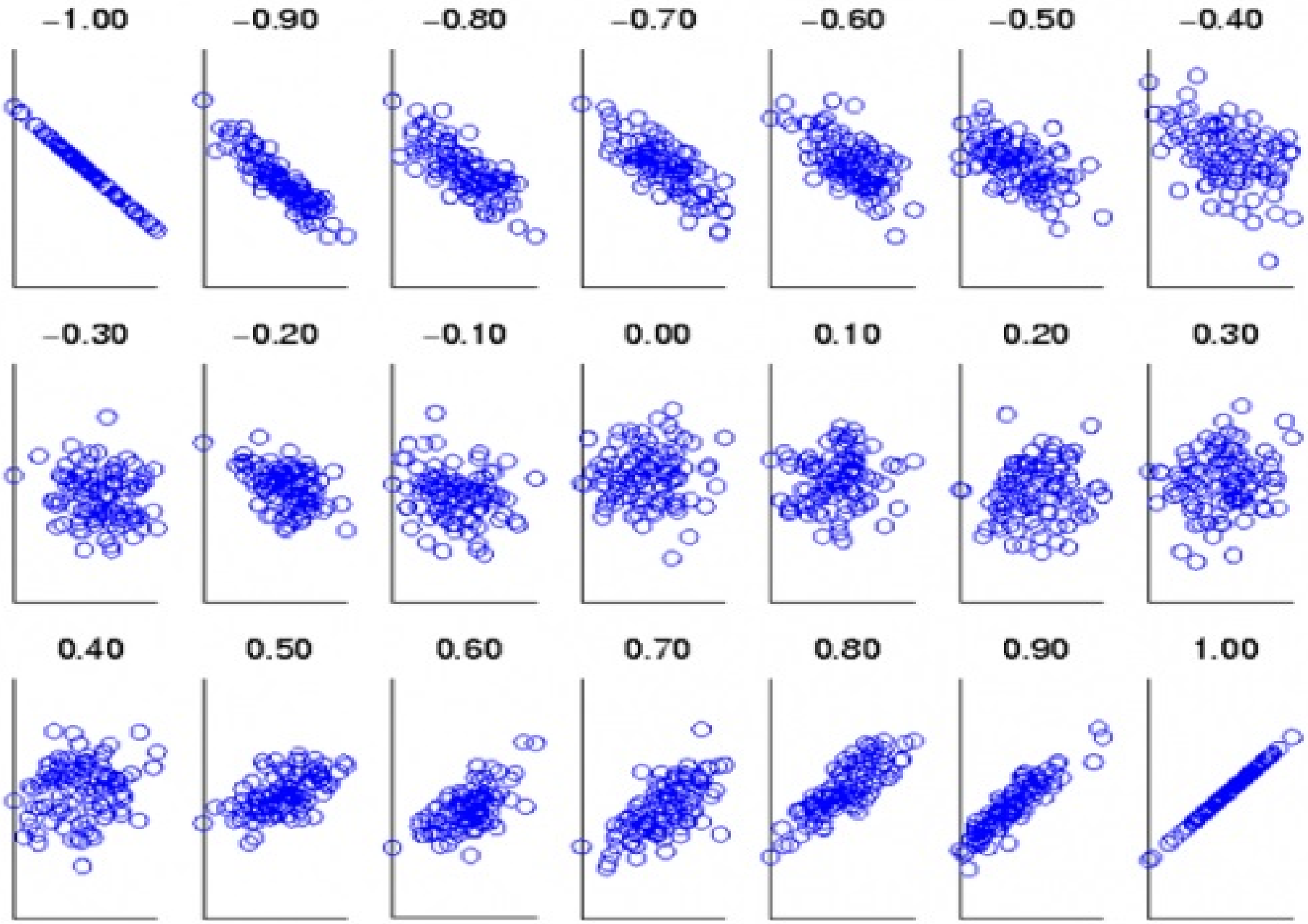
Ha adott két valószínűségi változó, ξ és η, akkor ezek függetlensége azt jelenti, hogy a két változó nem hat egymásra, nem befolyásolják egymás értékét. Ebben az esetben az összegük varianciája könnyen kiszámolható. Felmerül a kérdés, hogy a nem független változók esetén hogyan lehetne egyszerűen kifejezni a két változó függőségének erősségét és irányát. Erre a statisztikában a **korrelációs együttható** nevű mutatószámot szokták alkalmazni. Ezt sokféleképpen szokták jelölni, mi a következő jelölést fogjuk használni: $\mathrm{corr}(\xi, \eta)$. A korrelációs együttható precíz denícióját a félév későbbi részében fogjuk majd tanulni, most csak néhány alkalmazást fogunk nézni. A korrelációs együttható fontosabb tulajdonságai:

- A korreláció értéke mindig a $[-1, +1]$ intervallumba esik.
- Ha ξ és η független egymástól, akkor $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$.
- Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) > 0$, akkor a két változó között pozitív irányú kapcsolat van, ami azt jelenti, hogy az egyik változó értékét növelve jellemzően(!) a másik változó értéke is nő.
- Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) < 0$, akkor a két változó között negatív irányú kapcsolat van, tehát az egyik változó értékét növelve jellemzően(!) a másik változó értéke csökken.

- Minél közelebb van a korrelációs együttható $+1$-hez vagy -1-hez, annál erőssebb a két változó közötti kapcsolat.
- Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \pm 1$, akkor a két változó tökéletesen meghatározza egymást, továbbá $\eta = a\xi + b$ valamilyen a, b valós számokkal.

A következő oldalon különféle korrelációs együtthatójú (ξ, η) változópárokra láthatunk példákat. Hogyan kell az ábrát értelmezni?

- Minden kis ábra egy koordináta rendszer, ahol a vízszintes tengelyen a ξ, a függőleges tengelyen az η változó értékét jelenítjük meg.
- Minden egyes kis kör a (ξ, η) változópár egy-egy lehetséges értéke. A körök halmaza ezen változópár értékkészlete.
- A korrelációs együttható nagy mértékben meghatározza a lehetséges értékek elhelyezkedését. Ha a korreláció közel van ± 1-hez, akkor a lehetséges értékek egy egyenes mentén helyezkednek el. Ennek azaz okat, hogy ebben az esetben a két változó között erős kapcsolat van. Ha viszont a korreláció 0-hoz van közel, akkor a két változó között gyenge a függőségi kapcsolat, tehát a (ξ, η) változópár lehetséges értékei rendezetlenül helyezkednek el.


−1.00
−0.90
−0.80
−0.70
−0.60
−0.50
−0.40
−0.30
−0.20
−0.10
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.90
1.00

A korrelációs együttható egyik legfontosabb alkalmazása a következő tétel.

Valószínűségi változók összegének a varianciája

Legyen ξ és η tetszőleges valószínűségi változó, továbbá tekintsünk tetszőleges a és b valós számokat. Ekkor

$$D^2\big(a\xi + b\eta\big) = a^2 D^2(\xi) + b^2 D^2(\eta) + 2abD(\xi)D(\eta)\,\mathrm{corr}(\xi,\eta)\,.$$

Ebből $a = b = 1$ választással az is következik, hogy

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2D(\xi)D(\eta)\,\mathrm{corr}(\xi,\eta)\,.$$

Vegyük észre, hogy ha ξ és η független, akkor a fenti formulában szereplő korrelációs együttható nullával egyenlő, és visszakapjuk a már ismert azonosságot:

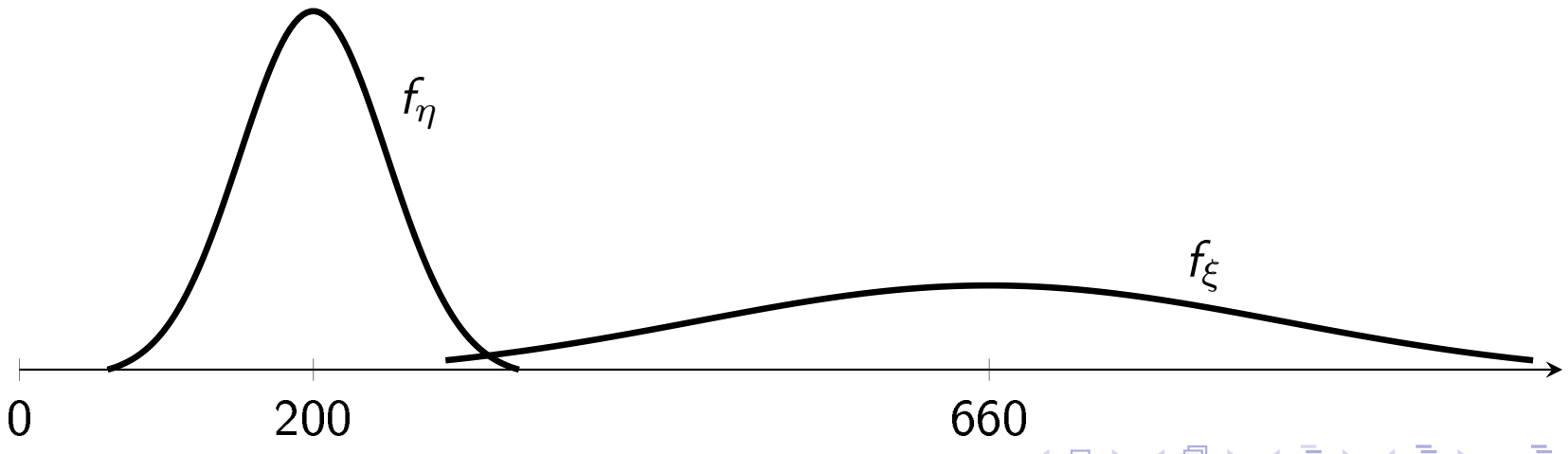
$$D^2\big(a\xi + b\eta\big) = a^2 D^2(\xi) + b^2 D^2(\eta)\,.$$

A piros doboz formulája általánosabban is felírható, 2-nél több valószínűségi változó összegére, de ezt mi most mellőzzük, mert nem lesz rá szükségünk.

Feladat. A Tisza és a Maros vízhozama egy számunkra ismeretlen eloszlást követ. Azt tudjuk, hogy a Maros torkolata felett a Tisza vízhozamának a várható értéke 660 m^3/s, szórása 160 m^3/s, míg a Maros vízhozamának a várható értéke 200 m^3/s, szórása 50 m^3/s. Határozzuk meg a Tisza belvárosi hídnál mért vízhozamának a várható értékét és szórását, ha

- a két vízhozam független;
- a két vízhozam korrelációs együtthatója +0,4;
- a két vízhozam korrelációs együtthatója -0,4;

Megoldás. Legyen ξ és η a Tisza illetve a Maros vízhozama torkolat felett. Ekkor $E(\xi) = 660$, $D(\xi) = 160$, $E(\eta) = 200$, $D(\eta) = 50$. A két változónak körülbelül ilyen lehet a sűrűségfüggvénye:



Mit látunk az előző grafikonon?

- A Maros esetében kicsi a vízhozam szórása, ami azt jelenti, hogy az η értéke jellemzően az $E(\eta) = 200$ átlagos vízhozam közelében van. Ez azt ereményezi, hogy a változó sűrűségfüggvénye karcsú, a görbe alatti terület a várható értéktől távol 0.
- A Tisza esetében jóval nagyobb a szórás, tehát a ξ gyakran vesz fel az $E(\xi) = 660$ átlagos értéktől jóval nagyobb vagy kisebb értéket. Emiatt a ξ változó sűrűségfüggvénye szétterül, a görbe alatti terület a várható értéktől távolabb sem nulla.

A Tisza belvárosi hídnál mért vízhozama $\xi + \eta$ alakban áll elő, aminek a várható értékét nem befolyásolja a korrelációs együttható, ez egyszerűen a két vízhozam várható értékének az összege:

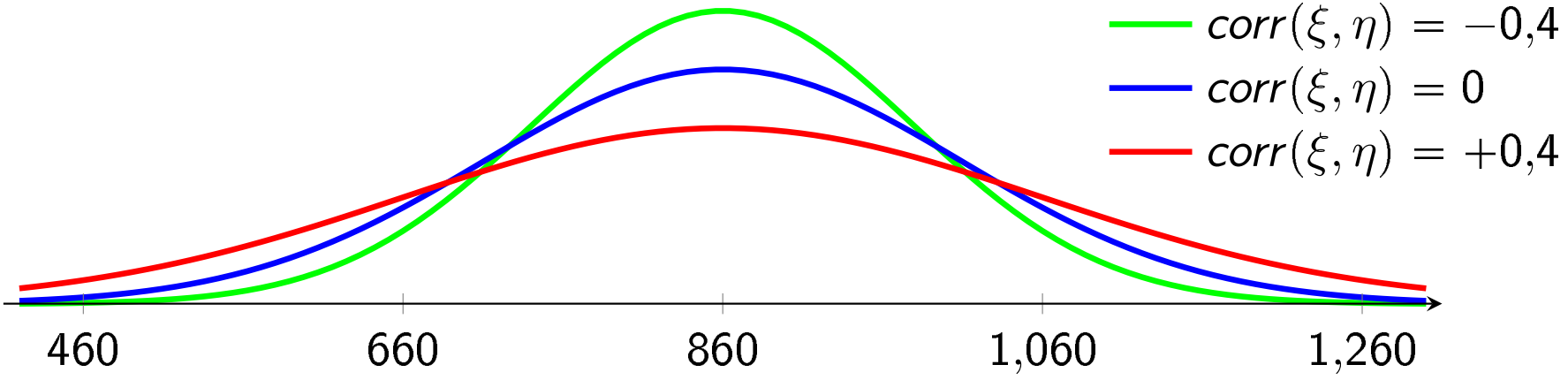
$$E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta) = 660 + 200 = 860\,.$$

Az összeg szórásában viszont már megjelenik a korrelációs együttható, tehát az összeg szórását már befolyásolja a két vízhozam közötti kapcsolat:

$$D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2D(\xi)D(\eta)\,\mathrm{corr}(\xi,\eta)$$
$$= 160^2 + 50^2 + 2\cdot 160\cdot 50\cdot\ \mathrm{corr}(\xi,\eta) = 28.100 + 16.000\,\mathrm{corr}(\xi,\eta)\,.$$

- Ha a két vízhozam független, akkor a korrelációs együtthatójuk értéke $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=0$. Ekkor
$$D^2(\xi+\eta) = 28.100 + 16.000\cdot 0 = 28.100\,,$$
amiből $D(\xi+\eta) = \sqrt{28.100} = 168.$
- Ha a két vízhozam korrelációs együtthatója $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0{,}4$, akkor
$$D^2(\xi+\eta) = 28.100 + 16.000\cdot 0{,}4 = 34.500\,,$$
amiből $D(\xi+\eta) = \sqrt{34.500} = 186.$
- Ha a két vízhozam korrelációs együtthatója $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = -0{,}4$, akkor
$$D^2(\xi+\eta) = 28.100 + 16.000\cdot(-0{,}4) = 21.700\,,$$
amiből $D(\xi+\eta) = \sqrt{21.700} = 147.$

A következő ábra azt mutatja, hogy körülbelül hogyan néz ki az összeg sűrűségfüggvénye a három esetben.

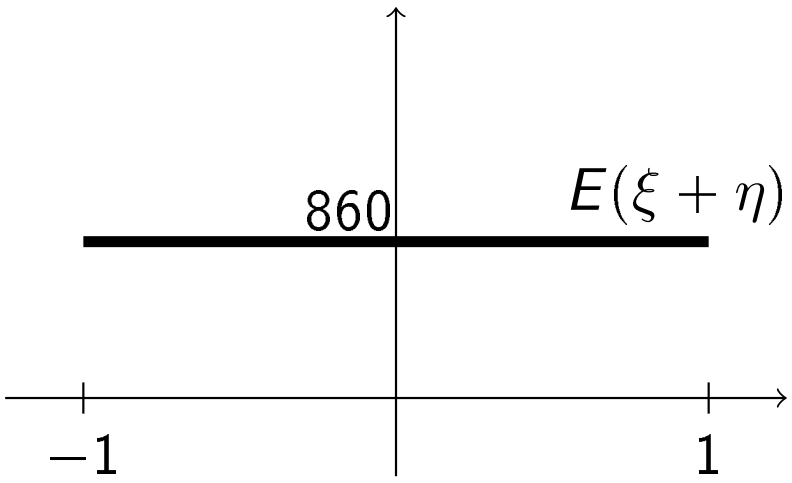


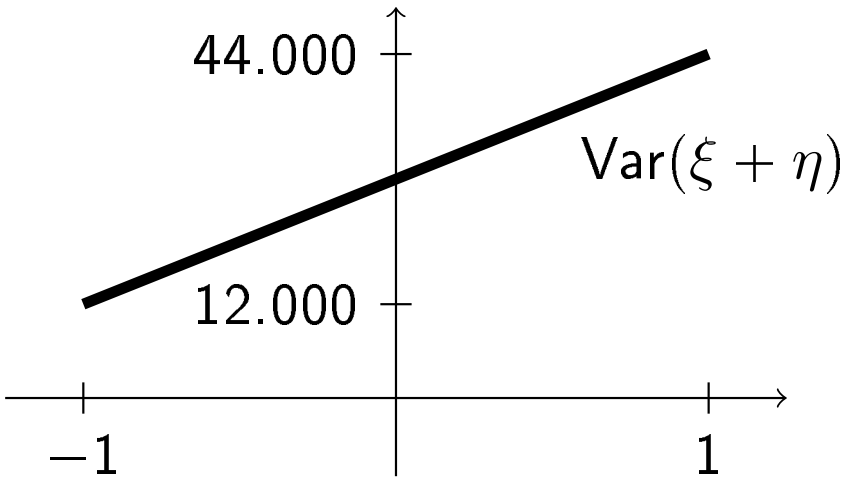
- Ha a két folyó független, akkor előfordulhatnak a várható értéktől távoli vízhozamok, de a vízhozam jellemzően 860 közelében marad.
- Ha a korreláció értéke $-0{,}4$, akkor a két folyó vízhozama ellentétesen változik: amikor az egyik árad, akkor a másik apadni fog. Ez azt eredményezi, hogy a két folyó kiegyenlíti egymás hatását, és nagyon ritka a várható értéktől távoli vízhozam.
- Ha a korreláció értéke $+0{,}4$, akkor a két folyó jellemzően egyszerre apad illetve árad, tehát felerősítik egymás hatását. Ennek az az eredménye, hogy gyakran előfordulnak az átlaghoz viszonyítva nagyon magas vagy nagyon alacsony vízhozamok is.

Feladat. Írjuk fel és ábrázoljuk a $\xi + \eta$ változó várható értékét és varianciáját a korrelációs együttható függvényében. Az árvizi védekezés szempontjából mi a jobb, ha a korrelációs együttható kicsi, vagy ha nagy?

Láttuk, hogy a várható érték $E(\xi + \eta) = 860$ a korrelációs együttható értékétől függetlenül. Az összeg varianciája

$$\mathrm{Var}(\xi + \eta) = D^2(\xi + \eta) = 28.100 + 16.000\,\mathrm{corr}(\xi, \eta)\,.$$





Az árvizi védekezés szempontjából az alacsonyabb variancia előnyösebb, ugyanis ez alacsonyabb szórást is jelent, vagyis ritkában fordulnak elő szélsőségesen magas vízhozamok.

A portfolióanalízis alapjai

Az életben a legtöbb befektetés hozama nem határozható meg előre, ugyanis erre számos olyan tényező is hat, mely tényezőket az előzetes kalkulációk során (jellemzően a szükséges információk hiányában) nem lehet teljes mértékben számításba venni. Az ilyen befektetésekre mondjuk azt, hogy kockázatosak. A kockázat szót a közgazdaságtanban két eltérő jelentéssel szokták használni.

- A számvitelben és a kockázatelemzésben **kockázatnak** nevezzük annak a lehetőségét, hogy a befektetésünk eredménye alacsonyabb lesz az előzetesen tervezetnél.
- A pénzügyi matematikában **kockázatnak** nevezzük annak a lehetőségét, hogy a befektetés eredménye a tervezettől eltér, tehát annál alacsonyabb vagy magasabb lesz.

Ahhoz, hogy a kockázatot matematikai eszközökkel tudjuk vizsgálni, valamilyen módon számszerűsíteni kell a kockázatot.

Motivációként tekintsük az alábbi két játékot:

- Fej vagy írás játék 1 forintos alapon. A játékos ára 1 forint, és a játékos 1/2 valószínűséggel 2 forintot, 1/2 valószínűséggel semmit sem gyer. Ez a játék igazságos, hiszen a ξ véletlen nagyságú nyeremény várható értéke egyenlő a játék árával:

$$E(\xi) = 2 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1\,.$$

- Fej vagy írás játék 1 millió forintos alapon. Ezúttal a játékos ára 1 millió forint, és a játékos 1/2 valószínűséggel 2 millió forintot, 1/2 valószínűséggel semmit sem gyer. Ez a játék szintén igazságos, hiszen az η nyeremény várható értéke most is egyenlő a játék árával:

$$E(\eta) = 2.000.000 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1.000.000\,.$$

Habár mindkét játék igazságos, a második játékba csak kevesen szállnának be. Ennek a kockázatkerülő magatartás az oka, tehát az, hogy a szubjektív értékítéletben a lehetséges 1 millió forintos nettó veszteség nagyobb súllyal esik latba, mint a lehetséges 1 millió forintos nettó nyeremény.

A kockázatos befektetések elméletében az a kiindulási pont, hogy egy-egy befektetés értékelésében nem elég a befektetés jövőbeli értékét alapul venni, hanem a kockázatát is figyelembe kell venni. A pénzügyi matematikában ezt a problémát két formában szokták kezelni.

- A **sztochasztikus utilitáselmélet** azt mondja, hogy nem a befektetés jövőbeli értékét, hanem a befektetésen keresztül elért hasznosságot kell figyelembe venni. Jelölje ξ a kockázatos befektetés jövőbeli értékét, és legyen u egy hasznossági függvény, ami leírja a preferenciáinkan. Ekkor a befektetést értékelhetjük az elért hasznosság várható értékével, tehát az $E(u(\xi))$ mennyiséggel. Ez egyszerre veszi figyelembe a befektetés értékének nagyságát, valamint a befektetés kockázatát is.
- A **mean-variance portfolióanalízis** ezzel szemben azt mondja, hogy a befektetést ne egy, hanem két mutatószámmal értékeljük: a befektetés értékét az $E(\xi)$ várható értékkel, a kockázatot pedig a $D(\xi)$ szórással. Ez utóbbi módszernek előnye, hogy könnyebben számolható a különféle portfoliók várható hozama és kockázata.

Feladat. Adott egy kötvény és egy részvény, mindkettőnek 1000 forint a jelenlegi ára. A kötvény 10 százalékos éves hozamot fizet. A részvény értéke egy év múlva egy valószínűségi változó, mely a 900, az 1200 és az 1500 értéket veheti fel rendre 0,3, 0,4 illetve 0,3 valószínűséggel. Ha 1 millió forintból állíthatunk össze egy portfóliót, akkor várhatóan mennyit fog érni ez a portfólió egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?

Legyen ξ és η rendre a részvény és a körvény értéke egy év múlva. Mivel a kötvény értéke determinisztikus, kapjuk, hogy

$$P(\eta = 1100) = 1\,, \qquad E(\eta) = 1100\,, \qquad D(\eta) = 0\,.$$

A részvény értékének eloszlása, várható értéke és második momentuma:

$$P(\xi = 900) = 0{,}3\,, \qquad P(\xi = 1200) = 0{,}4\,, \qquad P(\xi = 1500) = 0{,}3\,,$$

$$E(\xi) = 900 \cdot 0{,}3 + 1200 \cdot 0{,}4 + 1500 \cdot 0{,}3 = 1200\,,$$

$$E\big(\xi^2\big) = 900^2 \cdot 0{,}3 + 1200^2 \cdot 0{,}4 + 1500^2 \cdot 0{,}3 = 1.494.000\,.$$

Ebből a ξ változó varianciája és szórása:

$$\mathrm{Var}(\xi) = E\big(\xi^2\big) - \big(E(\xi)\big)^2 = 54.000\,, \qquad D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} \approx 232\,.$$

Ha a darab részvényt és b darab kötvényt veszünk, akkor a portfolió jelenlegi értéke:

$$a \cdot 1000 + b \cdot 1000 = 1.000.000\,, \qquad \text{amiből} \qquad a + b = 1000\,.$$

A portfolió értéke egy év múlva $a\xi + b\eta$. Mivel a részvény ára független a kötvény értékétől, a portfolió értékének várható értéke és szórása:

$$\begin{aligned} E(a\xi + b\eta) &= aE(\xi) + bE(\eta) = a \cdot 1200 + b \cdot 1100 \\ &= 1200a + 1100(1000 - a) = 100a + 1.100.000\,, \end{aligned}$$

$$D^2(a\xi + b\eta) = a^2 D^2(\xi) + b^2 D^2(\eta) = a^2 \cdot 54.000 + b \cdot 0 = 54.000a^2\,,$$

$$D(a\xi + b\eta) = \sqrt{54.000a^2} \approx 232a\,.$$

Mivel a részvény várható értékben 100 forinttal nagyobb hozamot fizet, mint a kötvény, 1-gyel növelve a részvények számát a portfolió várható értéke is 100 forinttal nő. Ezzel együtt viszont a kockázat is nő, méghozzá pontosan ennek az egy részvénynek az extra kockázatával.

Feladat. Hogyan fektessük be a pénzünket, ha az a célunk, hogy várható értékben 300 ezer forint hozamot realizáljunk? Mekkora ebben az esetben a portfoliói szórása?

A 300 ezer forint várható hozam esetén a portfolió várható értéke 1.300.000 forint, vagyis

$$1.300.000 = E(a\xi + b\eta) = 100a + 1.100.000\,,$$

amiből $a = 3000$ és $b = -2000$. Ez azt jelenti, hogy el kell adnunk 2000 kötvényt, azaz fel kell vennünk 2 millió forint hitelt, és a rendelkezésre álló 3 millió forintból részvényt kell vennünk. A portfolió jövőbeli értékének a szórása:

$$D(a\xi + b\eta) = 232a \approx 300.000\,.$$

Tehát a portfolió jövőbeli értéké átlagosan 300 ezer forinttal tér el az 1.300.000 forintos várható értéktől. Átlagosan ennyivel fog a portfolió többet vagy kevesebbet érni, mint a várható érték.

Feladat. Szeretnénk elkerülni a nagy veszteségeket, ezért úgy akarjuk befektetni a pénzünket, hogy a portfolió értékének a szórása legfeljebb 100 ezer forint legyen. Mennyi a maximálisan elérhető várható hozam ebben az esetben?

A portfolió jövőbeli értékének a szórása

$$100.000 \geqslant D(a\xi + b\eta) = 232a\,, \qquad \text{amiből} \qquad a \leqslant 431\,.$$

A hozam várható értéke annál nagyobb, minél több részvényt veszünk, tehát az adott korlát mellet a hozam várható értéke akkor maximális, ha $a = 431$. Tehát 431 részvényt és $1000 - a = 569$ kötvényt kell vásárolnunk. Ekkor

$$E(a\xi + b\eta) = 100a + 1.100.000 = 1.143.100\,.$$

A pénzügyi matematikában a részvényeket és a kötvényeket korlátlanul oszthatónak tekintjük, ami azt jelenti, hogy nem csak egész mennyiséget vásárolhatunk belőlük. Ez nagyban egyszerűsíti a számolásokat.

Tekintsük most a következő részvénypiacot. A piacon egy részvénnyel és egy kötvénnyel lehet kereskedni, és mindkettőnek egységnyi a jelenlegi ára. Egységnyi pénzösszeg áll a rendelkezésünkre, ebből vehetünk tetszőleges számú részvényt és kötvényt. Szükség esetén hitelt is felvehetünk, ami kötvényeladást jelent. A kötvény egy determinisztikus r kamatláb szerint kamatozik, a részvény értéke pedig egy év múlva $1+\xi$, ahol a ξ valószínűségi változó felfogható úgy, mint a részvény után kapott véletlen nagyságú kamatláb. Ha a portfoliónkat $a>0$ darab részvényből és $b=1-a$ kötvényből állítjuk össze, akkor a portfolió értéke egy év múlva:

$$a(1+\xi)+b(1+r)=(a+b)+a\xi+br=1+(a\xi+br)\,.$$

Tehát egységnyi pénzbefektetéssel a portfolió révén elért hozam nagysága $a\xi+br$. Ennek a hozamnak a várható értéke:

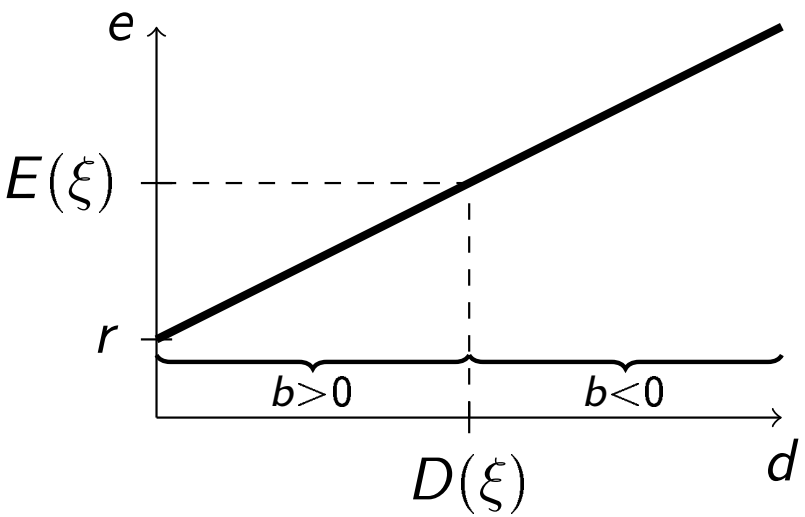
$$e:=E(a\xi+br)=aE(\xi)+bE(r)=aE(\xi)+(1-a)r=a\big[E(\xi)-r\big]+r\,.$$

A korábbiak mintájára a hozam varianciája és szórása

$$D^2(a\xi + br) = a^2 D^2(\xi) + b^2 D^2(r) = a^2 D^2(\xi)\,,$$

$$d := D(a\xi + br) = \sqrt{a^2 D^2(\xi)} = aD(\xi)\,.$$

Ebből a részvények száma kifejezhető $a = d/D(\xi)$ alakban. Ha ezt beírjuk az előző oldal utolsó formulájába, akkor egy érdekes összefüggsét kapunk az összeállítható portfoliók várható hozama és kockázata között:



$$e = \frac{E(\xi) - r}{D(\xi)} d + r$$

A grafikon azt az esetet ábrázolja, amikor $E(\xi) > r$, tehát a részvény várható hozama magasabb, mint a kötvény garantált hozama. Ez egy természetes elvárás a kockázatos részvénybefektetéssel szemben.

A kapott formula azt fejezi ki, hogy a piacon összeállítható portfoliók hozamának d szórása és e várható értéke között egy lineáris kapcsolat írható fel. Magasabb várható hozam csak úgy érhető el, hogy nagyobb kockázatot vállalunk, tehát nagyobb szórású portfoliót állítunk össze. Az ábrázol félegyenesnek két nevezetesebb pontja van:

- Egy kötvényt vásárolunk: $d = 0$ és $e = r$.
- Egy részvényt vásárolunk: $d = D(\xi)$ és $e = E(\xi)$.

Az előző formulát úgy is fel szokták írni, hogy az $e - r$ mennyiséget fejezik ki, tehát azt vizsgálják, hogy mennyi a portfolió hozamának a kockázatmentes kötvény hozamán felüli része. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$e - r = \frac{E(\xi) - r}{D(\xi)}\, d\,.$$

Ez a formula azt fejezi ki, hogy d nagyságú kockázatot vállalva mekkora a kockázatmentes kötvénybefektetéshez viszonyított hozamnövekedés várható értéke. Ezt a hozamnövekedést **kockázati felárnak** szokták nevezik, az $(E(\xi) - r)/D(\xi)$ hányados pedig a **market price of risk**, vagyis a **kockázat piaci ára**.

Egy adott részvény esetében a kockázat piaci ára azt fejezi ki, hogy a kockázatvállalási szintet, (tehát a d szórás értékét,) egységnyivel növelve mekkora várható hozamnövekedést történik. Minél magasabb ez az érték, a részvény annál jobban jutalmazza azt, hogy hajlandóak kockázatot vállalni, és ebbe az eszközbe fektetjük a pénzünket. A befektetők általában azokat a részvényeket preferálják, melyeknél a market price of risk nagyobb, hiszen ezeknél azonos kockázatvállalási szint mellett magasabb a várható hozam.

A kockázat piaci ára a valóságban nem határozható meg pontosan, hiszen az $E(\xi)$ várható érték és a $D(\xi)$ szórás a valóságban nem ismert. A kockázat piaci árát becsülni szokták különféle objektív és szubjektív tényezőket figyelembe véve.

A kockázat piaci árának nem csak a részvényportfoliók elméletében van jelentősége. Különféle származékos termékek, például bizonyos határidős és opciós ügyletek beárazásában is szokták alkalmazni.

A centrális határeloszlás-tétel

Azonos eloszlású valószínűségi változók

Ha kettő vagy több valószínűségi változónak azonos az eloszlásfüggvénye, akkor azt mondjuk, hogy ezek a változók **azonos eloszlásúak**.

Tegyük fel, hogy ξ és η azonos eloszlású változó, tehát $F_\xi(t) = F_\eta(t)$ minden t esetén. Mit állíthatunk ekkor a két változóról?

- Tetszőleges $a < b$ valós számok esetén

$$P\big(a \leqslant \xi < b\big) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = F_\eta(b) - F_\eta(a) = P\big(a \leqslant \eta < b\big)\,.$$

- Ha ξ és η folytonos változó, akkor $f_\xi = F'_\xi = F'_\eta = f_\eta$.
- Ha ξ és η diszkrét változó, akkor

$$P(\xi = a) = F_\xi \text{ ugrása } a\text{-ban} = F_\eta \text{ ugrása } a\text{-ban} = P(\eta = a)\,.$$

- Mivel a két változónak azonos a sűrűségfüggvénye vagy valószínűségeloszlása, ezért $E(\xi) = E(\eta)$ és $D(\xi) = D(\eta)$.

Feladat. Egy kis bankban egy adott napon 200 ember akar pénzt felvenni. A felvett pénzösszegek nagysága független és azonos eloszlású változó 50 ezer forint várható értékkel és 30 ezer forint szórással. Határozzuk meg a felvet teljes pénzösszeg várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy az ügyfelek legalább 10,5 millió forintot fognak majd felvenni?

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_{200}$ az egyes ügyfelek által felvett pénzösszegek nagysága ezer forintban számolva. Ezek a változók függetlenek, és mindegyiknek 50 a várható értéke és 30 a szórása. Ekkor a teljes kifizetés várható értéke és szórásnégyzete:

$$E\big(\xi_1+\cdots+\xi_{200}\big) = E(\xi_1)+\cdots+E(\xi_{200}) = 200E(\xi_1) = 10.000 = 10 \text{ millió},$$

$$D^2\big(\xi_1+\cdots+\xi_{200}\big) = D^2(\xi_1)+\cdots+D^2(\xi_{200}) = 200D^2(\xi_1) = 180.000,$$

amiből az összeg szórása $D(\xi_1+\cdots+\xi_{200}) = \sqrt{200}D(\xi_1) = 424$ ezer.

A második kérdésre nem tudunk válaszolni, ugyanis ehhez ismernünk kellene az összegváltozó eloszlását vagy sűrűségfüggvényét. A feladatot a következő tétel alkalmazásával fogjuk megoldani.

Centrális határeloszlás-tétel (CHT)

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független és azonos eloszlású változó véges szórással, és legyen η normális eloszlású változó $\mu = nE(\xi_1)$ és $\sigma = \sqrt{n}D(\xi_1)$ paraméterrel. Ekkor tetszőleges $a < b$ valós számok esetén

$$P\big(a \leqslant \xi_1 + \cdots + \xi_n \leqslant b\big) \approx P\big(a \leqslant \eta \leqslant b\big)\,,$$

és a közelítés annál pontosabb, minél nagyobb az n értéke. (A közelítés $n \geqslant 50$ esetén már jól alkalmazható.)

Ez a tétel nagyon hasonlít a de Moivre–Laplace-tételhez: ismét normális eloszlással közelítünk egy változót, ezúttal a $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ összeget. Vegyük észre, hogy a normális eloszlás most is úgy lett választva, hogy a lehető legjobban „hasonlítson” az összegváltozóra, a normális eloszlás várható értéke és szórása azonos az összegváltozó várható értékével és szórásával:

$$E\big(\xi_1 + \cdots + \xi_n\big) = nE(\xi_1) = \mu \qquad \text{és} \qquad D^2\big(\xi_1 + \cdots + \xi_n\big) = nD^2(\xi_1)\,,$$

és ez utóbbiból $D^2\big(\xi_1 + \cdots + \xi_n\big) = \sqrt{n}D(\xi_1) = \sigma$.

Feladat. Egy kis bankban egy adott napon 200 ember akar pénzt felvenni. A felvett pénzösszegek nagysága független egymástól 50 ezer forint várható értékkel és 30 ezer forint szórással. Mennyi annak az esélye, hogy az ügyfelek legalább 10,5 millió forintot fognak majd felvenni?

Legyen η normális eloszlású változó a következő paraméterekkel:

$$\mu = nE(\xi_1) = 200{\cdot}50 = 10.000 \qquad \text{és} \qquad \sigma = \sqrt{n}D(\xi_1) = \sqrt{200}{\cdot}30 = 424\,.$$

Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$\begin{aligned} &P\big(\xi_1 + \cdots + \xi_{200} \geqslant 10.500\big) \approx P\big(\eta \geqslant 10.500\big) \\ &= P\left(\frac{\eta - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{10.500 - 10.000}{424}\right) = P\big(\eta_{0,1} \geqslant 1{,}18\big) \\ &= 1 - P\big(\eta_{0,1} < 1{,}18\big) = 1 - \Phi(1{,}18) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12\,. \end{aligned}$$

Ebben a számolásban először a centrális határloeszlás-tételt alkalmaztuk, és áttértünk az η normális eloszlású változóra, majd standardizálással visszavezettük a kérdést a standard normális eloszlásra.

Feladat. Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az ügyfelek által felvett teljes pénzösszeg közelítőleg 99% valószínűséggel ebbe az intervallumba esik.

Először az η változóra konstruálunk meg egy ilyen intervallumot:

$$0{,}99 = P\big(\mu - c \leqslant \eta \leqslant \mu + c\big) = P\left(\frac{(\mu - c) - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{\eta - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{(\mu + c) - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(-\frac{c}{\sigma} \leqslant \eta_{0,1} \leqslant +\frac{c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right]$$

Tehát a következő egyenletet kapjuk: $2\Phi(c/\sigma) - 1 = 0{,}99$, amiből

$$\Phi(c/\sigma) = 0{,}995 \qquad c/\sigma = 2{,}58\,, \qquad c = 2{,}58\sigma = 2{,}58 \cdot 424 = 1094.$$

Tehát a kérdéses intervallum: $[\mu - c, \mu + c] = [8.906, 11.094]$.
Ekkor a CHT alkalmazásával

$$P\big(8.906 \leqslant \xi_1 + \cdots + \xi_{200} \leqslant 11.094\big) \approx P\big(8.906 \leqslant \eta \leqslant 11.094\big) = 99\%.$$

Mivel most $n = 200$, ezért ez a közelítés meglehetősen pontos.

Kovariancia, korreláció és lineáris regresszió

A korábbiakban már foglalkoztunk a korrelációval, és megismertük a fontosabb tulajdonságait. Ebben az anyagrészben ezeket a tulajdonságokat fogjuk jobban körbejárni.

Kovariancia és korreláció

Legyen ξ és η olyan valószínűségi változó, melynek véges a szórása. Ekkor a két változó **kovarianciája**:

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]\big[\eta - E(\eta)\big]\Big)$$

A két változó **korrelációja** avagy **korrelációs együtthatója**:

$$\mathrm{corr}(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}$$

Ha $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a két változó **korrelálatlan**.

A kovariancia és a korreláció fontosabb tulajdonságai

Legyen ξ és η olyan valószínűségi változó, melynek véges a szórása.

1. A kovariancia **jól definiált** fogalom, ami alatt azt értjük, hogy a definíciójában szereplő várható érték véges valós szám.
2. A korrelációs együttható értéke mindig a $[-1,1]$ intervallumba esik.
3. A kovariancia és a korreláció **szimmetrikus** a két változóban, tehát

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \mathrm{Cov}(\eta,\xi) \qquad \text{és} \qquad \mathrm{corr}(\xi,\eta) = \mathrm{corr}(\eta,\xi)\,.$$

4. Egy változónak az önmagával vett kovarianciája: $\mathrm{Cov}(\xi,\xi) = \mathrm{Var}(\xi)$.
5. A kovariancia az alábbi formulával határozható meg kényelmesen:

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$$

Az 5. állítás a várható érték elemi tulajdonságaival bizonyítható:

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = E\big(\xi\eta - E(\xi)\eta - E(\eta)\xi + E(\xi)E(\eta)\big)$$
$$= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) - E(\eta)E(\xi) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$$

Korrelálatlanság és függetlenség

Ha a ξ és az η változó független, akkor ez a két változó korrelálatlan, tehát $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=0$. Ennek az állításnak a megfordítása már nem igaz, tehát a korrelálatlanságból általában még nem következik a függetlenség.

Vegyük észre, hogy a két változó pontosan akkor korrelálatlan, ha 0 a kovarianciájuk. Láttuk, hogy $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)$. Tehát a két változó pontosan akkor korrelálatlan, ha $E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$.

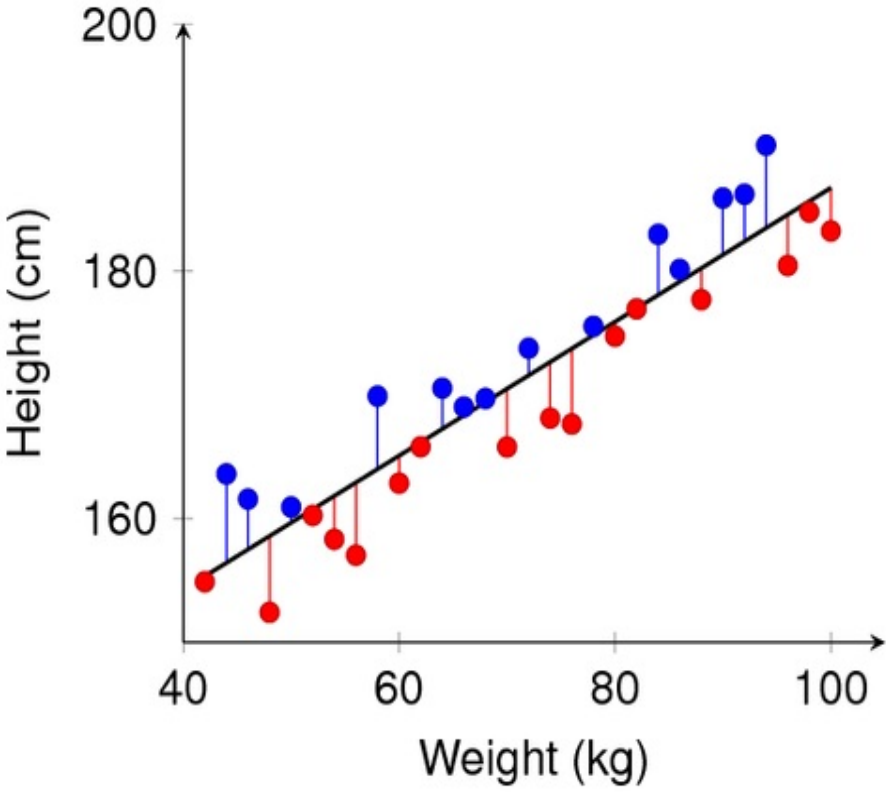
Megmutatható, hogy ha ξ és η független, akkor $E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$, tehát a két változó korrelálatlan. Viszont ez visszafelé nem igaz, ugyanis az $E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$ egyenlőségből még nem következik a függetlenség.

Habár a korrelálatlanságból nem következik a függetlenség, a legtöbb gyakorlati alkalmazásban a korrelálatlan változók sok szempontból kezelhetőek úgy, mintha függetlenek lennének. Ez fontos a matematikai statisztikában, ugyanis az empirikus adatok alapján a korrelálatlanságot könnyű leellenőrizni, míg a függetlenséget jóval nehezebb.

A matematikai statisztika egyik fontos területe a regresszióanalízis, ahol az a cél, hogy kapcsolatot keressünk két valószínűségi változó értékei között. Formálisan, ha adott egy ξ és egy η változó, akkor szeretnénk egy olyan f függvényt találni, hogy $\eta \approx f(\xi)$ nagy pontossággal teljesüljön. Ezt úgy szoktuk felírni, hogy

$$\eta = f(\xi) + \text{hibatag},$$

és az a cél, hogy a hibatag a lehető legkisebb legyen. Lényegében az történik, hogy koordináta-rendszerben ábrázoljuk a (ξ, η) pár lehetséges értékeit, és egy olyan függvényt keresünk, mely jól illeszkedik ezekre az értékekre. Például a jobb oldali ábrán emberek testsúlya és testmagassága van ábrázolva, és a legjobban illeszkedő egyenest keressük:



A legegyszerűbb regressziótípus a lineáris regresszió, amikor a ponthalmazra egyenest akarunk illeszteni, tehát a függvényt $f(x) = ax + b$ alakban keressük. Jelölje a továbbiakban ε a hibatagot, ami maga véletlen, tehát egy valószínűségi változó. Ekkor a ξ és az η közötti kapcsolatot az alábbi alakban tudjuk felírni:

$$\eta = f(\xi) + \varepsilon = a\xi + b + \varepsilon$$

A ε hibatagról meg szoktunk megkövetelni, hogy 0 legyen a várható értéke, tehát a különböző kimenetelekre jutó átlagos hiba 0 legyen. A cél úgy meghatározni az a és a b értéket, hogy a ε hibatag kicsi legyen, tehát az egyenes a lehető legjobban illeszkedjen a pontokra. Mivel a hibatagnak 0 a várható értéke, a célt úgy lehet átfogalmazni, hogy ε szórása legyen minimális.

A fenti formulából a hibatag így fejezhető ki: $\varepsilon = \eta - a\xi - b$.
Mivel most a hibatag várható értéke 0, azt kapjuk, hogy

$$0 = E(\varepsilon) = E(\eta) - aE(\xi) - b, \qquad \text{tehát} \qquad b = E(\eta) - aE(\xi).$$

A b érték determinisztikus, ezért független a ξ és az η változótól, és a szórása 0. Ekkor a hibatag szórásnégyzete:

$$D^2(\varepsilon) = D^2(\eta - a\xi - b) = D^2(\eta - a\xi) + D^2(-b) = D^2(\eta - a\xi) + 0$$

Ez az eredmény továbbalakítható a nem független változók összegére vonatkozó szórásformulával:

$$D^2(\varepsilon) = D^2(\eta) + (-a)^2 D^2(\xi) + 2(-a)D(\xi)D(\eta)\,\mathrm{corr}(\xi,\eta)$$

Amit kaptunk, az az a értéknek egy másodfokú függvénye, ezt kell minimalizálnunk. Deriválással vagy teljes négyzetté alakítással kijön, hogy a $D^2(\varepsilon)$ szórásnégyzet akkor minimális, ha

$$a = \frac{\mathrm{corr}(\xi,\eta)D(\eta)}{D(\xi)}\,,$$

és ebben az esetben a hibatag szórásnégyzete:

$$D^2(\varepsilon) = \Big[1 - \mathrm{corr}^2(\xi,\eta)\Big]D^2(\eta)\,.$$

(Ezeket a formulákat nem kell megtanulni, megadom majd őket, ha ilyen jellegű feladat lesz a vizsgadolgozatban.)

Feladat. A Tisza és a Maros vízhozama egy számunkra ismeretlen eloszlást követ. Azt tudjuk, hogy a Maros torkolata felett a Tisza vízhozamának a várható értéke 660 m^3/s, szórása 160 m^3/s, míg a Maros vízhozamának a várható értéke 200 m^3/s, szórása 50 m^3/s. A vízhozamok közötti korrelációs együttható 0,8. Lineáris regresszó alkalmazásával adjunk előrejelzést a Maros vízhozamára.

Legyen ξ és η a Tisza illetve a Maros vízhozama torkolat felett. Ekkor $E(\xi) = 660$, $D(\xi) = 160$, $E(\eta) = 200$, $D(\eta) = 50$, $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0{,}8$. A cél a Maros vízhozamának a modellezése az alábbi alakban:

$$\eta = a\xi + b + \text{hibatag}$$

Az előző oldalakon kapott formulák alkalmazásával kapjuk, hogy

$$a = \frac{\mathrm{corr}(\xi, \eta) D(\eta)}{D(\xi)} = 0{,}25\,, \qquad b = E(\eta) - aE(\xi) = 35\,.$$

Tehát a két vízhozamra az alábbi regressziós modell írható fel:

$$\eta = 0{,}25\xi + 35 + \text{hibatag}.$$

Feladat. Egy adott napok a Tisza vízhozama 800 m^3/s. Milyen becslést adhatunk a Maros vízhozamára?

A regressziós összefüggés alkalmazásával:

$$\eta \approx 0{,}25\xi + 35 = 0{,}25 \cdot 800 + 35 = 235.$$

Feladat. Végezzünk szórásanalízist, tehát adjuk meg a regressziós formulában szereplő tagok szórásait.

Most $D(\eta) = 50$, $D(0{,}25\xi + b) = 0{,}25D(\xi) = 40$, $D(35) = 0$, és

$$D^2(\text{hibatag}) = \Big[1 - \operatorname{corr}^2(\xi, \eta)\Big] D^2(\eta) = \big[1 - 0{,}8^2\big] 50^2 = 900,$$

vagyis $D(\text{hibatag}) = \sqrt{900} = 30$. Vegyük észre, hogy most

$$D^2(0{,}25\xi) + D^2(35) + D^2(\text{hibatag}) = 1600 + 0 + 900 = 2500 = D^2(\eta).$$

Tehát az η változó szórásnégyzete előáll, mint a lineáris regresszióban megjelenő tagok szórásnégyzeteinek az összege.

Hogy miért fontos a tagok szórásnégyzete? Magából a regressziós egyenes egyenletéből nem olvasható le, hogy mennyire jó az egyenes illeszkedése, nem tudjuk, hogy mennyire nagy a hibatag. A hibatag nagyságát a szórásával lehet jellemezni, hiszen

- ha kicsi a szórás, akkor a hibatag mindig a várható érték közelében, tehát a 0 körül veszi fel az értékeit;
- míg ha nagy a szórás, akkor a hibatag esetenként lehet nagy abszolút értékű szám is.

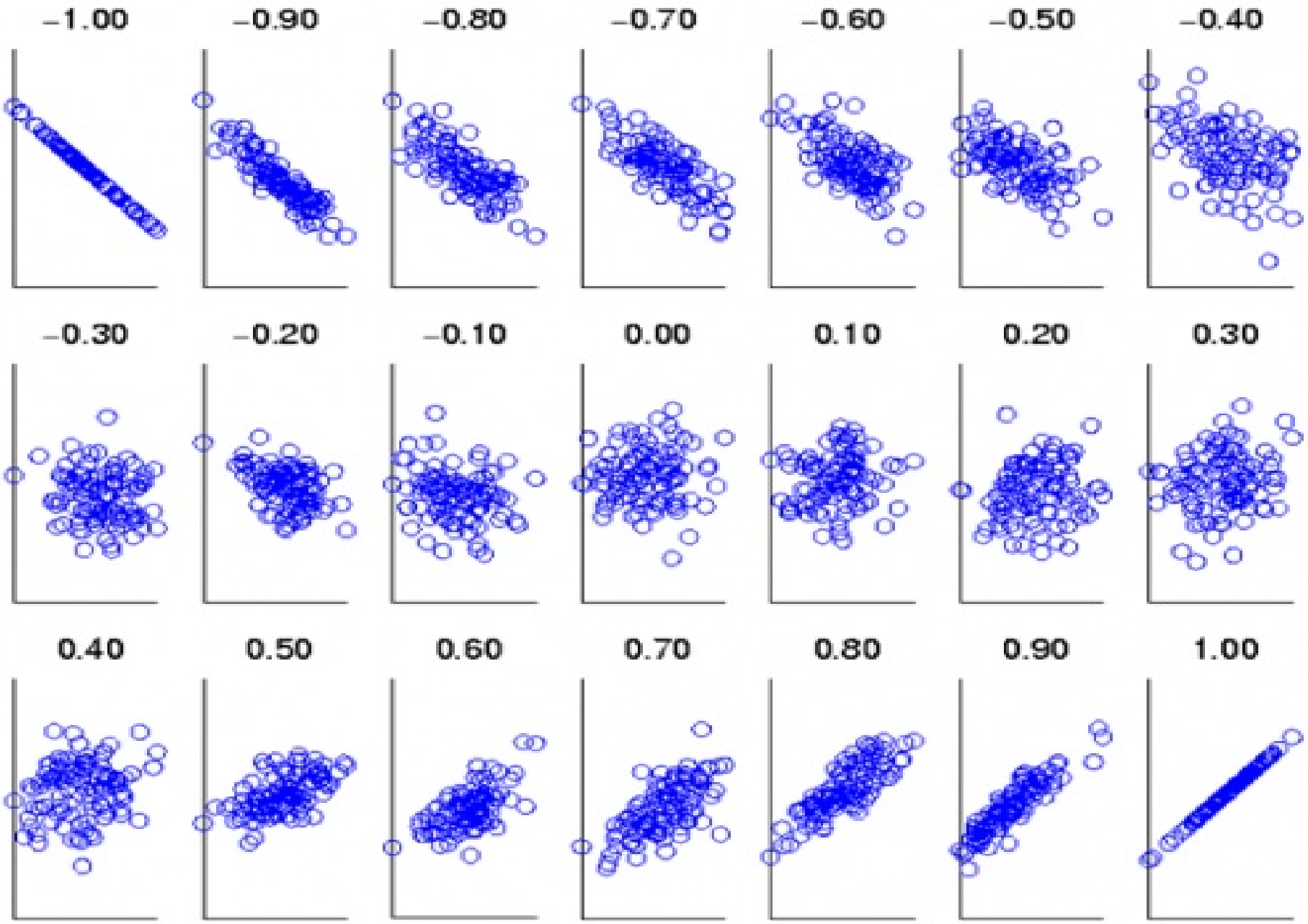
Korábban az alábbi formulát kaptuk a hibatag szórásnégyzetére:

$$D^2(\text{hibatag}) = \Big[1 - \operatorname{corr}^2(\xi, \eta)\Big] D^2(\eta).$$

- A hibatag szórása akkor lesz kicsi, ha a $\operatorname{corr}(\xi, \eta) \approx \pm 1$. Ebben az esetben a hibatag elhanyagolható a regressziós modellből, és az η változó jól becsülhető a ξ segítségével.
- A hibatag szórása akkor lesz nagy, ha $\operatorname{corr}(\xi, \eta) \approx 0$. Ebben az esetben a hibatag elhanyagolása nagy mértékű hibát eredményez a regressziós modellben, tehát az η változó nem becsülhető meg jól csak a ξ segítségével: $\eta \not\approx a\xi + b$.

A korrelációs együttható a ξ és az η változó **lineáris függőségének** irányát és erősségét jellemzi, ugyanis:

- Ha ξ és η független egymástól, akkor $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$.
- Minél közelebb van a korrelációs együttható $+1$-hez vagy -1-hez, annál erőssebb a két változó közötti kapcsolat, hiszen annál kisebb hibával lehet közöttük lineáris regressziót végezni.
- Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \pm 1$, akkor a hibatag szórása 0. Ebből következik, hogy a hibatag 1 valószínűséggel maga is 0, tehát $\eta = a\xi + b$ valamilyen a, b valós számokkal.
- Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) > 0$, akkor a lineáris regresszióban az a együttható pozitív. Ez azt jelenti, hogy a két változó között pozitív irányú kapcsolat van, tehát ξ értékét növelve jellemzően(!) η értéke nő.
- Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) < 0$, akkor az a együttható negatív. Ebből következik, hogy a két változó között negatív irányű kapcsolat van, tehát ξ értékét növelve η értéke jellemzően(!) csökken.


−1.00
−0.90
−0.80
−0.70
−0.60
−0.50
−0.40
−0.30
−0.20
−0.10
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.90
1.00

Diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása

Eddig a feladatokban mindig egyszerre csak egy valószínűségi változó eloszlását írtuk fel, de nem vizsgáltuk azt, hogy hogyan lehetne ezeket együttesen kezelni. Mi ezt a kérdéskört csak két diszkrét valószínűségi változóra fogjuk körbejárni. A definíciók könnyen általánosíthatóak több változóra is, az elmélet nem nehezebb, csak bonyolultabbak a jelölések.

Diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása

Legyen ξ és η diszkrét valószínűségi változó. A két változó **együttes eloszlása** a következő valószínűségek sorozata:

$$P\big(\xi = x, \eta = y\big)\,, \qquad x \in R_\xi\,, y \in R_\eta\,.$$

Ebben az esetben a ξ és az η külön-külön vett eloszlását **marginális eloszlásoknak** avagy **peremeloszlásoknak** is szoktuk nevezni.

Feladat. Adott szabályos két pénzérme, melyek egyik oldalára a 0, a másik oldalára az 1 értéket írjuk. Feldobjuk a két érmét, és legyen ξ a dobott számok összege, η pedig a dobott számok szorzata. Határozzuk meg a két valószínűség változó együttes eloszlását és a marginális eloszlásokat.

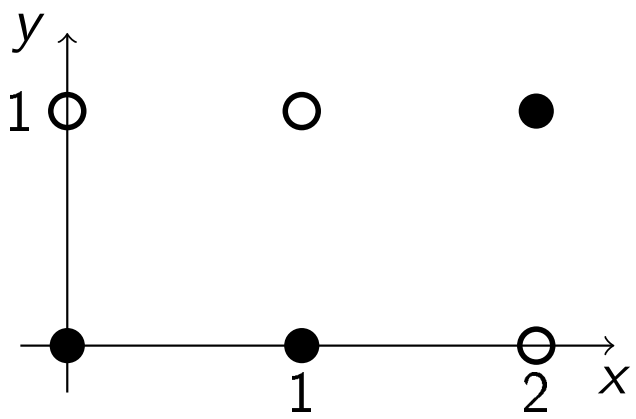
A két változó értékkészlete $R_\xi = \{0, 1, 2\}$ és $R_\eta = \{0, 1\}$. Ez azt jelenti, hogy mindkét változó diszkrét, továbbá a (ξ, η) párnak legfeljebb 6 lehetséges értéke van: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$
A ξ és az η együttes eloszlása:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\text{két 0-t dobunk}) = 1/4,$$

$$P(\xi = 1, \eta = 0) = P(\text{egy 0-t és egy 1-est dobunk}) = 1/2,$$

$$P(\xi = 2, \eta = 1) = P(\text{két 1-est dobunk}) = 1/4.$$

Más lehetőség nem következhet be, tehát a (ξ, η) párnak összesen 3 lehetséges értéke van. A következő grafikonon tömör karikával jelöltük ezt a három lehetséges értékét, és üres karikával azokat a párokat, melyek első körben lehetséges értéknek tűntek, de kiderült, hogy nem azok. A jobb oldali táblázat a változók együttes eloszlását tartalmazza.



	0	1	2	η
1	0	0	1/4	1/4
0	1/4	1/2	0	3/4
ξ	1/4	1/2	1/4	1

A változók marginális eloszlása könnyedén megkapható, csak össze kell adni a táblázat egyes soraiban illetve oszlopaiban található valószínűségeket. A táblázat utolsó sorában és utolsó oszlopában a ξ illetve az η marginális eloszlása található.

A marginális eloszlás meghatározása

Az együttes eloszlásból a marginális eloszlásokat a következő módon lehet meghatározni:

$$P(\xi = x) = \sum_{y \in R_\eta} P\big(\xi = x, \eta = y\big)\,, \quad P(\eta = y) = \sum_{x \in R_\xi} P\big(\xi = x, \eta = y\big)\,.$$

Feladat. Határozzuk meg a ξ és az η valószínűségi változók várható értékét, szórását és a korrelációs együtthatójukat.

A ξ és az η változó várható értéke:

$$E(\xi) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1, \qquad E(\eta) = 0 \cdot 3/4 + 1 \cdot 1/4 = 0{,}25.$$

A második momentumok és a változók szórásnégyzete:

$$E(\xi^2) = 0^2 \cdot 1/4 + 1^2 \cdot 1/2 + 2^2 \cdot 1/4 = 2{,}5, \qquad D^2(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 1{,}5,$$

$$E(\eta^2) = 0^2 \cdot 3/4 + 1^2 \cdot 1/4 = 0{,}25, \qquad D^2(\eta) = E(\eta^2) - (E(\eta))^2 = 0{,}1875.$$

Ekkor a két szórás

$$D(\xi) = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225, \qquad D(\eta) = \sqrt{0{,}1875} = 0{,}433.$$

A korrelációs együtthatóhoz először a kovarianciát kell maghatározni az alábbi formulával:

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$$

Emlékezzünk rá, hogy egy ξ diszkrét változó és egy $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén a $h(\xi)$ transzformált változó várható értéke:

$$E\big(h(\xi)\big) = \sum_{x \in R_\xi} h(x) P(\xi = x)$$

Hasonló megfontolásból kapjuk, hogy diszkrét változók esetén a szorzat várható értéke

$$E(\xi\eta) = \sum_{x \in R_\xi, y \in R_\eta} xy P\big(\xi = x, \eta = y\big)$$

A mostani példára kapjuk, hogy

$$E(\xi\eta) = 0 \cdot 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 0 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1 \cdot 1/4 = 0{,}5,$$

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0{,}5 - 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25.$$

Ekkor a korrelációs együttható értéke

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{0{,}25}{1{,}225 \cdot 0{,}433} = 0{,}47\,,$$

tehát a két változó között gyenge pozitív irányú függőség van.

Diszkrét valószínűségi változók függetlensége

Akkor mondjuk, hogy egy ξ és egy η diszkrét valószínűségi változó független egymástól, ha tetszőleges $x \in R_\xi$ és $y \in R_\eta$ értékek esetén

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)\,.$$

A következő állítás a független események feltételes valószínűségére vonatkozó tételből következik, és azt fogalmazza meg, hogy két diszkrét változó pontosan akkor független, ha a két változó nem hat egymásra.

Diszkrét valószínűségi változók függetlensége

Legyen ξ és η diszkrét valószínűségi változó. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:

1. A két változó független egymástól.
2. $P(\xi = x \mid \eta = y) = P(\xi = x)$ minden $x \in R_\xi$ és $y \in R_\eta$ esetén.
3. $P(\eta = y \mid \xi = x) = P(\eta = y)$ minden $x \in R_\xi$ és $y \in R_\eta$ esetén.

Feladat. Tekintsük ismér a pénzérmés feladatot. Független egymástól a ξ és az η változó?

1. Megoldás. Nem, ugyanis nem 0 a korrelációs együtthatójuk.

2. Megoldás. Nem, ugyanis $x = 0$ és $y = 1$ esetén nem teljesül a függetlenség definíciója:

$$P(\xi = 0, \eta = 1) = 0 \neq 1/4 \cdot 1/4 = P(\xi = 0)P(\eta = 1).$$

Feladat. Adjuk meg ξ és η együttes eloszlását olyan módon, hogy a marginális eloszlásk ne máltozzanak, de a két változó független legyen.

Mivel ξ és η változó külön-külön vett eloszlása adott, a két változó csak akkor lehet független, ha az együttes eloszlást a következő formulával definiáljuk:
$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$.

	0	1	2	η
1	1/16	1/8	1/16	1/4
0	3/16	3/8	3/16	3/4
ξ	1/4	1/2	1/4	1

A megoldás a mellékelt táblázatban található. Házi feladat leellenőrizni, hogy ebben az esetben tényleg 0 lesz a korrelációs együttható.

A nagy számok törvényei

A félév folyamán véletlen kísérletekkel, valamint az ezekhez kapcsolódó eseményekkel és valószínűségi változókkal foglalkoztunk. Az empirikus tapasztalatok alapján egy kísérletetet sokszor megismételve mind az események, mind a változók szempontjából kialakul egyfajta egyensúly:

- Legyen $k_n(A)$ az A esemény bekövetkezési gyakorisága n ismétlés után. Ekkor a relatív gyakoriság konvergál az esemény valószínűségéhez: $k_n(A)/n \to P(A), \quad n \to \infty.$
- Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ a ξ változó megfigyelt értékei az ismétlések során. Ekkor a megfigyelések átlaga konvergál a várható értékhez:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to E(\xi)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Ez a két észrevétel tapasztalati tény, a valóság így működik. Jogos a kérdés, hogy vajon a matematika is így működik-e, tehát be lehet-e bizonyítani a fenti konvergenciákat matematikai eszközökkel. A válasz az, hogy igen, bár a bizonyítások nehezek, és meghaladják a félév kereteit.

A nagy számok Kolmogorov-féle törvénye (1933)

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású változó. Ekkor a változók átlagai 1 valószínűséggel konvergálnak a közös várható értékhez, tehát

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to E(\xi_1)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

A nagy számok törvénye azt fejezi ki, hogy ha sok megfigyelésünk van egy ξ változóra, akkor ezen megfigyelések átlaga közel lesz a várható értékhez. Ez a tétel motiválta azt, hogy a várható értéket „átlagos értékként" értelmezzük.

Fontos megjegyezni, hogy a fenti tételben az $E(\xi)$ várható érték egyenlő lehet $\pm\infty$-nel is. Ebben az esetben a változó megfigyelt értékei között nagyon sok nagyon nagy vagy nagyon sk nagyon kicsi érték fordul elő, ami azt fogja eredményezni, hogy a megfigyelések $(\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n$ átlaga elmegy a végtelenbe. Ebben nincsen semmiféle matematikai ellentmondás.

A nagy számok Borel-féle törvénye

Tekintsünk egy véletlen kísérletet, és legyen A egy tetszőleges esemény. Jelölje $k_n(A)$ az A esemény bekövetkezési gyakoriságát a kísérlet n alkalommal való független megismétlése után. Ekkor a relatív gyakoriság 1 valószínűséggel konvergál az esemény valószínűségéhez, tehát

$$\frac{k_n(A)}{n} \to P(A)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

A nagy számok Borel-féle törvénye azt mondja ki, hogy a kísérletet sok alkalommal megismételve az A esemény bekövetkezési gyakorisága $k_n(A) \approx P(A)n$, tehát az A esemény a kísérleteknek körülbelül $P(A)$ hányadában következik be. Ez azt jelenti, hogy a valószínűség matematikai definíciója nincs ellentmondásban a valószínűség hétköznapi definíciójával.

Bizonyítás. Vezessük be a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változókat a következő módon:

$$\xi_i = \begin{cases} 1\,, & \text{ha az } i\text{-dik kísérlet alkalmával az } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0\,, & \text{ha az } i\text{-dik kísérlet alkalmával az } A \text{ nem következik be.} \end{cases}$$

Mivel a kísérleteket egymástól függetlenül hajtjuk végre, a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ változók függetlenek lesznek. Emellett a változók azonos eloszlásúak is:

$$P(\xi_i = 1) = P(\text{az } i\text{-dik kísérlet alkalmával az } A \text{ bekövetkezik}) = P(A)\,,$$

$$P(\xi_i = 0) = P(\text{az } i\text{-dik alkalommal } A \text{ nem következik be}) = 1 - P(A)\,.$$

Ekkor a változók közös várható értéke:

$$E(\xi_1) = 1 \cdot P(\xi = 1) + 0 \cdot P(\xi = 0) = P(A)\,.$$

A nagy számok Kolmogorov-féle törvényét alkalmazva ebből megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\frac{k_n(A)}{n} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to E(\xi_1) = P(A)$$

Alkalmazások

Szerencsejátékok. A továbbiakban szerencsejáték alatt azt értjük, amikor egy profitorientált szervezet (kaszinó, fogadóiroda, illegális bukmékerek) szervezésében olyan nyereményjátékot lehet játszani, mely során véletlen nagyságú nyereményt lehet nyerni. A fontosabb fogalmak:

- A játékban két fél vesz részt, a **kaszinó** és a **játékos**.
- A játékos egy előre meghatározott díjat fizet a játékért, ez a **játék ára**, jele: c. A játékos **nyereménye** egy ξ valószínűségi változó.
- A kérdés az, hogy milyen ár esetén éri meg az egyes feleknek beszállni a játékba. Kérdés továbbá az **igazságos ár** is, bár egyelőre még nem egyértelmű, hogy ez alatt mit is kell érteni.
- A továbbiakban fontos tényező lesz, hogy a kaszinó és a játékos helyzete aszimetrikus. A kaszinó sok játékossal áll kapcsolatban, és az a célja, hogy sok játék után termeljen profitot. Ezzel szemben a játékos játszhat sok, de akár kevés játékot is, és ebben a két esetben eltérő lesz a játékos számára elfogadható ár.

A kaszinó szempontjából a helyzet elég egyszerű, őt az érdekli, hogy a játék ára magasabb legyen, mint az egy játékra jutó átlagos nyeremény. Mivel a kaszinó sok játékban vesz részt, az átlagos nyeremény a nagy számok törvénye miatt nem lesz más, mint a nyeremény várható értéke. Tehát a kaszinó a játék árazásánál a következő szabályt fogja követni:

$$\text{a játék ára} > \text{átlagos nyeremény} = E(\text{nyeremény}) = E(\xi)$$

Amennyiben a játékos sok játékot játszik, akkor számára az a fontos, hogy az átlagos nyeremény magasabb legyen, mint a játék ára. Tehát a játék ára akkor elfogadható a játékos számára, ha

$$\text{a játék ára} < \text{átlagos nyeremény} = E(\text{nyeremény}) = E(\xi)$$

A játék „igazságos ára" a $c = E(\xi)$, ugyanis ezen ár mellett várható értékben mindkét fél a pénzénél marad. A fenti gondolatmenetből látszik, hogy egy kaszinó mindig az igazságos ár felett adja el a játékot, míg egy racionálisan(!) gondolkodó játékos csak olyan játékba szállna be, amelynek az ára az igazságos ár alatt van. Tehát ha csak racionálisan gondolkodó játékosok léteznének, akkor nem létezne a szerencsejáték-ipar.

Feladat. Egy kaszinó egy olyan játékot indít, melyben 5% eséllyel 10.000 dollárt lehet nyerni, míg a többi esetben 0 a nyeremény. Határozzuk meg a játék igazságos árát. Milyen áron fogja a kaszinó eladni ezt a játékot?

Most a nyeremény eloszlása: $P(\xi = 10.000) = 0{,}05$, $P(\xi = 0) = 0{,}95$.
A játék igazságos ára a nyeremény várható értéke:

$$E(\xi) = 10.000 \cdot P(\xi = 100) + 0 \cdot P(\xi = 0) = 500$$

A kaszinó csak 500 dollárnál magasabb áron lesz hajlandó eladni ezt a játékot, ami a racionálisan gondolkodó játékosok számára nem elfogadható

Fontos hangsúlyozni, hogy a kaszinó mindig sok játékban gondolkodik, tehát számára a nyeremény várható értéke az irányadó. Ezzel szemben a játékos oldaláról teljesen más megközelítést kell alkalmaznunk akkor, ha kevés, mondjuk csak egy játékot játszik. Egy játék esetén nincs jelentősége annak, hogy mennyi az átlagos nyeremény, csak az a fontos, hogy mik a lehetséges nyeremények. Egy játék esetén a racionálisan(!) gondolkodó játékos döntését hasznossági függvényekkel szoktuk matematikailag modellezni, amit a következő feladaton keresztül mutatjuk be.

Feladat. Tekintsük az előző oldalon bevezetett játékot, és tegyük fel, hogy a játékos az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvényen keresztül értékeli az anyagi helyzetét. Mi a játékos számára elfogadható ár?

A játékosnak most két fogyasztói kosár közül kell választania:

- 1. kosár: Nem játszik, tehát megtartja a játék c árát. Ilyen módon a játékos $u(c) = \sqrt{c}$ hasznosságot ér el.
- 2. kosár: Játszik, tehát feláldozza a c összeget a ξ nagyságú nyereményért cserébe. Ekkor az elért hasznosság várható értéke:

$$\begin{aligned} E\big(u(\xi)\big) &= \sqrt{10.000} \cdot P(\xi = 10.000) + \sqrt{0} \cdot P(\xi = 0) \\ &= 100 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 0{,}95 = 5 \end{aligned}$$

A játékos számára akkor közömbös a két fogyasztói kosár, ha egyenlő a hasznosságuk: $\sqrt{c} = 5$, amiből $c = 25$. Ha a játék ára ennél a küszöbértéknél magasabb, akkor a játékosnak nem éri meg feláldozni a biztos jövedelmet a bizonytalan nyereményért cserébe. Ha a játék ára 25 dollárnál alacsonyabb, akkor viszont megéri játszani.

A játékos szempontjából nagy jelentősége van annak, hogy csak egy játékra van lehetősége, vagy többre is. Egy játék esetén a játékos által elfogadható ár (25 dollár) jóval alcsonyabb, mint sok játék esetén (500 dollár). Ennek a kockázatkerülés az oka: a racionálisan gondolkodó egyén preferálja a biztos jövedelmet a bizonytalannal szemben. De egy dolog közös a két esetben: mivel a kaszinó a játékot csak az igazságos ár felett adja el, ez az ár a racionálisan gondolkodó játékos számára egyik esetben sem elfogadható.

A valóságban a szerencsejáték nagy üzlet, ami azt jelenti, hogy sok a nem racionálisan gondolkodó játékos. Mi lehet ennek az oka?

- Sok játékos nem csak tisztán a nyereményért, hanem az élményért, a szórakozásért is játszik.
- Sokan a reményt vásárolják meg a játékkal: tudják, hogy kicsi a nyerés esélye, de a nyereménnyel megváltoztathatják az életüket.
- A hasznossági függvénynek másmilyen az alakja: bizonyos összeghatár alatt az egyén értéktelennek tartja a pénzt, és bármire feláldozza.
- Sokan egyszerűen csak rosszul mérik fel a valószínűségeket, és nincsenek tisztában vele, hogy a szabályok a játékos ellen dolgoznak.

Biztosításmatematika. Egy biztosítótársaság egy veszélyközösségbe sorolja azokat az ügyfeleket, akik egyforma, vagy hasonló kockázatnak vannak kitéve. A veszélyközösségek kialakításának az a koncepciója, hogy a hasonló kockázatú biztosítottak a befizetett díjak révén fedezzék a saját csoportjukat érő károkat, tehát a biztosítónak erre a célra ne egy másik veszélyközösség befizetéseit kelljen használnia. (Például a biztosító a belvízkárokat a mezőgazdasági károk biztosítási díjaiból kívánja fedezni, és nem a lakásbiztosításokból. Hasonló veszélyközösségeket alkotnak a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás esetében a bonus-malus kategóriák.) A biztosítótársaságok a károkat matematikailag úgy modellezik, hogy egy adott biztosított esetében az őt érő véletlen nagyságú kár legyen egy ξ valószínűségi változó. Nyilvánvaló, hogy $\xi \geqslant 0$, és a legtöbb biztosított esetében $\xi = 0$, hiszen a biztosítottak többsége nem fog kárt elszenvedni. A különböző biztosítottak és a különböző biztosítástípusok esetében a ξ kár eloszlása nagyon különbözhet. Egy veszélyközösséget azon ügyfelek alkotnak, akiknél a ξ kár azonos eloszlású. Feltehető az is, hogy a különböző ügyfelek esetében az őket érő károk nagysága független.

Alapvetően azt kell észrevennünk, hogy a biztosítók működése nagyon hasonlít a kaszinók működéséhez:

- Adott egy profitorientált szervezet (biztosító, kaszinó), mely sok ügyféllel (biztosított, játékos) áll szerződésben.
- Az ügyfelek egy előre meghatározott díjat (biztosítási díj, a játék ára) fizetnek a szervezetnek, melyért cserébe a szervezet egy véletnek nagyságú összeget (kártértés, nyeremény) fizet az ügyfeleknek.

Természetesen a biztosítások és a szerencsejátékok esetében az, hogy a biztosító mekkora kártérítést illetve nyereményt fizet az ügyfélnek, eltérő mechanizmusok szerint alakul ki, de matematikai szempontból most csak az a fontos, hogy az ügyfél kapni fog egy ξ véletlen nagyságú összeget.

A biztosítók és a kaszinók működésében a fő különbség az, hogy a törvényalkotó szervek az elsőt társadalmilag hasznosnak, míg a másodikat károsnak tartják. Ennek következtében a kétfajta szervezet működése eltérő módon van szabályozva, például a biztosítóknak nagyobb kockázati tartalékkal kell rendelkezniük. Ezen eltéréseknek vannak matematikai következményei, de ezen kurzus keretei között ezeket már nem vizsgáljuk.

Egy biztosító a biztosítási díjat ugyanazzal a gondolatmenettel határozza meg, mint egy kaszinó: a díj legyen magassabb, mint az egy ügyfélre jutó átlagos kifizetés. Mivel a biztosítóval sok biztosított áll szerződésben, az átlagos kifizetés a nagy számok törvénye miatt egyenlő a kárnagyság várható értékével. Tehát:

$$\text{biztosítási díj} > \text{átlagos kifizetés} = E(\text{kárnagyság}) = E(\xi)$$

Feladat. A munkámhoz szükségem van egy 10.000 dolláros berendezésre, ami az elkövetkező évben 5% eséllyel javíthatatlanul tönkremegy. Szeretnék biztosítást kötni erre az eseményre. Milyen biztosítási díj mellett fog egy biztosító szerződést kötni velem?

A feladatot pontosan ugynúgy kell megoldani, mint a szerencsejátékos példát. A kárérték egy olyan ξ valószínűségi változó, aminek az eloszlása:

$$P(\xi = 10.000) = 0{,}05, \qquad P(\xi = 0) = 0{,}95.$$

A biztosítás „igazságos ára” a várható kárnagyság:

$$E(\xi) = 10.000 \cdot P(\xi = 100) + 0 \cdot P(\xi = 0) = 500 \text{ dollár}$$

Tehát a biztosító 500 dollárnál nagyobb összeget fog majd kérni.

Felmerül a kérdés, hogy ez az ár megéri-e nekem. Az 5%-os valószínűség azt jelenti, hogy ez a káresemény átlagosan 20 évente egyszer következik be. Ha minden évben félreteszek 500 dollárt, akkor 20 év alatt meg tudok spórolni 10.000 dollárt, tehát tudok vásárolni egy új berendezést. Miért fizetnék akkor 500 dollárnál többet a biztosítónak?

Azért vagyok hajlandó 500 dollárnál többet fizetni, mert kockázatkerülő vagyok. El akarom kerülni annak a lehetőségét, hogy a berendezés már az első évben tönkremegy, és én itt maradok munka nélkül. A biztosítások esetében az ügyfelek NEM a nagy számok törvényével értékelik a biztosítási díjat, ugyanis ennek a megközelítésnek csak 40-50 év távlatában lenne értelme. A biztosítottak döntéseit a rövidtávú kockázatkerülés határozza meg, melyet hasznossági függvényekkel szoktunk matematikailag modellezni. A gondolatmenet hasonló lesz ahhoz, amit a szerencsejátékok esetében is alkalmaztunk, de lesz majd egy lényeges eltérés, ami miatt teljesen más végeredményt fogunk majd kapni.

Feladat. Az anyagi helyzetemet az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvénnyel értékelem. Mi a számomra elfogadható biztosítási díj?

Legyen c a biztosítás díja. Két fogyasztói kosár közül kell választanom:

- 1. kosár. Megkötöm a biztosítást, tehát odaadom a c díjat a biztosítónak. Ebben az esetben év végén garantáltan 10.000 dollár lesz a birtokomban: ha nem ér kár, akkor ennyit ér a berendezésem; míg ha a berendezés tönkremegy, akkor ennek az árát a biztosító kifizeti nekem. Az elért hasznosság: $u(10.000) = 100$.
- 2. kosár. Nem kötök biztosítást, amikor is két dolog történhet: nem ér kár, és $10.000 + c$ lesz a vagyonom; vagy kár ér, elveszítem a berendezést, és a megspórolt c biztosítási díj lesz a teljes vagyonom. Tehát a vagyonom révén elért hasznosság várható értéke:

$$u(10.000 + c) \cdot 0{,}95 + u(c) \cdot 0{,}05 = 0{,}95\sqrt{10.000 + c} + 0{,}05\sqrt{c}$$

Racionálisan gondolkodó egyénként én azt az opciót fogom majd preferálni, amelyiknek nagyobb a hasznossága. Határozzuk meg, hogy milyen c biztosítási díj esetén közömbös a két fogyasztói kosár, tehát mikor egyenlő a hasznosságuk.

A következő egyenletet kell megoldani: $0{,}95\sqrt{10.000+c}+0{,}05\sqrt{c}=100$. Vonjuk ki a $0{,}05\sqrt{c}$ tagot mindkét oldalból, majd emeljünk négyzetre:

$$0{,}95^2(10.000+c)=(100-0{,}05\sqrt{c})^2$$

A négyzetre emelés és az egyenlet rendezése után azt kapjuk, hogy:

$$0{,}9c+10\sqrt{c}-975=0$$

Ebből $d=\sqrt{c}$ helyettesítéssel egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$0{,}9d^2+10d-975=0$$

A megoldóképletet alkalmazva a megoldások:

$$d_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 0{,}9\cdot(-975)}}{2\cdot 0{,}9}=\frac{-10\pm 60}{1{,}8}=\begin{cases}27{,}8\\-38{,}9\end{cases}$$

Most $d=\sqrt{c}>0$, ezért csak az első megoldás jöhet szóba. Azt kapjuk, hogy $d=27{,}8$, amiből $c=d^2=773$.

Foglaljuk össze, hogy mit is kaptunk.

- A kárérték várható értéke 500 dollár, tehát a biztosító ennél több pénzt fog majd elkérni a biztosításért.
- Számomra a 773 dollár az az ár, amikor a két opció (kötök biztosítást vagy nem) közömbös. Ha a biztosítási díj ennél magasabb, akkor nem kötök biztosítást.
- Tehát ha a biztosítási díj 500 és 773 dollár közé esik, akkor mindkét fél elégedett lesz, megszületik a biztosítás.

Sok ember sajnos úgy gondolkodik, hogy ha egy üzlet megéri az egyik szerződő félnek, akkor az biztosan hátrányos a másik félre nézve. Ez a megközelítés nem mindig igaz, és ennek az az oka, hogy sok esetben a szerződő felek más prerenciák szerint értékelik a megegyezést, és elképzelhető, hogy az eltérő preferenciák miatt a szerződés mindkét félnek előnyös lesz. Például a biztosítások esetében a biztosító a nagy számok törvénye, míg a biztosított az egyéni kockázatkerülés szempontjából árazza be a szerződést. Emiatt léteznek olyan árak, melyek mindkét fél számára elfogadhatóak. A szerencsejátékok esetében persze teljesen más a helyzet...

A fizikai mérések elmélete. Ha meg kívánnunk mérni egy ismeretlen a fizikai mennyiséget, (például a gravitációs gyorsulást vagy a fény sebességét,) akkor a mérési hibák miatt sosem kapjuk meg pontosan ennek a mennyiségnek a pontos értékét, hanem egy ξ véletlen értéket kapunk. Lényegében az történi, hogy az a determinisztikus értékhez hozzáadódik a véletlen nagyságú mérési hiba. Mérési hiba több tényezőből származhat:

- külső zavaró tényezők: például a föld légköre vagy a rádióállomások jele a csillagászatban;
- a mérőműszer hibája: például kisebb hőmérsékletváltozás hatására;
- leolvasási hiba: a digitális kijelzők mindig csak kerekített értéket írnak ki, de egy higanyos hőmérőt sem lehet szemmel tökéletesen leolvasni.

Napjainkban a fizika legtöbb területén a mérési hibák már nagyon kicsik, így a kérdéses mennyiségek már egyetlen méréssel is nagy pontossággal meghatározhatóak. (Régen ez természetesen nem volt így.) Azonban még mindig van néhány terület, (például a csillagászat és a magfizika,) ahol relatíve nagy mérési hibákkal dolgoznak. Felmerül a kérdés, hogy ebben az esetben hogyan lehet megkapni az ismeretlen a mennyiség pontos értékét.

A fizikusok ezt a problémát évszázadok óta úgy oldják meg, hogy több mérést végeznek el ugyanarra a mennyiségre, és kiátlagolják az eredményeket. Tegyük fel, hogy n darab mérést végeztünk el, és legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a mérések eredménye. Ekkor a nagy számok törvénye szerint

$$\text{a mért értékek átlaga} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to E(\xi)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Azt mondjuk, hogy a mérés **torzítatlan**, ha $E(\xi) = a$, tehát a mérés eredményének a várható értéke egyenlő a kérdéses a mennyiséggel. Ebben elegendően sok mérést elvégezve az a mennyiség tetszőleges pontossággal meghatározható. Ez az az eset, amit a fizikusok szeretnek.

Ha a mérés **torzított**, tehát $E(\xi) \neq a$, akkor a kérdéses a mennyiség nem határozható meg átlagolással. Ebben az esetben az szokott lenni a cél, hogy a fizikusok meghatározzák a torzítás mértékét, tehát az $E(\xi) - a$ különbséget. Ennek ismeretében az a érték már kiszámolható.

A torzítás mértékét legkönnyebben a mérőműszer tesztelésével lehet meghatározni. A fizikusok megmérnek olyan mennyiségeket, melyeknek ismerik az igazi értékét, majd ennek segítségével meghatározzák, hogy a mérőműszer milyen mértékű mérési hibát vét.