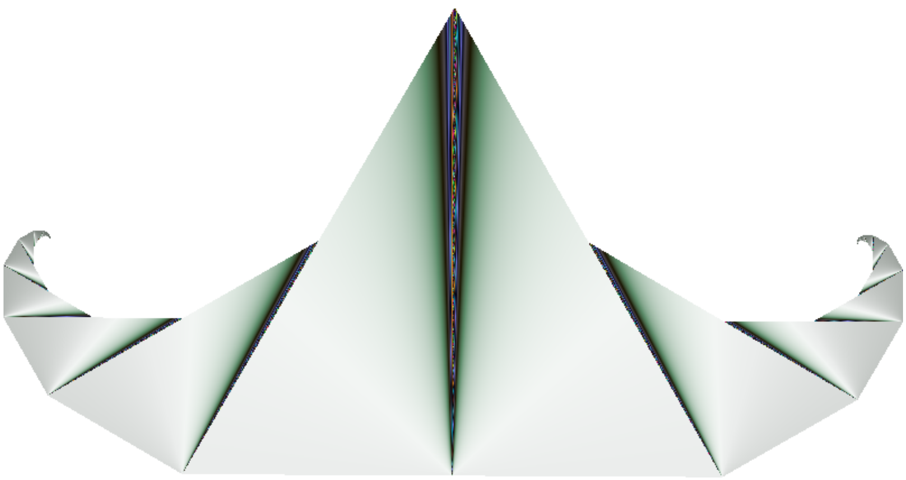
Teaching Mathematics and Statistics in Sciences, Modeling and Computer-Aided Approach

IPA HU-SRB/0901/221/088

XaoS

Fekete-Nagy Ágnes, Kovács Zoltán



Szegedi Tudományegyetem
2011

Tartalomjegyzék

Előszó az elektronikus változathoz

A XaoS fraktálok számítógépes vizsgálatára készített oktatói-kutatói program. 1996-ban készítette Jan Hubička cseh középiskolás diák. Használatával a fraktálok matematikájának számos ismérvére fény derül, még akkor is, ha a matematika mélységeit nem igazán értjük.

Ezen dokumentum eredetije szakdolgozatként készült a Szegedi Tudományegyetemen 2011-ben. Jelenleg olvasható formája a „Jó szomszédok a közös jövőért” (IPA HU-SRB/0901/221/088, 2010-2011) projekt támogatásával valósult meg. Az interneten lapozható, HTML alapú formátum a matek.hu tudástárban érhető el.

1. Bevezetés

Amikor körülnézünk a természetben, olyan bonyolultnak látszó formákat látunk, mint például felhőket, hegyeket, fákat, folyókat. Ezeket nem tudjuk szögekkel vagy körökkel helyettesíteni, nem tudjuk őket a klasszikus euklideszi geometria eszközeivel leírni. Már majdnem harminc éve annak, hogy tért hódított egy új filozófia, Benoit Mandelbrot filozófiája, miszerint a felhők nem gömbök, a hegyek nem kúpok, a partvonalak nem körívek, a fakéreg nem sima és a villám sem terjed egyenes vonalban. Úgy tűnik tehát, hogy az összetett alakzatok tekintetében új kérdések merültek fel, vagy ahogy Lichtenberg, német matematikus is leírta: „Új pillantásokat kell vetnünk a régi lyukakon keresztül”.

Fraktálokkal először a főiskolai tanulmányaim során találkoztam, annak ellenére, hogy a középiskolában matematika fakultációra is jártam. Persze, hisz nem szerepel a fraktálok témaköre a tananyagban, azonban mégis ez egy olyan része a matematikának, ami a gyerekek, diákok számára is magával ragadó lehet. Az új, nem megszokott, de mégis ismerős alakzatokból felépülő fraktálok bevezetése jó témáját szolgáltathatja egy-egy szakköri vagy jubileumi órának, akár a komplex számok vagy a geometria témakörén belül. Manapság egyre több iskolában van interaktív tábla, amely matematika órán is nagyon hasznos, gondoljunk csak egy függvényábrázolásra vagy akár csak egy egyszerű háromszög megszerkesztésére. Az iskolaigazgatók is egyre jobban szorgalmazzák az IKT eszközök használatát, valamint a diákok is közelebb állnak a számítógéphez, mint a papírhoz és a ceruzához. A XaoS egy olyan program, amellyel szebbnél szebb képeket varázsolhatunk a monitorunkra és nem mellékesen közelebb hozza a gyerekeket a matematikához. Segítségével könnyebben fogható fel a gyerekek számára a végtelen fogalma, hiszen a belenagyítás során kisebb és kisebb részek nőnek nagyobbra, így közelednek felénk a színes, magával ragadó képek.

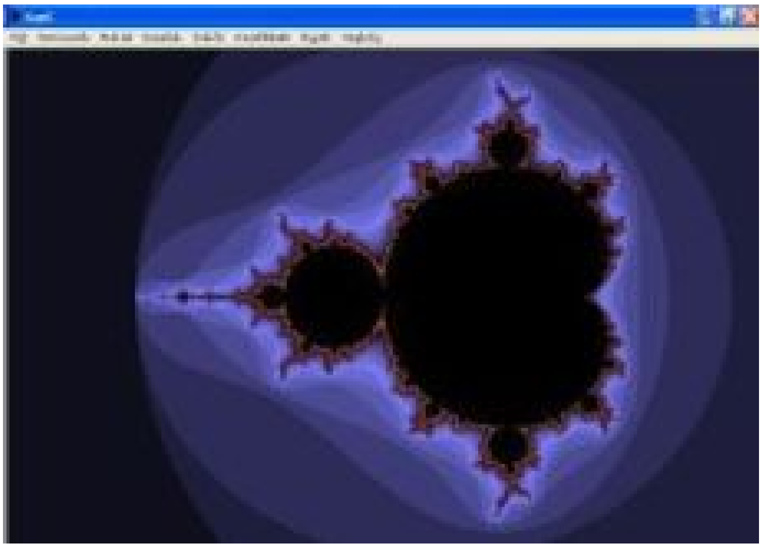
Dolgozatom témája is maga ez a nagyszerű fraktálrajzoló szoftver, a XaoS. A program letöltése nem okozott gondot, könnyen hozzáférhető az interneten keresztül, és nem is sok időt vesz igénybe. Szerencsére létezik magyar nyelvű változat is, így az angolul nem beszélő kollégák is tudják az óráikon használni. A számítógépem nem a legmodernebb, de teljesen jól, gond nélkül fut rajta a XaoS. A szoftver nagy előnye, hogy dinamikus, gyors, interaktív és jól irányítható. Ebből a szempontból pont olyan, mint egy átlagos számítógépes játék; csak a billentyűzet és az egér szükséges a működtetéséhez. A XaoS menürendszere és almenüje is egyszerű, könnyen kezelhető. Az egyes opciók használatának előnyeivel és hátrányaival megismerkedhetünk a későbbiekben. A dolgozatomban helyet kapnak maguk a fraktálok is, ezek matematikai háttere, a megalkotás eljárása, valamint ezekkel kapcsolatos néhány elemi feladat. A XaoS használata során rengeteg képet készítettem, ezek közül is szerepel néhány a munkámban.

Magát a munkát egy webes felületen végeztem, a `matek.hu/tudastar` oldalon. Ez egy Mediawikivel készített weblap, így a szerkesztése is a wikinek megfelelően működött. Mindvégig nagy segítségemre volt az internetről letölthető cheatsheet (puskalap), amelyből az alapvető használati, szerkesztési tippeket néztem ki. Sokszor böngésztem más wikis lapokat is, és egy-egy szerkesztési módot onnan másoltam ki, és utána formáztam át a saját mondanivalómra. Az elkészült szócikkeket utána nagyrészt automatikus exporttal, részben pedig kézzel generáltuk témavezetőm segítségével LaTeX formává.

A dolgozat 4 részből áll. A 2. fejezetben a szoftver legfontosabb tulajdonságait, a 3. fejezetben pedig a menürendszert tekintjük át. Ez utóbbi fejezet alfejezetei az eredeti wikis rendszerben külön szócikkekként jelennek meg. A 4. fejezet egy önálló szócikkből készült, mely a fraktálok történetéről szól. Az 5. fejezetben pedig, ahol az egyes alfejezetek eredetileg szintén önálló szócikkek a wikis rendszerben, a fraktálok matematikájába tekintünk be.

Szakdolgozatom tehát lényegében wikis szócikkek összessége. A szövegek egymás után fűzésekor azonban törekedtem arra, hogy munkám önálló olvasmányként is hasznos és hiánypótló dokumentum legyen.

2. XaoS



A XaoS (ejtsd: „kháosz”) egy ingyenesen letölthető, gyors interaktív fraktálrajzoló szoftver, mely sok-sok segítséget nyújthat a fraktálok megismerésében. A program használata során akármennyire ráközelíthetünk és eltávolodhatunk egy adott ponttól, és közben folyamatosan szemmel is követhetjük a változásokat, jobban mondva a változatlanságokat.
A program akkor is könnyen használható, ha nem ismerjük magukat a fraktálokat. A beépített animáció segítségével gyorsan és látványos módon ismerkedhetünk meg a fraktálok legalapvetőbb tulajdonságaival.

2.1. Jellemzői

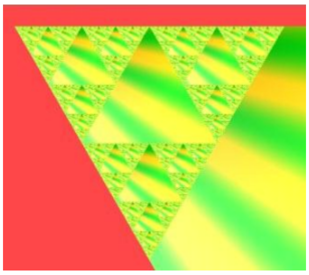
A XaoS legfőbb előnye, hogy szélesebb körű betekintést nyerhetünk a fraktálok világába azzal, hogy szabadon és könnyen ráközelíthetünk a fraktálra és el is távolodhatunk tőle. Ez a dinamikus vizualizációs rendszer a legfőbb fraktáltípusokat tartalmazza, de egyedi képlet beírására is van lehetőség. Az alakzatokat egy-két gombnyomással hívhatjuk elő, majd pedig kedvünk szerint változtathatjuk meg a kinézetüket. Például csökkenthetjük vagy növelhetjük az iterációk számát, változtathatjuk a színezési módokat, transzformálhatjuk őket, de a szűrők aktivizálásával nagyon érdekes képek is elénk tárulhatnak. Sőt, az adott alakzat jellemző tulajdonságait, mint például a nevét, aktuális iterációk számát vagy éppen az aktuális színezést, meg is jeleníthetjük a képernyőn.
A beépített fraktálok között megtalálhatjuk a méltán híres Mandelbrot-halmazt, a Newton-féle fraktált, a Barnsleyt, de a nevezetes Koch-féle hópelyhet vagy a Spidront is.

Gyors, folyamatos működés. A XaoS sokban különbözik az ismert fraktálrajzoló programoktól. Ebben a programban csak a kurzort kell a kívánt pontra helyezni, lenyomni az egér bal gombját és máris közelítünk gyorsan és dinamikusan a fraktál belsejébe. Olyan, mintha repülnénk a fraktál felé. Ha véletlenül túlhaladtunk a célon, akkor a jobb egérgombbal könnyen vissza is fordulhatunk. Akár az egész ábrát egyben is elmozdíthatjuk.
A XaoS ráközelítő algoritmusa akkor is gyorsan működik, ha a számítógépünk nem a legmodernebb darab. Ugyanis a XaoS-t még a 486-osok idejében hozták létre, és azokhoz a gépekhez képest ma már bármelyiken jól fut.

Kézzel fogható tananyag. A XaoS-ban találhatunk számos filmszerű oktatóprogramot, amelyekkel nagyszerű lehetőségünk nyílik egy kicsit a fraktálok világába és magába a programba betekinteni. Ráadásul úgy tehetjük mindezt, hogy egyszerűen a Segítség menü Útmutatók alpontjából a nekünk tetsző címre kattintunk. Az ott található elemek némafilmek, de a képek mellett a feliratozás sokat segít abban, hogy egy-egy témáról képet kapjunk. Éppen ezért ideális tananyag egy-egy különleges matematika órán vagy szakkörön. Egy olyan száraz témát, mint például a komplex számok, vibráló, sokatmondó képek segítségével tárhatjuk a diákok szeme elé.
Íme néhány cím a filmek közül:

- Bevezetés a fraktálok világába
- Tippek és trükkök
- A fraktálok matematikája
- A XaoS további fraktáltípusai

24 beépített fraktálképlet.



A Sierpinski háromszög egy kicsit másképp

A klasszikus fraktáloktól kezdve, mint például a Mandelbrot-halmaz vagy a Sierpinski-háromszög, a kevésbé ismert macskaszemig 24 fraktált tudunk előhívni a XaoS-ból. Azonban a többi funkció segítségével szinte végtelen a képeknek a száma, melyeket létre tudunk hozni belőlük.
Bármely képletet alkalmazzuk, két módban tudjuk a képeket megjeleníteni: Mandelbrot- és Julia-módban. Ennek segítségével teljes mértékben megvizsgálhatjuk a kapcsolatot a megfelelő két halmaz különböző részei között.
Ráadásul a képeinket 6 különböző síkra helyezhetjük, így aztán tényleg nincsen se szeri se száma az előhívott, megrajzolt fraktálképeknek. Ha mindez még mindig nem lenne elég, bárkinek lehetősége van saját képlet megalkotására is.

Utólagos változtatások és szűrők. Ha még több változatosságra vagy különlegesebb látványra vágyunk, akkor aktivizáljuk a szűrők funkciót. Ezeket elég bekapcsolni a kép elkészülte után is, nem kell előre kitalálni, hogy melyiket és mikor szeretnénk használni.
Néhány példa az utólagosan bekapcsolható szűrők közül:

- edge detection, azaz a „szélek” megrajzolása
- csillagmező hatás
- dombormű hatás

30 féle színezési opció. Algoritmusok széles választéka áll rendelkezésre a fraktálok színezésére. 10 külső színezési mód, 10 belső színezési mód és még 10 true-color színezési mód is rendelkezésre áll. Közöttük vannak hagyományos színezési metódusok (iterations, biomorphs, binary decomposition) és olyanok is, amelyek csak a XaoS-ra jellemzőek.
Háromféleképpen hozhatunk létre véletlenszerű színpalettákat is, és ha ezek nagyon megtetszenek, bármikor elő is hívhatjuk őket a Paletta menü 3. menüpontjával.
Színek szempontjából a XaoS-ban megtalálható a 256 színű paletta, a hi-color, a true-color és a fekete-fehér paletta is.

Mentés, megnyitás, megosztás. A XaoS-ban elkészült ábrákat többféleképpen lehet elmenteni:

- PNG formátumban saját használatra.
- A fraktál jelenlegi állapotának mentése az összes tulajdonságával együtt, mint például elhelyezkedés, színpaletta, szűrő. Ezt a fájlt bármikor meg lehet nyitni, hogy újra megcsodálhassuk.
- Fel is lehet venni a fraktálokat egymás után, ezekből kis filmek készíthetők. Hasznos lehet saját tananyag készítésekor, vagy bemutatókhoz. Ezeket szöveg formátumban lehet elmenteni, amely szövegszerkesztővel változtatható.
- PNG fájlok sorozatából film készíthető az ffmpeg, mencoder, vagy más filmkészítő programok segítségével.

Részletes dokumentáció. A XaoS-ban elérhető egy beépített segítség, ami igen részletes és szerteágazó leírást ad a sok-sok, a programban található opcióról. Ehhez az angol nyelvtudás nélkülözhetetlen, ugyanis mindegyik angol nyelven szerepel.
A fejlesztők névjegye is megtalálható, így ha esetleg valaki kedvet érez hozzá, akkor akár segíthet is a program fejlesztésében.
Ezeken kivül több mint 50 mintapélda tölthető be a programban.

Többnyelvű. Szerencsére a XaoS menüje, párbeszédpanelei és oktatófilmjei is működnek már magyar nyelven az angol, francia, cseh, német, spanyol és a román mellett.

Technikai információk. A XaoS számos operációs rendszeren jól működik, mint például a Microsoft Windowson, Mac OS X-on, Linuxon, és más Unix-féle rendszeren is. Régebbi verziók is léteznek akár DOS-ra, BeOS-re.

Egyéb jellemzők.

2.2. Használata

A szoftver használata igen egyszerű, a számítógépen és tartozékain (egér, billentyűzet) kivül semmilyen más eszköz nem szükséges hozzá.

Egérrel.

A bal egérgomb megnyomásával közelebb kerülhetünk a kívánt ponthoz, beljebb juthatunk a fraktálba. Ennek ellentétes művelete a jobb egérgomb lenyomásával történhet meg, ekkor távolodhatunk el a fraktálunktól. Ha mindkét gombot együtt nyomjuk meg, vagy egyszerűbben az egerünk középső gombját nyomva tartjuk, a fraktál egészét is elmozgathatjuk a kívánt irányba.

Billentyűzettel.

Bizonyos menüpontok egyszerűbben előhívhatók billentyűk megnyomásával. Így változtathatjuk meg egy kicsit a képernyőn látott fraktált, de egy-egy lépést vissza is vonhatunk.
A következőkben láthatjuk, hogy egyes billentyűk mire szolgálnak a XaoS-ban (ügyelni kell a kis- és nagybetűkre, vagyis a nagybetűs funkciókhoz a Shiftet is nyomva kell tartani!):

- 0-9, A-O: beépített fraktálok
- u: mégse, az elvégzett művelet visszavonása
- f: belső színezési mód
- c: külső színezési mód
- i: sík

- m: Mandelbrot-mód
- j: Gyors Julia-mód
- b: perturbáció
- k: periodicitás vizsgálata
- o: forgatás
- a: robotpilóta
- v: VJ mód
- r: számítás
- z: megszakítás
- e: grafikai trükkök, szűrők
- /: részletes információ a fraktálról
- l: a nagyítás mélysége
- h: help vagy segítség, súgó megjelenítése
- balra, jobbra billentyű: iterációk számának változtatása
- fel, le billentyű: a közelítés, távolítás sebességének növelése ill. csökkentése
- d: alapértelmezett színek visszaállítása
- 1: alapértelmezett nézet visszaállítása
- s: Fájl menü előhívása
- q: kilépés

Menüsora.

A program menürendszere is a hétköznapi ember számára íródott, a menüsor a felső sorban, a kép felett helyezkedik el.
Az egér segítségével kattingathatunk a menüpontok között: Fájl, Szerkesztés, Fraktál, Számítás, Szűrők, Kezelőfelület és Segítség.

2.3. Elérhetősége

Eredetileg Thomas Marsh and Jan Hubička írta ezt a programot a '90-es évek közepén, de manapság Kovács Zoltán és J.B. Langston tartja karban. Rajtuk kívül legalább már 30 programozó is hozzájárult a fejlesztéshez. Azonban bárki, aki szintén kedvet érez hozzá, bekapcsolódhat a munkába.
A XaoS a GNU közösség tulajdonában álló szabad szoftver, bárki számára elérhető és használható. A program a `http://xaos.sf.net` címről letölthető.

3. Menürendszer

3.1. A Fájl menü

3.1.1. Megnyitás

Itt érhető el az a sok mintapélda, melyet a programmal együtt tölthetünk le saját számítógépünkre. Ezek mind .xpf kiterjesztéssel rendelkeznek, amelyek csak a XaoS-ban használhatók, itt nyithatóak meg. (Ezek a fájlok voltaképpen szövegfájlok. A vállalkozó kedvű, haladó ismeretekkel rendelkező felhasználók pl. a Jegyzettömb segítségével is szerkeszthetik őket.)

3.1.2. Mentés

Itt arra ad lehetőséget a program, hogy a fraktál pillanatnyi állapotát elmenthessük a programmal együtt letölthető a példák (examples) nevű könyvtárba (Linux rendszereken az aktuális könyvtárba). Az elmentett kép .xpf kiterjesztésű lesz, amelyet csak a XaoS-ban tudunk használni. Ez a fájl utána könnyen kezelhető, bármikor előhívható és jó alapja lehet bármely animációnak is.

3.1.3. Felvétel/Visszajátszás

Itt van lehetőség animáció rögzítésére és lejátszására.

3.1.4. Kép mentése

A pillanatnyi állapotot menthetjük el itt egy képfájlba. Ez a fájl PNG formátumú lesz, ami többféle módon is használható, akár grafikai vagy akár webes programban is.

3.1.5. Egy mintapélda betöltése

Ezt az opciót használva a XaoS által tárolt példákból véletlenszerűen jeleníthetünk meg egyet a képernyőn.

3.1.6. Beállítások mentése

3.1.7. Kilépés

3.2. Szerkesztés menü

Ebben a menüpontban a legegyszerűbb változtatásokra van lehetőség. Ezek a következők:

3.2.1. Mégse (u gomb)

Az utolsó elvégzett változtatás visszavonása.

3.2.2. Mégis

A visszavont utasítás újra végrehajtása.

3.2.3. Másol

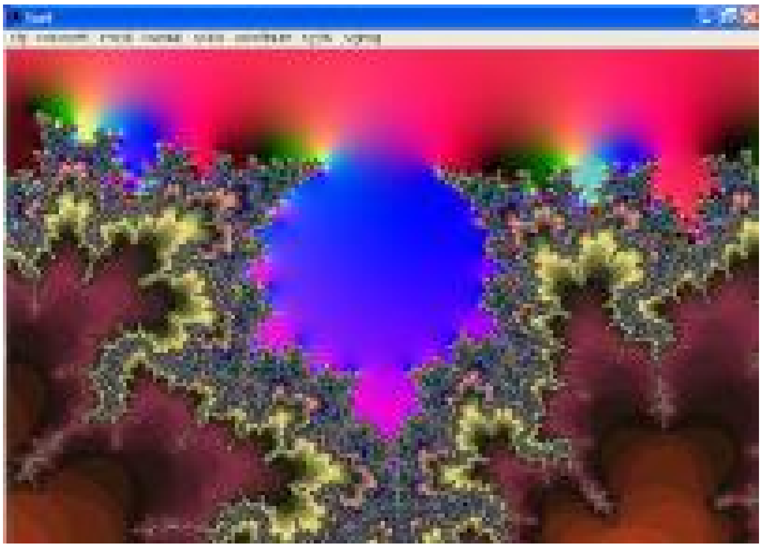
A képernyő jelenlegi állapotának vágólapra helyezése.

3.2.4. Beilleszt

A vágólapra helyezett információ előhívása.

3.3. A Fraktál menü

3.3.1. Belső színezési mód



A Mandelbrot-halmaz egy true-color belső színezési módban ráközelítéssel

Általában a fraktálok belseje egy színnel van kiszínezve, így jól kirajzolódnak a határaik. Azonban a XaoS kitalálói arra is gondoltak a program fejlesztése során, hogy egy-egy fraktál ne csak egy megjelenítésben szerepeljen, hanem érdekesebb és szebb ábrákkal is szembesülhessünk a fraktálok vizsgálata során. Ebben a menüpontban azt választhatjuk meg, hogy milyen szabály szerint legyen kiszínezve a fraktál belseje a pálya utolsó pontjának koordinátája alapján. 10 beépített mód közül válogathatunk, lássuk a négy legfontosabbat:

- 0: a belső szín fekete, ez az alapbeállítás

- zmag (z nagyság): a pálya utolsó pontjának abszolút értéke alapján színezzük a területet

- Decomposition-like: dekompozíció szerint történik a színezés

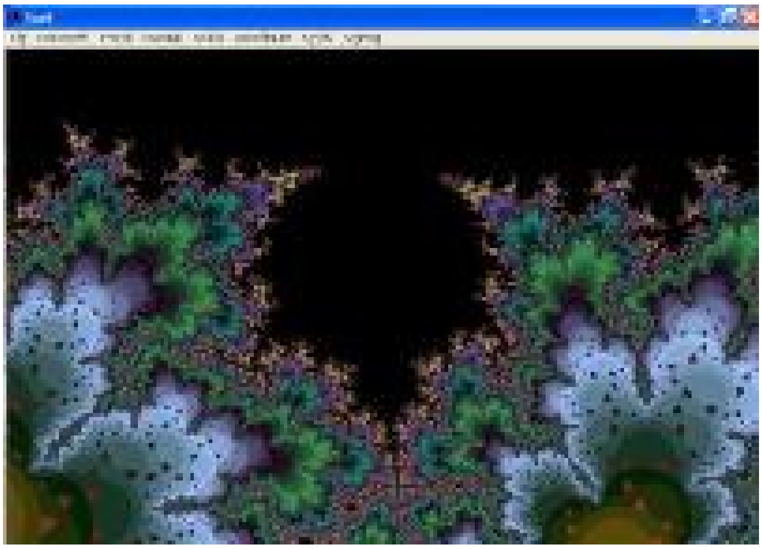
- real/image: a pálya utolsó pontjának valós és képzetes részének hányadosa alapján színezi a fraktált

A többi színezési mód egy része véletlenszerűen alkalmazza a színeket, másik részében egyéb programokból átvett képletek alapján.

Érdemes bekapcsolni a true-color színezési módot, ahol több színt használ a program, sőt gyönyörű színátmeneteket is alkalmaz.

Galéria.

3.3.2. Külső színezési mód



A Mandelbrot-halmaz egy true-color külső színezési módban ráközelítéssel

A fraktálok külső színezése is többfajta lehet az egyszínűtől a négyzetmintásig. Ezek szintén arra szolgálnak, hogy szebbé varázsoljuk a képet, amit a monitoron figyelünk. 10 beépített mód közül választhatunk, amellyel meghatározhatjuk a határon lévő színeket:

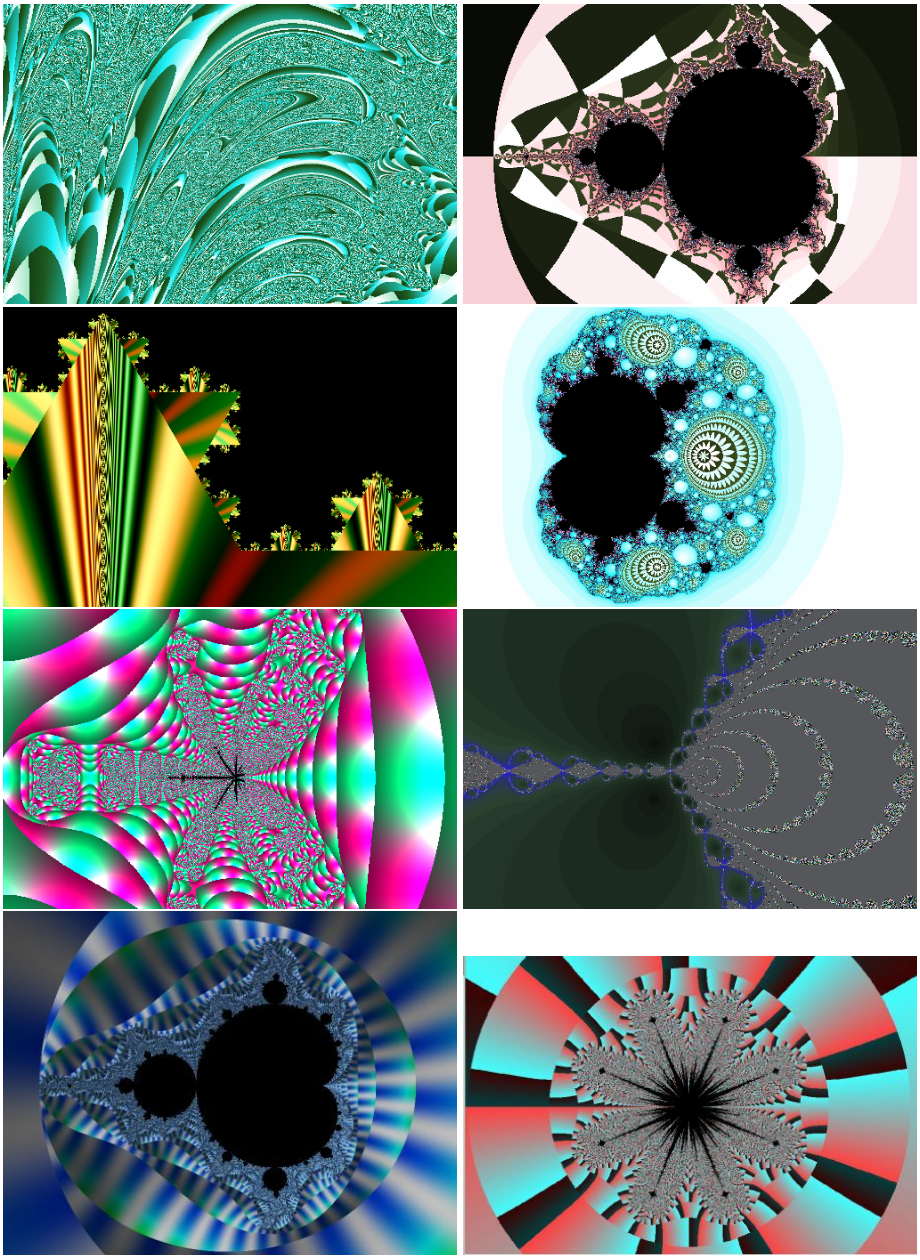
- iter: ez az alapbeállítás. A színeket a program az iterációk számának megfelelően rendeli hozzá az alakzathoz; annyi színt láthatunk a fraktál körül, amennyire az iterációk számát állítjuk a Számítás menüpont alatt.

A következőkben láthatjuk a többi hozzárendelési módot:

- iter+real: a pálya utolsó pontjának valós részét hozzáadjuk az iterációk számához
- iter+image: a pálya utolsó pontjának képzetes részét hozzáadjuk az iterációk számához
- iter+real/image: a pálya utolsó pontjának a valós és képzetes részének hányadosát adjuk hozzá az iterációk számához
- iter+real+image+real/image: a pálya utolsó pontjának valós részét, képzetes részét és ezeknek a hányadosát adjuk hozzá az iterációk számához
- binary decomposition: a kettes számrendszer szerint történik az újraszínezés
- biomorphs: élőlényekre emlékeztető képeket kapunk
- potential
- color decomposition
- smooth

Itt is van a true-color mód bekapcsolására lehetőség, amellyel újabb 14 színváltozatot kaphatunk.

Galéria.

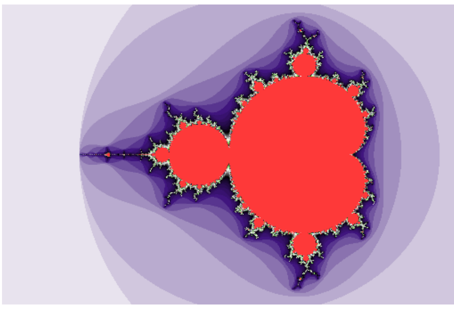


3.3.3. Sík

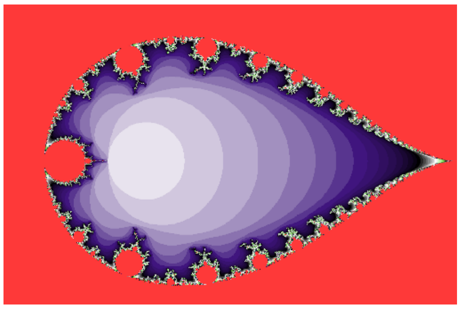
A XaoS-ban minden fraktál komplex paraméterekkel rendelkezik, így természetesen a komplex síkon ábrázoljuk őket, ahol az x-tengelyen a valós részt, az y-tengelyen a képzetes részt ábrázoljuk. 7 különböző síkon történő ábrázolásból választhat a program használója:

- mu: komplex sík, ez az alapbeállítás
- 1/mu: „fordított komplex sík” – a végtelen a 0-nál van, a 0 a végtelennél
- 1/(mu+0.25): az előzőhöz hasonló sík, csak a közepe a Mandelbrot-halmazon kívülre esik, ezért parabolikusnak látszik
- lambda, 1/lambda, 1/lambda-1: lambda sík, a fordítottja és a fordítottja másik középponttal
- 1/(mu-1.40115): a Mandelbrot-halmazt a legérdekesebb ebben a módban megjeleníteni, a kisebb részeket kinagyítja, így még jobban beleláthatunk a halmaz részeibe

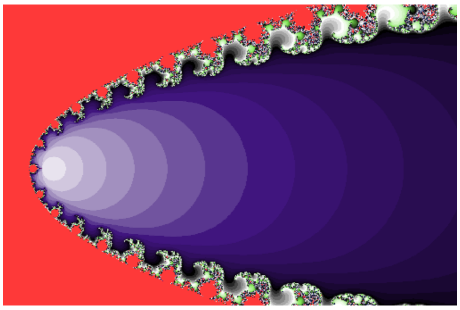
Galéria.



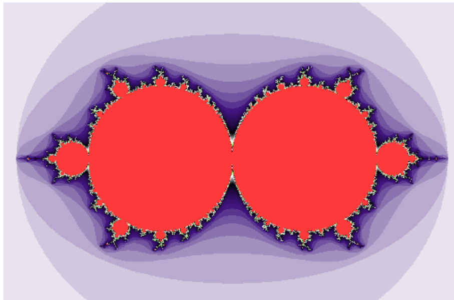
A Mandelbrot-halmaz a komplex (mu) síkban



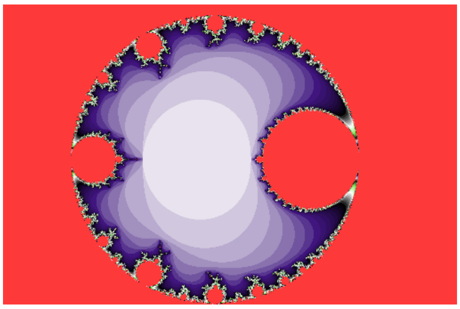
az 1/mu síkban



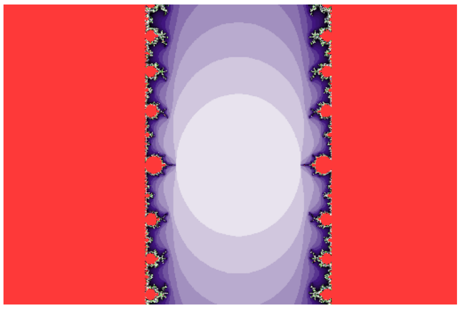
az 1/(mu+0.25) síkban



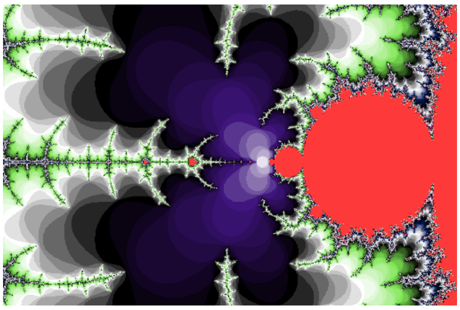
a lambda síkban



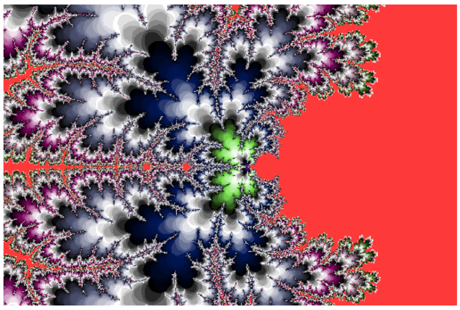
az 1/lambda síkban



az 1/lambda-1 síkban



az 1/(mu-1.40115) síkban



az 1/(mu-1.40115) síkban eltávolodva

3.3.4. Paletta

Ha ezt a funkciót jól akarjuk használni, mindenekelőtt be kell kapcsolni a Szűrők közül a paletta emulációs szűrőt. A lényege ennek a módnak az, hogy az alapbeállításon kívül nagyobb színpalettából választhatunk. Íme a választható opciók:

- Alapértelmezett színek visszaállítása (d gomb)

- Véletlen színek (p gomb): A XaoS automatikusan választ egy szín-generációs algoritmust és elkészíti a palettát.
- Felhasználói színek: itt maga a felhasználó tudja beállítani a színeket annak segítségével, hogy beírja az algoritmusok számát, a mag nagyságát és az eltolás mértékét.
- Színforgatás (y gomb): Ez az opció egy régi, egyszerű, de jól bevált eszköz a fraktálok életre keltésére. A Mandelbrot-halmaz kifejezetten szép a funkció használata során. True-color módban is jól működik ha a Paletta emulációs filter be van kapcsolva.
- Színforgatás visszafelé (Y gomb)
- Színforgatás sebessége: itt magadhatjuk az egy másodpercnyi színváltások számát. Ide negatív számot is beírhatunk, ekkor ellenkező irányban történik a forgatás.
- Színpaletta eltolása: a +/- gombokkal lehet manuálisan, finoman, szemet kápráztatóan átváltoztatni a fraktálok színezéseit.

3.3.5. Mandelbrot-mód

Ezzel a funkcióval a Mandelbrot- illetve a neki megfelelő Julia-halmazok között vándorolhatunk. Azonban az átváltásnál körültekintőnek kell lennünk, ugyanis ha a Julia-módra akarunk áttérni, olyan pontot kell választanunk az új fraktál magjának, ami az eredeti fraktál pontja volt.

Ezt a funkciót is, úgy mint a legtöbbet, kétféleképpen érhetjük el: a menüből illetve a billentyűzettel. Ebben az esetben érdemesebb az m billentyűt használni, hiszen ekkor a magot automatikusan kiszámolja a szoftver annak alapján, ahol éppen a kurzor áll. Ha viszont a menüből érjük el a parancsot, akkor ott nekünk kell kikalkulálni a Julia-halmaz magját.

A legjobb képeket akkor kapjuk, ha magnak például a Mandelbrot-halmaz határán elhelyezkedő pontokat tűzzük ki; a többi pont esetén elég unalmas fraktált generál a program. Egyszerűsíthetjük a folyamatot, ha a gyors Julia-módot bekapcsoljuk (j billentyű). Ekkor egy kis ablakban azonnal megjelenik az új fraktál.

Nem minden fraktálnak van Julia-halmaz párja, de a XaoS-ban szereplő algoritmus majdnem mindegyiknek tud generálni, tehát létrejöhetnek hamis Julia-halmazok is.

3.3.6. Perturbáció

Ez egy olyan egyszerű trükk, mellyel megváltoztathatjuk a pálya kezdőpontját. Általában a 0-nál van a kezdőpont, de más értékek beírásával különleges képeket kaphatunk.

Ezeknek a más értékeknek a megadásához csak rá kell kattintanunk a perturbáció parancsra, és ott az általunk kiválasztott komplex számot beírni. Ezzel határozzuk meg a perturbációt. Ha viszont kikapcsoljuk a parancsot, az érték azonnal visszaáll a zéró értékre.

Ez a funkció úgy jellemzi az adott komplex számot, hogy azt egy pontként megjeleníti a képernyőnkön. Ha nem a menüből adjuk a parancsot, hanem a billentyűzetről, akkor a kurzor pillanatnyi helyét vesz az adott pontnak, és arra hajtja végre a perturbációt. Könnyen vissza is tudjuk alakítani a képet: a b gomb újra megnyomásával a zéró helyzetbe kerülünk.

A perturbáció csak bizonyos képletekre működik (pl. Mandelbrot-halmaz) és csak Mandelbrot-módban.

3.3.7. Nézet

Itt lehet azt beállítani, hogy éppen hogyan álljon a fraktál a képernyőn. Akkor használható ez nagyon jól, ha esetleg valahol (pl. az interneten) találkoztunk bizonyos koordinátákkal egy fraktállal kapcsolatosan, és ezen funkció segítségével most meg is tudjuk jeleníteni a képet magunk előtt.

A párbeszédpanelben három adatot lehet beállítani a fraktálról: *középpont, sugár, szög*.

A **középpont** meghatározza azt a pontot, ami a képernyő közepére essen.

A **sugár** a előbbi pont körüli kör sugarát jelenti. Ha túl nagy lenne a megadott mérték a XaoS automatikusan úgy állítja be az adatot, hogy látható legyen a képernyőn.

A **szög** megadja a kép elforgatásának mértékét fokban.

3.3.8. Alapértékek visszaállítása

A menüpont neve magáért beszél, ezzel vissza tudjuk állítani a fraktál gyári beállításait. Ez akkor jelenthet számunkra nagy segítséget, ha már túl messzire jutottunk az eredeti állapottól vagy esetleg elölről akarunk kezdeni mindent.
Másfelől az animációk előtt érdemes ezt a parancsot elsőként használni, hogy a későbbiekben mindig ugyanolyan hatást érjünk el velük, mint amilyet akartunk a készítéskor.

3.4. A Számítás menü

3.4.1. Egyszerű találgatás

A megjelenített fraktált téglalapokra bontva vizsgálja a program. Ha egy-egy téglalap összes csúcsa ugyanolyan színű, akkor a téglalap színezése egységes, és a belső pontokra nem kell tovább számításokat végezni, azoknak a színe is ezzel meghatározott. Ez az optimalizálás sok számítást kikerül, azonban néha hibát is okozhat. Az alapbeállítás a 3x3 téglalap, de ki is kapcsolhatjuk ezt az opciót.

3.4.2. Dinamikus felbontás

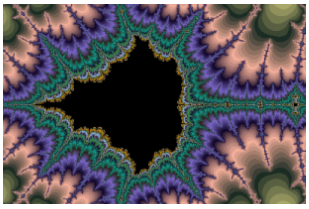
A XaoS a számítások során automatikusan lecsökkenti a kép felbontását, hogy a másodpercenkénti magas képkockaszámot megtartsa, de ha több idő van a kalkulálásra, akkor megnöveli azt. Eredetileg az animációk során van ez a funkció bekapcsolva, de választani lehet, hogy új képeknél is aktiválva legyen, vagy akár teljesen ki is lehet iktatni.

3.4.3. Periodicitás vizsgálata

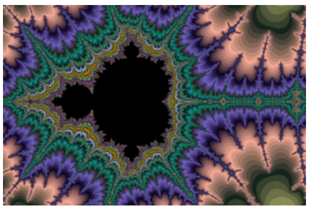
Ennek az opciónak a bekapcsolásával felgyorsíthatjuk a számítást, gyorsabban rajzolódik meg a fraktál. Ahhoz, hogy a program biztonságosan kiszámíthassa, hogy egy bizonyos pont a halmazhoz tartozó vagy nem, elég nagy iterációval kell dolgozni.

3.4.4. Iterációk

A Mandelbrot-halmaz megalkotásánál már láthattuk, hogy egy fraktál megrajzolásánál a pálya minden pontját megvizsgálva jön létre maga az alakzat. Ha az éppen vizsgált ponttal a sorozat a végtelenbe tart, akkor az a pont nem része a halmaznak, kívül van rajta; egyébként pedig a halmazban van. A pontos számítások elvégzéséhez szükség lenne a pálya egész hosszára, ami viszont végtelen hosszú, így tulajdonképpen sosem lehet teljes pontossággal számolni. Az alapbeállítás szerint a XaoS 170 helyen (iterációval) számol és tovább nem. Ha a pont még mindig a kilépési értéken belül van, akkor azt a halmaz pontjának nyílvánítja.



A Mandelbrot-halmaz 170 iterációval



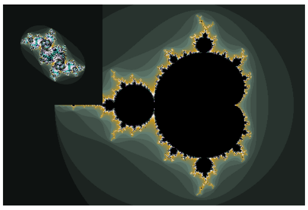
A Mandelbrot-halmaz 500 iterációval

Feladat: Közelítsünk rá egy pontra! Érdemes olyan pontot választani, ami közel van a halmaz határához. Ha ráközelítettünk, és a megjelenített kép már túl unalmassá vált, csak növeljük meg az iterációk számát! Ezzel újra érdekes kép tárul elénk, és folytathatjuk a vizsgálódásunkat.

3.4.5. Kilépési érték

A pályának azon pontjait vizsgáljuk, melyek elég távol vannak a komplex nulla ponttól az adott iterációban. A kilépés ezeknek a pontoknak az értéke lesz. Ha egy pont elég távol van, az iteráció azonnal megáll és a kezdőpont megjelenik a képernyőn. Ennek színe a fraktál típusától és a beállításoktól függ.
A Mandelbrot-halmaz kilépési értéke 4. A többi fraktál is általában ugyanezzel a kilépési értékkel rendelkezik, bár ha ezt megváltoztatjuk, akkor is nagyjából ugyanolyan képet kapunk a legtöbb fraktál esetében. Pl. a másodrendű Mandelbrot halmaznál bebizonyítható, hogy a $|z_n|(z_n := z_{n-1}^2 + c)$ sorozat pontosan akkor tart végtelenhez, ha $|z_n| > 2$ valamely n-re. A XaoS programban a kilépési érték ennek a 2-nek a négyzete (azaz 4), vagyis bármennyire is növeljük ezt az értéket, az eredmények nagyon hasonlók lesznek.
A XaoS mindegyik beépített fraktálra a 4 alapbeállítású kilépési értéket használja.

3.4.6. Gyors Julia-mód



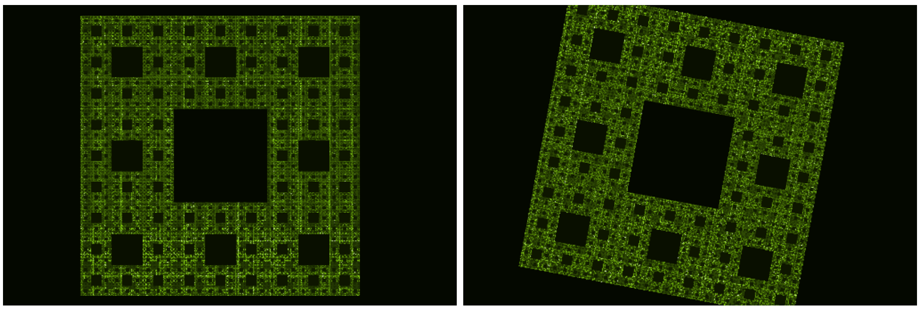
Ez a funkció arra nyújt egy gyors megoldást, hogy megtekinthessük a leendő Julia-halmazunk képét a képernyő jobb sarkában kicsiben. Így ellenőrizni tudjuk, hogy biztosan jó pontot választunk-e magnak, biztosan érdekes képet, halmazt kapunk. Ha nem tetszik a megjelenő kép, csak a kurzort kell másik pontra helyezni, vagy a bal gombot lenyomva tartva ide-oda mozgatni, és máris láthatjuk az új Julia-halmazunkat. Mindezt nagyon gördülékenyen és gyorsan végezhetjük el, végig szemmel követhetjük a halmazunk változásait. Azonban itt a számítások nem teljesen pontosak, de ebben a módban az előnézeti képeknek van a legfontosabb szerepe. Ha megvan a keresett pont, akkor kell átlapcsolni a Mandelbrot-módból a Julia-módba.

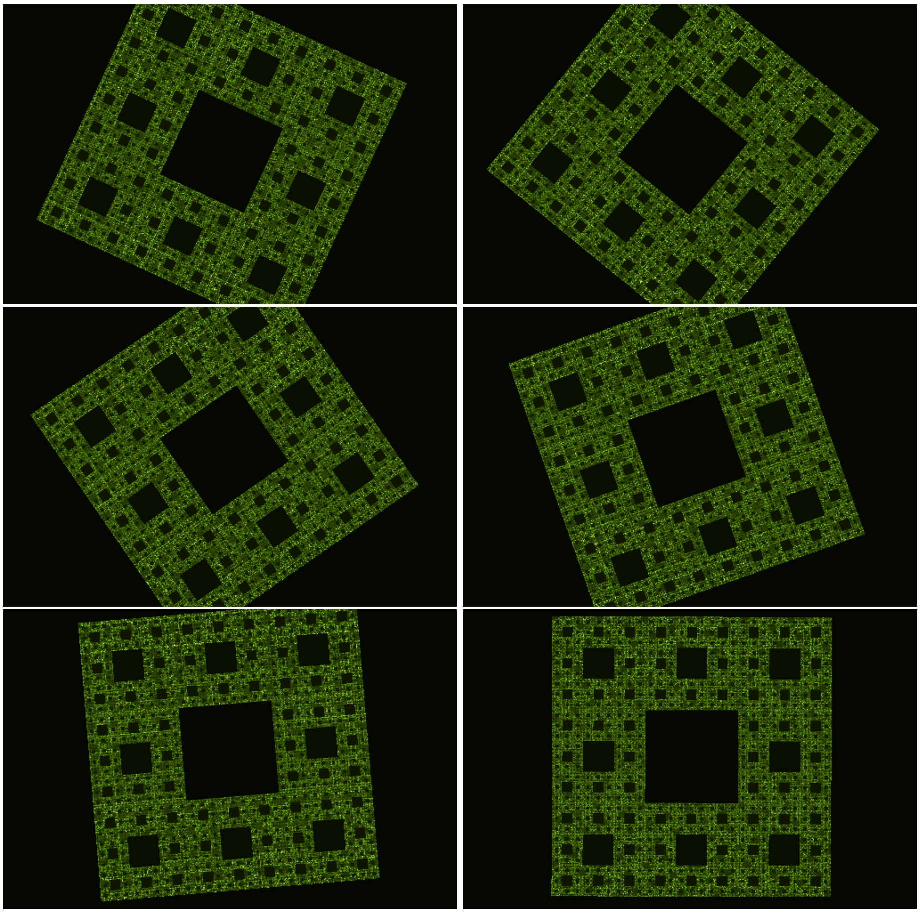
3.4.7. Forgatás

A XaoS bármely szögű forgatást engedélyez. Ha a szög értékét megváltoztatjuk (ezt a Fraktál menü Nézet alpontjában tehetjük meg a konkrét szög megadásával), akkor az egész képet újragenerálja a program. Ha bekapcsoljuk a folyamatos forgatást, akkor simán, szinte észrevétlenül változik a kép.
A felhasználói felület két forgatási módot engedélyez:

- folyamatos forgatás: az óramutató járásával megegyező irányban forog magától, de a jobbra, balra gombbal könnyen változtathatjuk a forgatás sebességét illetve irányát is
- forgatás egérrel: a bal egérgomb lenyomásával hajthatjuk végre a forgatást bármely irányba

Arra is ad lehetőséget a program, hogy a forgatási sebességet manuálisan beállítsuk: azt kell megadni, hogy másodpercenként hány fokkal forgasson a XaoS. Ide negatív számot is írhatunk, így az óramutató járásával ellenkező irányban forog majd a fraktálunk.





3.5. A Szűrők menü

3.5.1. Edge detection (*szélfelismerés*)

Aktiválásával megjeleníthetjük a fraktált határoló vonalakat. Több jelenik meg egyszerre, amelyek egyre közelebb és közelebb helyezkednek el, egyre finomabban simulnak a fraktálhoz.
Ebből a szűrőből két változatot tartalmaz a program. Az első szélfelderítő vastagabb vonalakat használ, így ezt nagyobb felbontásnál érdemes használni. Ennek a testvére az edge detection 2, amellyel vékony határvonalakat jeleníthetünk meg, ez a közeli képeknél nagyon jól alkalmazható.

3.5.2. Starfield (*csillagmező*)

Apró csillagpontok véletlenszerűen történő elhelyezkedése, sűrűségük az iterációk számától függ. Igazi galaxisszerű képeket kaphatunk bizonyos spirál szerkezetű fraktálokból a szűrő bekapcsolásával. A zoomolás folyamán tűzijátékszerű látvány tárul elénk, mindenféleképp érdemes kipróbálni.

3.5.3. Interlace filter

Ennek bekapcsolásával a számítások felgyorsíthatók, így nagyobb felbontásnál az elmosódás-hatáshoz hasonló képet kapunk. Aktiválásával a kép vízszintes felbontása megfeleződik, így egy-egy megjelenített képen vagy a páros vagy a páratlan sorok jelennek meg.

3.5.4. Motion blur (*elmosódás*)

Az elmosódás szűrő úgy működik, hogy az éppen látható képet és az előző állapotot nem választja teljesen szét a ráközelítés, eltávolódás során. A legjobban a 8 bites színmélységnél használható, ehhez ne feledjük el bekapcsolni a paletta emulációs szűrőt.

3.5.5. Emboss (*dombormű*)

A szűrő neve magáért beszél, az adott fraktált domborműszerűvé alakítja. Ilyen lehetőséggel már például a Photoshop-ban is találkozhattunk. Ha a smooth külső színezési móddal együtt használjuk, kifejezetten szép képeket kapunk.

3.5.6. Palette és true-color emulator (*paletta és igaziszín emuláció*)

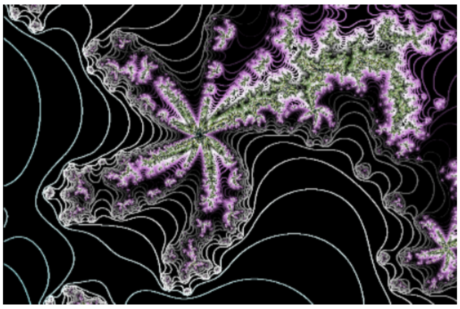
Ezek az elnevezések színezésekre utalnak; a megrajzolt fraktálokkal és azok színeivel lehet többféleképpen játszadozni. A paletta emuláció bekapcsolása ahhoz szükséges, hogy a színforgatás működhessen a fraktálunkon. Az igaziszín emuláció abban segít, hogy a 256 színű palettával minden jól működjön.

A XaoS-ban vagy paletta, vagy true-color módban dolgozhatunk, mindkettőnek megvan a maga előnye és hátránya is. A palette-ben olyan effekteket hajthatunk végre, mint például a színforgatás, míg a truecolor módban lehetséges a belső, a külső és a true-color színezési mód.

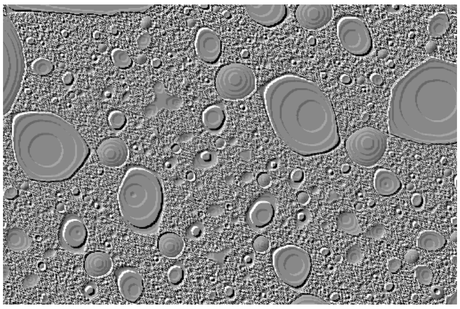
3.5.7. Antialiasing

Ez egy olyan technika, amellyel a kép minőségét javíthatjuk a "kiálló" részek kihagyásával, eltávolításával. A XaoS kiszámol minden pixelre négy értéket, és az átlagosat használja fel. Ehhez azonban nagyobb memória kell, ami jobban terheli és egyben lassítja a programot. Ezért aztán csak akkor érdemes bekapcsolni ezt a szűrőt, ha az elkészült képeket a legjobb minőségben és JPEG vagy MPEG formátumban szeretnénk menteni.

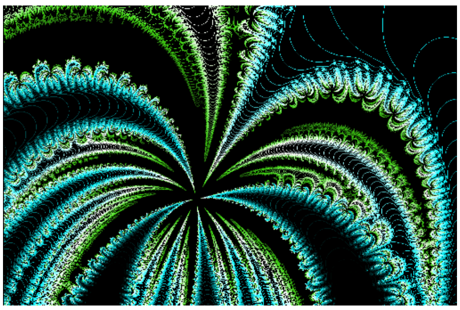
Galéria.



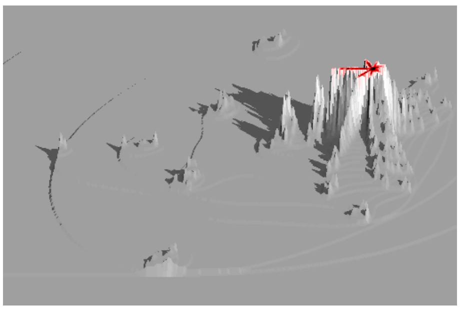
Mandelbrot-halmaz edge detection 2-vel



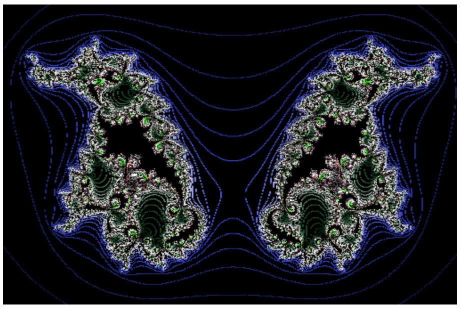
Magnet2 emboss-szal



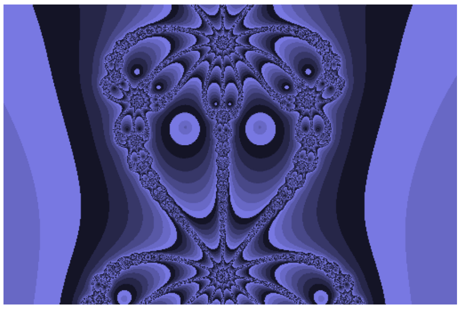
Octal edge detection-nel



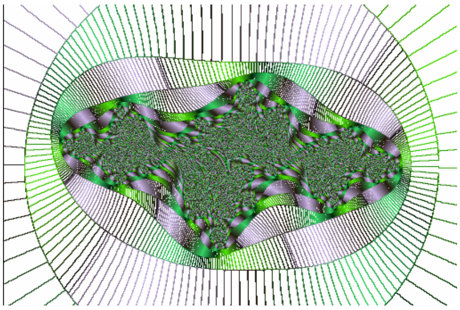
Manowar pseudo 3D-vel



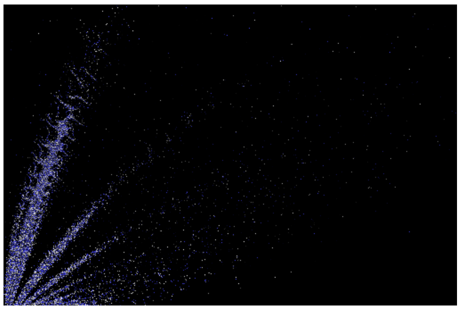
Phoenix edge detection-nel



Newton4 motion blur-rel



Barnsley3 edge detection-nel



Manowar starfield-del

3.6. A Kezelőfelület menü

3.6.1. Robotpilóta

Ezt a speciális funkciót úgy fejlesztették ki, hogy egyetlen billentyű megnyomásával a program automatikusan közelít rá az érdekes, határmenti részeire a fraktálnak. Használata nagyon egyszerű: csak benyomjuk az *a* billentyűt és hátradőlve csodálhatjuk a fraktálvideót. Ennek segítségével fedeztek fel sok érdekes fraktálrészletet is, amelyek most már megtalálhatók a XaoS képgalériájában. Ez a funkció nagyon intelligens. A ráközelítés során érzékeli, hogy már nem olyan érdekes a kapott kép. Ekkor megáll és nem halad tovább a fraktál belseje felé, hanem újraindítja a robotpilótát.

3.6.2. VJ mód

3.6.3. Számítás

3.6.4. Megszakítás

3.6.5. Belenagyítás gyorsasága

Itt változtathatjuk a ráközelítés sebességének értékét. Az alapbeállítás 1. A 2 kétszer olyan gyors tempót jelent, és így tovább.

3.6.6. Rögzített lépték

3.6.7. Jellemzők

A / billentyű megnyomásával a képernyőre varázsolhatjuk az aktuális fraktál tulajdonságait:

- név
- típus
- nézet
- méret

- forgatás
- képernyőméret
- iterációk száma
- színpaletta-méret
- kilépés
- robotpilóta
- sík
- belső színezés
- külső színezés
- nagyítási sebesség
- paraméter

3.6.8. Főbb jellemzők

3.6.9. Grafikus meghajtó

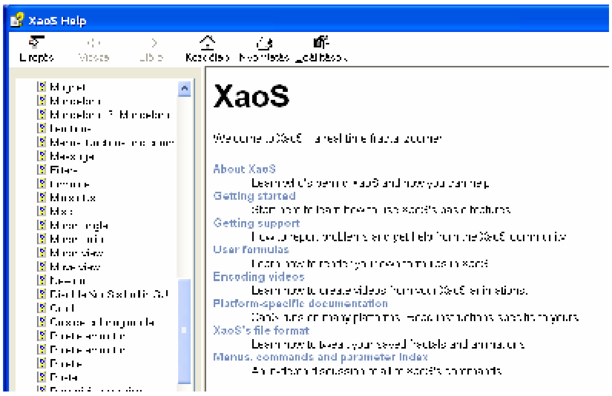
3.7. A Segítség menü

3.7.1. Útmutatók

Ebben a menüpontban találhatók a programba beépített útmutatók, melyek segítségével megismerhetjük a fraktálokat. A 3.5-ös verzióban megtalálható segédletek:

- Bevezetés a fraktálok világába
- Tippek és trükkök
- A fraktálok matematikája
- A XaoS további fraktáltípusai
- Újdonságok a 3.0 verzióhoz

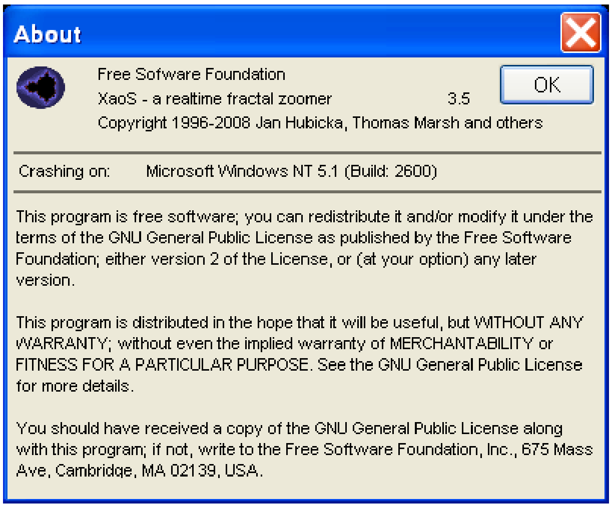
3.7.2. Segítség – h billentyű



Ezzel a funkcióval kaphatunk tippeket, segítséget a továbbhaladáshoz, ha esetleg elakadnánk valahol a használat során. Bár a program nyelve magyar, a segítség használatához nélkülözhetetlen az angol nyelvtudás, hiszen ennek minden része angolul jelenik meg egy különálló ablakban.
Windows operációs rendszeren a bal oldalon található szalagon betűrendben vannak felsorolva az egyes opciók, ott találhatjuk meg a keresendő részt. Ha erre rákattintunk, akkor a jobb oldali nagy ablakban már meg is jelenik a leírása annak az adott résznek. (Linuxon a segítő ablak más szerkezetű.)

3.7.3. Névjegyzék

Itt találjuk a szoftver főbb fejlesztőinek nevét, a program adatait és leírását.



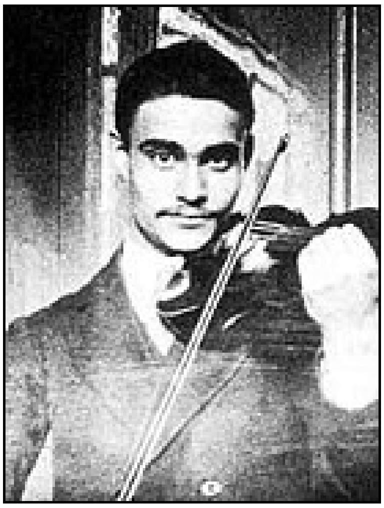
4. A fraktálokról röviden

4.1. Mik is azok a fraktálok?

A fraktál szó a latin fractus szóból származik, amelynek jelentése törött, töredezett. Olyan alakzatokat, ponthalmazokat nevezünk fraktáloknak, amelyek lényegesen szabálytalanabbak, összetettebbek, töredezettebbek, mint a klasszikus geometriában előforduló alakzatok. A fraktálok lassan harminc éve önálló témaköre a matematikának, de még mindig nincs általánosan elfogadott fraktál-definíció, bár mondhatjuk azt, hogy a fraktálok olyan alakzatok, melyek valamiképpen hasonló részekből épülnek fel. Kenneth Falconer, brit matematikus szerint a fraktál definícióját hasonlóképpen kell megadni mint az életét a biológiában. Az életnek sincs szigorú meghatározása, csak az élőlények jellemző tulajdonságai alapján tudjuk leírni. Az élőlények legtöbbje rendelkezik az összes jellemző tulajdonsággal, mégis sok olyan élőlényt ismerünk, amelyek egyik-másik alól kivételek. Ugyanígy a fraktálok sokféle megjelenési formája miatt az a legjobb, ha fraktálnak tekintjük azt a halmazt, amely az alábbi tulajdonságok többségét birtokolja, így elkerülhetjük az egyes tulajdonságok alóli kivételek kizárását. Tehát egy halmazt fraktálnak tekintünk, ha

- finom felépítésű, tetszőlegesen kis léptékre nézve további részleteket mutat
- túlságosan szabálytalan és egyenetlen ahhoz, hogy hagyományos geometriai nyelven leírható legyen
- az önhasonlóság vagy a skála-invariancia valamilyen formában megjelenik benne
- valamilyen értelemben vett fraktáldimenziója van (általában nem egész szám), ami nem egyenlő a szokásos dimenzióval
- egyszerűen előállítható, például rekurzívan, tehát minden eleme egy korábbi elemének felhasználásával hozható létre.

4.2. Az új matematikai gondolkodás



Gaston Julia (1893-1978)

Az első jelek egy új matematikai gondolkodás kialakulására a 19. század végén jelentkeztek. Ekkor kezdett világossá válni, hogy vannak olyan alakzatok is a matematikában, amelyek nem olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az euklideszi geometriából addig ismert alakzatok. A Cantor-halmaz és a Peano-féle térkitöltő görbe volt az első ilyen alakzat, melyeket eleinte a matematika szörnyetegeinek neveztek egyedi tulajdonságaik miatt. 1975-ben Benoit Mandelbrot lengyel származású, amerikai matematikus vezette be először a fraktál elnevezést. Úgy gondolta, hogy a latin frangere igéből képzett fractus melléknév lesz a legideálisabb arra, hogy ezeket a különleges, a természetben is gyakran előforduló alakzatokat jellemezze. Ugyanis a rómaiaknál a frangere szót akkor használták, amikor egy követ törtek szét. Az ebből képzett melléknév, a fractus magában foglalja a széttört kövek két alapvető tulajdonságát, a szabálytalanságot és a töredezettséget. Másrészt viszont a fraction szó magyar jelentése törtszám, amelyek az egész számok között helyezkednek el. Tehát ennek megfelelően mondhatjuk, hogy a fraktálalakzatok is az euklideszi alakzatok között bújnak meg, ha a dimenzió szempontjából tekintjük őket.

Benoit Mandelbrot (1924-2010)

A fraktálok eredetének leírásában fontos szerepet játszott Gaston Julia és Pierre Fatou. Julia már az 1910-es években megalkotta a róla elnevezett Julia-halmazt, az első „fraktált”, amelyet számítógép híján, szabadkézzel készített. A 199 oldalas munka igen híressé tette őt matematikai körökben, ugyanis ez volt az első szignifikáns munka a fraktálokról akkoriban. A *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles* című írás 1918-ban jelent meg a *Journal de Math. Pure et Appl. 8*-ben, amiért egy nívós díjat is kapott.

A fraktálok fogalma csak 1983-ban a Mandelbrot által írt A természet fraktálgeometriája című könyvvel robbant be igazán a köztudatba. Azóta egyre többen foglalkoznak ezekkel az érdekes alakzatokkal, amelyek mind a tudományokban, a művészetekben, de a természetben is gyakran előfordulnak. Ő volt az első, aki bevonta a számítógépet is a munkájába, és így állította elő az alakzatokat már az 1970-es években. Az IBM-nél dolgozó matematikus egyszerűbb és általánosabb formulát talált Julia-énál – az ebből előálló fraktálokat tiszteletére Mandelbrot-halmazoknak nevezzük.

4.3. Nevezetes fraktálok

- Cantor-halmaz
- Koch-görbe
- Sierpinski-háromszög
- Sierpinski-szőnyeg
- Menger szivacs
- Ördögi lépcső
- Mandelbrot-halmaz

5. A matematikai háttérről röviden

5.1. Önhasonlóság

Az önhasonlóság azt jelenti, hogy a struktúra egy részét kinagyítva, a felnagyított kicsi rész ugyanolyan stuktúrát mutat, mint maga az egész, eredeti struktúra. Ez nem azt jelenti, hogy ugyanolyan, hanem azt, hogy ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik.
Önhasonló egy szakasz, egy négyzet, egy háromszög vagy egy téglatest (önhasonló, de nem fraktál). Nem önhasonló ugyanakkor egy kör: véges sok kis körből nem tudunk egy kört alkotni.
Az önhasonlóság tulajdonsága nemcsak a matematika színterén jelenik meg a világban. Ha például tekintjük valamelyik sziget kis méretarányú térképét, azonnal észrevehetjük, hogy a partvonala igen kanyargós, öblökből és szirtfokokból áll. Azt várhatnánk, hogy nagyobb méretarányú térképeknél ez a kanyargósság kevésbé lesz észrevehető, és egyszer véglegesen megszűnik. Azonban a valóság rácáfol erre. A nagy méretarányú térképeken a kanyargósság ugyanúgy fellelhető, sőt azoka az öblöcskék és kiszögellések is feltüntethetőek, amelyek a kisebb méretarányú térképeken nem látszottak.

Erdei páfrány

Az élő környezetünkben a legismertebb fraktálszerű alakzat az erdei páfrány. Ennek önhasonlósága szabad szemmel is könnyen megfigyelhető.
A fraktálok az önhasonlósági tulajdonság szerint kétfélék lehetnek:

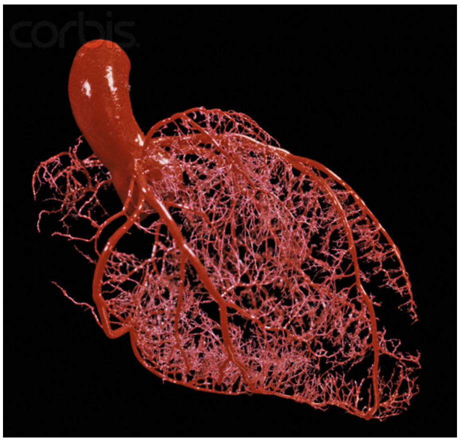
- lineáris fraktálok: amikor az önhasonlóság szigorú ismétlődést mutat
- nemlineáris fraktálok: az önhasonlóság csak részben igaz

5.1.1. Önhasonló alakzatok a mindennapi életben

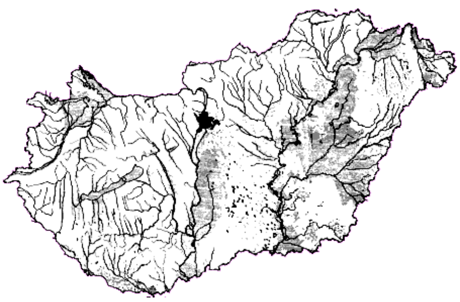
falevél erezete

fa

hópehely



érrendszerünk



folyók

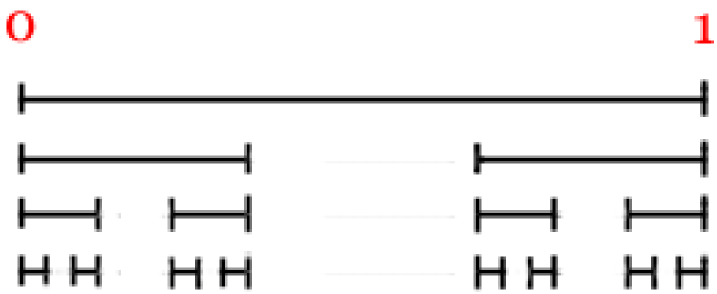
karfiol

brokkoli

repedés

5.1.2. Iteráció

Az iteráció a fraktálkészítésnél nélkülözhetetlen eljárás. Ugyanis a fraktálok egymás után végtelenszer végrehajtott matematikai művelettel készíthetők, melyekben a kapott eredményt a következő lépésben újra felhasználjuk. Az iteráció szó tehát ennyit jelent: ismétlés.
Íme egy egyszerű példa: a ***Cantor-halmaz***, amelyet Georg Cantor német matematikus már 1883-ban megalkotott. A fraktálok e klasszikus példája úgy készül, hogy egy szakaszt n egyenlő részre osztunk, majd ezen részek közül $n - m$-et eltávolítunk, és ezt az eljárást megismételjük a megmaradt m darabbal.



A Cantor-halmaz konstruálása a [0,1] intervallumon

A Cantor-halmaz konkrét konstruálásához induljunk ki a $[0, 1]$ zárt intervallumból, azaz egy egységnyi hosszúságú szakaszból;

$$d_0 = 1.$$

Legyen $n = 3,\ m = 1.$
1. iteráció
Osszuk 3 egyenlő részre ezt a szakaszt. Hagyjuk el a középső részt, azaz a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumot. Így az egységnyi hosszúságú szakaszból két darab $\frac{1}{3}$ hosszúságú szakasz maradt.
Ekkor

$$d_1 = \frac{2}{3} \cdot d_0 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

2. iteráció
Az imént megmaradt két részt osszuk szintén $3-3$ egyenlő részre és hagyjuk el a középsőket. Most négy, még kisebb szakasz maradt meg, ezek mind $\frac{1}{9}$ hosszúságúak, tehát összesen a maradék

$$d_2 = \tfrac{4}{9} \cdot d_0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot d_0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot 1 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2.$$

3. iteráció
A négy részen szintén végrehajtjuk az algoritmust, tehát $3-3$ egyenlő részre osztjuk őket és a középső részeket elhagyjuk. A megmaradt kis szakaszok hossza egyenként $\frac{1}{27}$, összesen

$$d_3 = \tfrac{8}{27} \cdot d_0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \cdot d_0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \cdot 1 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3.$$

És így tovább.
Az ***n. iteráció*** után megmaradt részek hossza összesen

$$d_n = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \cdot d_0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \cdot 1 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n.$$

A Cantor-halmaz azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek végtelen sok lépés után megmaradnak.
Ian Stewart szerint „a Cantor-halmaz egy intervallum, amelyet megtámadtak az egerek; végtelen sok, egyre kisebb egér, amelyek egyre kisebbet és kisebbet harapnak".

Feladatok.

1. Mennyi a d_n határértéke, ha n tart a végtelenbe?
2. Számítsuk ki a Sierpinski-háromszög területét!
3. Számítsuk ki a Koch-féle hópehely kerületét!

5.2. A hasonlósági dimenzió

A hasonlósági dimenzió jó mérőszáma a szigorúan önhasonló, azaz hasonlósági transzformációkból álló függvényrendszerek invariáns halmazaként előálló halmazok, alakzatok összetettségének,
Legyen adott egy szakasz. Ha ezt a felére kicsinyítjük, akkor kettőre van szükség ahhoz, hogy az eredeti szakaszt lefedhessük vele; ha harmadára kicsinyítjük, akkor három kicsi szakasz kell az egész lefedéséhez; ha negyedére, akkor négy darab és így tovább.
Egy négyzet esetében $2^2 = 4$ darab olyan négyzetre van szükség az eredeti lefedéséhez, amelynek oldala fele akkora, mint az eredeti. A négyzetoldal harmadára kicsinyítésekor $3^2 = 9$ darabra, a negyedére kicsinyítetteknél pedig $4^2 = 16$ kell és így tovább.
A háromdimenziós kocka esetében a felére kicsinyített kiskockákból $2^3 = 8$ kell, harmadakkora oldalú kockából $3^3 = 27$ kell, negyedakkora oldalúból $4^3 = 64$ darabra lesz szükség és így tovább.
Általában tehát egy d-dimenziós alakzat n^d darab n-ed részére kicsinyített példányának egyesítése.
Definíció: Azt mondjuk, hogy az A halmaz az $(f_1, \ldots, f_n)$ függvényrendszer invariáns rendszere vagy attraktora, ha teljesül, hogy

$$A = f_1(A) \cup \ldots \cup f_n(A).$$

Definíció: Ha $f_1, \ldots, f_n$ hasonlósági transzformációk, amelyeknek hasonlósági tényezője ugyanaz az $r < 1$ szám és K az $(f_1, \ldots, f_n)$ függvényrendszer invariáns halmaza, akkor a

$$\dim_{\mathrm{h}} K := \tfrac{\lg n}{\lg \frac{1}{r}}$$

számot a K halmaz **hasonlóssági dimenziójának** nevezzük. Az így definiált d szám megoldása az $r^d + \ldots + r^d$ egyenletnek, ahol a bal oldalon n darab tag áll.
Most terjesszük ki a definíciót olyan függvényekből álló függvényrendszerek invariáns halmazaira, amelyeknek hasonlósági tényezőik különbözőek.
Definíció: Legyenek $f_1, \ldots, f_n$ hasonlósági transzformációk, melyeknek hasonlósági tényezői $r_1, \ldots, r_n < 1$ számok és jelöljük K-val az $(f_1, \ldots, f_n)$ függvényrendszer invariáns halmazát. Ekkor a K halmaz **hasonlósági dimenziójának** nevezzük azt a d nemnegatív számot, amelyre teljesül az

$$r_1^d + \ldots + r_n^d = 1$$

egyenlőség. Bizonyítható, hogy ilyen d szám pontosan egy van.
Érdekességként ellenőrizzük, hogy az euklideszi geometriai alakzatokra megegyezik-e az eddig használt dimenzió a hasonlósági dimenzióval:

szakasz	$n = 4$	$r = \frac{1}{4}$	$d = \dfrac{\lg 4}{\lg 4} = 1$
négyzet	$n = 4$	$r = \frac{1}{2}$	$d = \dfrac{\lg 4}{\lg 2} = 2$
kocka	$n = 8$	$r = \frac{1}{2}$	$d = \dfrac{\lg 8}{\lg 2} = 3$

5.3. Doboz-dimenzió

Legyen adott egy egységnyi hosszúságú szakasz.
Fedjük le ezt a szakaszt $\frac{1}{4}$ oldalú négyzetekkel (dobozokkal) és nézzük meg, hogy hány darab metszi a szakaszt. Ekkor

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

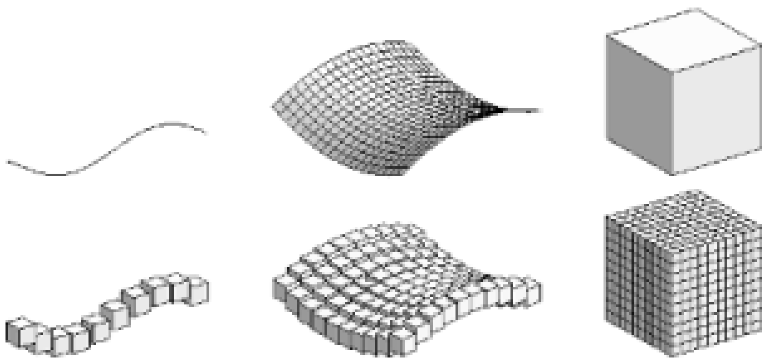
darab lesz az eredmény.
Ugyanezt végrehajtva egy egységnyi oldalú négyzettel, a kis négyzetekből már

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16$$

darabra lesz szükségünk.
Ha egységnyi oldalú kockát akarunk lefedni kis kockákkal (dobozokkal), mondjuk $\frac{1}{4}$ oldalúakkal, akkor ezekből

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = 64$$

darab fogja metszeni.



Természetesen, ha a síkbeli szakaszt és a négyzetet térben helyezzük el, akkor is ugyanezeket az eredményeket kapjuk. Észrevehetjük, hogy a nevezőben a kitevő pontosan az adott alakzat topologikus dimenziójával egyezik meg.
A fraktálgeometriai alakzatok esetében kicsit bonyolultabb a helyzet. A dobozok száma és ezek élhosszúsága közti reláció nem olyan nyilvánvaló. A fenti példákból következtethetünk, hogy ezeknél az alakzatoknál a dobozok száma egyenlő lesz a $\left(\frac{1}{r}\right)^d$-nel, ahol r a dobozok élhosszúságát jelöli.
Definíció: Legyen F a sík tetszőleges korlátos részhalmaza. Tekintsünk egy négyzethálót a síkban, amely r oldalhosszúságú négyzetekből áll. Vegyük például az $[nr, (n+1)r] \cdot [kr, (k+1)r]$ alakú négyzetek halmazát, ahol n, k egész számok. Jelölje $N(r)$ ezek közül azoknak a számát, amelyeknek van közös pontjuk az F halmazzal. Az F halmaz **doboz-dimenziójának** nevezzük a

$$\dim_{\mathrm{b}} F := \lim_{r\to 0} \frac{\lg N(r)}{\lg \frac{1}{r}}$$

számot, amennyiben a jobboldali határérték létezik.
Ezzel ekvivalens a következő definíció is.
Definíció: Fedjük le az F halmazt legfeljebb r átmérőjű halmazokkal úgy, hogy a lefedő halmazok száma minimális legyen; jelölje $N'(r)$ a halmazok számát egy ilyen minimális lefedésben. Belátható, hogy

$$\dim_{\mathrm{b}} F := \lim_{r\to 0} \frac{\lg N'(r)}{\lg \frac{1}{r}}.$$

A doboz-dimenzió sok ismerős halmazra megegyezik a hasonlósági dimenzióval és közeli rokona a Hausdorff-dimenziónak.

5.4. A Mandelbrot-halmaz bemutatása a XaoS programon keresztül

1. feladat. Tekintsük az $x := x^2 + c$ iterációt, ahol c egy valós szám. (Más szavakkal: tekintsük az $x_{n+1} = x_n^2 + c$ sorozatot.)
a) Készítsünk ehhez függvényhez egy táblázatot a következő módon:

```
A1:=x
B1:=c
A3:=A2*A2+$B$2
```

Töltsük ki a táblázat $A2$ illetve $B2$ celláját tetszés szerinti értékekkel, majd húzzuk le az $A3$ mezőt addig, amíg gondoljuk!
b) Ábrázoljuk is a kapott értékeket egy diagramon!
c) Nézzük meg, hogyan változik a sorozatunk, ha x helyére 0-t írunk!

2. feladat. Tekintsük az 1. feladatot és legyen $x = 0$.
a) Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik az iterációnk a

$$c = 0,\ c = 1,\ c = 2,\ c = -1,\ c = -2$$

értékekre! Készítsük el a hozzájuk tartozó diagramokat!
b) Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a függvényünk a

$$c = 0,26,\ c = 0,24,\ c = 0,25$$

értékekre! Készítsük el a hozzájuk tartozó diagramokat!
c) Bizonyítsuk be, hogy $c = 0,25$ mellett a fenti iteráció minden x_n eleme 0,5-nél kisebb lesz.
d) Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a függvényünk a

$$c = -1,1,\ c = -1,2,\ c = -1,3,\ c = -1,4$$

értékekre! Készítsük el a hozzájuk tartozó diagramokat!
e) Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a függvényünk a

$$c = -1,401,\ c = -1,4011,\ c = -1,40115,\ c = -1,401155$$

értékekre! Készítsük el a hozzájuk tartozó diagramokat!
f) Az előző e) feladathoz készítsünk egy összesítő táblázatot a következő módon:

```
A1=-1,401
B1=-1,4011
C1=-1,40115
D1=-1,401155
```

Vizsgáljuk meg

- az első négy,
- a huszadik,

- a huszonnyolcadik,
- a harmincegyedik,
- a harmincharmadik

iterációt!
g) Hány torlódási pontja van az e) feladatban szereplő dinamikus rendszernek? (Segítséget nyújthat egy sorok szerinti XY pont-diagram elkészítése.)

3. feladat. A 2. c) feladatban láttuk, hogy némely x értékekre az iteráció elemei között csak 0,5-nél kisebb számok jöhetnek ki. Most bizonyítsuk be, hogy ha $c = 0,25$ és $0 \leq x \leq 0,25$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,5.$$

4. feladat. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

a) A Mandelbrot-halmaz szimmetrikus. — ***IGAZ***, a valós tengelyre szimmetrikus, mert az iterációban az induló értékek helyére a komplex konjugáltjaikat írva az origótól ugyanolyan távolságban leszünk minden egyes lépésnél, mint ha az eredeti adatokkal dolgoztunk volna.

b) $i \subseteq M$. — ***IGAZ***, mert $c = i$-re a sorozat korlátos marad, nem tart a végtelenbe:

$$0, i, (-1+i), (-i), (-1+i), i, \ldots$$

c) Végtelen sok körszerű rész található a Mandelbrot-halmazban. — ***IGAZ***, elég, ha csak ráközelítünk az *almaemberke* teste és feje közötti részre, vagy csak a testén körbefutunk, látható sok-sok körszerű alakzat. Hiába közelítünk rá bármelyikre, mindig újak bújnak elő, végtelen sokan vannak, de egyre kisebbek.

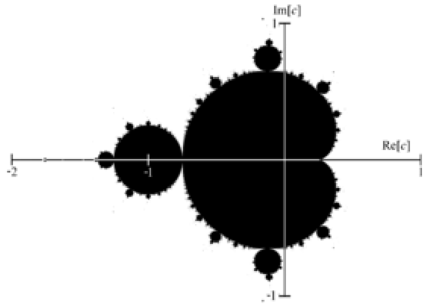
d) Végtelen sok kör található a Mandelbrot-halmazban. — ***HAMIS***, sok rész-alakzat körnek tűnik, de nem pontosan kör egyik se, kivéve a fő kardioidtól balra elhelyezkedő alakzatot. Ennek középpontja a -1, sugara pedig $0,25$. (Ezen állítás bizonyítására egyszerű mód nem ismert.)

e) $[-2; 0,25] \subseteq M$. — ***IGAZ***, ez az intervallum tulajdonképpen a valós tengely és maga a Mandelbrot-halmaz metszete. Bizonyításához kiváló a XaoS, csak rá kell közelíteni a valós tengely pontjaira. Látható, hogy mindegyik feketére van színezve, tehát a halmaz része. (Ez egy „tapasztalati" bizonyítás, akárcsak a c) feladatra adott válasznál. Itt azonban algebrai úton is könnyen adódik az állítás, ha becslést alkalmazunk, l. a következő feladatot is.)

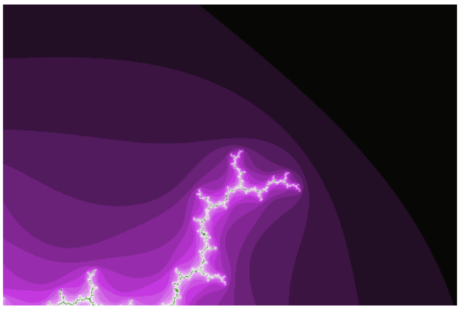
f) A Mandelbrot-halmaz korlátos. — ***IGAZ***, ugyanis a Mandelbrot-halmaz tulajdonképpen egy 2 sugarú körben helyezkedik el, ebből soha nem lép ki. Tapasztalati bizonyítás: Jelöljük ki bármely pontját a halmaznak, majd azt helyezzük a képernyő középpontjába. Ekkor válasszuk ki a Fraktál menü Nézet opcióját. Az ekkor megjelenő kisablak megmutatja nekünk a pont koordinátáit: itt a valós és a képzetes rész soha nem lesz a $[-2, 2]$ intervallumon kívüli.

g) A $-1,75$ körül található alakzat hasonló a Mandelbrot-halmazhoz. — ***HAMIS***, habár az f) állításban szereplő opció használatával szemmel látható a hasonlóság: a valós részbe írva a $-1,75$-t, a képzetesbe 0-t; a sugárhoz pedig érdemes 1-nél kisebb számot beírni, és máris előbukkan az *almaemberkénk*. Azonban a megjelenő alakzat nem teljesen hasonló az eredetihez, vannak apróbb eltérések, ha alaposabban megfigyeljük mindkét formát.

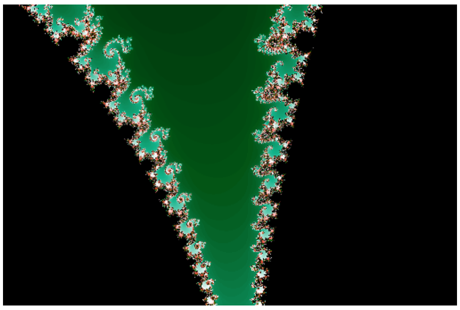
Galéria.



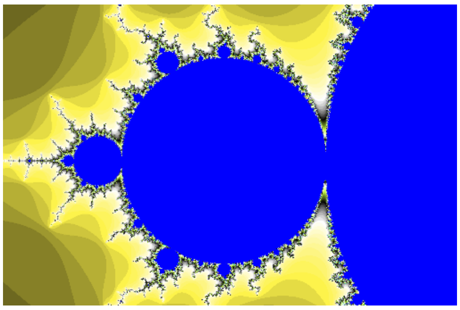
a)



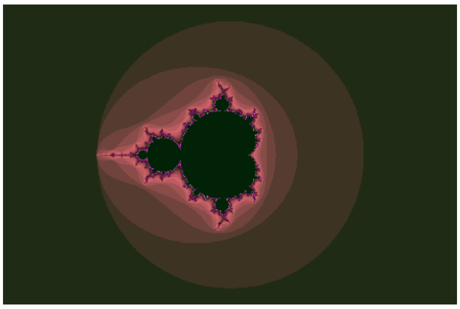
b)



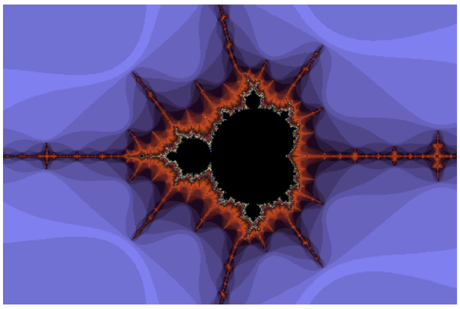
c)



d)



f)



g)

Magát a Mandelbrot-halmaz definícióját és a halmazról még több érdekességet találhatunk a `http://hu.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-halmaz` weboldalon.

Hivatkozások

[1] Szabó László Imre: Ismerkedés a fraktálok matematikájával (Polygon, Szeged, 1997)

[2] Benoit B. Mandelbrot: The fractal geometry of Nature (Freeman, New York, 1983)

[3] John D. Barrow: A művészi világegyetem (Kulturtrade Kiadó, Budapest, 1998)

[4] Tanári Kincsestár - Matematika (2002. május)

[5] http://xaos.sf.net

[6] http://wmi.math.u-szeged.hu/~kovzol/vcds

[7] http://math.youngzones.org

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Fractals