

ELEKTROMÁGNESSEG

(segédanyag a „Fizika mérnök informatikusoknak 1.” c. kurzus
hasonló című résztárgya számára)

Általános tudnivalók:

A jelen dokumentum megtalálható az interneten, a következőképpen:

SZTE honlap → Oktatás → Karok → TTIK (eddig közvetlenül: <http://www.sci.u-szeged.hu/>) → Szervezeti egységek → Fizikus TCS → Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék (eddig közvetlenül: <http://titan.physx.u-szeged.hu/~opthome/optics/indexh.html>) → Oktatás → Kurzusok → Nappali képzés → Előadás → „Fizika mérnök informatikusoknak 1.”

Ajánlott irodalom:

- Hevesi Imre: *Elektromosságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007 *
- Budó Ágoston: *Kísérleti fizika II. (Elektromosságtan és mágnesség)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979 (Vigyázat, nem az SI nemzetközi mértékegység-rendszert használja!)
- Erostyák János és Litz József (szerk.): *A fizika alapjai*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007 (III. fejezet: Elektromágnességtan)

* a jelen előadáskivonat alapjául szolgáló könyv; az alábbiakban ennek fejezetszámozását követjük

A vizsgára való felkészüléshez mindenekelőtt a jelen segédanyagot ajánljuk!

FIGYELEM!

Ha egy fizikai mennyiséget szimbolizáló betű betűképe **kövér (bold)**, az ebben a dokumentumban minden esetben annyit jelent, hogy az illető fizikai mennyiség **VEKTORMENNYISÉG** (annak minden következményével együtt → erre az olvasónak ajánlatos figyelnie!).

A. AZ ELEKTROSZTATIKAI TÉR VÁKUUMBAN

1. Az elektromos töltés. Coulomb törvénye

Elektromos állapot: megdörzsölt test (pl. borostyánkő) más testekre erőt fejt ki (**kísérlet!**)

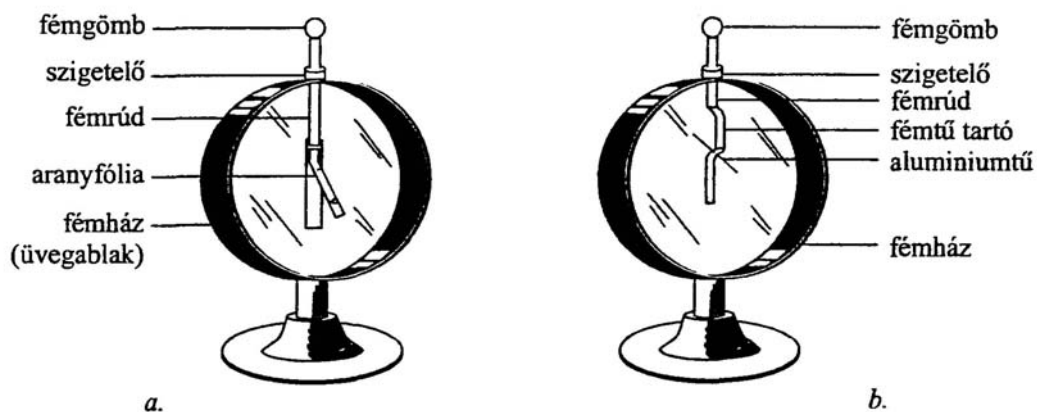
Elektromos töltés: az elektromos állapotot létrehozó anyag

Elektromos alapjelenségek (**kísérletek!**)

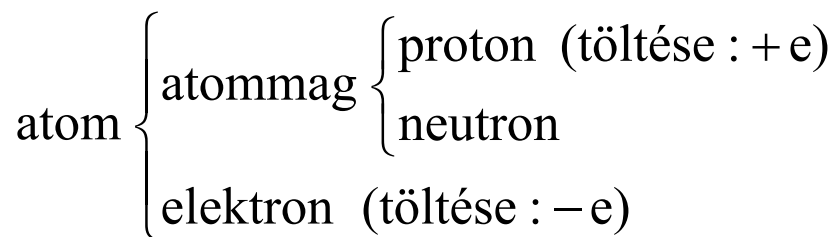
- Kétféle elektromos töltés van. Az egynemű töltések között *taszítóerők*, a különmemű töltések között *vonzóerők* hatnak. Az egyik fajta töltést –a bőrrel dörzsölt üvegét- megállapodás szerint *pozitív*nak, a másikat (pl. ilyen a szőrmével dörzsölt ebonité) *negatív*nak nevezük.
- A töltés átmehet az egyik testről a másikra, ha azokat összeérintjük.
- Két pontszerű test töltése egyenlő, ha egy harmadik testre ugyanolyan távolságból ugyanakkora erővel hatnak.
- Ha két semleges testet összedörzsölünk, akkor azok ellentétes előjelű, de ugyanakkora abszolút értékű töltéshez jutnak (hiszen összeérintve újból semlegessé válnak) → dörzsöléskor nem keletkeztek töltések, csak szétváltak.
- A *semleges test* mindkét fajta töltést egyenlő mennyiségben tartalmazza.
- Egyes anyagokban (*vezetők*) a töltés könnyen elmozdulhat, másokban nem (*szigetelők*).

- *Elektromos megosztás*: ha környezetétől elszigetelt, semleges vezetőhöz töltést közelítünk, akkor a vezetőnek e megosztó töltés felőli oldalán a megosztó töltésével ellentétes, az ellenkező oldalán pedig a megosztó töltésével azonos polaritású töltések jelenléte észlelhető. Az utóbbi töltések elvezethetők; a megosztással szétválasztott ellentétes polaritású töltések a vezető kettéosztásával elkülöníthetők (de a vezető darabjait összeérintve az egész újra semleges lesz).

A töltéseket elektroszkóppal (a) mutathatjuk ki, elektrométerrel (b) kvantitatív módon is jellemezhetjük:



Az elektromos töltés az anyagi részecskék alapvető tulajdonsága:



$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_{el} \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Az elektromos töltés **kvantált** (nem lehet akármekkora): a természetben megfigyelhető minden töltés az elektron e töltésének egész számú többszöröse.

$$Q = \pm N \cdot e \quad (\text{itt } N \text{ egész szám})$$

(ennek első direkt kísérleti bizonyítéka a Millikan-kísérlet volt)

A **töltés megmaradásának tétele**: zárt (azaz környezetétől elszigetelt) rendszerben az (előjeles!) elektromos töltések algebrai összege állandó.

(pozitív és negatív töltések keletkezhetnek és el is tűnhetnek, de csak egyszerre; pl. párkeltés, annihiláció)

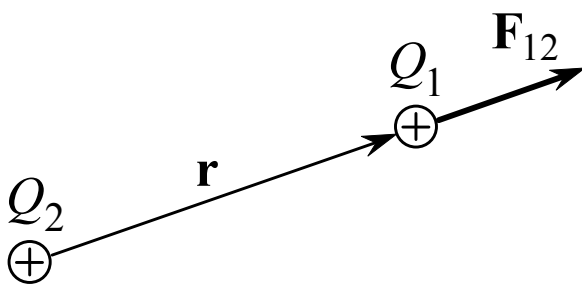
A töltések közti kölcsönhatási erő a gravitációs erőhöz képest rendkívül nagy, erőtvénye:

Coulomb törvénye:

(Coulomb mérte ki, torziós ingával)

A két, egymástól r távolságban lévő ponttöltés (Q_1 , Q_2) között ható erő (F_{12}) a töltéseket összekötő egyenes irányába mutat, nagysága

vákuumban:

$$F_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$


A Q_2 által Q_1 -re ható erő vektorialisan:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

A töltés egysége: 1 coulomb (C); származtatott egység: 1 C = 1 As

- A C. -törvényben az r kitevője **pontosan 2** ($< 2 \cdot 10^{-16}$ hibával), mivel vezető üregében a térerősség a mérések szerint zérus!

- ha $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ C}$, $r = 1 \text{ m}$, akkor $F = 9 \cdot 10^9 \text{ N}$; ebből:

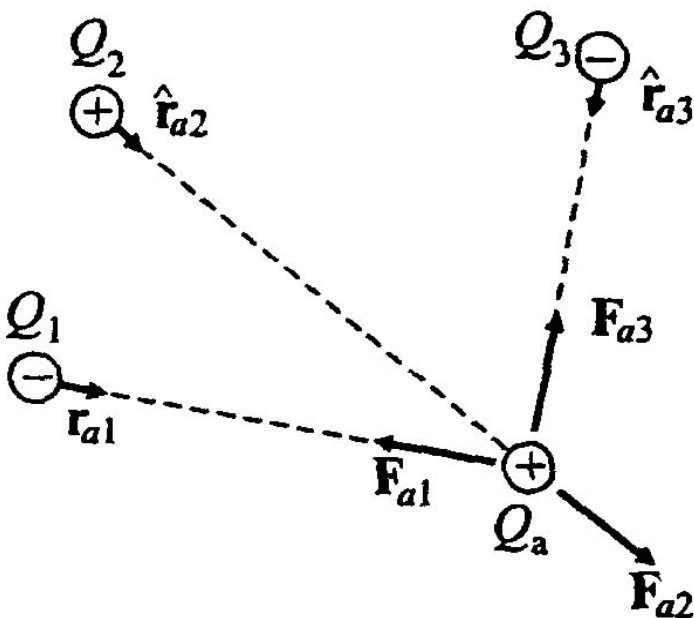
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}, \text{ amelyben}$$

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \left(= \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \right) \text{ a vákuum dielektromos állandója}$$

Az elektromos erők szuperpozíciójának elve:

Két töltés között fellépő erőt más töltések jelenléte **nem változtatja meg.**

- ez az elv teszi lehetővé töltésrendszer hatásának megállapítását: töltésrendszer egy töltésre gyakorolt erőhatását a rendszer egyes töltései által kifejtett erők vektori összege adja (ld. az ábrát!)



2. Az elektromos tér. Gauss tétele

A közelhatás elmélete (Faraday): a töltések *nem közvetlenül* hatnak egymásra, hanem kölcsönhatásukat az általuk keltett **elektromos tér közvetíti**.

Ez a fizikai realitás, ui. **a tér véges sebességgel terjed, energiája és lendülete (impulzusa) van!** (vö.: távolhatás-elmélet!)

- az elektromos állapotban lévő test tehát maga körül elektromos teret (erőteret) kelt, amely a benne lévő elektromosan töltött testekre erőt gyakorol

Az elektromos tér jellemzése:

- az elektromos térbe helyezett (próba)töltésre (Q_p) ható erő a kísérletek szerint a tér bármely pontjában arányos a (próba)töltéssel (ez az állítás a C. -törvényből és a szuperpozíció elvéből is következik!), azaz

$$\mathbf{F} = Q_p \cdot \mathbf{E} \quad \text{formában adható meg}$$

→ az ebben szereplő \mathbf{E} vektort már csak az elektromos tér határozza meg (a próbatöltés értékétől független (nem úgy mint az \mathbf{F} erő)), emiatt az elektromos tér jellemzésére használható:

Ha a tér valamely pontjába helyezett Q_p próbatöltésre az elektromos tér \mathbf{F} erővel hat, akkor e pontban az **elektromos térerősség**:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_p}$$

- eszerint az elektromos térerősség vektormennyiség (iránya a pozitív töltésre ható erő iránya), egysége: $1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$

(a fenti definíció valójában *mérési utasítás*; minden fizikai mennyiséget mérési utasítás definiál!)

- az elektromos erőter jellemzéséhez meg kell adni az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvényt, azaz az elektromos térerősség vektorát a (geometriai) tér minden (az \mathbf{r} helyzetvektorral megadott) pontjában!

A fentiekből nyilvánvaló:

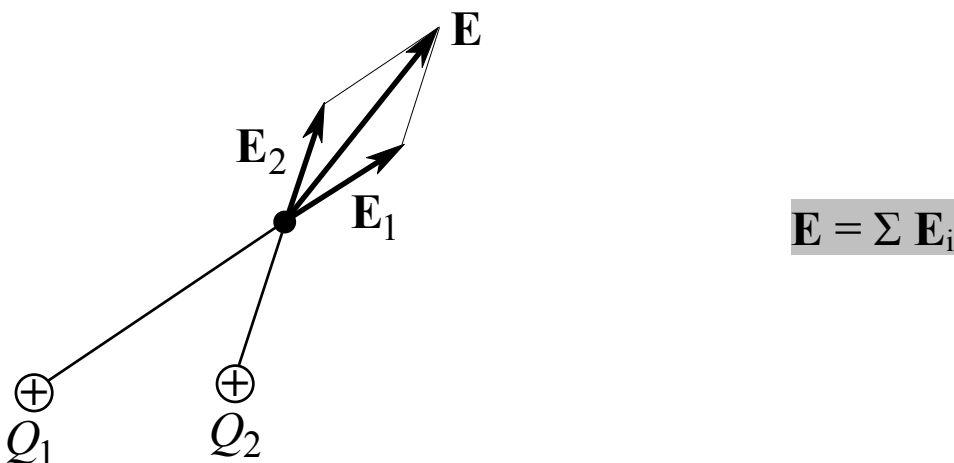
Ha a térerősség az elektromos tér valamely pontjában \mathbf{E} , akkor az oda helyezett Q töltésre a tér $\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}$ erővel hat.

Ponttöltés (Q) elektromos tere:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{F}}{Q_p} \\ \mathbf{F} &= k \frac{QQ_p}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned} \right\} \mathbf{E} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

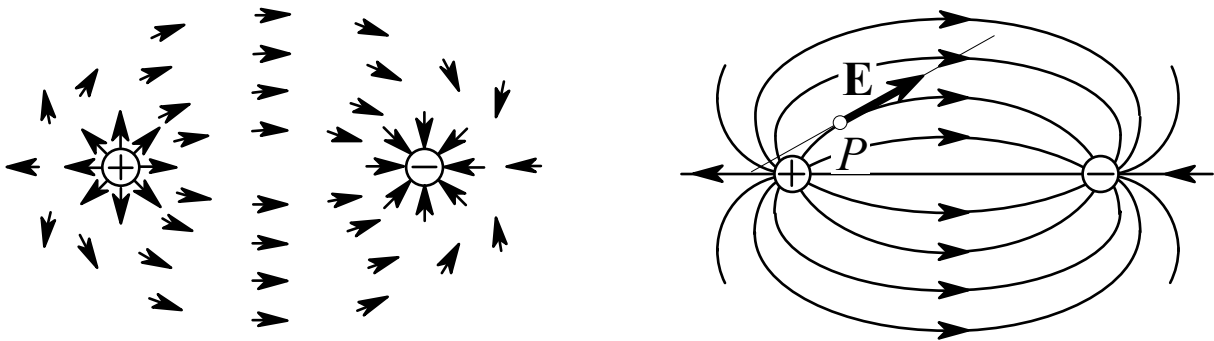
Több ponttöltés tere:

az elektromos erők szuperpozíciójának már tanult elvéből következik:

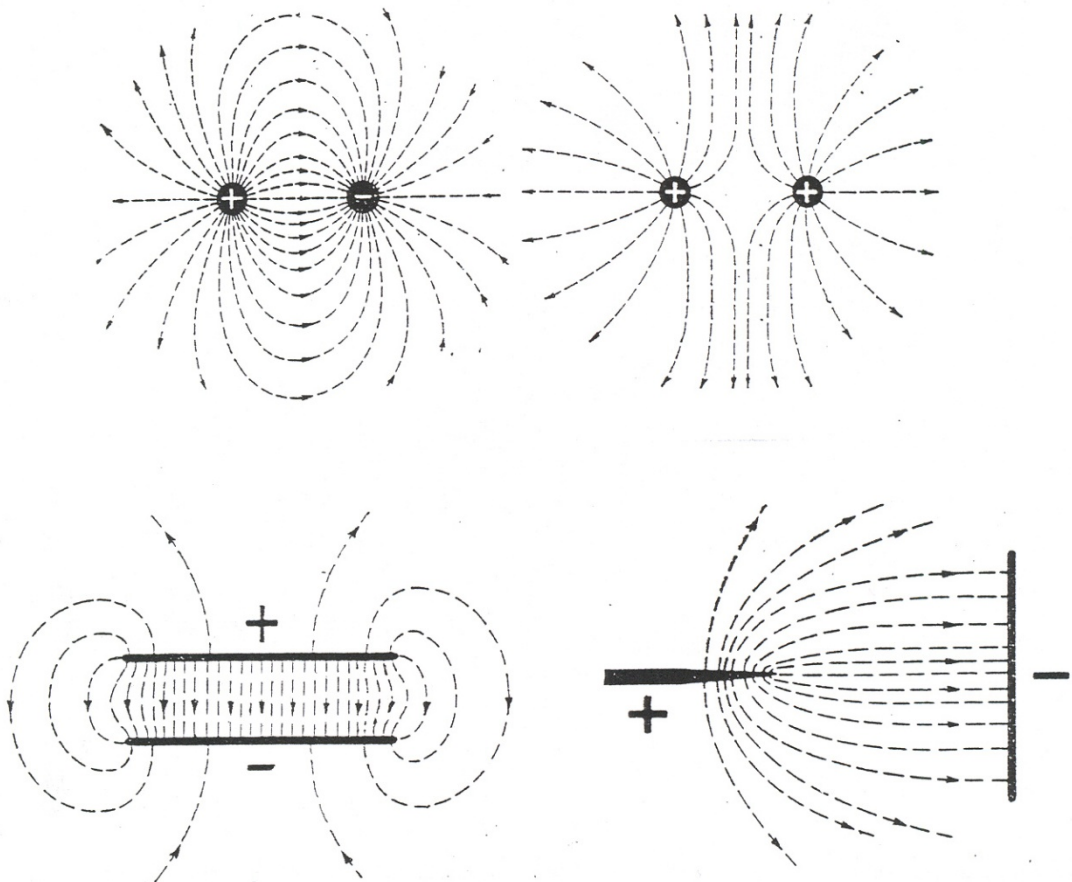


Elektromos erővonalak

(az elektromos tér szemléltetésére szolgálnak) (kísérlet!)

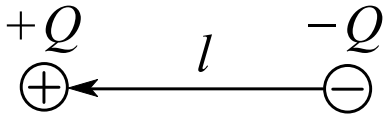


- az elektromos erővonalak olyan görbék, amelyek érintője a tér minden P pontjában az ottani E térerősség irányába esik (így mindenütt megadják a térerősség irányát), sűrűségük pedig arányos a E térerősség nagyságával (így mindenütt megadják a térerősség nagyságát)
- példák:



Az elektromos dipólus

Az elektromos dipólus két, egymástól kis távolságban lévő, ellentétes előjelű, de azonos abszolút értékű ponttöltésből álló töltésrendszer.



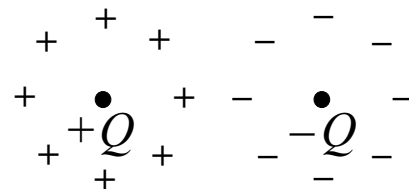
A dipólust az \mathbf{m} dipólusmomentum vektor jellemzi (irányítottságát és „nagyságát” is megadja):

$$\mathbf{m} = Q \cdot \mathbf{l}$$

ahol \mathbf{l} a negatív töltésből a pozitívba mutató helyvektor (ld. ábra)

- a dipólus fontos töltésrendszer, mert gyakran bonyolult töltésrendszerek is dipólussal helyettesíthetők (bizonyos kölcsönhatásaik szempontjából)

pl. ha egy semleges testben (pl. molekula) a pozitív és a negatív töltések súlypontja (ld. alább!) nem esik egybe (pl. az elektromos térben fellépő megosztás, vagy dielektromos polarizáció miatt), akkor a test elektromos dipólusnak tekinthető (ld. ábra)

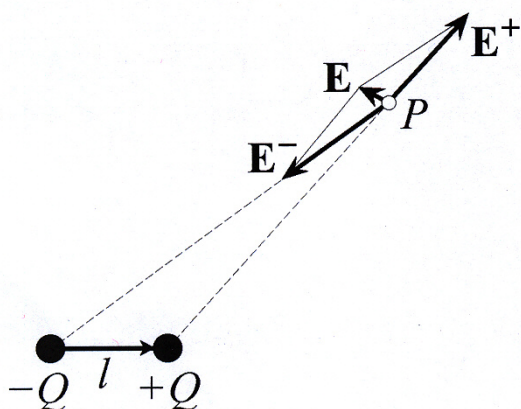


Az elektromos súlypont:

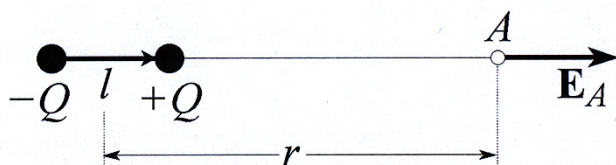
Q_i ponttöltések rendszere elektromos súlypontjának helyzetvektora (a tömegközéppont analógiájára):

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum Q_i \mathbf{r}_i}{\sum Q_i}$$

Dipólus elektromos tere



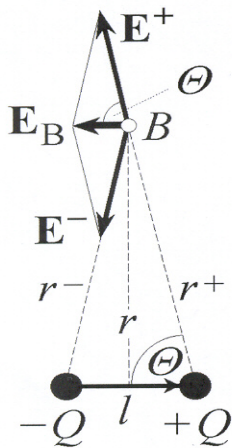
Dipólus térerőssége egy tetszőleges P pontban



$$E_A^+ - E_A^- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{(r-l/2)^2} - \frac{Q}{(r+l/2)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qlr}{\left[r^2 - (l/2)^2 \right]^2}$$

$l \ll r$ esetben

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{m}_e}{r^3}$$



$$l \ll r \rightarrow r^+ = r^- \approx r$$

$$E_B^+ = E_B^- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2 + (l/2)^2}$$

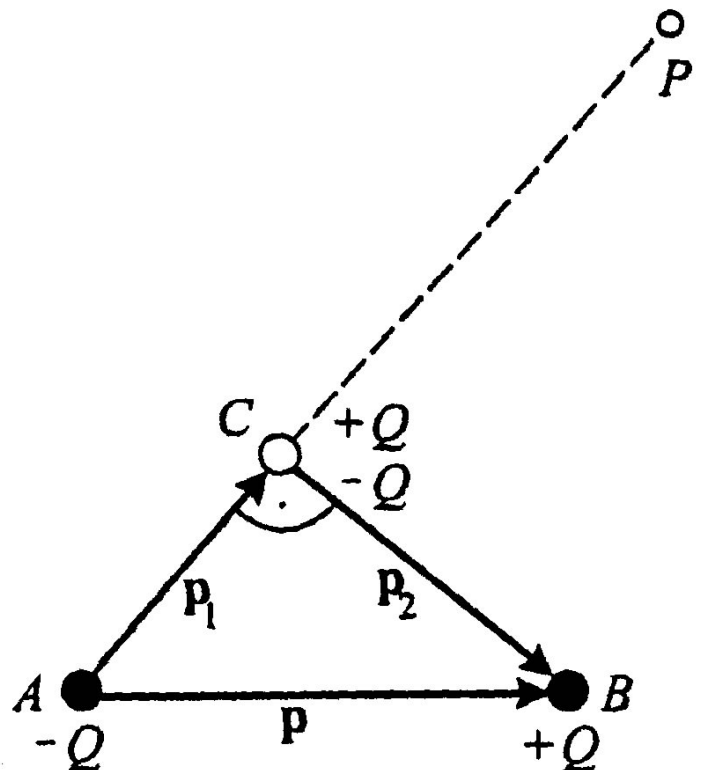
$$E_B = 2E_B^+ \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{\left[r^2 + (l/2)^2\right]^{3/2}}$$

és $l \ll r$ miatt

$$\mathbf{E}_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{m}_e}{r^3}$$

A dipólus elektromos terének térerőssége a geometriai tér tetszőleges helyzetű pontjában:

A fenti ábrák (a dipólmomentumot azokon \mathbf{m}_e jelöli, itteni ábránkon viszont \mathbf{p}) *A* ill. *B* pontja a dipólushoz képest az ún. Gauss-féle első ill. második főhelyzetben van. A dipólus által e helyzetekben keltett térerősségek (\mathbf{E}_A ill. \mathbf{E}_B ; kiszámításukat ld. fentebb!) ismeretében a dipólus elektromos terének térerőssége **tetszőleges helyzetű pontban is** könnyen megadható (ezért volt érdemes foglalkozni a gaussi főhelyzetekkel). A *C* pontba képzelt (együtt semleges, ezért a teret nem befolyásoló) + és - Q töltés (ld. ábra) ugyanis az eredeti töltésekkel két (könnyen kiszámítható, \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2) dipólt képez,



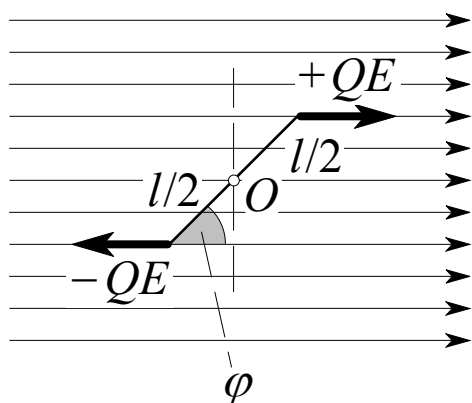
amelyekre nézve a tér tetszőleges P pontja a gaussi főhelyzetekben van, emiatt *a térerősség a tér tetszőleges pontjában könnyen visszavezethető a Gauss-féle főhelyzetekben adódó térerősségek vektori eredőjére.*

A dipólus által keltett elektromos tér térerősségének nagysága tehát egyenesen arányos a dipólmomentummal, és a dipólustól való távolság *harmadik hatványa szerint csökken:*

$$E = \text{konst.} \cdot r^{-3}$$

(vö. az elektromos ponttöltés terével ($E = \text{konst.} \cdot r^{-2}$)!)

Dipólus homogén elektromos térben:



- a dipólusra ható eredő erő zérus:

$$\mathbf{F} = +QE - QE = 0$$

- a dipólusra ható forgatónyomaték:

$$M = Q \cdot E \cdot l \cdot \sin\varphi$$

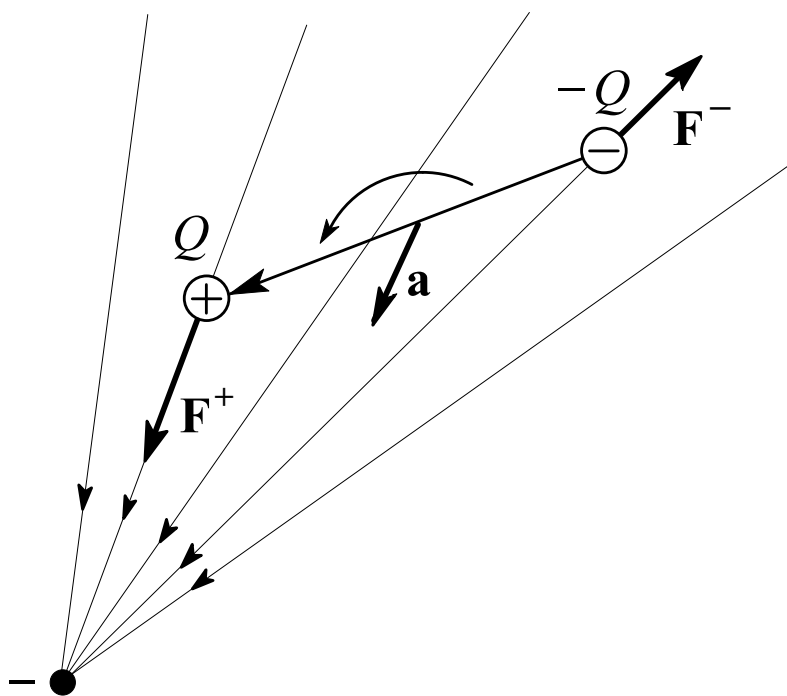
⇓

$$M = m E \sin\varphi ; \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{E}$$

($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ itt -és a továbbiakban is!- az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok vektori szorzatát jelöli)

(kísérlet: dipól rezgései síkkondenzátorban)

Dipólus inhomogén elektromos térben:

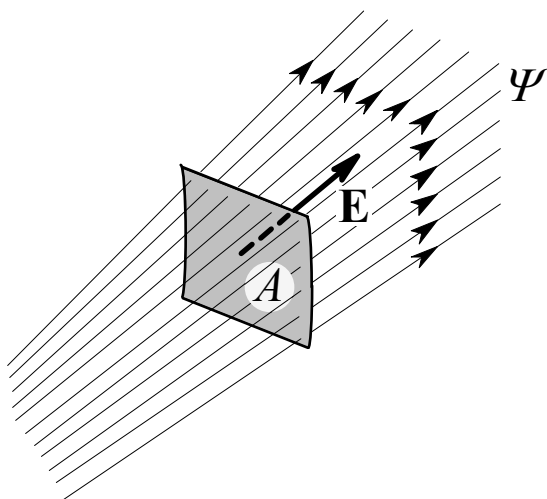


- most általában:
 $\mathbf{F}^+ \neq -\mathbf{F}^-$

→ elfordulva gyorsul az el. térerősség növekedésének irányában

- ez a magyarázata annak a korábban látott jelenségnek, hogy a töltött test vonzza a semleges testeket!

Az elektromos fluxus:



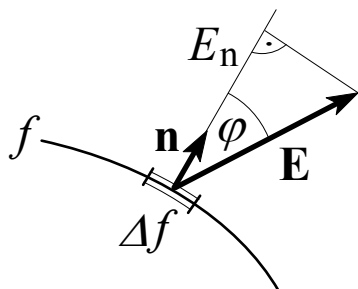
a) Az \mathbf{E} térerősségre merőleges, A területű felületem speciális esetében a Ψ elektromos fluxus definíció szerint:

$$\Psi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$$

- egysége ennek megfelelően:

$$1 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}} = 1 \text{Vm}$$

b) **Általános esetben**, ha a vektor (esetünkben a térerősség) φ szöget zár be a felületelem normálisával (megállapodás szerint ez zárt felület esetén mindig a *kifelé* mutató normális), akkor a vektor fluxusa a Δf felületelemre (amely olyan kicsi, hogy síknak tekinthető, és az E annak minden pontjában ugyanakkora) definíció szerint:



$$\Delta\Psi = E_n \cdot \Delta f$$

ahol E_n az E normális irányú (vagyis a felületelemre merőleges) komponense,

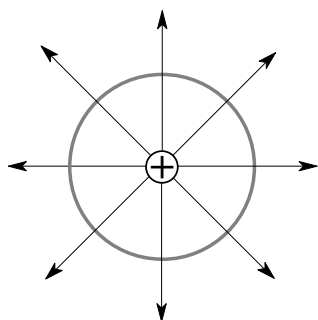
$$E_n = E \cdot \cos\varphi$$

A fluxus a teljes f felületre így:

$$\Psi = \int_{(f)} E_n df$$

Gauss tétele

Számítsuk ki egy ponttöltés terének térerősségfluxusát a ponttöltés köré rajzolt, r sugarú gömb felületére:



$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ \Psi &= E \cdot A = E \cdot 4r^2\pi \end{aligned} \right\} \Psi = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

azaz a fluxus **független** a gömb sugarától!

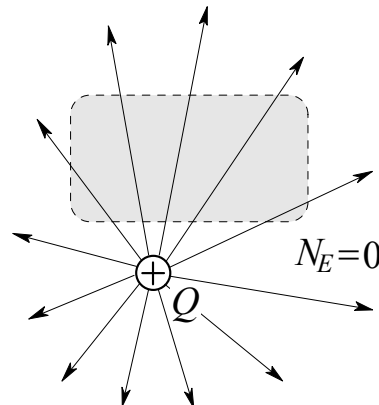
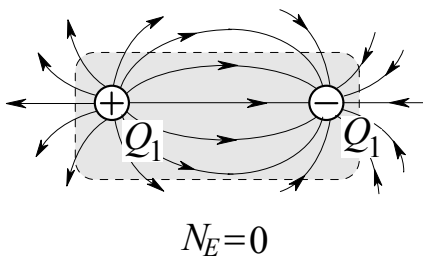
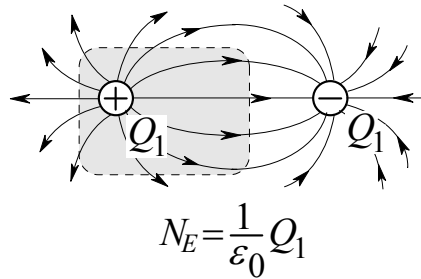
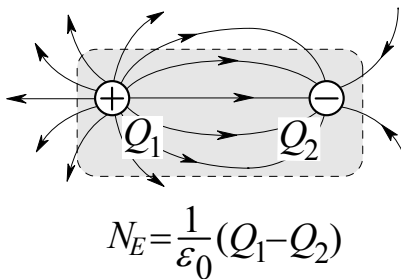
Kimutatható, hogy *ez az összefüggés általánosan is fennáll* (tetszőleges töltésrendszer elektromos terében kiválasztott tetszőleges zárt felületre, akkor is, ha a felületen kívül is vannak töltések!):

$$\oint E_n df = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q$$

Gauss tétele

Tetszőleges zárt felületen átmenő elektromos térerőfluxus (vákuumban) a felületen belüli töltések algebrai összegének $1/\varepsilon_0$ -szorososa.

példák:



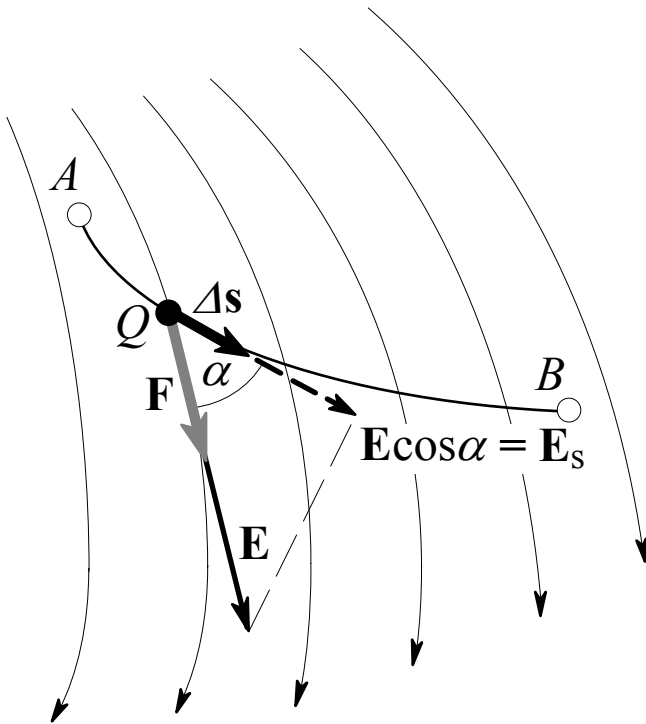
- Gauss tétele *ekvivalens* Coulomb törvényével!

előnyei (a C.-törvényhez képest):

- jobban kifejezi az erőterfelfogást
- a Gauss-tétel felhasználásával a térerősség igen gyakran (geometriai szimmetriával bíró terekben, pl. töltött egyenes- ill. sík vezető tere) *egyszerűbben kiszámítható*, mint Coulomb törvényéből

3. Az elektromos potenciál

Az elektromos tér munkája:



Az elektromos tér által a Q ponttöltésre kifejtett erő:

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E} \quad ,$$

így a tér W munkája, miközben a Q töltés az A pontból a B pontba jut:

$$W = \int_A^B F_s ds = Q \cdot \int_A^B E_s ds$$

(ez ún. vonalmenti integrál; itt F_s ill. E_s az erő- ill. térerősségvektor komponense a pillanatnyi elmozdulás irányában, A -ból B felé haladva)

Kimutatható (ld. a könyvben):

*Az elektrosztatikai tér fontos tulajdonsága, hogy a tér által végzett munka **független az úttól**, csak az A kezdő- és a B végpont helyétől függ. (az ilyen erőtereket konzervatív térnek nevezik)*

→ ez azt jelenti, hogy tetszőleges Q töltéshez a tér minden pontjában potenciális energia rendelhető!

A Q töltés B és A pontokhoz tartozó E_{pot} potenciális energiáinak különbsége (definíció szerint) a tér munkája, miközben a töltés a B pontból az A pontba jut:

$$E_{pot B} - E_{pot A} \equiv W = Q \cdot \int_B^A E_s ds$$

→ ebből látszik, hogy a W/Q hányados **csak a tértől** függ, így annak jellemzésére használható!

→ ennek megfelelően, definíció szerint:

Az elektromos tér B és A pontjai közötti $U \equiv U_B - U_A$ **potenciálkülönbség** (másnéven **feszültség**): tetszőleges Q töltésnek a B pontból az A pontba vitele közben a tér által végzett munka és a Q töltés hányadosa.

- a potenciálkülönbség (ill. feszültség) egysége: $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$

A fentiek szerint:

$$U \equiv U_B - U_A = \frac{E_{pot B} - E_{pot A}}{Q}, \quad U = \int_B^A E_s ds ;$$

az utóbbi összefüggés segítségével kiszámíthatjuk a potenciálkülönbséget (ill. a potenciált, ld. alább) a térerősség ismeretében

A potenciálnak eszerint mindig csak két pont közti **különbségét** tudjuk megadni! → a tér pontjaihoz csak akkor tudunk egyértelmű potenciálértéket rendelni, ha a potenciál értékét a tér valamely helyén (önkéntesen) lerögzítjük

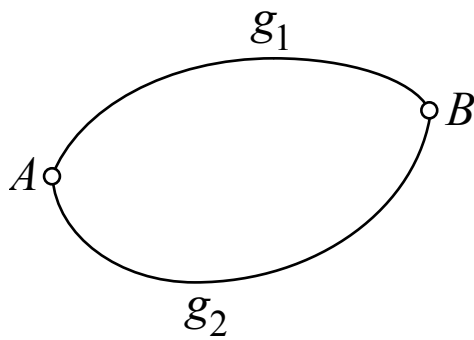
→ ha tehát az A "nullpontban" (pl. végtelen távoli pont, vagy a földfelület) a potenciál értékét zérusnak **választjuk**: $U_A = U_0 = 0$, akkor ehhez a referenciaponthoz képest tetszés szerinti $B = P$ pontban a potenciál:

$$U_P = \frac{E_{\text{pot } P}}{Q} = \int_P^A \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^P \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s}$$

(az utolsó egyenlőségjel jobboldalán felcseréltük az integrálás határait!)

(ezzel a választással a potenciál értékét -amelyet csak egy additív konstans erejéig lehet meghatározni- egyértelműen megadhatjuk)

Tekintsünk a térben egy tetszőleges zárt görbét, és a rajta kijelölt A és B pontokkal osszuk fel azt két részre (g_1, g_2) (ld. ábra)!



- mivel a korábbiak szerint a tér által végzett munka bármely két pont között független az útvonaltól:

$$\int_{(g_1)}^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} = \int_{(g_2)}^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} \quad , \text{ így} \quad \int_{(g_1)}^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} - \int_{(g_2)}^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad ,$$

ezért a g_2 úton ellenkező ($B \rightarrow A$) irányban haladva (így a zárt görbén végighaladva megteszünk egy teljes kört):

$$\int_{(g_1)}^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} + \int_{(g_2)}^A \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad , \text{ tehát:}$$

Az elektrosztatikai tér örvénymentes vektortér, vagyis elektrosztatikai térben az elektromos térerősség bármely zárt görbe menti vonalintegrálja zérus: $\oint E_s ds = 0$.

(vagyis az elektrosztatikai térben zárt erővonalak nincsenek, az erővonalak mindig a töltésekből indulnak ki, és azokban is végződnek)

(vö.: energiamegmaradás törv. !)

Most kifejezzük a térerősséget a potenciálfüggvénnyel:

- a tér tetszőleges P pontjából kiindulva, a fentebb látott $U_B - U_A = \int_B^A E_s ds$ összefüggést a szomszédos P' pontokra alkalmazva kapjuk a P' potenciálját (ΔU) a P potenciáljához viszonyítva:

$$\Delta U \equiv U_{P'} - U_P = \int_{P'}^P E_s ds = - \int_P^{P'} E_s ds$$

- ha a P -től tetszőleges irányban kis, egyenes Δs -nyire eltávolodunk (Δs olyan kicsi szakasz legyen, hogy a térerősségvektor annak kezdő- és végpontjában, azaz P -ben és P' -ben, azonosnak legyen tekinthető), akkor az utolsó egyenlőség jobboldala a

$$-E_s \cdot \Delta s$$

szorzattal közelíthető, amelyből E_s kifejezhető a potenciállal:

$$E_s = - \frac{\Delta U}{\Delta s} \quad , \quad \text{pontosabban:} \quad E_s = - \frac{\partial U}{\partial s} \quad ,$$

azaz a térerősség tetszőleges irány menti komponense a potenciálnak a kérdéses irány menti negatív (parciális) differenciálhányadosa

- ez derékszögű koordinátarendszerben:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

vagy vektoregyenletben kifejezve:

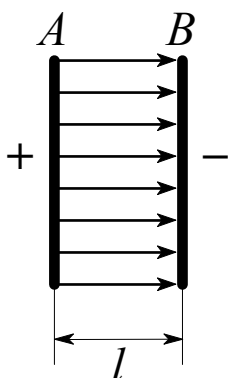
$$\mathbf{E} = -\text{grad } U.$$

(az U skalár függvény gradiense ($\text{grad } U$) a tér minden pontjában az a vektor, amelynek derékszögű komponensei rendre: $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$; a gradiensvektor mindig az U leggyorsabb növekedése irányába mutat)

A térerősség az elektromos potenciál negatív gradiense.

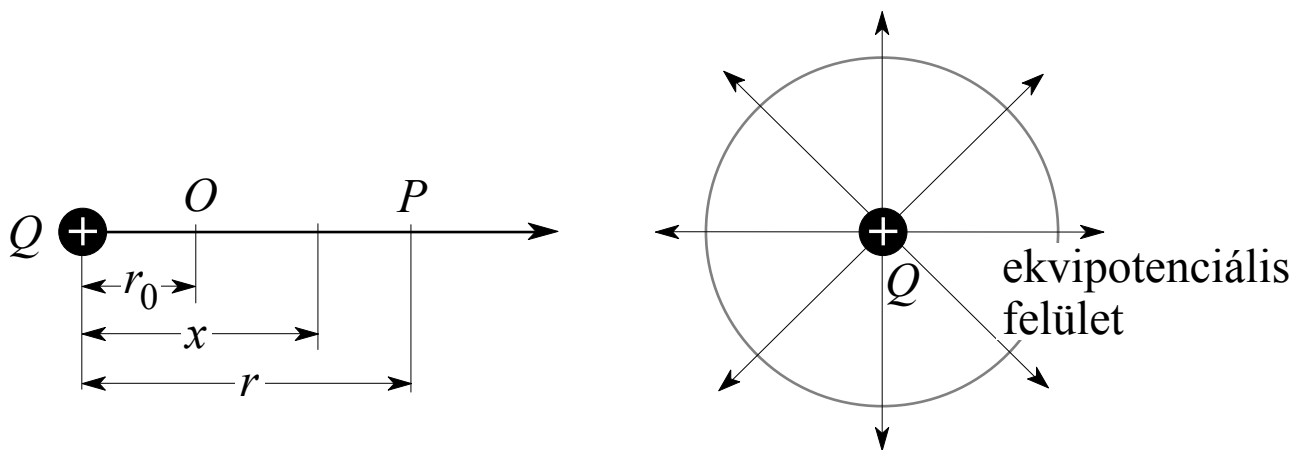
Ez azt jelenti, hogy a térerősség (amely a tér minden pontjában egy-egy vektor) és a potenciál (amely a tér minden pontjában egy-egy skalár) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van (ha lerögzítjük a potenciál nullapontját), vagyis az elektromos tér jellemzésére egyaránt használhatók!

Homogén erőterben (ilyen a tér pl. síkkondenzátor lemezei között, ld. alább!):



$$E = \frac{U_A - U_B}{l}$$

Ponttöltés potenciálja:



$$U_P - U_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{r_0} \frac{Q}{x^2} dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} \right]_r^{r_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) ;$$

- ha a referenciahely a végtelen távoli pont ($r_0 = \infty$), és a végtelenben a potenciált 0 -nak választjuk ($U_0 = 0$), akkor kapjuk a ponttöltés potenciálját:

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

(ebből a szuperpozíció elvének alkalmazásával:)

Több ponttöltésből álló rendszer potenciálja:

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{Q_i}{r_i} ,$$

ahol r_i a P pont és az i -edik ponttöltés közti távolság

Ekvipotenciális felületek: olyan felületek, amelyeknek minden pontjában ugyanakkora a potenciál értéke

$$U(x,y,z) = \text{konstans}$$

→ emiatt az ekvipotenciális felületek mindenütt merőlegesek a térerősség irányára

(ha ui. a térerősségnek ekvipotenciális felületre való vetülete valahol mégsem lenne zérus, akkor ott találhatnánk olyan görbét az ekvipotenciális felületen, amelyre a térerősség vonalintegrálja nem tűnne el, azaz a görbe végpontjai között feszültség lenne, ami ellentmond az ekvipotenciális felület definíciójának)

B. AZ ELEKTROSZTATIKAI TÉR ANYAG JELENLÉTÉBEN

4. Az elektrosztatikai tér vezető jelenlétében

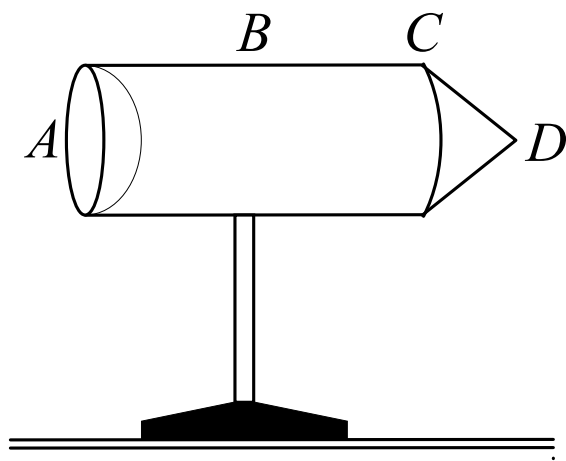
A vezetőben lévő szabad töltéshordozók külső E_k elektromos erőtér hatására elmozdulnak mindaddig, amíg E_b belső elektromos térük az E_k -t nem kompenzálja \rightarrow *egyensúly!*

1. Elektrosztatikus egyensúly esetén az E elektromos térerősség a vezető belsejében mindenütt zérus, a vezető külső felületén pedig a felületre merőleges.
(különben a szabad töltéshordozók mozognának, így nem lehetne egyensúly!)
2. Elektrosztatikus egyensúlyban az elektromos (többlet)töltés a vezető **külső** felületén helyezkedik el.
(ui. a vezetőn belül bárhol kijelölt zárt térfogatot körülvevő felületen az elektromos fluxus zérus (hiszen e felület minden pontjában $E=0$), így Gauss tétele miatt a térfogatban nem lehet többlettöltés!)
(kísérlet!)
3. Egyensúly esetén a potenciál a vezető minden pontjában ugyanakkora; a vezető teljes térfogata (felülete is!) ekvipotenciális felület.
(mivel a vezető belsejében $E = 0$, a felületen pedig a felületre merőleges)
4. A vezetőben lévő üregben a térerősség zérus, feltéve, hogy az üregben nincsenek (izolált) elektromos töltések.
 \rightarrow elektrosztatikus árnyékolás (Faraday-kalitka) **(kísérlet!)**

Töltés eloszlása a vezető felületén:

Felületi töltéssűrűség (def.): $\sigma \equiv \frac{dQ}{df}$

(Δf felületen ΔQ töltés van; hányadosuk határértéke az adott pontban)



tapasztalat: egységnyi (kis) felületre

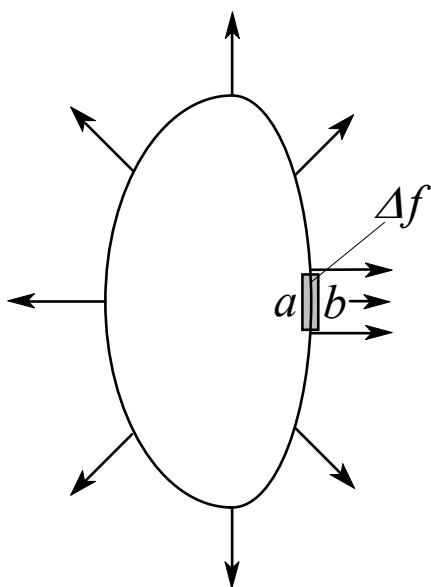
$$Q_A < Q_B < Q_C < Q_D, \text{ vagyis:}$$

Elektrosztatikus egyensúlyban lévő vezető felületén a felületi töltéssűrűség a felület lokális görbületével (azaz a görbületi sugár reciprokával) arányos.

nyos.

(tehát viszonylag legnagyobb a csúcsoknál és éleknél; ezeken a helyeken az E térerősség is a legnagyobb) **(kísérlet!)**

A felületi töltéssűrűség és a térerősség (σ és E) közötti kapcsolat:



a felületre merőleges tengelyű henger felületére Gauss tételéből:

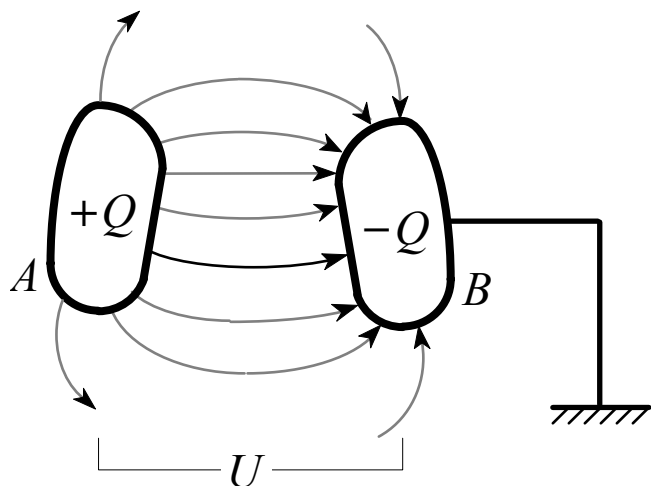
$$E_n df = Edf = \frac{1}{\epsilon_0} dQ$$

ebből $dQ = \sigma \cdot df$ felhasználásával kapjuk:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

→ Csúcs hatás: a felületi töltéssűrűség és így E a csúcsoknál olyan nagy lehet, hogy a tér a környező molekulákat polarizálja, magához vonzza, majd feltöltve eltaszítja (→ „elektromos szél”) (kísérletek!)

Kapacitás; kondenzátorok

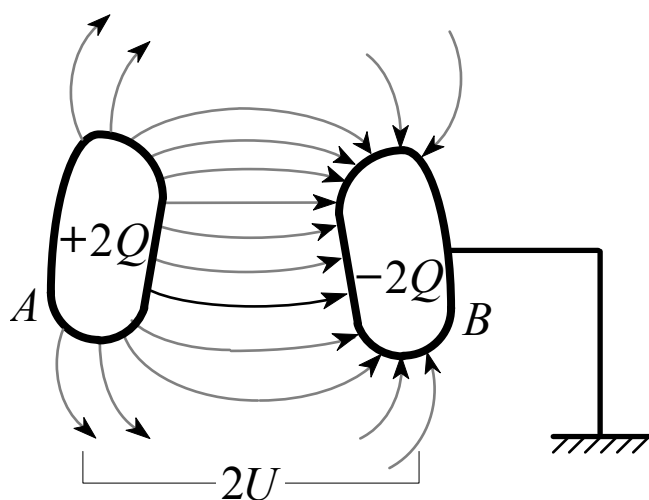


A szuperpozíció elve alapján könnyen belátható (ld. ábra):

$$U \propto Q$$

→ hányadosuk tehát állandó, csak a rendszer geometriájától (és a teret kitöltő szigetelő dielektromos állandójától, ld. alább) függ:

$$C = \frac{Q}{U}$$



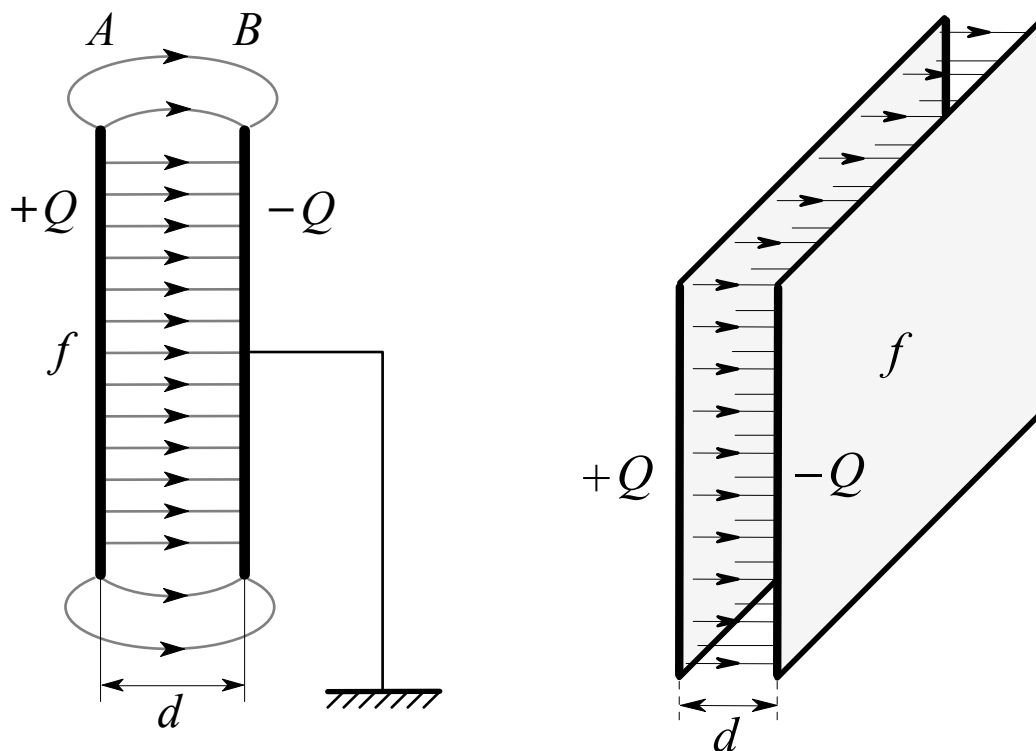
Az A és B vezetőkből álló rendszer töltésének és feszültségének hányadosa a rendszer C kapacitása.

$$\text{egysége: } 1 \frac{C}{V} = 1 \text{ farad (F)}$$

$$1 \text{ F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^9 \text{ nF} = 10^{12} \text{ pF}$$

- a gyakorlatban sokszor nagy kapacitásra van szükség
→ kondenzátorok

Síkkondenzátor



láttuk:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 f}$$

$U = Ed$ és $C = \frac{Q}{U}$ figyelembevételével adódik a vákuummal kitöltött síkkondenzátor kapacitása:

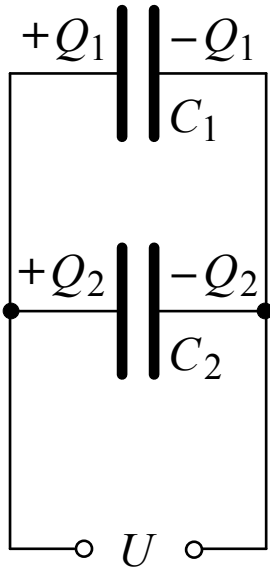
$$C = \epsilon_0 \frac{f}{d}$$

- a kapacitás függése a rendszer geometriájától (kísérletek!)

- kondenzátorok a gyakorlatban; kondenzátortípusok

Kondenzátorok kapcsolása

Párhuzamos kapcsolás:



- feszültségük megegyezik:

$$Q_1 = C_1 \cdot U \quad , \quad Q_2 = C_2 \cdot U$$

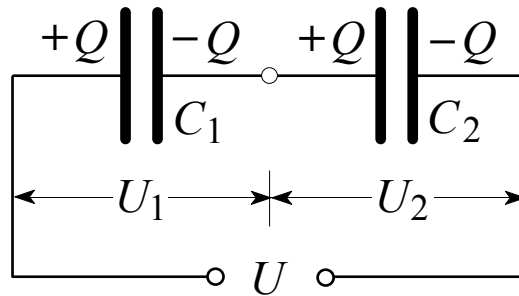
- töltéseik összegződnek:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \cdot U \\ Q &= C \cdot U \end{aligned} \right\}$$

$$C = C_1 + C_2$$

(akárhány kondenzátorra általánosítható!)

Soros kapcsolás:



- töltéseik megegyeznek

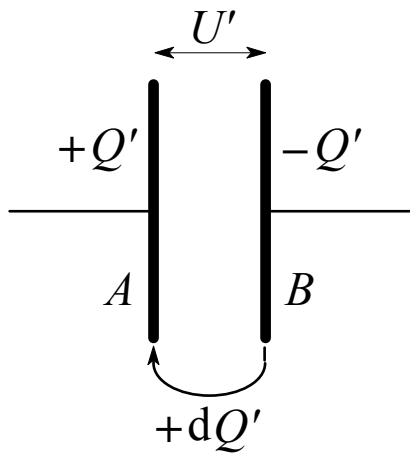
- a rendszer feszültsége a kondenzátorok feszültségeinek összege

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \\ U &= \frac{Q}{C} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

(akárhány kondenzátorra általánosítható!)

Feltöltött kondenzátor energiája



$$U' = \frac{Q'}{C}$$

ha $+dQ'$ töltést átviszünk B -ről A -ra, akkor eközben

$$dW = U' dQ' = \frac{Q'}{C} dQ'$$

munkát kell végeznünk, vagyis a teljes feltöltéshez szükséges munka:

$$W = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \quad , \text{ tehát}$$

a kondenzátor energiája:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$$

(kísérlet!)

Az elektrosztatikai tér energiája

(síkkondenzátorra:)

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \frac{f}{d} \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V \quad , \text{ vagyis: } W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V$$

ahol $V = f \cdot d$ az a térfogat, amelyet a (homogén!) mező kitölt (a

fegyverzeteken kívül a térerősség elhanyagolható!).

→ A W energia nem a kondenzátor fegyverzeteiben, hanem a (közük lévő, elektromos) *térben* halmozódik fel!

Az elektrosztatikai tér energiasűrűsége:

definíció: $w \equiv \frac{W}{V}$ a tér energiasűrűsége;

ez a fenti eredményünkből:

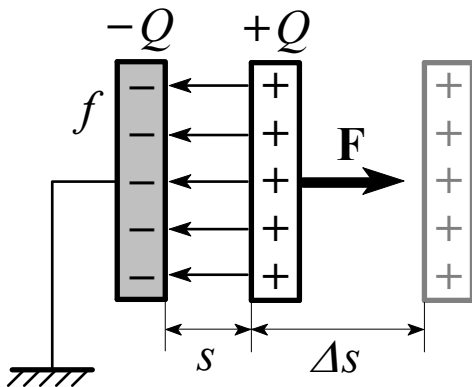
$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Ez az összefüggés (bár a síkkondenzátor speciális esetére kaptuk) *általánosan is érvényes!*

Síkkondenzátor lemezei közt ható vonzóerő:

- kis ds -nyivel megváltoztatjuk a lemezek távolságát

→ energiatétel: $dW = F ds$



$$F = \frac{dW}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} Q^2 \frac{s}{\varepsilon_0 f} \right)$$

tehát:

$$F = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q^2}{f} \quad , \text{ másképpen:}$$

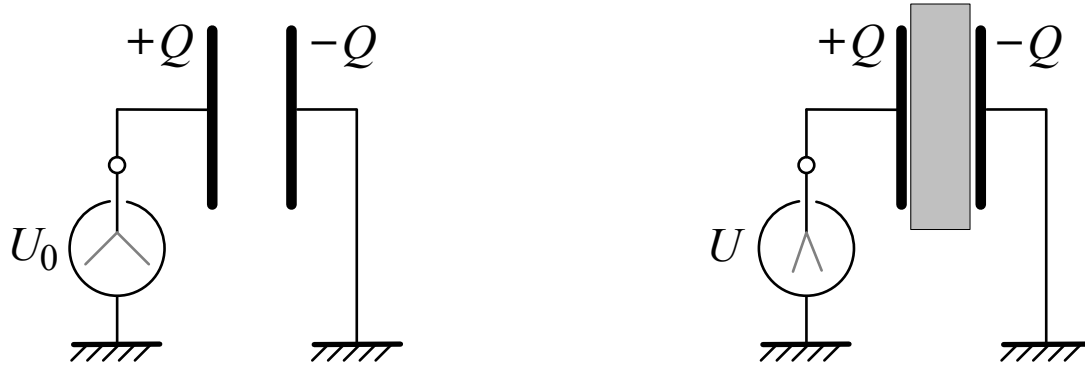
$$F = \frac{\varepsilon_0 f}{2s^2} U^2$$

→ ez erő mérésével abszolút feszültségmérést tesz lehetővé:
Thomson-féle feszültségmérleg

5. Az elektrosztatikai tér szigetelő (dielektrikum) jelenlétében

A dielektromos állandó

(kísérlet!)



→ ha egy síkkondenzátor lemezei között a vákuumot dielektrikumra cseréljük, akkor a kondenzátor feszültsége lecsökken (U_0 -ról U -ra)!

- a kondenzátor töltése nem változott, így: $Q = C_0 U_0$ és $Q = C U$,
ezekből: $C = C_0 \cdot \frac{U_0}{U}$, azaz $U < U_0$ miatt: $C > C_0$

Ha tehát egy síkkondenzátort vákuum helyett dielektrikummal töltünk ki, akkor kapacitása ε -szorosára növekszik: $\varepsilon = \frac{C}{C_0} \left(= \frac{U_0}{U} \right) > 1$;

itt ε a szigetelő *relatív dielektromos állandója* (más néven: *permittivitása*) (ε puszta szám!)

Ez az összefüggésünk csak a síkkondenzátor speciális esetére vonatkozik, ezért ε definiálására nem szerencsés! Azonban:

- láttuk, hogy a térerősség: $E_0 = \frac{U_0}{d}$ ill. $E = \frac{U}{d}$, emiatt:

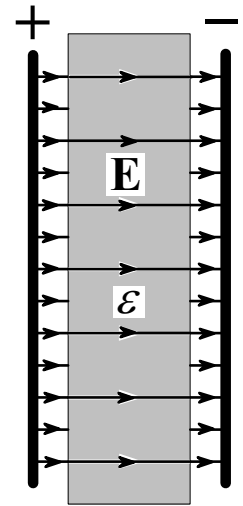
$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

tehát dielektrikumban a térerősség ε -od részére lecsökkent!

→ ezzel a relatív dielektromos állandó definíciója:

Ha valamely töltésrendszer vákuumban \underline{E}_0 , egy adott homogén, izotrop szigetelőben pedig \underline{E} térerősségű elektrosztatikai teret hoz létre, akkor a szigetelő relatív dielektromos állandója definíció szerint:

$$\epsilon = \frac{E_0}{E}$$



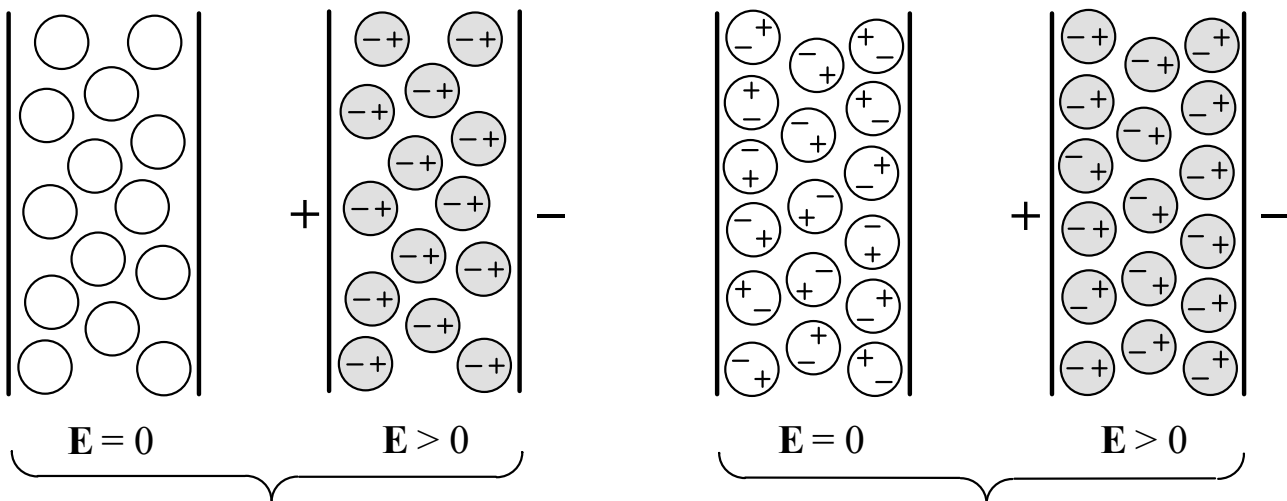
- a fenti gondolatmenetből az is kiderült, hogy:

f felületű, d vastagságú, ϵ relatív dielektromos állandójú

szigetelővel kitöltött síkkondenzátor kapacitása: $C = \epsilon \epsilon_0 \frac{f}{d}$

De miért módosítják a szigetelők az elektromos teret? Molekuláris magyarázat:

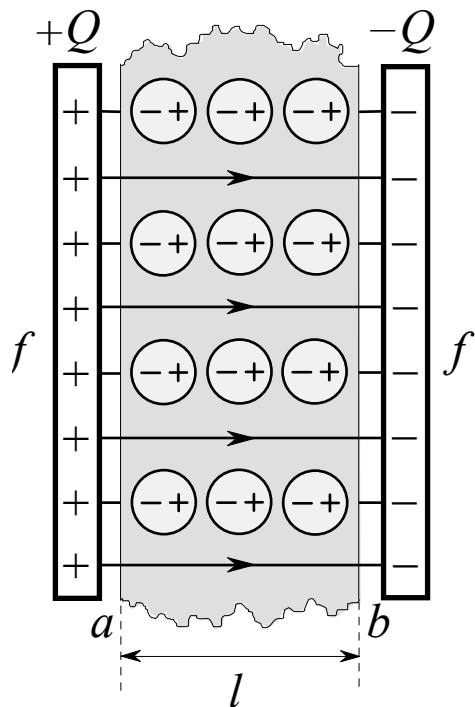
A szigetelők polározódása (dielektromos polarizáció)



$E=0$ esetén **nempoláros** molekulák $E=0$ esetén **is poláros** molekulák

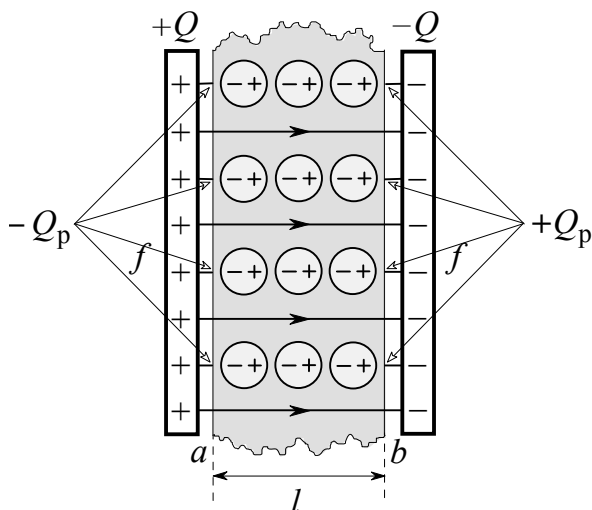
a) **nempoláros** molekulák: az elektromos tér a molekulákon belül eltolja a pozitív és a negatív töltések súlypontját, ezzel az \underline{E} irányába mutató indukált dipólmomentumot hoz létre a szigetelő molekuláiban

b) **poláros** molekulák: az elektromos tér az E irányába *rendezi* az eleve polarizált (dipólus) molekulák permanens dipólmomentumait



Emiatt az elektromos térbe tett szigetelő belsejében a pozitív és a negatív töltések *eltolódnak* egymáshoz képest. Ez a (homogén) szigetelő *térfogati* semlegességét *nem változtatja meg*, mivel a térfogatban a pozitív és a negatív töltések közel folytonosan oszlanak el, így eltolódásuk után is semlegesítik egymást. A szigetelő határán kifelé elmozduló töltések semlegesítésére viszont nem áll rendelkezésre ellentétes polaritású töltés, ezért polarizáció hatására a dielektrikum (E -re merőleges)

határfelületein *felületi elektromos töltések* (ún. polarizációs töltések, Q_p) *jelennek meg* (ld. az alábbi ábrán!)! A polarizációs felületi töltések tere (ld. az ábrán) mindig *ellentétes* a polarizációt létrehozó térrel!



A Q_p polarizációs töltések ún. *kötött töltések*, mert nem hagyhatják el a molekula határait, így csak korlátozott mértékben mozdulhatnak el,

szemben a korábban tárgyalt, a vezetõn szabadon elmozdulni képes *szabad töltésekkel*.

Az elektromos polarizáció vektora

- az anyag (általában a külsõ elektromos tér hatására létrejött) elektromos polarizáltságát jellemzi az elektromos polarizáció **P** vektora; definíciója:

Ha a polarizált dielektrikum V térfogatának dipólmomentuma **m**, akkor az *elektromos polarizáció P vektora*:

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\mathbf{m}}{V}$$

(vagyis -dimenziótól eltekintve!- **P** a polarizált szigetelõ térfogategységre vonatkoztatott dipólmomentuma)

egysége: $[\mathbf{P}] = 1 \frac{As}{m^2}$

- láttuk, hogy a polarizáció nem változtatja meg a dielektrikum térfogati semlegességét, viszont hatására a dielektrikum **E** -re merõleges határfelületein felületi polarizációs töltések jelennek meg; jelölje ezek Q_p/f felületi töltéssûrûségét σ_{pol} !

- ezzel megadható a dielektrikum f alapterületû, ℓ magasságú (azaz $V = f \cdot \ell$ térfogatú) hasábjának dipólmomentuma:

$$m = Q_p \cdot \ell = \sigma_{pol} \cdot f \cdot \ell = \sigma_{pol} \cdot V \quad , \quad \text{vagyis:} \quad \mathbf{P} \equiv \frac{\mathbf{m}}{V} = \sigma_{pol}$$

→ kapcsolatot találtunk tehát a **P** elektromos polarizációvektor nagysága és a polarizációs töltések felületi sûrûsége között: $\mathbf{P} = \sigma_{pol}$

- láttuk a 4. fejezetben, hogy σ felületi töltéssűrűség $E = \sigma / \epsilon_0$ térerősséget generál, emiatt a polarizációs (felületi) töltésektől származó térerősség nagysága: $E_{pol} = \sigma_{pol} / \epsilon_0$, ami a fenti $\mathbf{P} = \sigma_{pol}$ egyenlőséget kihasználva összefüggést ad a polarizációs töltésektől származó térerősség és a \mathbf{P} elektromos polarizáció között:

$$E_{pol} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

(ez utóbbi, már vektori egyenletben azért jelent meg negatív előjel, mert -mint a korábbi részben láttuk- a polarizációs felületi töltések tere mindig *ellentétes* a polarizációt létrehozó térrel, így \mathbf{P} -vel is)

Az elektromos szuszceptibilitás

A tapasztalat szerint a \mathbf{P} elektromos polarizáció egyenesen arányos a (homogén, izotrop) szigetelőben uralkodó elektromos térerősséggel (ez várható, hiszen a dielektrikumot az elektromos tér polarizálja!):

az arányossági tényezőt (dimenzionális okból) $\chi \cdot \epsilon_0$ alakban felvéve:

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}, \text{ ahol } \chi \text{ az elektromos szuszceptibilitás,}$$

a dielektrikum polarizálhatóságának mértékét megadó, korpuszkuláris jelentésű anyagállandó (χ puszta viszonzszám; ez \uparrow a definíciója!).

(az összefüggésben \mathbf{E} a *dielektrikum*beli elektromos térerősség (\mathbf{E}_{diel}))

A dielektromos állandó és az elektromos szuszceptibilitás kapcsolata:

- a dielektrikumban kialakuló \mathbf{E}_{diel} térerősség a (szabad töltések ugyanazon rendszere által) vákuumban kelthető $\mathbf{E}_{vák}$ térerősség és a polarizációs töltések által létrehozott \mathbf{E}_{pol} térerősség eredője:

$$\mathbf{E}_{diel} = \mathbf{E}_{vák} + \mathbf{E}_{pol}$$

(láttuk, hogy a polarizációs töltések mindig úgy helyezkednek el, hogy elektromos terük ellentétes az $\mathbf{E}_{\text{vák}}$ vákuumbeli térerősséggel, ezért áll fenn mindig az $E_{\text{diel}} < E_{\text{vák}}$ reláció)

- láttuk:

$$(a) \quad \mathbf{E}_{\text{vák}} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}_{\text{diel}} \quad (\text{ld. a jelen fejezet elején: } E = \frac{E_0}{\varepsilon})$$

$$(b) \quad \mathbf{E}_{\text{pol}} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad (\text{ld. a jelen fejezet ez előtti részének végén})$$

→ ezeket beírva fenti egyenletünk jobboldalának első ill. második tagja helyett, kapjuk: $\mathbf{E}_{\text{diel}} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}_{\text{diel}} - \mathbf{P}/\varepsilon_0$

- itt \mathbf{P} helyébe az elektromos szuszceptibilitás $\mathbf{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{diel}}$ definícióját (ld. fentebb!) írva adódik: $\mathbf{E}_{\text{diel}} = (\varepsilon - \chi) \cdot \mathbf{E}_{\text{diel}}$,

amelyet \mathbf{E}_{diel} -lel végigosztva kapjuk ε és χ kapcsolatát: $\varepsilon = 1 + \chi$

A dielektromos eltolódási vektor

- a jelen (5.) fejezet kezdetén láttuk, hogy az el. térerősség a tér minden pontjában vákuumbeli értékének ε -od részére csökken, ha a (geometriai) teret eredetileg kitöltő vákuumot ε dielektromos állandójú, homogén és izotrop szigetelőre cseréljük

- emiatt a korábban megismert, vákuumban érvényes Gauss-tétel *szigetelőben*, az ott uralkodó térerősséggel felírva, a következő:

$$\oint E_n df = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \sum_i Q_i$$

→ ennek alapján célszerű bevezetni egy olyan \mathbf{D} vektort, amely dielektrikumban az *ottani* térerősség $\varepsilon \cdot \varepsilon_0$ -szerese, mert azzal a Gauss-tétel dielektrikumokban különösen egyszerű alakot vesz fel (ld. alább!)

\mathbf{D} (di)elektromos eltolódási vektor (homogén, izotrop közegben):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{egysége: } 1 \text{ C/m}^2$$

(itt \mathbf{E} a dielektrikumbeli elektromos térerősség (\mathbf{E}_{diel}))

E definíció szerint \mathbf{D} szigetelőben (és természetesen vákuumban is) a vákuumbeli ($\varepsilon\mathbf{E}$) térerősség ε_0 -szorosa.

A Gauss-tételnek az így definiált \mathbf{D} elektromos eltolódási vektorral felírt, dielektrikumokban is érvényes alakja tehát:

$$\oint_F \mathbf{D} d\mathbf{f} = \sum_i Q_i$$

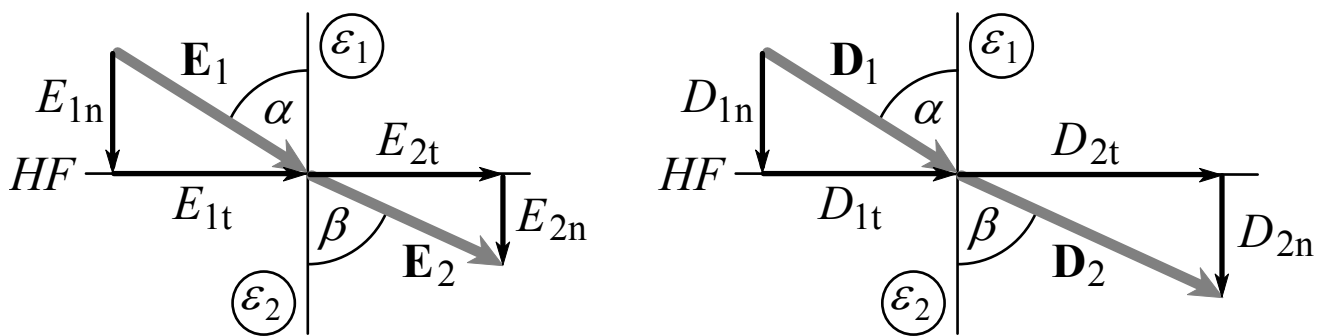
Ez az elektrosztatikai tér első alaptörvénye (Gauss-tétel).

A \mathbf{D} forrásai és nyelői tehát a **szabad** töltések (így értékét csakis azok határozzák meg; pl. ezért is érdemes \mathbf{D} -t bevezetni!), míg az \mathbf{E} térerősség forrásai és nyelői a szabad és a kötött töltések algebrai eredője (előjeles összege).

Dielektrikumokban is érvényes az elektrosztatikai tér örvénymentességét kifejező, korábban már látott összefüggés, az elektrosztatikai tér második alaptörvénye:

$$\oint_g \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$$

Az \mathbf{E} és \mathbf{D} vektorok viselkedése két közeg határfelületén



Az elektrosztatikai tér örvénymentességéből ill. a Gauss-tételből következően (ha a határfelületen nincs töltés):

A határfelület két oldalán:

- az \mathbf{E} érintőleges komponensei megegyeznek
- a \mathbf{D} normális komponensei megegyeznek

azaz

$$E_{2t} = E_{1t}$$

és

$$D_{2n} = D_{1n} ;$$

$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ miatt ebből következik, hogy a *határfelület két oldalán*

- az \mathbf{E} normális komponensei eltérőek, arányuk $\varepsilon_2/\varepsilon_1$
- a \mathbf{D} érintőleges komponensei eltérőek, arányuk $\varepsilon_1/\varepsilon_2$

⇓

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}$$

⇓

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$$

azaz

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

és

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} ;$$

Mindezek miatt:

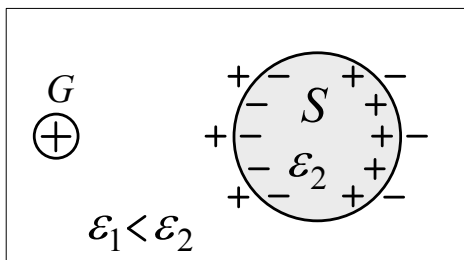
$$\underbrace{\text{minthogy } \operatorname{tg} \alpha = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \quad \text{és} \quad E_{2t} = E_{1t}}_{\text{...}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

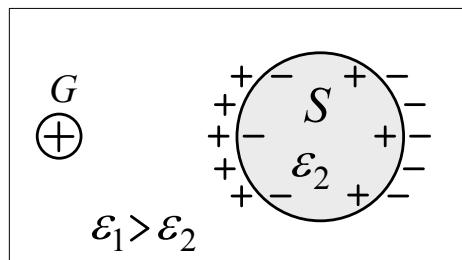
ez az \mathbf{E} és a \mathbf{D} vektorok "törési törvénye" (mindkettőre ugyanaz!).

Dielektrikumokban fellépő erőhatások

(kísérlet!)



vonzás



taszítás

magyarázat: ha az S golyó helyén is az ε_1 dielektromos állandójú közeg lenne (akkor a G által arra gyakorolt eredő erő zérus lenne), akkor abban minden elemi térfogat indukált dipólmomentuma

kisebb

nagyobb

lenne,

így azt a G inhomogén tere

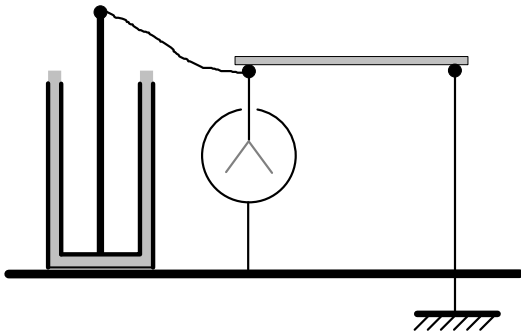
kevésbé

jobban vonzaná

C. A STACIONÁRIUS ELEKTROMOS ÁRAM (EGYENÁRAM)

6. Áram és ellenállás

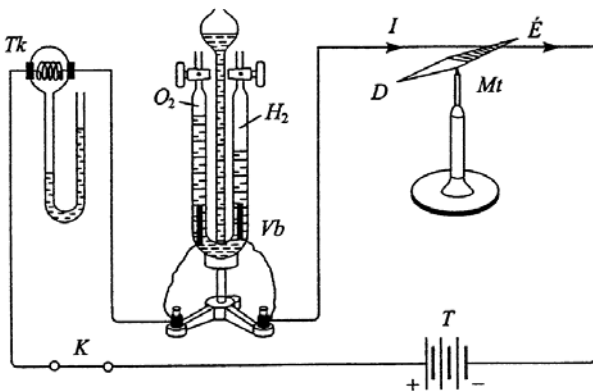
Az árammal átjárt vezetőben a térerősség *nem* zérus (ui. nincs elektrosztatikai egyensúlyban)!



(kísérlet!)

Elektromos áram: az elektromos töltések *rendezett* mozgása

Az áram iránya: a pozitív töltéshordozók mozgásának iránya



Az elektromos áram hatásai:

(kísérlet!)

- hőhatás
- mágneses hatás
- kémiai hatás
- fényhatás

Áramerősség: a vezető figyelembe vett keresztmetszetén Δt idő alatt átáramló ΔQ töltésmennyiség és a Δt idő hányadosa:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}; \quad \text{pontosabban: } I = \frac{dQ}{dt}$$

egysége az SI -ben *alapegység* (definíciójáról ld. a 8. fejezetet!):
[I]= 1 A (amper) = 1 C/s

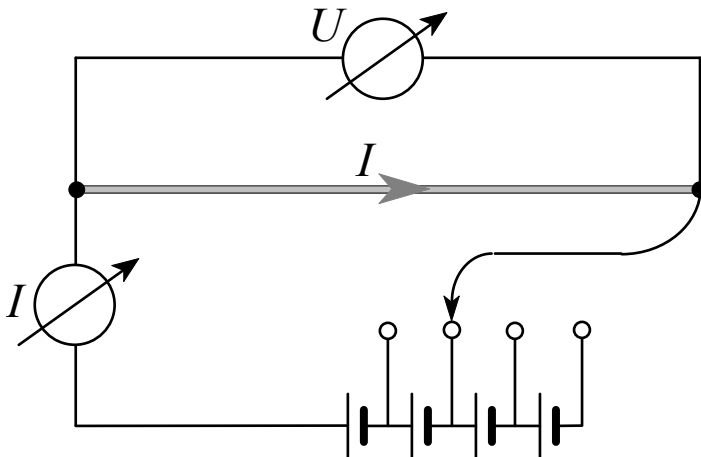
→ I áramerősségű egyenáram (azaz időtől független áram) által t idő alatt szállított töltés: $Q = I \cdot t$

→ tetszőleges $I = I(t)$ erősségű áram által a $[t_1, t_2]$ időintervallumban

szállított töltés: $Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$

Ohm törvénye és az ellenállás

(kísérlet!)



I egyenesen arányos U -val!

Ohm törvénye:

Egy vezetőben folyó áram erőssége egyenesen arányos a vezető pólusai közötti feszültséggel:

$$I = \frac{U}{R}$$

itt $R (= U/I)$ a vezető *ellenállása*, egysége: $1 \text{ V/A} = 1 \text{ ohm } (\Omega)$

Az ellenállás reciproka a G *vezetőképesség* (vezetés):

$$G = \frac{1}{R}$$

, egysége: $1 \text{ A/V} = 1 \text{ siemens (S)}$

Homogén, l hosszúságú, állandó q keresztmetszetű vezető ellenállása:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{q}$$

ahol a ρ arányossági tényező az anyagi minőségre jellemző *fajlagos ellenállás*, egysége: $[\rho] = 1 \Omega \text{ m}$

A fajlagos ellenállás reciproka a σ *fajlagos vezetőképesség*:

$$\frac{1}{\rho} = \sigma \quad , \text{ egysége: } [\sigma] = 1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Az ellenállás hőmérsékletfüggése

Az ellenállás a hőmérséklet növekedésével

- bizonyos anyagok (pl. fémek) esetén növekszik
- más anyagok (pl. félvezetők, elektrolitok, szén) esetén csökken

Fémek esetén:

- szűk hőmérséklettartományban:

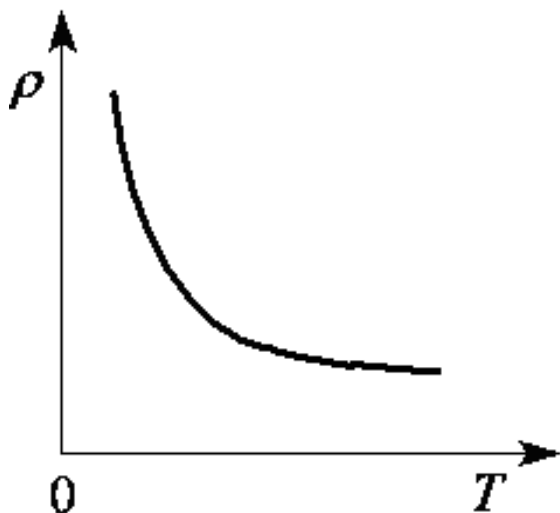
$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \left(= \frac{R - R_0}{R_0} \right) = \alpha(t - t_0) \quad , \text{ másképpen: } \rho = \rho_0 [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$$

ahol α az ellenállás *hőmérsékleti tényezője* $[\alpha] = \text{K}^{-1}$

- szélesebb hőmérséklet-intervallumban a T szerinti sorfejtés magasabbrendű tagjait is meg kell tartani:

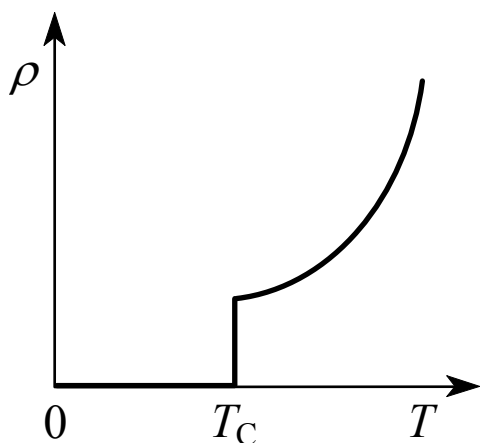
$$\rho(T) = \rho_0 \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot (T - T_0) + \beta \cdot (T - T_0)^2 + (\dots) \right\}$$

Félvezető anyagok esetén:



$$\rho = konst. \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

Szupravezetés



T_C : kritikus hőmérséklet

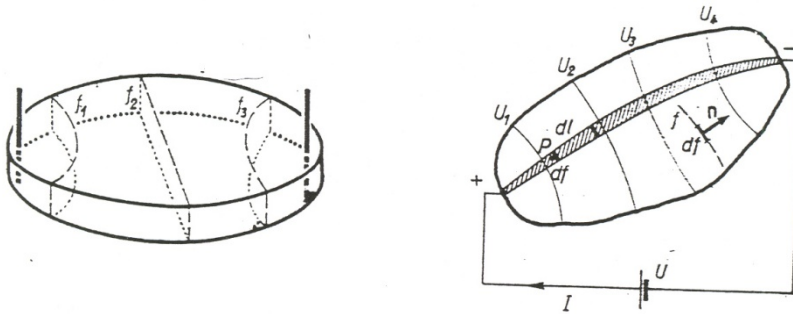
Hg: 4,2 K alatt

(H. Kamerlingh Onnes, 1911)

kerámiák: már 100 K felett is

Áramsűrűség

A töltések áramlásának iránya és sebessége a térben általában pontról pontra változik (pl. nem lineáris vezető belsejében; ld. ábra), ezért az áramerősség mellett célszerű bevezetni az annak megfelelő *differenciális* mennyiséget, az áramsűrűséget, amely a töltések áramlását *a tér minden pontjában* leírja (ezért nevezzük differenciális mennyiségnek):



Ha a tér P pontjában a töltések áramlási irányára merőlegesen felvett df felületeleмен át dI áram folyik, akkor az áramsűrűség: $J = \frac{dI}{df}$

- a \mathbf{J} vektormennyiség, iránya a pozitív töltések áramlási iránya

- az áramsűrűség SI-egysége: $[J] = 1 \text{ A/m}^2$

- a \mathbf{J} vektortér az áramvonalakkal (J -vonalakkal) szemléltethető

Az áramsűrűségből természetesen tetszőleges f felületre kiszámítható az áramerősség:

$$I = \int_{(f)} \mathbf{J}_n \cdot d\mathbf{f}$$

Az Ohm-törvény differenciális alakja

- a mikroszkopikus modelleknek és az erőterfelfogásnak az Ohm-törvény fentebb megismert *integrális* (azaz makroszkopikus jellemzőkkel felírt) alakjánál jobban megfelel annak alább felírandó differenciális alakja

→ennek levezetése céljából alakítsuk át az integrális Ohm-törvényt úgy, hogy abban az integrális U , I , G mennyiségek helyett azok differenciális megfelelői (E , J és σ) szerepeljenek:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho \cdot \frac{l}{q}} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l} \cdot q = \sigma \cdot E \cdot q, \text{ amelyből: } J \equiv \frac{I}{q} = \sigma \cdot E \quad ; \text{ ez a}$$

Differenciális Ohm-törvény:

Homogén, izotrop anyag bármely pontjában az áramsűrűség az ottani fajlagos vezetőképesség és térerősség szorzata: $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$

Az Ohm-törvény mikroszkopikus értelmezése

- ha a vezetőben a térerősség \mathbf{E} , akkor az áramvezetésben résztvevő töltéshordozókra (tekintsünk most speciálisan fémes vezetőt, abban ezek $-e$ töltésű elektronok) ható erő: $\mathbf{F}_{\text{gyorsító}} = -e \cdot \mathbf{E}$

- ha csak ez az erő hatna rájuk, akkor folyamatosan gyorsulnának, így (minthogy I arányos v -vel (ld. alább)) az áram minden határon túl növekedne

- a tapasztalat szerint azonban az áram véges értéken stabilizálódik, stacionárius (időtől független) állapot alakul ki, tehát a töltéshordozók az egyensúly beállta után állandó sebességgel mozognak tovább, vagyis (v sebességükkel ellentétes irányú) fékező erő is hat rájuk; tegyük fel, hogy ez egyenesen arányos v -vel (vö. Stokes-féle súrlódási törvény!): $\mathbf{F}_{\text{fékező}} = -\alpha \cdot \mathbf{v}$

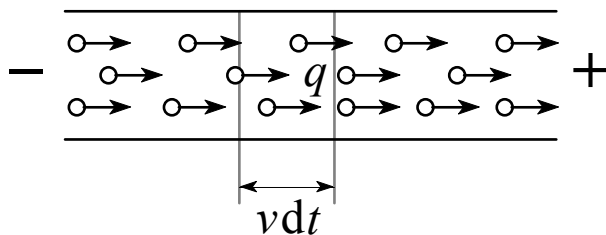
- stacionárius áramlás esetén definíció szerint $\mathbf{v} = \text{állandó}$, így a töltéshordozókra ható eredő erő szükségképpen zérus: $\sum \mathbf{F} = 0$, vagyis:

- $e \cdot E = \alpha \cdot v$, eszerint $v/E (= -e/\alpha) = \text{állandó}$, azaz a töltéshordozók sebessége arányos a térerősséggel!

A $\mu = v/E$ mennyiséget (elektron)mozgékonyáságnak nevezzük.

egysége: $1 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$

Jelölje q a vezető keresztmetszetét, n az elektronok koncentrációját!



- a vezető kijelölt keresztmetszetén dt idő alatt annyi dQ töltés halad át (ld. ábra!), amennyi a q alapterületű, $v \cdot dt$ magasságú hengerben van, ezért:

$$J \left(\equiv \frac{I}{q} \equiv \frac{1}{q} \frac{dQ}{dt} \right) = \frac{1}{q} \frac{e \cdot n \cdot q \cdot v \cdot dt}{dt} = e \cdot n \cdot v =$$

(a μ fenti definícióját felhasználva) $J = e \cdot n \cdot \mu \cdot E$;

másrészt a diff. Ohm-törv. szerint: $J = \sigma \cdot E$, így:

$$\sigma = e \cdot n \cdot \mu$$

ezzel mikroszkopikus jellemzőkre vezettük vissza a fajlagos vezetőképességet!

A fentiek alapján megbecsülhetjük az elektronok rendezett mozgásának sebességét (driftsebesség) ($v = \frac{I}{e \cdot n \cdot q}$). Ez rézben, az elektrotechnikában szokásos max. áramsűrűség (10^7 A/m^2) mellett: $v \approx 10^{-4} \text{ m/s}$.

Megjegyzendő, hogy a töltéshordozóknak e lassú, rendezett mozgása (amellyel az áramot vezetik!) ennél sokkal (kb. 9 nagyságrenddel (!)) nagyobb sebességű (szobahőmérsékleten $\approx 10^5 \text{ m/s}$), *rendezetlen* hőmozgásra ül rá.

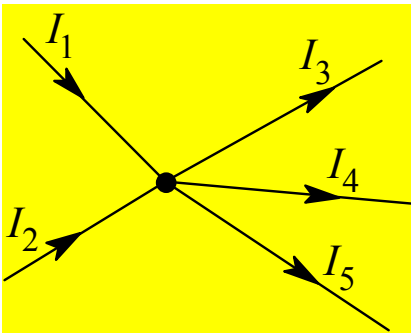
7. Egyenáramú áramkörök

Kirchhoff törvényei

- *Stacionárius* (időtől független) állapotban érvényesek!

Kirchhoff első törvénye („csomóponti törvény”)

Stacionárius árammal átjárt hálózat minden csomópontjára fennáll, hogy az ott található áramok előjeles (pl. bemenő: +, kijövő: -) áramerősségeinek összege zérus:
$$\sum_i I_i = 0$$



pl. ábránk csomópontjára:

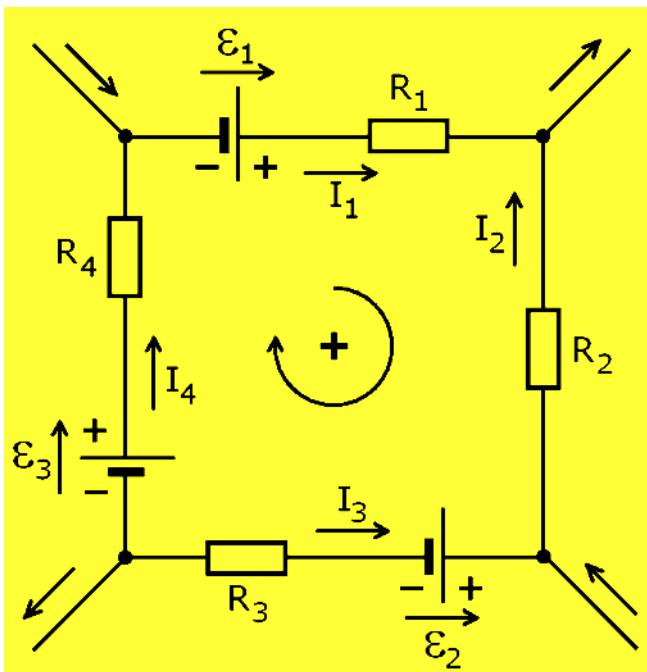
$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

- e törvény a *töltésmegmaradást* fejezi ki; ha nem állna fenn, akkor a csomópont töltése az időben változna, azaz nem lenne stacionárius az állapot!

(kísérlet!)

Kirchhoff második törvénye („huroktörvény”)

- stacionárius állapotú hálózatban válasszunk ki egy tetszőleges hurkot (ld. ábra; definíció szerint a hurok *mindig zárt!*)!



- jelöljük ki a hurokban *önkényesen* egy (referencia) körüljárási irányt (\odot), továbbá áramirányokat a hurok szomszédos csomópontjai közötti szakaszaira (I_1, \dots, I_4)!

- ha alább felírt egyenleteink egy áramra pozitív ill. negatív értéket adnak, akkor a valóságos áramirány *a kijelölt áramiránnyal* (és nem a körüljárási iránnyal!) egyező ill. ellentétes elektromotoros erő (\mathcal{E}) def.: a *terheletlen* feszültségforrás pólusai közötti feszültség (részletesen ld. a megfelelő, későbbi fejezetben!)

Stacionárius árammal átjárt hálózat minden hurokjában az \mathcal{E}_i elektromotoros erők és az ellenállásokon eső $I_i \cdot R_i$ feszültségek előjeles (ld. alább!) összege zérus:

$$\sum_i \mathcal{E}_i + \sum_i I_i R_i = 0$$

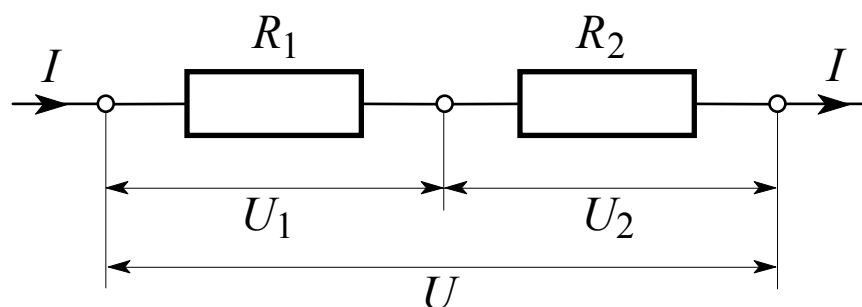
- itt az \mathcal{E}_i és $I_i R_i$ tagok előjeleinek meg kell felelniük a választott körüljárási irányoknak: \mathcal{E}_i akkor pozitív, ha azon áram iránya, amelyet az adott feszültségforrás *önmagában* létrehozna (azaz a pozitív pólusából *kifelé* mutató irány), megegyezik a körüljárási iránnyal (az R_i -k között szerepelniük kell a nem ideális feszültségforrások belső ellenállásainak (részletesen ld. később) is!); $I_i R_i$ pedig akkor pozitív, ha az áram (feltételezett) iránya *ellentétes* a körüljárási iránnyal (ui. az árammal átjárt ellenállás ilyen irányú feszültségforrásnak felel meg)

pl. ábránk hurokjára: $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$

- magyarázat: ha e törvény nem állna fenn, akkor a hurok mentén körülhaladva megváltozna a vezetésben résztvevő töltéshordozók kinetikus energiája, azaz nem lenne stacionárius az állapot!

Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása

Soros kapcsolás



- a csomóponti törvény miatt az ellenállásokon *ugyanakkora* I áram folyik át (ld. fenti ábra)

- a rendszeren eső feszültség az ellenállásokon eső feszültségek összege:

$$U = U_1 + U_2$$

- itt az Ohm-törvényből: $U_1 = I R_1$ ill. $U_2 = I R_2$, behelyettesítve:

$$U = I R_1 + I R_2 = I (R_1 + R_2) , \text{ amelyből az } R_e = U/I$$

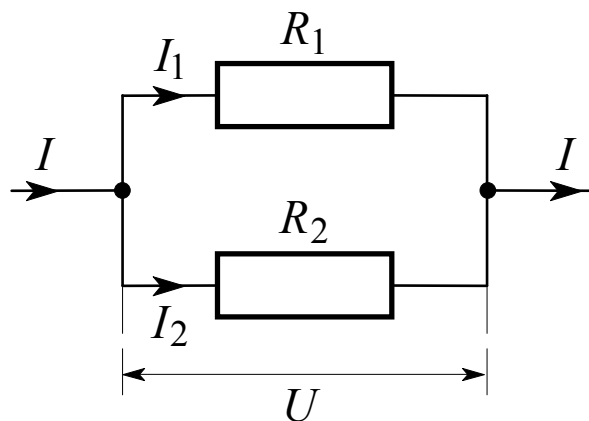
eredő ellenállás: $R_e = R_1 + R_2$,

általánosítva:

$$R_e = \sum_i R_i$$

- az Ohm-törvény alapján felírt fenti egyenletekből az is látszik, hogy a sorbakapcsolt ellenállásokon eső feszültségek az ellenállásokkal arányosak: $U_1/U_2 = R_1/R_2$

Párhuzamos kapcsolás



- a huroktörvény miatt az ellenállásokon *ugyanakkora* U feszültség esik (ld. fenti ábra)

- a csomóponti törvény miatt a rendszeren átfolyó áram az ellenállásokon átfolyó áramok összege: $I = I_1 + I_2$

- itt az Ohm-törvényből: $I_1 = U/R_1$ ill. $I_2 = U/R_2$, behelyettesítve:

$$I = U/R_1 + U/R_2 = U (1/R_1 + 1/R_2) , \text{ amelyből az}$$

eredő ellenállás reciproka ($1/R_e = I/U$): $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,

általánosítva: $\frac{1}{R_e} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

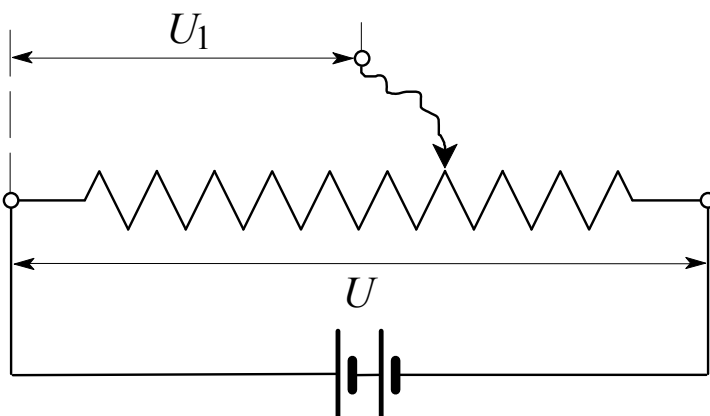
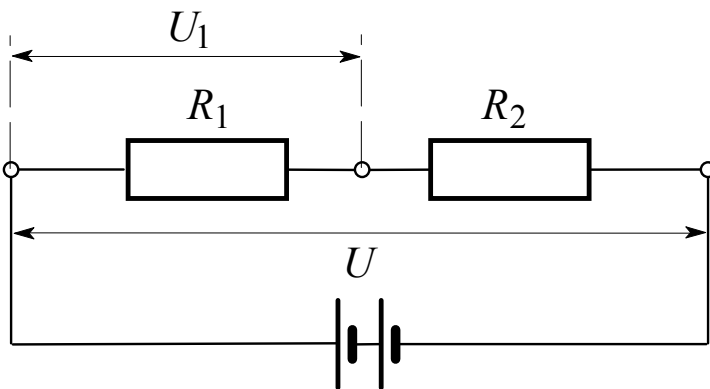
- az Ohm-törvény alapján felírt fenti egyenletekből az is látszik, hogy a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon keresztül folyó áramok az ellenállásokkal fordítottan arányosak: $I_1/I_2 = R_2/R_1$

Feszültségosztó (potencióméter)

- csak a *terheletlen* potenciómétert ($R_{\text{fogyasztó}} \gg R$) vizsgáljuk (ld. az alábbi ábrán)

$$R = R_1 + R_2$$

(kísérlet!)



$$I \left(= \frac{U}{R} \right) = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad \text{és} \quad U_1 = IR_1, \quad \text{ezért:}$$

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R}$$

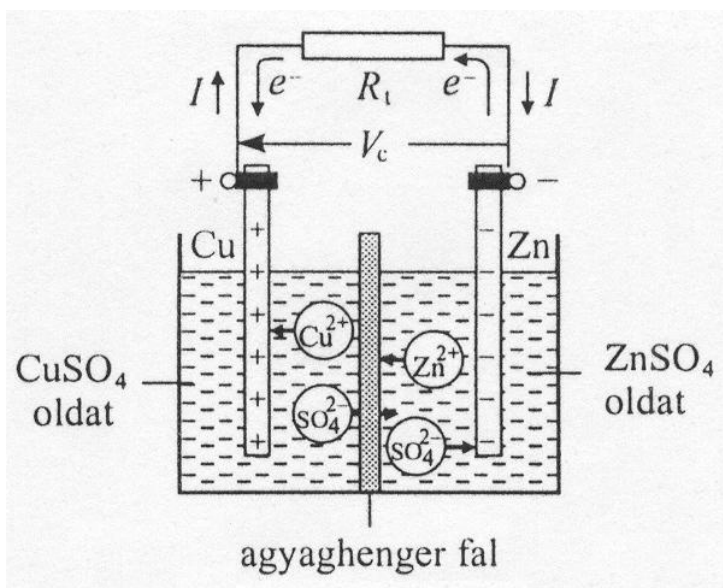
$$0 \leq R_1 \leq R \quad \Rightarrow \quad 0 \leq U_1 \leq U, \quad ,$$

vagyis: a potenciométer segítségével 0 és U között bármekkora feszültség létrehozható, ha a csúszkát a bal- és jobboldali véghelyzete között mozgatjuk!

Az elektromotoros erő

Galvánelem

- a galvánelemek elektrokémiai reakciók segítségével elektromos feszültséget előállító feszültségforrások
- két elektródból és egy (vagy két) elektrolitból állnak
- a galvánelemekben lezajló elektrokémiai reakciók során felszabaduló energia az elektródok fogyasztókon keresztül való összekötésével létrejött áramkörben folyó elektromos áram munkájává alakul



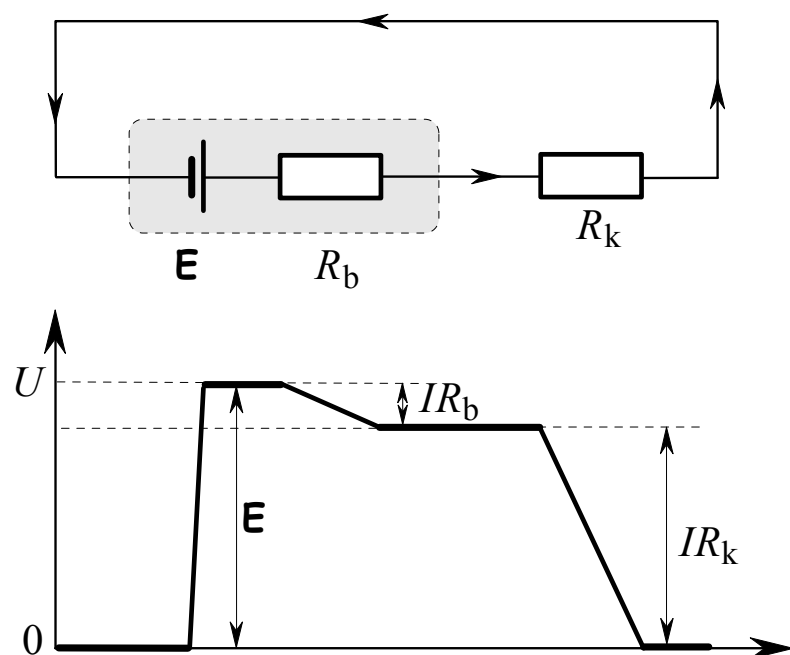
sével létrejött áramkörben folyó elektromos áram munkájává alakul

- a **Daniell-féle elem** (ld. ábra) működése: terheletlen ($R_t = \infty$) esetben a cink elektród felületén a cinkatomok 2 elektron leadásával (emiat az elektród negatívvá válik, így ez lesz a katód) ionizálódnak (oxidálódnak), és az oldatba mennek; a réz elektródból pedig az oldatban lévő

rézionok 2 elektront vesznek fel (redukálódnak; a réz elektród így pozitívvá válik, ez lesz az anód), ezzel a réz elektródon atomok alakjában réz válik ki; az elektródokon így felépülő potenciálok gátolják a fenti folyamatokat, emiatt egy idő után (dinamikus) egyensúly áll be; ha ezután elektromos fogyasztóval összekötjük az elektródokat, akkor a katód elektrontöbbletének egy része a fogyasztón keresztül a réz elektródhoz jut (eközben munkát végez), az elem áramot szolgáltat, amely ugyanakkor csökkenti az elektródokon felhalmozódott töltéstöbbleteket, vagyis a fentebb leírt elektródreakciók újra beindulnak, és fenntartják az elem (kapocs) feszültségét; az áramkört az oldatban a Zn^{2+} , Cu^{2+} és SO_4^{2-} ionok árama zárja (enélkül leállna a fogyasztón át folyó áram az elektródreakciók révén az oldatban felhalmozódó ill. elfogyó ionok miatt)

Potenciálviszonyok zárt áramkörben

A zárt áramkör pontjainak potenciáljait mutatja a kör sematikus rajza alatti grafikon az áramköri elemeknek megfelelő helyen (a besatírozott rész a *reális feszültségforrás*, ld. alább!).



(az ábra alsó grafikonja a hely függvényében mutatja az áramkör potenciálviszonyait)

Feszültségforrás belső ellenállása

- *ideális feszültségforrás* (feszültséggenerátor): feszültsége független a terhelő áramtól

- *reális feszültségforrás* (a fenti ábra szürkével besatírozott része): helyettesítő kapcsolása: ideális feszültségforrással sorba kötött ohmos ellenállás (ez az R_b ellenállás az áramforrás *belső ellenállása*)

(R_b jelenléte miatt -ld. alább- minél nagyobb árammal terhelünk egy reális feszültségforrást, annál kisebb a feszültség annak pólusai között; feszültséggenerátor esetén -a fenti definíció értelmében- szükségképpen $R_b = 0$)

elektromotoros erő (másnéven *üresjárat* feszültség), \mathcal{E} : a *terheletlen* feszültségforrás pólusai közötti feszültség

kapocsfeszültség, U_k : a *terhelt* feszültségforrás pólusai közötti feszültség

Az elektromotoros erő és a kapocsfeszültség összefüggése

Kirchhoff huroktörvénye a fenti ábra áramkörére:

$$\mathcal{E} - I \cdot R_b - I \cdot R_k = 0$$

Ebből a kapocsfeszültség I terhelő áram esetén (fenti definíciója értelmében nyilván $U_k = I \cdot R_k$):

$$U_k = \mathcal{E} - I \cdot R_b \quad , \text{ vagyis}$$

a kapocsfeszültség az R_b belső ellenálláson eső feszültség értékével kisebb az elektromotoros erőnél

(\rightarrow a feszültséggenerátor ($R_b = 0$) a terhelő áramtól függetlenül mindig azonos feszültséget szolgáltat)

Az áramforrás R_b belső ellenállásának meghatározása

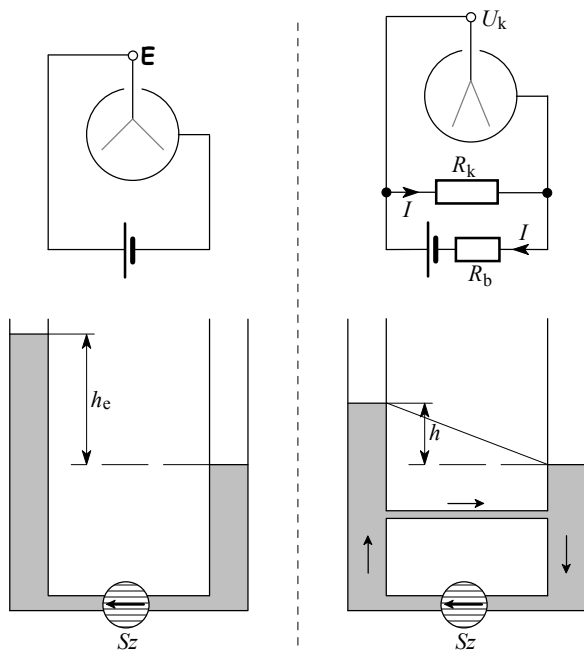
Ha megmérjük az elektromotoros erőt, és -ismert R_k külső ellenállás esetén- a kapocsfeszültséget, akkor az áramforrás R_b belső ellenállását kiszámolhatjuk az alábbiak szerint:

- fenti kiindulási egyenletünkből a kör árama:
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_b + R_k}$$

- ezzel a kapocsfeszültség:
$$U_k (= I \cdot R_k) = \mathcal{E} \cdot \frac{R_k}{R_b + R_k},$$

amelyből az áramforrás keresett R_b belső ellenállása:
$$R_b = \frac{\mathcal{E} - U_k}{U_k} \cdot R_k$$

Hidrodinamikai analógia az elektromotoros erő és a kapocsfeszültség viszonyára:

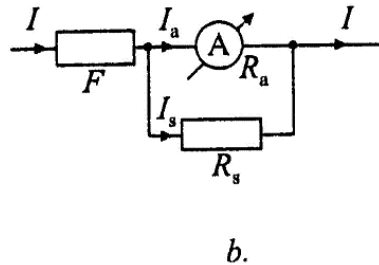
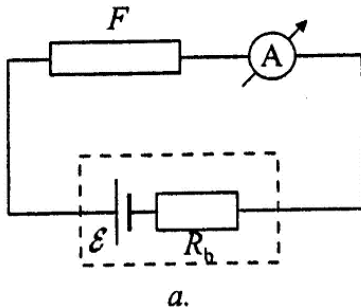


itt \mathcal{E} : elektromotoros erő;
 R_k : külső ellenállás;

U_k : kapocsfeszültség
 R_b : az áramforrás belső ellenállása

Az áram- és feszültségmérő műszerek csatlakoztatása a mérendő áramkörhöz; mérési határuk kiterjesztése, belső ellenállásuknak a mérésre gyakorolt hatása

Árammérő:



- az A árammérőt az F fogyasztóval *sorosan* kell kötni, hiszen (Kirchhoff csomóponti törvénye miatt) így folyik át azonos áram rajtuk (ld. fenti a. ábra)

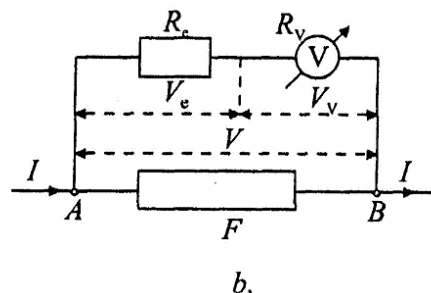
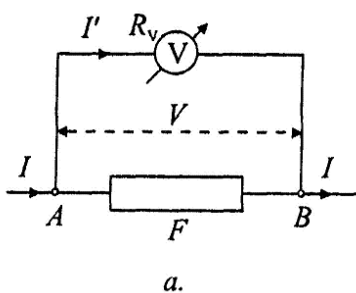
Az árammérő méréshatárát kiterjeszthetjük, ha ún. sőtellenállást kötünk vele párhuzamosan: $R_s = R_a/(n-1)$ sőtellenállással a méréshatár az eredeti n -szerese lesz (ld. fenti b. ábra; R_a az árammérő belső ellenállása).

így ugyanis az árammérőn keresztül folyó I_a áram viszonya a teljes

$I = I_a + I_s$ áramhoz (láttuk: a párhuzamosan kötött ellenállások áramai ellenállásaikkal fordítottan arányosak, ezért itt $I_s = I_a \cdot R_a/R_s = I_a \cdot (n-1)$):

$I_a/I = 1/n$, azaz I_a a fogyasztón átfolyó I áram n -ed része

Feszültségmérő:



- a V feszültségmérőt az F fogyasztóval *párhuzamosan* kell kötni, hiszen (Kirchhoff huroktörvénye miatt) így esik azonos feszültség rájuk (ld. fenti a. ábra)

A feszültségmérő méréshatárát kiterjeszthetjük, ha ún. előtétellenállást kötünk sorba vele: $R_e = R_v \cdot (n-1)$ előtétellenállással a méréshatár az eredeti n -szerese lesz (ld. fenti b. ábra; R_v a feszültségmérő belső ellenállása).

így ugyanis a feszültségmérőn eső V_v feszültség viszonya a teljes

$V = V_e + V_v$ feszültséghez (láttuk: a sorosan kötött ellenállások feszültségei ellenállásaikkal egyenesen arányosak, ezért itt

$$V_e = V_v \cdot R_e / R_v = V_v \cdot (n-1):$$

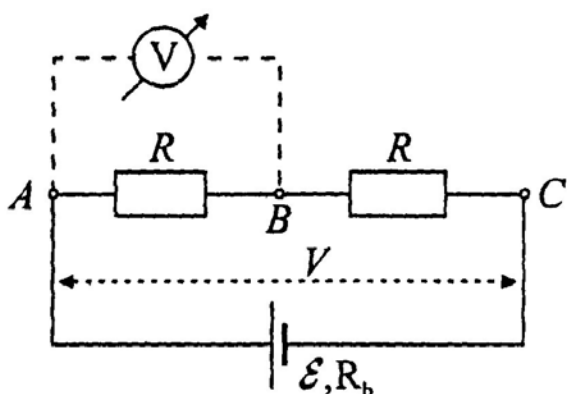
$V_v / V = 1/n$, azaz V_v a fogyasztón (a voltmérő jelenlétében) eső V feszültség n -ed része

A mérőműszerek belső ellenállásának a mérésre gyakorolt hatása

- az *ideális* árammérő ill. feszültségmérő belső ellenállása zérus ill. végtelen!

- a nem ideális mérőműszerek *megváltoztatják* az áramkör paramétereit (mivel az árammérőn $I \cdot R_a \neq 0$ feszültség esik, a feszültségmérőn pedig $V / R_v \neq 0$ áram folyik)!

példa: $V_1 + V_2 \neq V$ (!?)



(kísérlet!)

Az áram munkája és teljesítménye. A Joule-féle hő.

- ha a fogyasztó pólusai között (az áram irányában haladva) U feszültség esik, akkor (az elektromos potenciál definíciója szerint) az elektromos tér $dW = U \cdot dQ$ munkát végez, mialatt a fogyasztón dQ töltés áramlik át

- ha a fogyasztón keresztül dt ideig I (egyen)áram folyik, akkor a fenti dQ töltés az áram definíciójából: $dQ = I \cdot dt$

- ebből következően a fenti fogyasztóban:

Az elektromos áram t idő alatt végzett munkája: $W = U \cdot I \cdot t$

→ tehát $P = dW/dt$ -ből:

Az I áramerősségű stacionárius elektromos áram az U feszültség alatt álló, R ellenállású fogyasztónak $P = U \cdot I = U^2/R = I^2 \cdot R$ teljesítményt ad át.

(kísérlet!) (sorosan ill. párhuzamosan kötött fogyasztókon disszipált teljesítmények viszonya)

A fogyasztón ez a munka különféle energiaformákká vagy munkává (mechanikai munka, fény, hő, stb.) alakul aszerint, hogy mi a konkrét fogyasztó (pl. elektromotor, lámpa).

Homogén, nyugvó vezetőben az elektromos áram munkája teljes egészében hővé alakul, amelyet **Joule-féle hőnek** nevezünk.

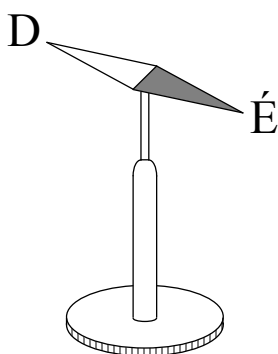
D. A STACIONÁRIUS ÁRAM ÉS A MÁGNESES TÉR

8. A mágneses tér vákuumban

Természetes mágnes: máneskő (magnetit)

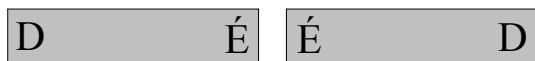
Mesterséges mágnes: mánesezett acélrúd (mágnesrúd) (kísérlet!)

Mágneses pólusok: azon két, pontszerűnek képzelt erőcentrum, amelyek a mágneses erők forrásainak tekinthetők (csak együtt léteznek (kísérlet!))



Megkülönböztetünk:

északi (É) } pólust
déli (D) }



taszítás



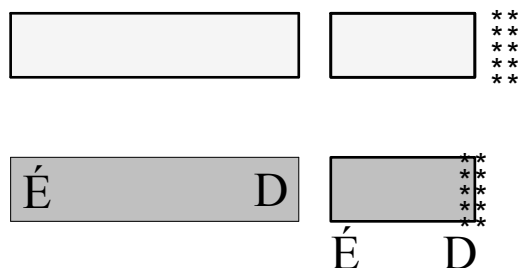
vonzás

Az egynemű mágnespólusok taszítják, a különeműek vonzzák egymást.

(kísérlet!)

A mágnesek közötti erőhatás *mágneses tér* létrejöttével magyarázható (közelhatás elmélete).

Mágneses megosztás



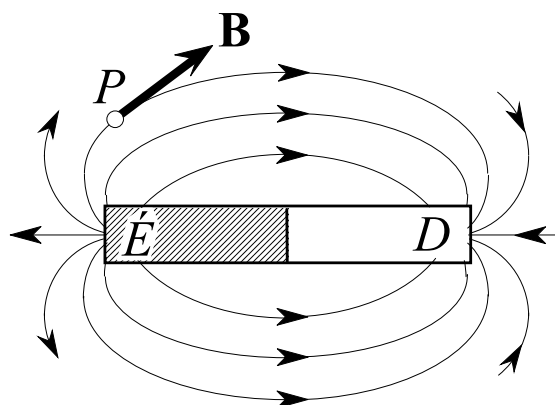
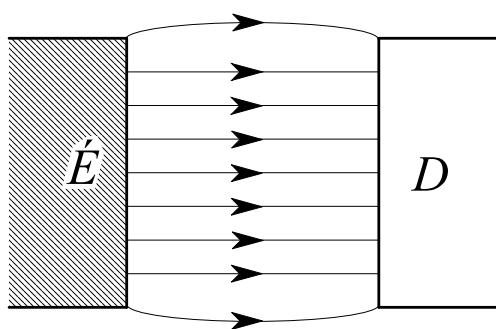
(kísérlet!)

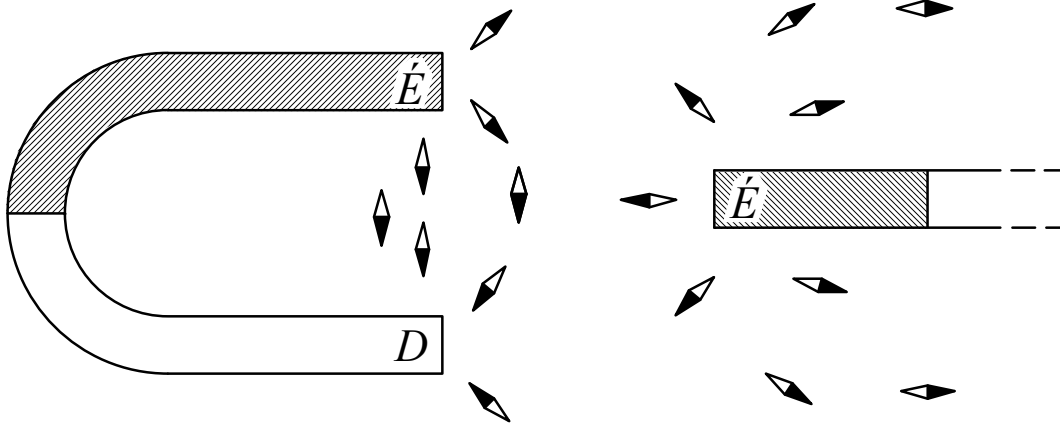
A mágneses tér szemléltetése:

A mágneses teret jellemző \mathbf{B} mágneses indukció vektor (definícióját ld. a későbbiekben!) vektorterét az *indukcióvonalakkal* szemléltethetjük. Az adott pontban:

- a mágneses indukció irányát a ponton átmenő indukcióvonalhoz a kérdéses pontban húzott (az indukcióvonal irányának megfelelően irányított) érintő adja
- a mágneses indukció nagysága megegyezik az indukcióvonalak kérdéses pontbeli sűrűségével (azaz az erővonalakra merőlegesen felvett, egységnyi felületen átmenő erővonalak számával)

példák:

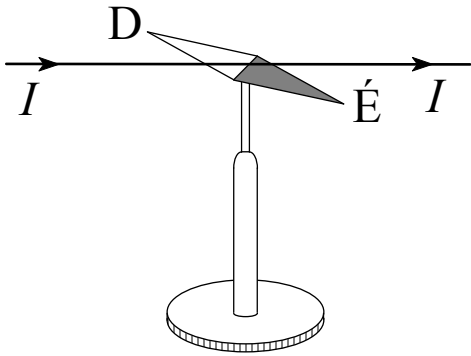




- meghatározásuk/szemléltetésük

(kísérlet!)

Az elektromos áram mágneses tere



Oersted (XIX. sz.):

Az elektromos áram mágneses teret hoz létre maga körül.

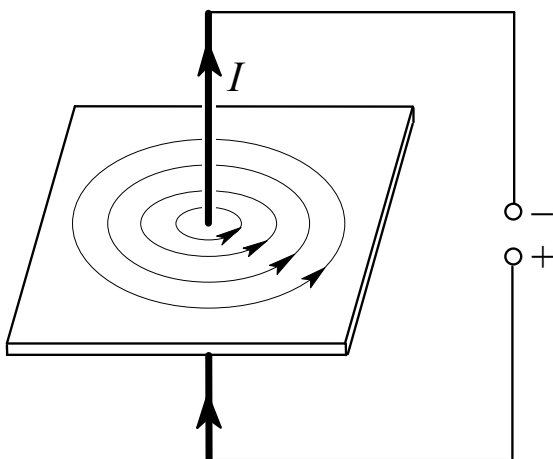
(kísérlet!)

→ az elektromosság és a mágnesesség között *kapcsolat van*

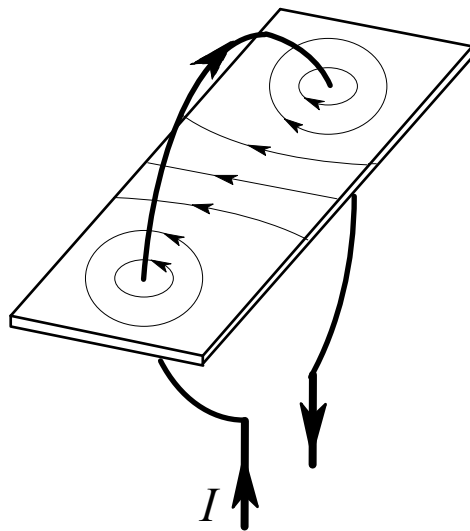
Néhány egyszerű alakú áramvezető mágneses tere

Hosszú, egyenes áramvezető

(kísérlet!)

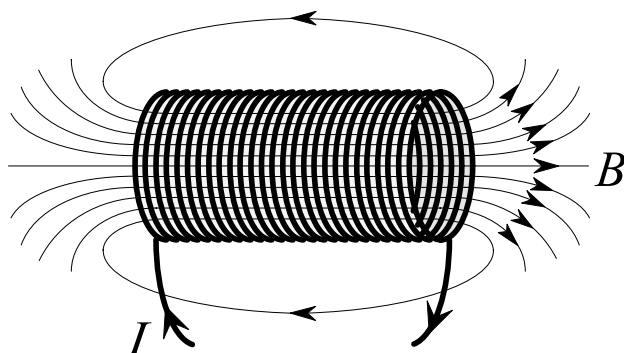


Áramhurok

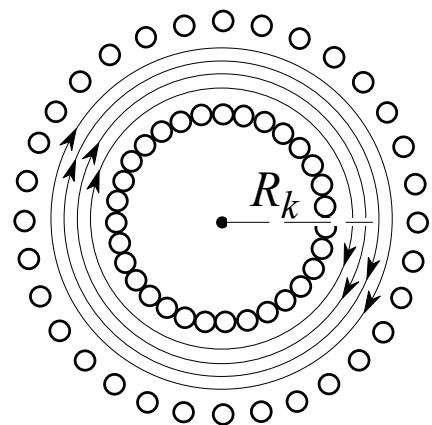
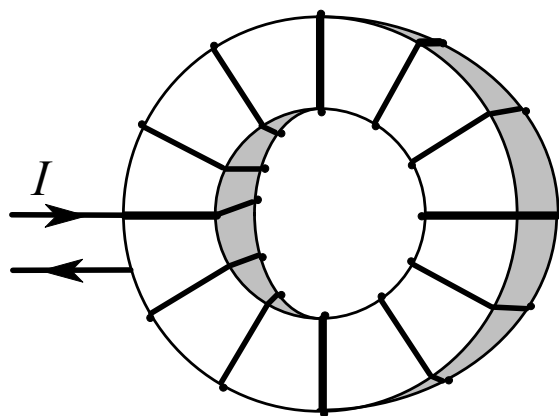


Áramtekercs (szolenoid)

(kísérlet!)



Körtekercs



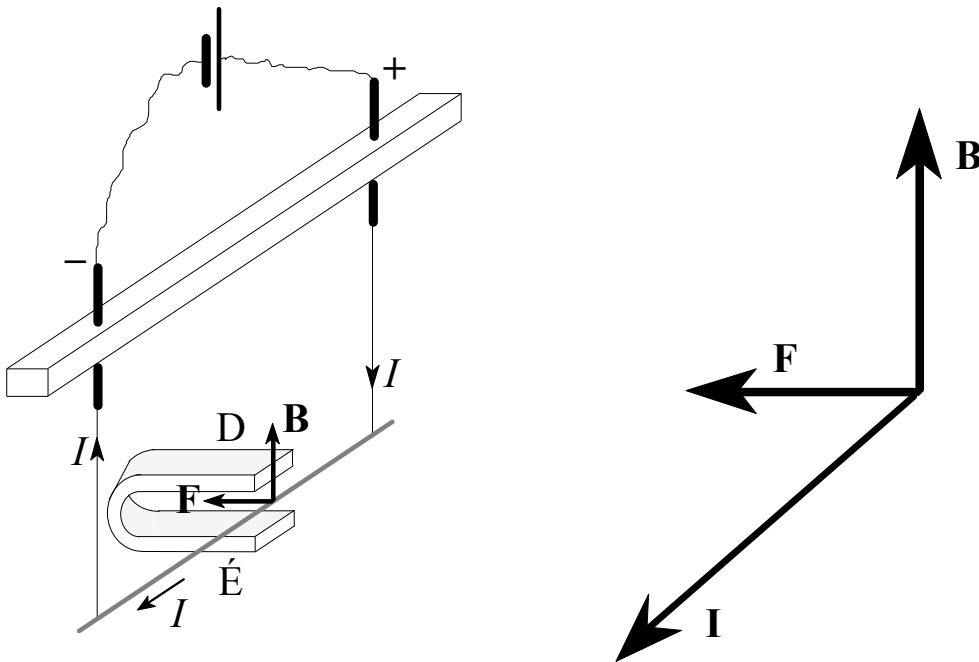
Áramvezető mágneses térben

- az imént láttuk: az árammal átjárt vezető erőt fejt ki a mágnesűre

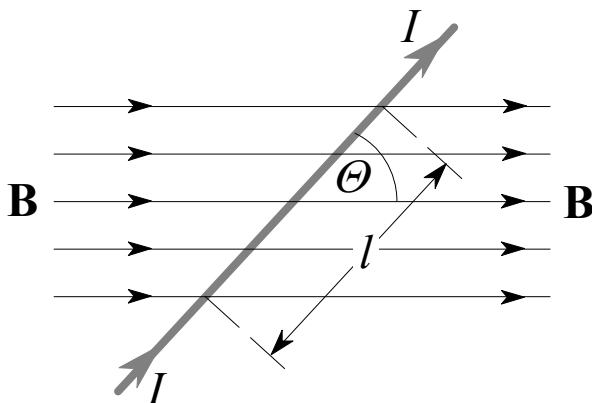
→ (Newton III. axiómája) → a mágnesű is erőt fejt ki az áramvezetőre

→ vagyis *a mágneses tér erőhatást gyakorol az áramvezetőre!*

(kísérletek) (mágnespólus forog áramvezető körül és fordítva, áramvezető feltekeredik rúd-mágnesre, alábbi kísérlet)



Az ilyen kísérletekből az árammal átjárt vezetőre ható erő:



$$F = 0 \leftrightarrow I \parallel B \quad (\Theta = 0^\circ \text{ vagy } 180^\circ)$$

$$F = F_{\max} \leftrightarrow I \perp B \quad (\Theta = 90^\circ)$$

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \Theta$$

Vektoriálisan: $\mathbf{F} = I \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ ill. $(d\mathbf{F} = I \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}))$,

ahol \mathbf{l} ill. $d\mathbf{l}$ iránya az I áram iránya.

Ennek alapján:

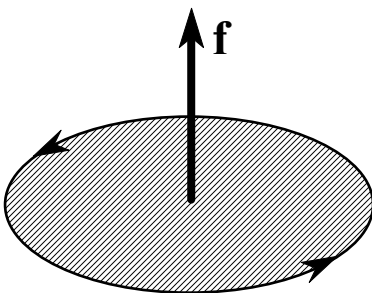
A \mathbf{B} mágneses indukcióvektor definíciója mérési utasítással:

\mathbf{B} iránya: amikor $\mathbf{F} = 0$, és \mathbf{l} irányát $< 180^\circ$ -kal \mathbf{l}' -re változtatva az \mathbf{l}' , \mathbf{l} , \mathbf{F}' vektorok jobbsavart alkotnak, akkor \mathbf{B} iránya megegyezik \mathbf{l} irányával

\mathbf{B} nagysága: $B = \frac{F_{\max}}{I \cdot l}$;

B egysége: $1 \frac{N}{A \cdot m} \equiv 1 T$ (tesla)

A felületvektor fogalma:



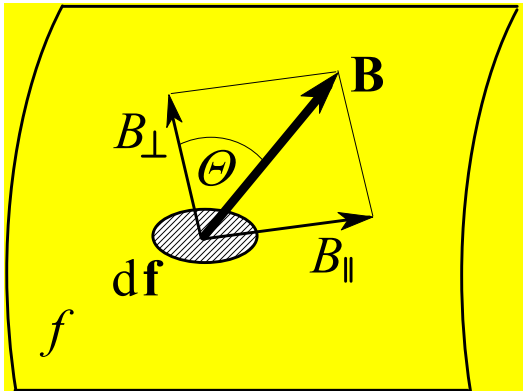
Az f felületelem (amely olyan kicsi, hogy görbülete már elhanyagolható, azaz a felületelem síknak tekinthető) felületvektora az az f vektor, amelynek nagysága megegyezik a felületelem területével, iránya pedig merőleges a felületelem síkjára, és a határgörbe kijelölt körüljárási irányával jobbsavart (jobbsavart) alkot.

A mágneses fluxus (Φ)

- tegyük fel, hogy a df felületelem olyan kicsiny, hogy maga síknak, pontjaiban a \mathbf{B} pedig állandónak tekinthető!

- ha $\mathbf{B} \perp d\mathbf{f}$, akkor: $\Phi = B \cdot df$

(Φ egysége: $1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \equiv 1 \text{ Wb}$ (weber))



- általános esetben (ld. ábra) pedig:

$d\Phi = B_{\perp} \cdot df = B \cdot \cos \Theta df = \mathbf{B} d\mathbf{f}$,
emiatt:

A Φ mágneses indukciófluxus az f felületre:

$$\Phi = \int_f \mathbf{B} d\mathbf{f}$$

A mágneses térre vonatkozó Gauss-törvény

- a kísérletek tanúsága szerint a "mágneses töltés" -ek nem választhatók szét, *csak együtt léteznek* (mágneses dipólusok)

→ emiatt a tér bármely zárt f felületére fennáll:

A mágneses indukciófluxus bármely zárt felületre zérus

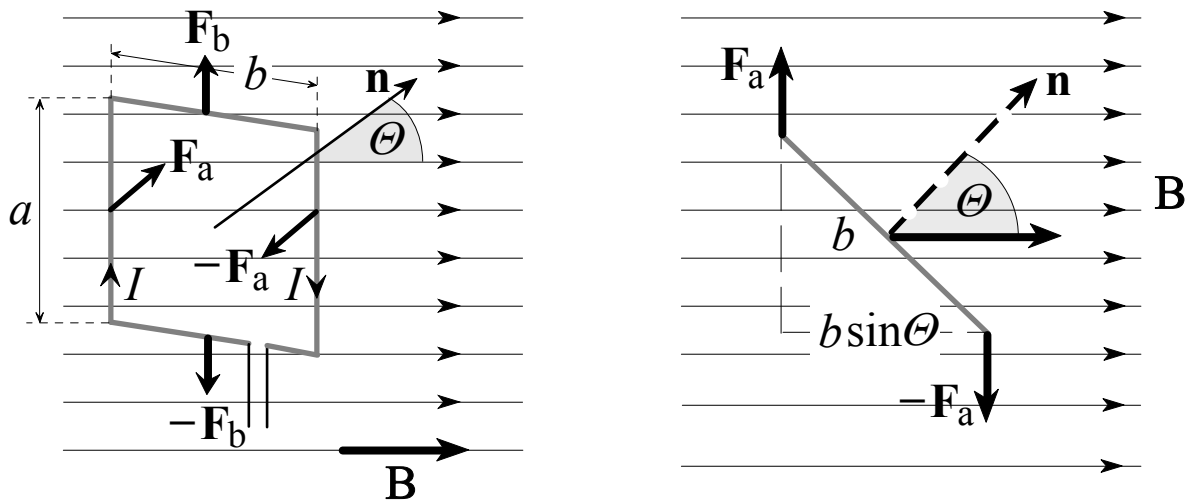
$$\oint_f \mathbf{B} d\mathbf{f} = 0$$

Gauss tétele mágneses térre

(azaz a mágneses indukcióvonalaknak nincsenek "forrásai", illetve "nyelői", másként fogalmazva: a mágneses indukcióvonalak mindig *zárt görbék*, vagyis:)

→ a \mathbf{B} mágneses indukció tere *forrásmentes vektortér!*

Áramhurok mágneses térben



Ha az áramhurok normálisának \mathbf{n} vektora (amely -mint láttuk- a keretben folyó áram irányával jobbsavart alkot) Θ szöveget zár be az indukcióvektorral, és az \underline{a} oldalak merőlegesek arra, akkor:

- a \underline{b} oldalakra ható erők ill. ezek forgatónyomatéka:

$$\left. \begin{array}{l} F_b = IbB \cdot \sin(90^\circ - \Theta) \\ -F_b = -IbB \cdot \sin(90^\circ - \Theta) \end{array} \right\} F_b + (-F_b) = 0; \quad \sum M = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{hatásvonaluk} \\ \text{egybeesik} \end{array} \right)$$

- az \underline{a} oldalakra ható erők ill. ezek forgatónyomatéka:

$$\left. \begin{array}{l} F_a = IaB \\ -F_a = -IaB \end{array} \right\} F_a + (-F_a) = 0; \quad \sum M \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{hatásvonaluk távolsága:} \\ b \cdot \sin \Theta \end{array} \right)$$

- így a teljes vezetőkeretre ható forgatónyomaték:

$$M (\equiv F \cdot k) = I \cdot a \cdot B \cdot b \cdot \sin \Theta = I \cdot B \cdot f \cdot \sin \Theta \quad ,$$

ahol $f = ab$ a téglalap területe

- kimutatható: tetszőleges alakú vezetőkeret esetén a forgatónyomaték

csak a vezetőkeret *területétől függ, alakjától nem!*

N menetű tekercs esetén: $M = I \cdot N \cdot f \cdot B \cdot \sin \Theta$,

(az ebben szereplő $N \cdot f$ mennyiséget "*menetfelület*" -nek nevezzük)

→ a tekercsre ható forgatónyomaték vektoriálisan:

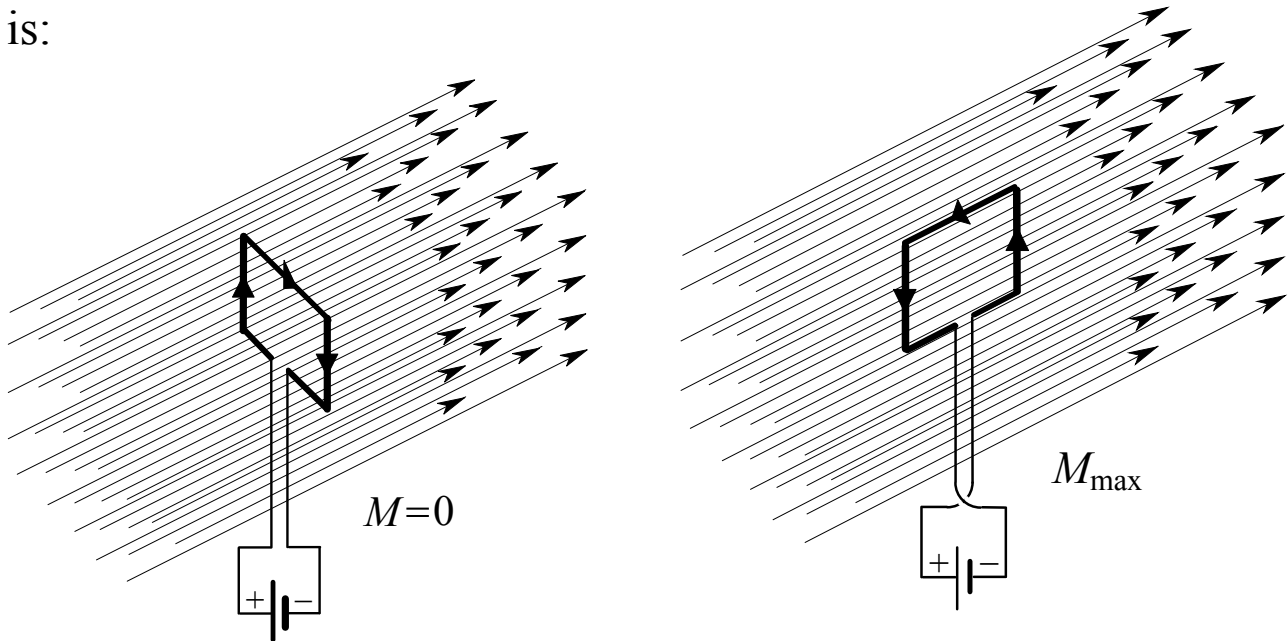
$$\mathbf{M} = I \cdot (N\mathbf{f} \times \mathbf{B})$$

(az elektromos dipólusra ható forgatónyomatékot az elektromos dipól-momentummal megadó kifejezéssel való analógia alapján írhatjuk:)

Árammal átjárt tekercs mágneses momentuma: $\mathbf{p}_m = I \cdot N \cdot \mathbf{f}$,

ezzel a tekercsre ható forgatónyomaték: $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$

Az áramhurokra ható forgatónyomaték mérése lehetőséget nyújt a \mathbf{B} mágneses indukcióvektor kísérleti meghatározására, sőt definíciójára is:

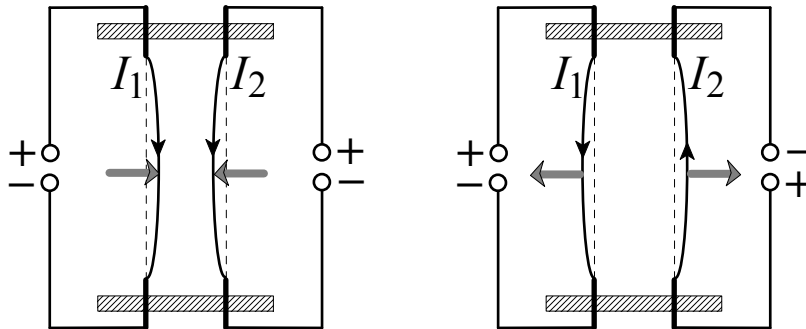


amikor az áramhurokra nem hat forgatónyomaték, akkor normálisa megadja a \mathbf{B} irányát

az erre az irányra merőlegesen forgatva mért M_{\max} megadja a \mathbf{B} nagyságát: $B = M_{\max} / p_m$

Áramvezetők közötti erőhatás

(kísérlet!) (alábbi kís. + Roget-spirál)



A kísérletek tanúsága szerint:

Ha két, egymástól d távolságban lévő, párhuzamos, végtelen hosszú vezetőkben I_1 ill. I_2 áram folyik, akkor az egyik vezető l hosszúságú darabjára a (teljes, végtelen hosszúságú) másik vezető által ható erő:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{d},$$

ahol

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2} \text{ a vákuum mágneses permeabilitása}$$

- ennek az erőnek a mérésén alapul az **SI -mértérendszerben alap-egység 1 amper (A)** áramerősség definíciója („abszolút amper”, ld. alább)

(1A áram folyik két egyenes, végtelen (a gyakorlatban: nagyon) hosszú, párhuzamos, egymástól 1m távolságban elhelyezett, vékony vezetőkben, ha vákuumban az egyik (teljes, végtelen hosszúságú) vezető a másik 1m -es darabjára $2 \cdot 10^{-7}$ N erővel hat)

- a vákuum ϵ_0 dielektromos állandója és μ_0 permeabilitása határozza

meg a c vákuumbeli fénysebességet:

$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Mozgó elektromos töltés mágneses térben

- láttuk: árammal átjárt vezetőre a mágneses erőter erőt fejt ki
- ebből következően (minthogy az áram töltések rendezett mozgása) a mágneses erőter a (szabadon mozgó) *töltött részecskére* is erőt gyakorol → mekkora ez az erő?

Az árammal átjárt vezetőre mágneses térben ható erőből (amint láttuk, ez $\mathbf{F} = I \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$) *kiszámítjuk az egyetlen Q töltésre ható erőt:*

- a vezetőkben folyó áram erőssége kifejezhető a vezetők A keresztmetszete, valamint a vezetésben résztvevő töltéshordozók q töltése, v (drift)sebessége és n térfogati töltéssűrűsége ismeretében:

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} = \frac{n \cdot A \cdot v \cdot dt \cdot q}{dt} = n \cdot A \cdot v \cdot q$$

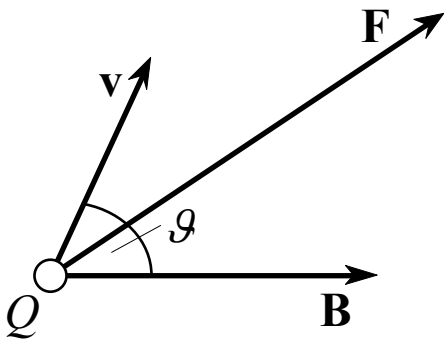
- az l hosszúságú vezetőkben a vezetést közvetítő töltések száma: $n \cdot A \cdot l$

→ a fenti erőtvénybe behelyettesítjük I értékét, és az így adódó erőt a töltések számával osztva kapjuk az egyetlen, q nagyságú töltésre ható erőt:

$$\mathbf{F} = \frac{I \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{B})}{n \cdot A \cdot l} = \frac{n \cdot A \cdot v \cdot q \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{B})}{n \cdot A \cdot l} = (\text{minthogy } \mathbf{l} \text{ és } \mathbf{v} \text{ egyirányú}) = q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Tehát a \mathbf{B} indukciójú mágneses térben v sebességgel mozgó Q töltésre ható erő:

$$\mathbf{F} = Q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{mágneses Lorentz-erő}$$



$$F = QvB\sin\theta$$

$F = 0$, ha $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$, vagy $\mathbf{v} = 0$

$F = F_{\max}$, ha $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$

Q lehet $\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}$ töltés (előjelesen kell behelyettesíteni a Lorentz-erő kifejezésébe!)

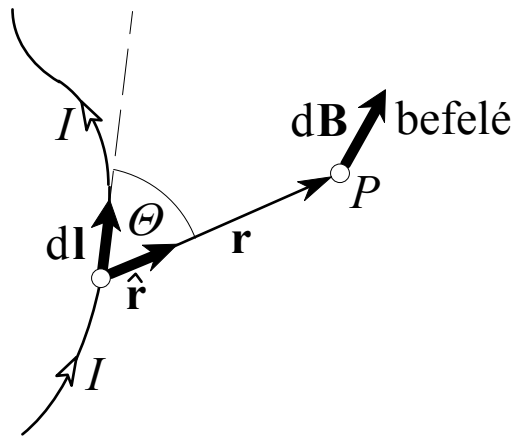
\mathbf{B} mágneses tér
és
 \mathbf{E} elektromos tér } egyidejű jelenléte esetén:

A teljes (elektromos és mágneses) Lorentz-erő:

$$\mathbf{F} = Q \cdot (\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}))$$

A Biot–Savart törvény vákuumban

- bármilyen áramvezető mágneses terét kiszámíthatjuk a tér tetszőleges P pontjában úgy, hogy az áramvezető -különálló- és függetlennek tekintett- Idl „áramelem”-ei által az adott P pontban keltett $d\mathbf{B}$ mágneses indukciókat (a szuperpozíció elve alapján) vektoriálisan összegezzük (ld. az alábbi ábrát!)



(a $d\mathbf{l}$ áramelem-vektor *iránya*: a töltések (rendezett) mozgásának iránya)

- ehhez ismerni kell, milyen $d\mathbf{B}$ indukciót hoz létre az $I d\mathbf{l}$ áramelem(vektor) (ld. a fenti ábrát!):

Az $I \cdot d\mathbf{l}$ áramelem(vektor) által **vákuumban** létrehozott $d\mathbf{B}$ mágneses indukció a térnek a $d\mathbf{l}$ helyéről kiinduló \mathbf{r} helyzetvektorral meghatározott pontjában:

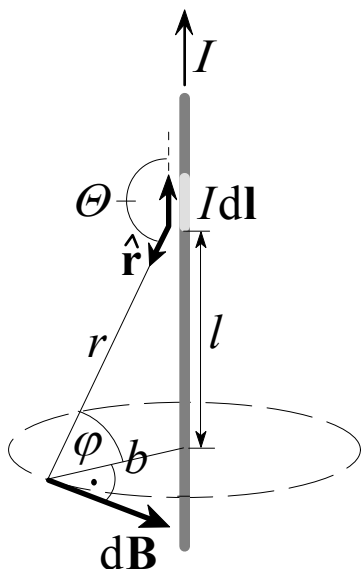
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} \quad \text{Biot-Savart törvény}$$

A B.-S. törvény felhasználásával tetszőleges áramvezető mágneses térének indukcióvektora meghatározható vákuumban, a következő integrállal:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

erre néhány példa:

Igen hosszú (végtelen) áramvezető mágneses tere vákuumban



$$r = b/\cos\varphi \quad l = b \cdot \operatorname{tg}\varphi$$



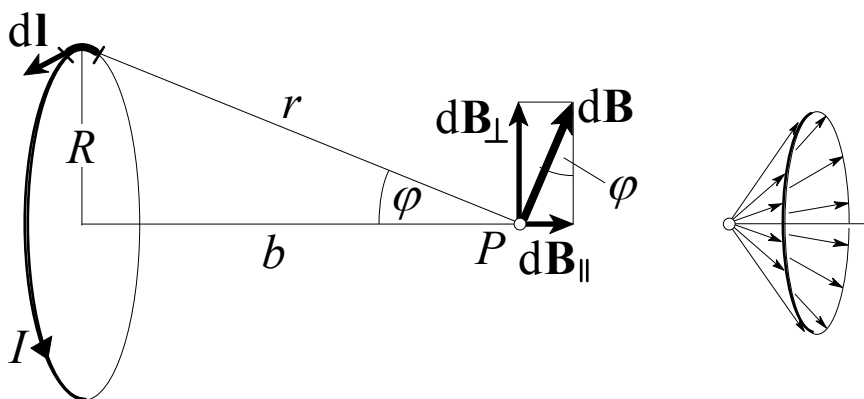
$$dl = (b/\cos^2\varphi)d\varphi$$

ha l nagyon nagy $\rightarrow \varphi = \pm\pi/2$

$\sin\Theta = \sin(\varphi+90^\circ) = \cos\varphi$, ezekkel:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b}$$

Köráram mágneses tere a köráram tengelyén, vákuumban



Mekkora vákuumban a mágneses indukció egy köráram tengelyén, a köráramtól b távolságban?

Az Idl áramelem által a P pontban keltett $d\mathbf{B}$ indukció abszolút értéke a Biot-Savart törvényből (ld. az ábrát; esetünkben $\Theta = 90^\circ$):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\mathbf{l}}{r^2}$$

Komponensekre bontva:

- a $d\mathbf{B}_\perp$ a forgási szimmetria miatt zérusra összegződik: $\int d\mathbf{B}_\perp = 0$

- így a P pontban az indukciót a $d\mathbf{B}_\parallel = d\mathbf{B} \sin\varphi$ -nak a köráramra vett integrálja adja: $\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}_\parallel$

ennek iránya az ábrán jobbra mutat, nagysága pedig:

$$B = \int d\mathbf{B}_\parallel = \int d\mathbf{B} \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + b^2)^{3/2}} \cdot 2R\pi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{If}{(R^2 + b^2)^{3/2}}, \quad (\text{ahol } f = R^2\pi)$$

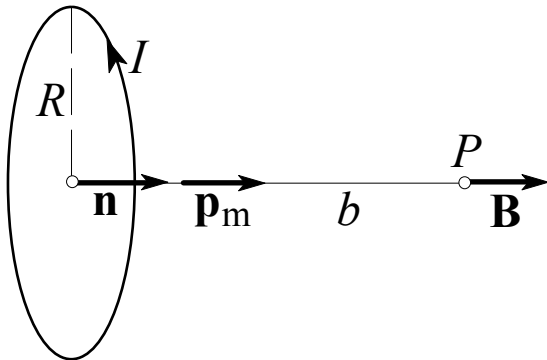
Ebből:

- $b \gg R$ esetén:
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{If}{b^3}$$

- a körvezető középpontjában (itt $b = 0$):
$$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{R}$$

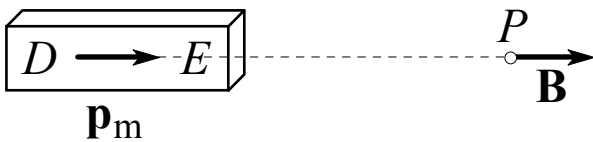
Mágneses dipólus tere a dipólus tengelyén, vákuumban

A kicsiny ($R \ll b$) áramhurok *mágneses dipólus*



erre pedig fentebb láttuk:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\mathbf{f}}{b^3}$$



Sík áramhurok, vagy Nf menetfelületű tekercs (átmérőjéhez képest) nagy távolságban ugyanúgy viselkedik (azaz ugyanolyan mágneses teret létesít, külső mágneses térben pedig ugyanolyan erőhatást szenved) mint egy ugyanakkora mágneses momentummal rendelkező permanens mágnes.

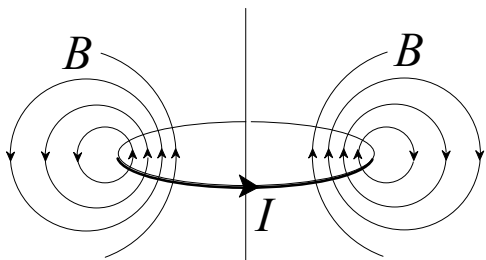
A köráram $I \cdot N \cdot \mathbf{f}$ mágneses dipólusmomentuma helyére az akármilyen eredetű mágneses dipólus \mathbf{p}_m dipólusmomentumát írva kapjuk a dipólus mágneses terét:

$$R \ll b \text{ esetben: } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{b^3},$$

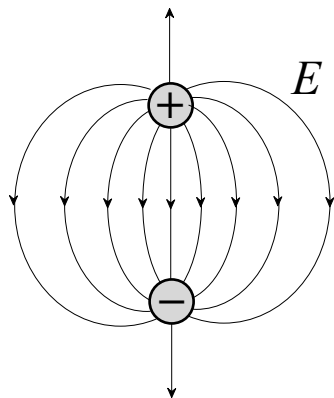
$$b = 0 \text{ esetben: } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}.$$

A mágneses dipólus mágneses indukciójának és az elektromos dipólus elektromos erővonalainak képe (ld. az alábbi ábrán!) a dipó-

lustól távol ugyanolyan, viszont (a mágneses tér forrásmentessége ill. az elektrosztatikai tér örvénymentessége miatt) a dipólus "belsejében" (az áramhurok közepén) éppen ellentétes irányúak!



mágneses dipólus mágneses indukcióvonalai

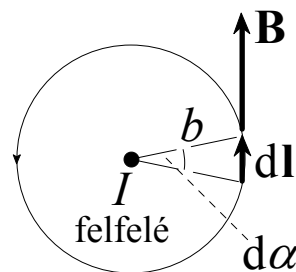
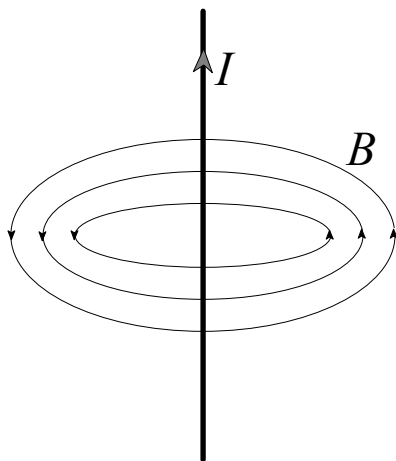


elektromos dipólus elektromos erővonalai

Az Ampère -féle gerjesztési törvény vákuumban

Fogalmazzuk meg a Biot-Savart törvényt más alakban!

Tekintsünk vákuumban egy igen hosszú, egyenes áramvezetőt!



Határozzuk meg vákuumban a \mathbf{B} indukcióvektor $\oint_g \mathbf{B} d\mathbf{l}$ vonalintegrálját egy speciális g zárt görbére: az áramvezetőre merőleges síkban, a vezető dőféspontja körül felvett, b sugarú körre (ld. a fenti rajzon)!

Láttuk korábban, hogy ekkor $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$, tehát:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi b = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \cdot 2\pi b = \mu_0 \cdot I$$

Vegyük észre, hogy az integrál *nem függ a kör sugarától!*

A kapott eredmény vákuumban -mint egyszerűen kimutatható- nemcsak körre, hanem az áramvezetőt körülvevő tetszőleges, zárt g görbére is érvényes, amelynek még síkgörbének sem kell lennie, sőt az áramvezetők alakja is bármilyen lehet:

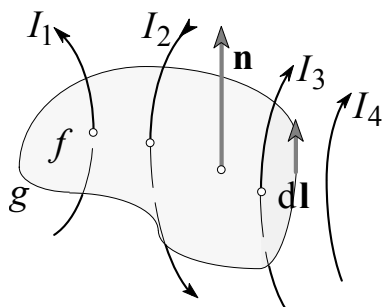
A mágneses indukció tetszőleges zárt görbe menti vonalintegrálja egyenesen arányos a görbére kifeszített, tetszőleges felületen átmenő áramok algebrai összegével (az arányossági tényező a vákuum μ_0 mágneses permeabilitása)

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_k$$

Ampère-féle gerjesztési törvény vákuumra

(itt a görbének az integráláshoz választott körüljárási irányával jobbcavart alkotó áramok előjele pozitív, a többi áramé negatív)

pl.



$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3)$$

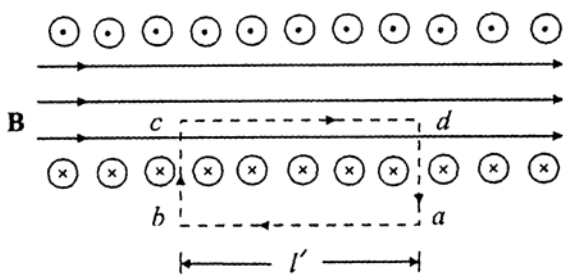
- A stacionárius áram mágneses tere tehát *örvénytér*.

- Az Ampère-féle gerjesztési törvény *ekvivalens a Biot-Savart törvénnyel!*

előnyei ahhoz képest:

- jobban kifejezi az erőterfelfogást
- segítségével gyakran sokkal egyszerűbben kiszámíthatjuk a mágneses indukcióvektor terét, ha arról -általában szimmetria- megfontolások alapján- kvalitatív ismeretekkel rendelkezünk

példa: számítsuk ki hosszú szolenoid mágneses terét vákuumban!



- válasszuk a g zárt görbének az (l teljes hosszúságú és n menetszámú) szolenoid keresztmetszeti rajzán szaggatott vonallal bejelölt $abcd$ téglalapot!

- a tapasztalat szerint a szolenoidban a \mathbf{B} tér homogén és tengelyirányú, azon kívül pedig $B = 0$, ezért a g görbe $dabc$ részén a vonalintegrál zérus, a megmaradó cd szakaszon pedig $B \cdot l'$, így az Ampère-

féle gerjesztési törvény esetünkre: $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = B \cdot l' = \mu_0 \cdot \sum I_k = \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot l' \cdot I$,

amelyből:

szolenoid esetén vákuumban:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot I$$

9. Mágneses tér az anyagban

- Ha a (geometriai) térben nem (csak) az eddig tárgyalt vákuum, hanem valamilyen (más) anyag (is) van, akkor
- külső (pl. áramvezető hatására létrejött) mágneses tér hatására az anyag mágnesezetté válik (mágneses momentumra tesz szert)
- ennek tere visszahat az anyagban kialakuló mágneses indukcióra

Ampère: az anyagok mágnesezettségét az atomok/molekulák belsejében veszteség nélkül folyó, zárt áramok (az ún. *molekuláris áramok* vagy *elemi köráramok*) mágneses momentumai eredményezik

→ az anyagban kialakuló **B** mágneses indukció a makroszkopikus áramok által keltett **B**₀ mágneses tér, és az ennek hatására az anyagban kiváltott mágnesezettség következtében létrejövő **B'** mágneses tér eredője:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$$

Az anyag mágnesezettségét az **M** mágnesezettség (vektor) jellemzi:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{p}_m}{V}, \quad \text{egysége: 1 A/m}$$

ahol **p**_m a mágnesezett anyag *V* térfogatának mágneses momentuma

- kimutatható, hogy az anyag mágnesezettsége által kiváltott **B'** mágneses indukció a mágnesezettség μ_0 -szorososa: $\mathbf{B}' = \mu_0 \cdot \mathbf{M}$

- Hasonlóképpen ahhoz, hogy az elektrosztatikus tér jellemzésére két vektormennyiséget vezettünk be, az **E** elektromos térerősséget és a **D** dielektromos eltolódási vektort, mágneses tér leírására is célszerű bevezetni a **B** mágneses indukcióvektor mellett még egy vektort, a **H** mágneses térerősségvektort (hangsúlyozandó, hogy a két eset analó-

giája igen korlátozott, ld. alább!), olymódon, hogy annak értékét (amint a \mathbf{D} vektorét csak a szabad töltések) *csak a vezetési áramok* határozzák meg (mégpedig lehetőleg a legegyszerűbb formában):

- a fenti $\mathbf{B}' = \mu_0 \cdot \mathbf{M}$ összefüggést az anyagban kialakuló \mathbf{B} mágn. indukció fentebb felírt $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ kifejezésébe helyettesítve kapjuk:
 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} - \mu_0 \cdot \mathbf{M}$

- ha képezzük az utóbbi egyenlet mindkét oldalának a g tetszőleges zárt görbére vett vonalintegrálját, akkor a baloldal (így természetesen a jobboldal is) a \mathbf{B}_0 -ra felírt Ampère -f. gerj. törv. szerint a g -re kifeszített tetszőleges zárt felületet átdöfő *makroszkopikus* (vezetési) áramok összegének μ_0 -szorosával egyenlő:

$$\oint_g \mathbf{B}_0 d\mathbf{l} = \mu_0 \cdot \sum I_k = \oint_g (\mathbf{B} - \mu_0 \cdot \mathbf{M}) d\mathbf{l}$$

→ a jobboldalon integrált $\mathbf{B} - \mu_0 \cdot \mathbf{M}$ vektor tehát a mágneses tér olyan jellemzője, amelyet szintén *csak* ezek a *makroszkopikus* (vezetési) áramok határoznak meg, *azaz fenti célunknak éppen megfelel!*

- még előnyösebb ennek μ_0 -ad részét definiálni a mágneses teret leíró új vektorként, hiszen ennek a g tetszőleges zárt görbére vett vonalintegrálja még a μ_0 -at sem tartalmazza, csak a g -re kifeszített tetszőleges zárt felületet átdöfő *makroszkopikus* (vezetési) áramok összegével egyenlő; definíció szerint ez a \mathbf{H} -val jelölt vektor a

Mágneses térerősség definíciója: $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, egysége: 1 A/m

A fentiek szerint:

Az Ampère -féle gerjesztési törvény alakja anyagban:

$$\oint_g \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_f \mathbf{J} d\mathbf{f}$$

ahol a jobboldali integrál (amelyet a g zárt görbére kifeszített, tetszőleges f felületre kell venni) az áramok összegének általánosítása

- vákuumban $\mathbf{M} = 0$, így:
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

és pl. igen hosszú, egyenes áramvezető mágn. terére *vákuumban*:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad \xrightarrow{B \rightarrow H} \quad H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{b}$$

- megjegyzendő, hogy a \mathbf{P} , \mathbf{D} , \mathbf{E} elektromos vektorok analogonjai (általában, de NEM minden esetben!) rendre az \mathbf{M} , \mathbf{H} , \mathbf{B} mágneses vektorok

A mágneses szuszceptibilitás és a mágneses permeabilitás

- mivel \mathbf{M} a \mathbf{H} -tól és az anyagi minőségtől függ, ezért (az erősen mágneses anyagok kivételével, amelyekben ez az összefüggés nem lineáris, ld. alább) jó közelítéssel fennáll:

Az anyag mágnesezettsége a mágneses térerősséggel egyenesen arányos:

$$\mathbf{M} = \chi_m \cdot \mathbf{H}$$

ahol χ_m a *mágneses szuszceptibilitás* (amely egy dimenzió nélküli puszta szám, értéke pozitív és negatív is lehet!)

χ_m bevezetésével:
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi_m \mathbf{H} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$
,

amelyben (elnevezés):

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (\mu_r > 1 \text{ és } < 1 \text{ egyaránt lehet!})$$

az ún. *relatív mágneses permeabilitás* (dimenzió nélküli szám!)

Ezzel a jelöléssel az utóbbi összefüggés:

A mágneses térerősség és indukció kapcsolata: $\mathbf{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \mathbf{H}$

A \mathbf{B} és a \mathbf{H} vektorok viselkedése két közeg határfelületén

Hasonlóképpen, amint azt elektrosztatikai térben lévő szigetelők határfelületén az \mathbf{E} és a \mathbf{D} vektorokra láttuk, kimutatható, hogy mágneses térben a megfelelő \mathbf{B} és a \mathbf{H} vektorok viselkedésére két közeg határfelületén fennállnak a következő „törési törvények”:

- a Gauss- tételből következően: $\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$,

azaz a \mathbf{B} vektor normális komponense folytonosan megy át a két közeg határán;

- ebből $\mathbf{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ miatt adódik: $\frac{\mathbf{H}_{1n}}{\mathbf{H}_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$,

azaz a közegek határfelületénél a \mathbf{H} vektor normális komponense μ_2/μ_1 arányban megváltozik;

- Ampère -féle gerjesztési törvény anyagban érvényes alakjából adódóan (ha a határfelületen nem folyik áram):

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad ,$$

azaz a \mathbf{H} vektor érintőleges komponense folytonosan megy át a két közeg határán;

- ebből $\mathbf{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ felhasználásával:

$$\frac{\mathbf{B}_{1t}}{\mathbf{B}_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad ,$$

azaz a \mathbf{B} vektor érintőleges komponense μ_1/μ_2 arányban megváltozik a két közeg határán;

- mindezekből -pontosan úgy, ahogyan az analóg elektromos jelenség tárgyalásakor láttuk- következik a „törési törvény”:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad ,$$

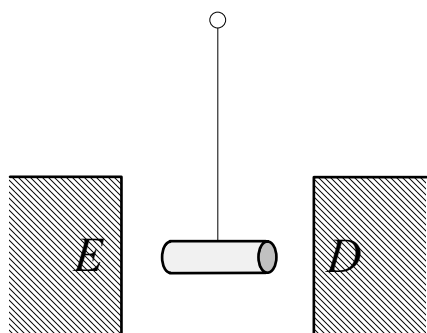
ahol α_1 ill. α_2 a \mathbf{B}_1 és \mathbf{B}_{1n} közti ill. a \mathbf{B}_2 és \mathbf{B}_{2n} közti szöveget jelenti

- vegyük észre, hogy esetünkben (az eddigiektől eltérően!) az \mathbf{E} ill. \mathbf{D} vektorok analogonjai rendre a \mathbf{H} ill. \mathbf{B} vektorok!

Az anyagok felosztása mágneses tulajdonságaik alapján

- gyengén mágneses anyagok: a para- és a diamágneses anyagok
- erősen mágneses anyagok: a ferromágneses anyagok

a) Paramágneses anyagok: Al, Cr, K, Mg, Mn, Na, stb.,



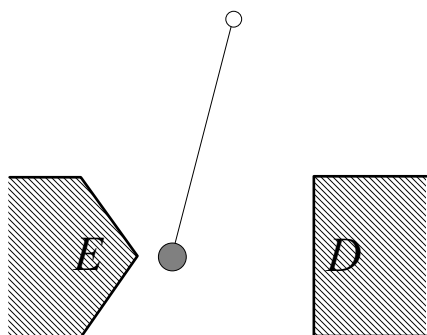
(kísérlet!)

$$\chi_m > 0 \quad (\approx 10^{-5})$$

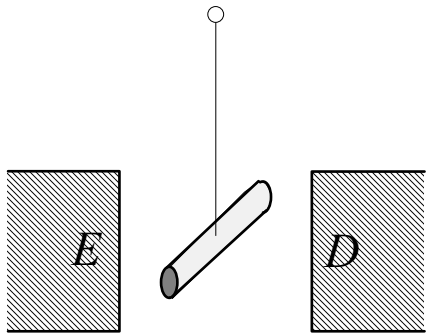
Al (alumínium)

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

Curie -törvény



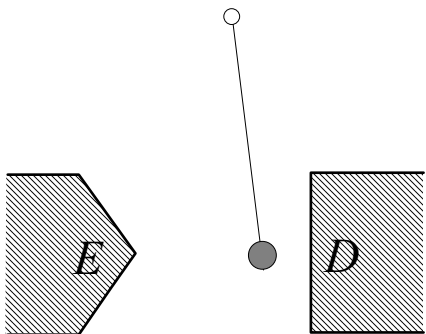
b) Diamágneses anyagok: Cu, Bi, C, Ag, Au, Pb, Zn, stb.



(kísérlet!) (folyadék, gáz (láng!) is)

$$\chi_m < 0 \quad (\approx -10^{-5})$$

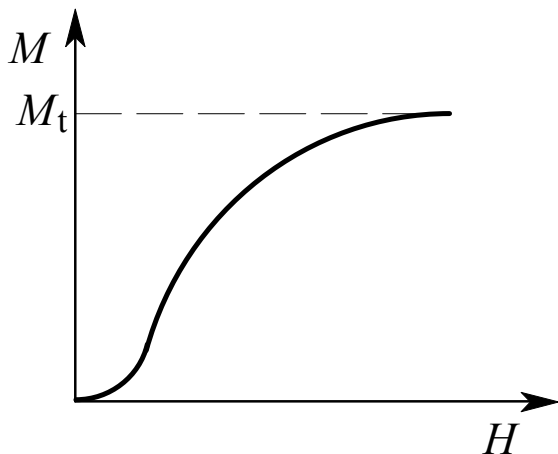
Bi (bizmut)



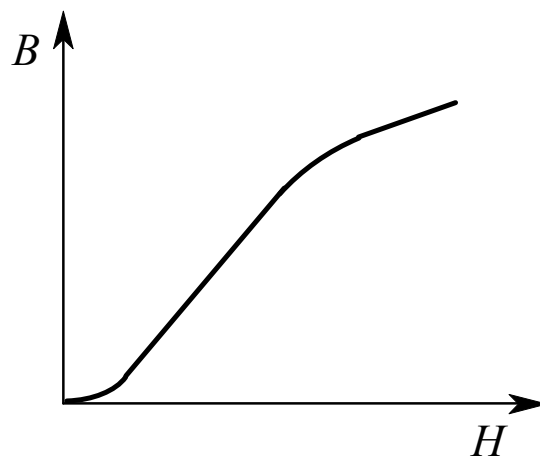
c) Ferromágneses anyagok: vas, nikkell, kobalt stb.

$$\chi_m = 10^3 \dots 10^5 \quad (\text{igen nagy!})$$

$B = B(H)$ és $M = M(H)$ görbék távolról sem lineárisak!

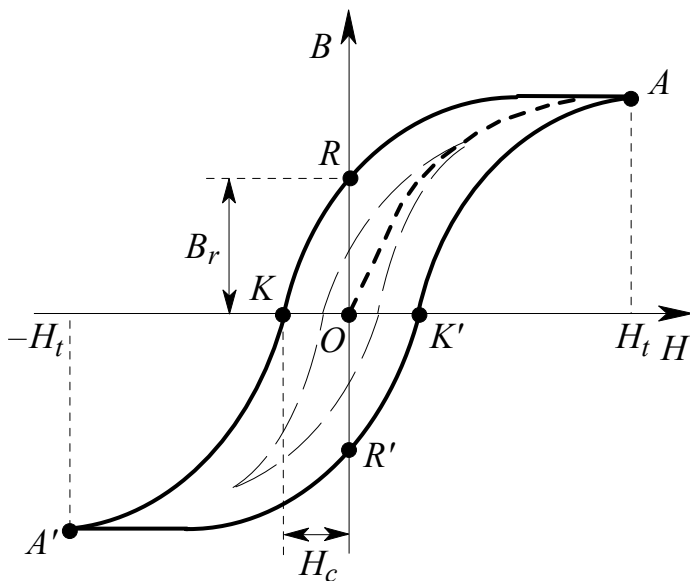


növekvő H értékeknél:
 $M \rightarrow M_t$ (mágneses telítés)



nagy H értékeknél:
 $B = \mu_0 H + \mu_0 M_t = \mu_0 H + \text{állandó}$

Mágneses hiszterézis



(kísérlet!)

$ARA'R'A$: hiszterézishurok

→ a mágnesezettség ill. a mágneses indukció *függ az anyag mágneses „előéletétől”!*

OA : első mágnesezési görbe

- Permanens mágnes előállítása lehetséges:

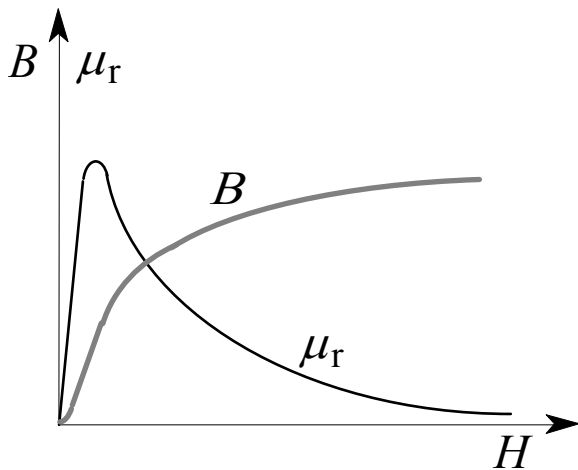
$H = 0$ esetén is marad B_r „remanens mágneses indukció”!

→ ennek megszüntetéséhez ellentétes irányban kell növelni a térerősséget, a H_c „koercitív erő” értékéig

- váltakozó árammal történő mágnesezés során (pl. transzformátorokban) az anyag elemi mágneses dipólusait ciklikusan át kell rendezni, ehhez munka szükséges, ami végül hőfejlődésre vezet → ez a hiszterézisveszteség (amely az örvényáramú veszteséggel -ld. később!- együtt okozza az erősáramú alkalmazásokban igen hátrányos ún. vasveszteséget) arányos a hiszterézishurok területével

→ állandó mágnezt széles hiszterézishurokkal rendelkező, nagy koercitív erejű ($H_c > 1000$ A/m), ún. mágnesesen kemény anyagból, míg a váltóáramú elektromos gépek vasmagjait keskeny hiszterézisgörbésű, kis koercitív erejű ($H_c < 1000$ A/m), mágnesesen lágy anyagból célszerű készíteni

A $\mu_r = \mu_r(H)$ kapcsolat

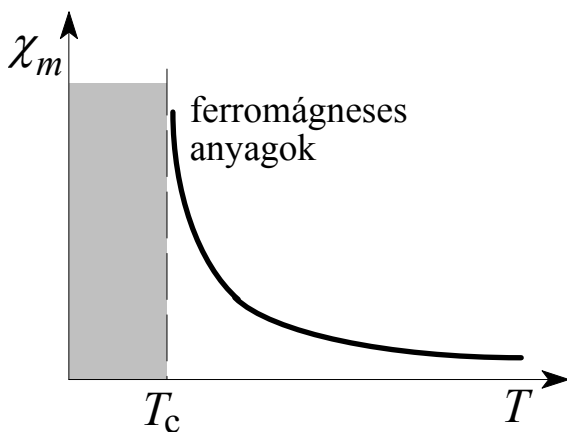


- $\mathbf{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ miatt a μ_r relatív permeabilitás adott H -nál arányos az origóból a $B(H)$ görbe ezen H abszcisszájú pontjához húzott egyenes meredekségével (annak μ_0 -ad része)

→ az ábrán látható $B(H)$ első mágneszési görbe alapján ez nyilvánvalóan maximumon megy át, majd $B = \mu_0 (H + M)$ miatt H növekedtével az M telítődése után aszimptotikusan 1-hez tart

se után aszimptotikusan 1-hez tart

A ferromágneses anyagok Curie-hőmérséklete



(kísérlet!)

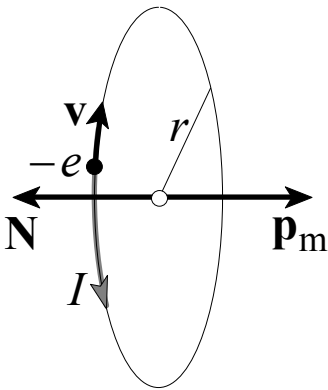
A ferromágneses anyagok csak az (anyagi minőségtől függő) T_c Curie-hőmérséklet alatt mutatnak ferromágneses tulajdonságokat, felette paramágneses anyagként viselkednek.

- χ_m mágneses szuszceptibilitásuk hőmérsékletfüggése T_c felett a Curie-Weiss-törvényt követi:

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$$

Az atomok mágneses tulajdonságai

Félklasszikus modellt használunk: klasszikus elmélet + kvantummechanikai megfontolások



A Bohr-féle egyszerű atommodell értelmében az elektron körpályán kering. Mágneses tulajdonságai szempontjából tehát I áramerősségű körárammal ekvivalens, amelynek periódusideje (ha v a kerületi sebesség nagysága):

$$T = \frac{2r\pi}{v} \quad , \quad \text{áramerőssége pedig:}$$

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} = \frac{e}{T} = e\nu \quad (\text{ahol } \nu \text{ a frekvencia})$$

- az elektron *pálya mágneses momentuma* e köráram mágneses momentuma:

$$\mathbf{p}_m = I \cdot \mathbf{f} = e \cdot \nu \cdot r^2 \pi$$

- az r sugarú körpályán ν frekvenciával keringő, m tömegű elektron *impulzusmomentuma* pedig:

$$\mathbf{N} \equiv m\mathbf{v}r = m \cdot 2\pi\nu \cdot r$$

- minthogy az elektron negatív töltése negatív, a \mathbf{p}_m és az \mathbf{N} vektorok *ellentétes irányúak*

- a részecske mágneses momentumának és impulzusmomentumának hányadosát *giromágneses* (forgási mágneses) *hányados* -nak (γ) nevezük

- ez esetünkben a fentiekből:

$$\gamma \equiv \frac{\mathbf{p}_m}{\mathbf{N}} = \frac{e}{2m}$$

A Bohr -modell szerint:

- a pálya impulzusmomentuma csak diszkrét értékeket vehet fel, mégpedig a \hbar ($\equiv h/2\pi$) (h a Planck -állandó) mennyiség (pozitív) egész számú többszörösét
- a pálya mágneses momentum is csak diszkrét értékű lehet:
a $\mu_B = e\hbar/2m$ ún. Bohr-féle magneton (elemi mágneses momentum) (pozitív) egész számú többszöröse

A kvantummechanika néhány idevágó eredménye:

- *iránykvantálás*: ha van a térben kitüntetett irány (pl. a külső \mathbf{B} mágneses tér iránya), akkor az elektronpályák síkjai nem lehetnek akármilyen irányításúak: a pálya N impulzusmomentumának a kitüntetett irányba eső N_z komponense csak $m_l \cdot \hbar$ értékű lehet, ahol az m_l (pozitív vagy negatív) egész szám az ún. *mágneses kvantumszám*

Az *elektronspin* hipotézis:

- az elektronnak pálya impulzusmomentumán és pálya mágneses momentumán kívül van *saját* (pályájától független) impulzusmomentuma (spinje: N_s) és -ettől elválaszthatatlan- *saját* (pályájától független) mágneses momentuma (\mathbf{p}_{ms}) is
- *a saját impulzusmomentum (spin) és a saját mágneses momentum az elektron ugyanolyan tulajdonsága, mint tömege ill. töltése*

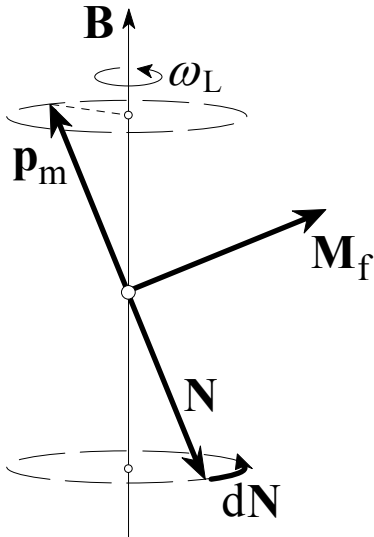
1. Az elektronspin (impulzusmomentum) nagysága: $\hbar/2$.

2. Az elektron saját mágneses momentumának nagysága: $\mu_B = e\hbar/2m$ (1 Bohr -magneton)

(az elektron saját mágneses momentumának és saját impulzusmomentumának hányadosa tehát e/m , ami *kétszerese* a pálya giromágneses hányadosának!)

3. Az elektron spinje mágneses térben kétféleképpen állhat be (iránykvantálás): a térrel párhuzamos, vagy azzal ellentétes irányba.

A Larmor-precesszió



- ha a \mathbf{p}_m mágneses momentummal és \mathbf{N} impulzusmomentummal rendelkező elemi köráram \mathbf{B} homogén mágneses térbe kerül, akkor a tér a köráramra

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$$

forgatónyomatékokat gyakorol

- a köráram mechanikai szempontból egy pörgettyű, s mint ilyen, a forgatónyomaték hatására a \mathbf{B} iránya körül precessziós mozgásra kényszerül:

- a köráram impulzusmomentumának dt idő alatti megváltozása:

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M}_f \cdot dt \quad ,$$

így az \mathbf{N} végpontja (ld. az ábrát!) $N \cdot \sin \alpha$ sugarú körön mozog (α az \mathbf{N} -nek \mathbf{B} -vel bezárt szöge)

- minthogy -az ábra szerint- dt idő alatti (ív)szög-elfordulása $dN/(N \cdot \sin \alpha)$, így precessziójának szögsebessége (a fentebb kapott összefüggéseket felhasználva):

$$\omega_L = \frac{dN}{N \cdot \sin \alpha \cdot dt} = \frac{M_f \cdot dt}{N \cdot \sin \alpha \cdot dt} = \frac{p_m \cdot B \cdot \sin \alpha}{N \cdot \sin \alpha} = \frac{e \cdot v \cdot r^2 \pi \cdot B}{2 \cdot m \cdot r^2 \pi \cdot v} = \frac{e \cdot B}{2m}$$

→ a Larmor-precesszió szögsebessége (körfrekvenciája) tehát:

$$\omega_L = \frac{eB}{2m} \quad (\text{Larmor-frekvencia})$$

Larmor tétele: a \mathbf{B} mágneses tér oly módon hat egy atom elektronrendszerének mozgására, hogy az egész elektronrendszert a \mathbf{B} iránya körül ω_L szögsebességgel forgásba hozza, de ezzel az elektronrendszernek az atomhoz viszonyított mozgását nem változtatja meg.

- az elektronpálya precessziója miatt tehát az elektron pályamozgásán kívül a \mathbf{B} tér körül is forgómozgást végez

- az e mozgásból eredő köráram \mathbf{p}'_m mágneses momentumot (indukált mágneses momentumot) hoz létre, és ennek következtében az anyagban olyan \mathbf{M}' mágnesezettséget eredményez, amelyek iránya a \mathbf{B} irányával **ellentétes** (hiszen -az ábrán láthatóan- a $d\mathbf{N}$ iránya olyan, hogy az elektron Larmor-precesszió miatti keringésének iránya a \mathbf{B} irányával jobbcsavart alkot, így negatív töltése miatt a keletkező \mathbf{p}'_m indukált mágneses momentum a \mathbf{B} irányával ellentétes)

→ minthogy emiatt \mathbf{B} az anyagban *csökken*, e folyamat *diamágneses* tulajdonságra vezet!

Diamágnesség

- azok az anyagok *diamágnesesek*, amelyek atomjai *nem rendelkeznek permanens mágneses momentummal* (ez akkor lép fel, ha az atom elektronjai pálya- és saját mágneses momentumainak vektori eredője zérus)

(ha ugyanis az atomok permanens mágneses momentummal rendelkeznének, akkor az azok mágneses térbeli rendeződése miatt keletkező mágnesezettség elnyomná a Larmor-precesszió fent elemzett, diamágnesességet eredményező hatását)

→ a külső \mathbf{B} tér az ilyen anyagokban csak indukált mágneses momentumot (\mathbf{p}'_m) hoz létre (permanens mágneses momentumok híján)

azokat nem tudja rendezni), amely (a fentiek szerint) a \mathbf{B} tér irányával *ellentétes* \rightarrow ez \mathbf{B} nagyságát csökkenti \rightarrow az anyag diamágneses

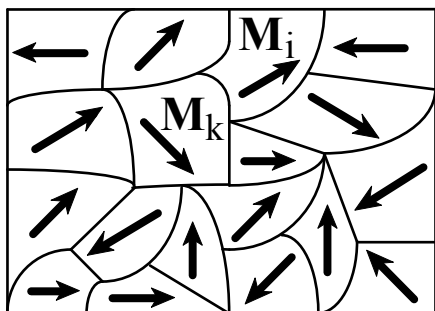
Paramágnesség

- azok az anyagok paramágnesesek, amelyek atomjai permanens mágneses momentummal rendelkeznek (mert az atom elektronjai pályá- és saját mágneses momentumainak vektori eredője nullától különböző)

- ezekben az anyagokban a külső \mathbf{B} tér egyrészt indukált mágneses momentumot (\mathbf{p}'_m) hoz létre, másrészt az atomok eleve meglévő permanens mágneses momentumát (\mathbf{p}_m) beállítja a saját irányába

- általában $|\mathbf{p}_m| > |\mathbf{p}'_m|$, ilyenkor az eredő (hőmérséklettől függő) mágneses momentum a \mathbf{B} tér irányába mutat (pozitív) \rightarrow az anyag paramágneses

Ferromágnesség



- a ferromágneses anyagok atomjai ún. *Weiss-féle tartományokat* (mágneses domének) alkotnak: ezek igen kicsiny makroszkopikus tartományok, amelyekben az atomok mágneses momentumai egyirányban helyezkednek el (ld. ábra)

(kísérlet!) (Barkhausen-eff.)

-közvetlen bizonyíték a domének létezésére: Bitter-féle porábrák

- ha az anyag nem mágnesezett, akkor a domének $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots$ mágneses momentumainak irányai véletlenszerűek

Külső \mathbf{H} mágneses tér hatására:

- a tér növelésével először reverzibilis, majd irreverzibilis *faleltolódások* következnek be:

→ a térrel azonos orientációjú domének (a \mathbf{H} és a \mathbf{p}_m által bezárt szög: $\theta < 90^\circ$) *kiterjednek*

→ a térrel ellentétes orientációjú ($\theta > 90^\circ$) domének pedig *összehúzódnak*

- nagyobb tér esetén pedig (irreverzibilis): *elfordulások* (a teljes domén elfordul a tér irányába) jönnek létre

→ ezek miatt az anyag *mágneseződik!*

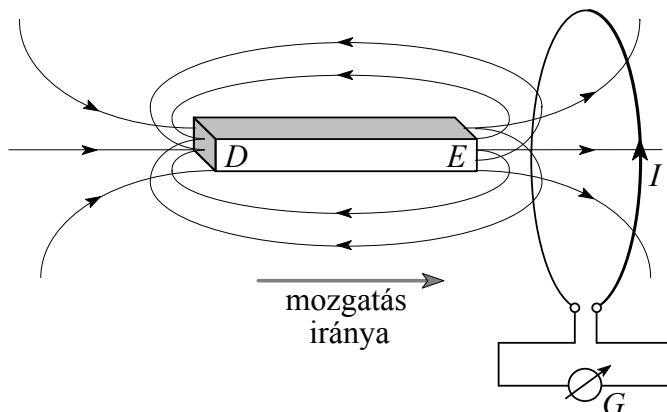
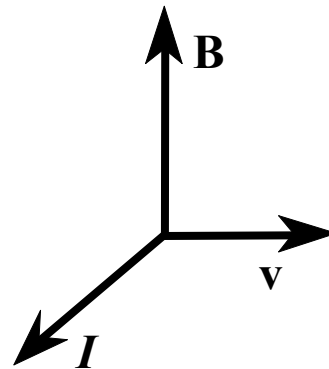
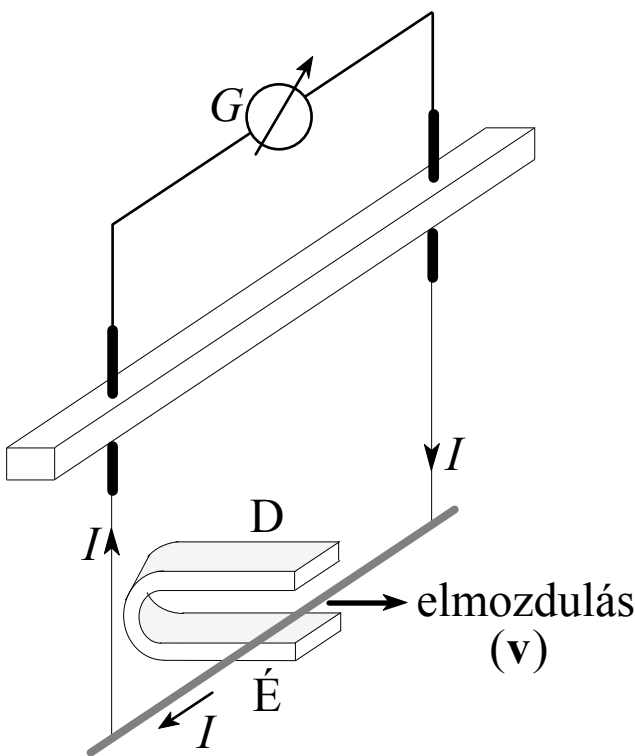
15. Az elektromágneses indukció

Az indukció alapjelenségei

Láttuk: *egyrészt* az elektromos áram mágneses teret hoz létre, *másrészt* a mágneses tér erőhatást gyakorol a mozgó töltésekre; *kérdés*: a mágneses terek előállítanak-e elektromos áramot?

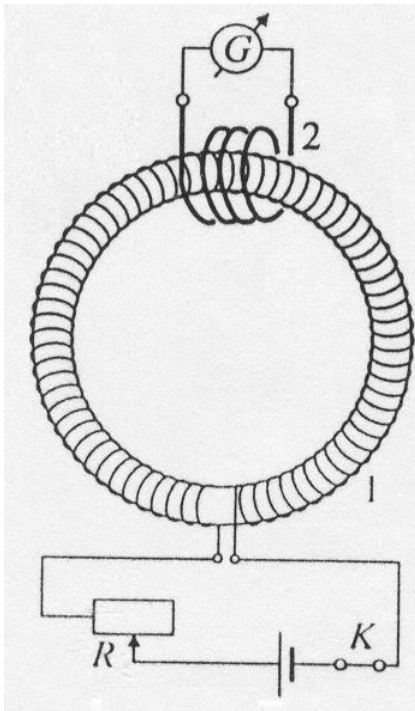
Néhány tapasztalat/kísérlet:

(kísérlet!)



(kísérlet!)

(kísérlet!)



Következtetés: az *állandó* mágneses tér *nem* hoz létre elektromos áramot, de a *változó* mágneses tér elektromos áramot kelt!

A zárt vezetőkörökben indukált elektromotoros erő megegyezik a vezetőhurokra kifizetett tetszőleges felületen átmenő indukciófluxus - változási sebességével:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

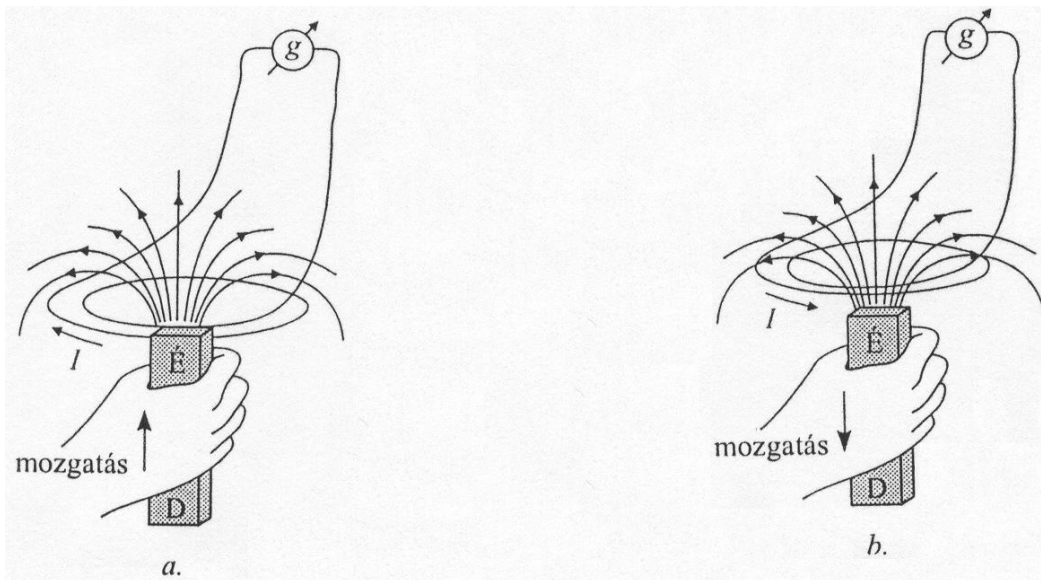
Faraday-féle indukciós törvény

(a negatív előjel az indukált elektromotoros erő irányát határozza meg, ld. alább Lenz törvényét!)

Lenz törvénye:

Az indukált elektromotoros erő iránya olyan, hogy az általa keltett áram mágneses tere *akadályozza* a mágneses fluxusban fellépő változást.

(kísérlet!) (a függőleges tengelyű tücsapágyra helyezett vízszintes rúdhoz rögzített vezetőkört taszítja/vonzza a közeledő/távolodó mágnes; a hatás kisebb, ha a hurkot felvágjuk - így csökkenthetők az örvényáramú veszteségek)

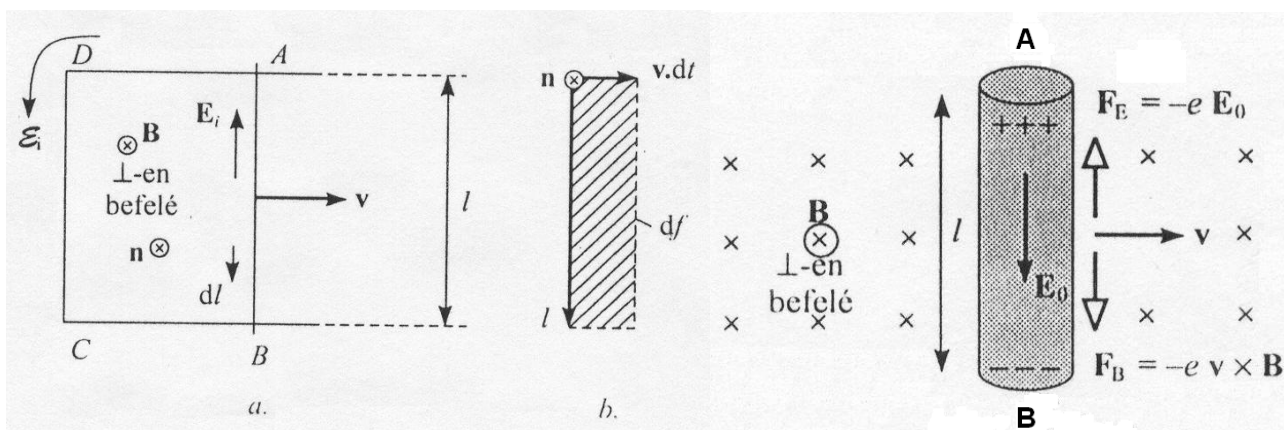


- Lenz szabálya az *energiamegmaradás* elvéből következik

Indukció mozgó vezetőben

- a *mozgó* vezetőben létrejövő indukció a vezetési töltéshordozókra ható Lorentz-erővel magyarázható!

- csak azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor \mathbf{v} merőleges \mathbf{B} -re, és $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ az ℓ irányába esik



$$\mathbf{F}_B = -e (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



töltésáramlás



ha a rúd szigetelve van: töltésfelhalmozódás $\rightarrow \mathbf{E}_i$ el. tér felépülése,
amíg:



$$\mathbf{F}_E = -e\mathbf{E}_i = -\mathbf{F}_B$$

vagyis: $\mathbf{E}_i = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ indukált elektromos térerősség keletkezik

- az $ABCD$ áramhurokban indukált elektromotoros erő ebből:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (\text{az ábra szerint}) = \\ &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \int_A^B d\mathbf{l} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}\end{aligned}$$

tehát a fenti speciális esetre: $\mathcal{E}_i = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{l}$

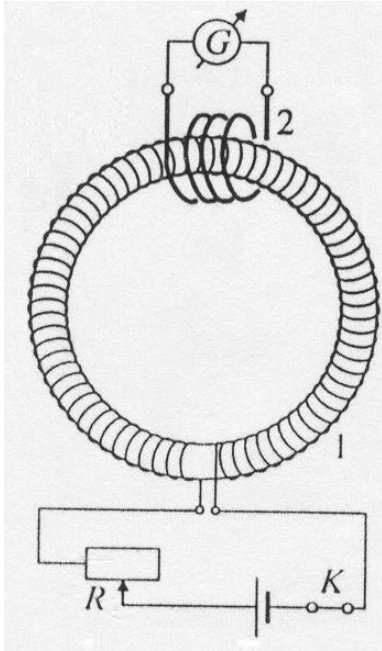
- a \mathbf{v} sebességgel mozgó rúd dt idő alatt $df = \mathbf{v} \cdot dt \cdot \mathbf{l}$ területet sűrol (ld. az ábrát!), tehát a hurok felületén a fluxus változása: $d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot df =$

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \cdot \mathbf{l}$, ez az \mathcal{E}_i fenti kifejezésével: $d\Phi_B = -\mathcal{E}_i \cdot dt$, vagyis:

$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$, ami éppen a Faraday-féle indukciós törvény \rightarrow beláttuk

tehát, hogy a mozgási indukció magyarázható a Lorentz-erővel!

Indukció nyugvó vezetőben (nyugvó vezető, időben változó tér)



A Faraday -f. indukciós törvény: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

ebben: $\mathcal{E}_i = \oint_{(g)} \mathbf{E}_i d\mathbf{l}$ és $\Phi_B = \int \mathbf{B} d\mathbf{f}$,

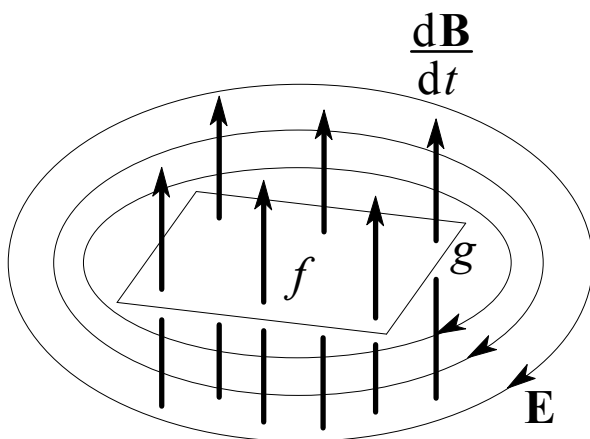
ezért: $\oint_{(g)} \mathbf{E}_i d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{(f)} \mathbf{B} d\mathbf{f}$

Mivel \mathbf{B} helyfüggő is lehet:

$$\oint_{(g)} \mathbf{E}_i d\mathbf{l} = -\int_{(f)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{f}$$

(Faraday indukciós törvényének ez az alakja a 2. Maxwell-egyenlet!)

→ az indukált elektromos tér tehát (szemben az elektrosztatikus térrel) örvényes vektortér!

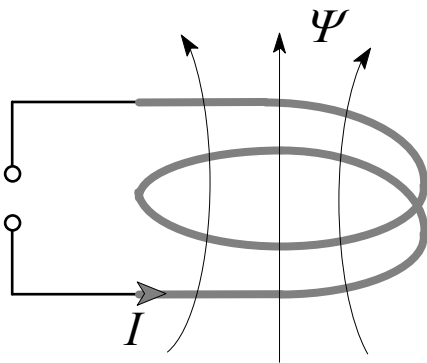


→ az időben változó mágneses tér erővonalait zárt elektromos erővonalak veszik gyűrűszerűen körül (ez az elektromos tér mozgatja a vezetési töltéshordozókat -amelyek nincsenek is mágneses térben- a nyugalmi indukciót demonstráló fenti kísérletben!)

a fentieket általánosítva:

Faraday : fluxusváltozás esetén vezető nélkül is, bármilyen szigetelőben (ill. vákuumban) elektromos tér keletkezik!

Az önindukció



- ha a hurok I árama változik, akkor a Φ_B fluxus is változik, ezért a hurokban *elektromotoros erő indukálódik!*

$$- a \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Biot–Savart- törvényből láthatóan:

$B \sim I$, vagyis $\Phi_B \sim I$, ezért

$$\Phi_B = L \cdot I \quad ,$$

ahol az L arányossági tényező a hurok *önindukciós együtthatója*, másnéven *induktivitása*, amely (a fentiek értelmében) a hurok geometriájától, valamint a környező közeg mágneses tulajdonságaitól függ

L egysége: $1 \text{ henry (H)} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ Vs/A}$

Az önindukció által keltett \mathcal{E}_δ elektromotoros erő tehát:

$$\mathcal{E}_\delta = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(L \cdot I)}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right) \quad ,$$

emiatt (ha L időben állandó):

$$\mathcal{E}_\delta = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad ,$$

példa: számítsuk ki a szolenoid induktivitását!

- az Ampère-féle gerjesztési törvény tárgyalásakor láttuk, hogy vákuummal kitöltött szolenoidban a mágneses indukció: $B = \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot I$, anyaggal kitöltött

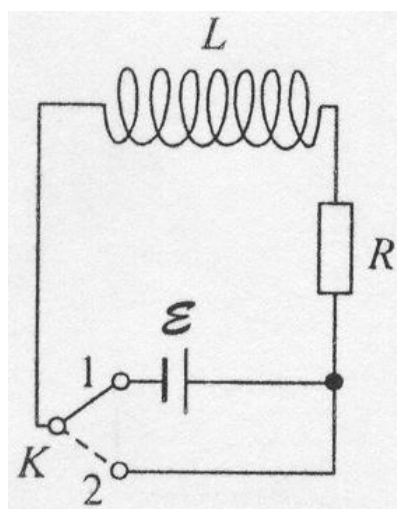
szolenoidban ennek természetesen μ_r -szerese: $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n}{l} \cdot I$

- emiatt az f keresztmetszeti területű, V térfogatú, n menetű szolenoid indukciófluxusa: $\Phi_B = B \cdot n \cdot f = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n^2}{l} \cdot I \cdot f = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n^2}{l^2} \cdot I \cdot V$

- ezzel L fenti definíciójából kapjuk:

$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n^2}{l^2} \cdot V$$

Az önindukció szerepe az áram be- és kikapcsolásakor



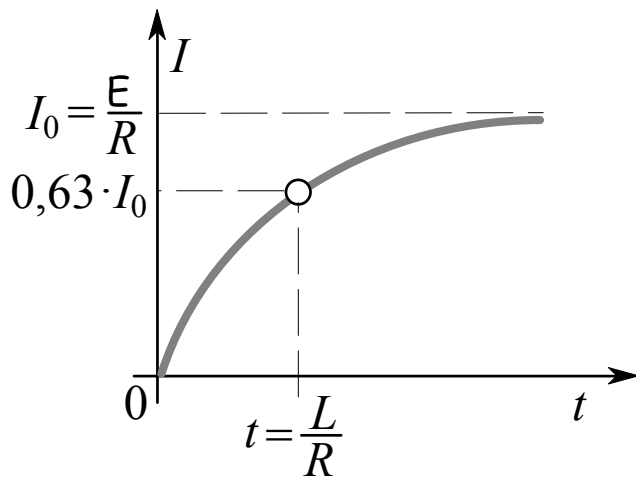
A K kapcsoló „1” állásában, stacionárius (egyen-súlyi) állapotban (feltéve, hogy a tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható) a kör árama:

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

Ha a K kapcsolót a $t = 0$ időpontban, árammentes esetben, „2” állásából „1” állásába kapcsoljuk, akkor a körre a Kirchhoff huroktörvénye alapján felírt

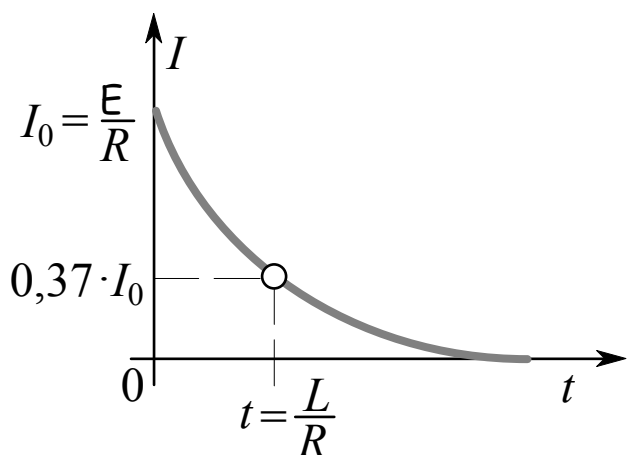
$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR$$

egyenletből az $I(t=0) = 0$ kezdeti feltétellel adódik a kör árama:



$$I = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right)$$

Ha a kör stacionárius állapotában a $t = 0$ időpontban a K kapcsolót „1” állásából „2” állásába kapcsoljuk, akkor a kör áramát az áramkör fenti egyenletéből $\mathcal{E} = 0$ helyettesítéssel és $I(t=0) = I_0$ kezdeti feltétellel kapjuk:

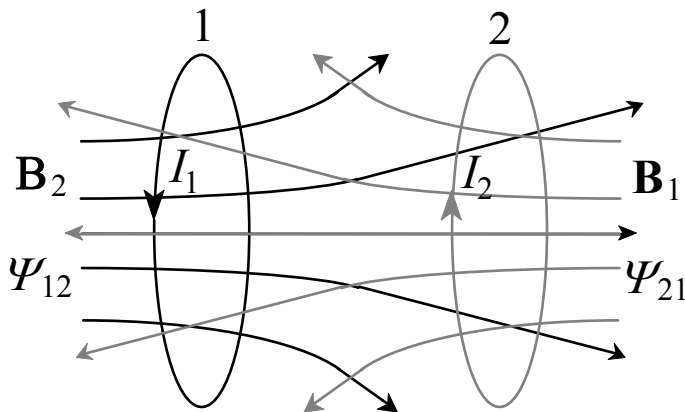


$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

A $\tau = \frac{L}{R}$ mennyiség az áramkör *időállandója*; τ idő alatt a kör áramának az egyensúlyi áramtól való eltérése e -ed részére csökken (itt e a természetes alapú logaritmus alapszáma ($e = 2,71\dots$)).

Látható (pl. $L \rightarrow 0$ esetén), hogy az öninduktivitás jelenléte ki- és bekapcsoláskor *lassítja* a kör áramának változását (vö. Lenz-szabály!).

Kölcsönös indukció



- ha két tekercs egymás mágneses terében van, akkor egymásra gyakorolt hatásukra a fentiekhez hasonlóan kapjuk:

a 2. ill. az 1. tekercs indukciófluxusa, ha az 1. ill. a 2. tekercs árama I_1 ill. I_2 :

$$\Phi_{21} = L_{21} \cdot I_1 \quad , \quad \text{ill.}$$

$$\Phi_{12} = L_{12} \cdot I_2 \quad ,$$

emiat az indukált elektromotoros erők:

$$\mathcal{E}_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad , \quad \text{ill.}$$

$$\mathcal{E}_1 = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

itt L_{21} a „2” vezetőluknak az „1” vezetőlukra vonatkozó kölcsönös indukciós tényezője,

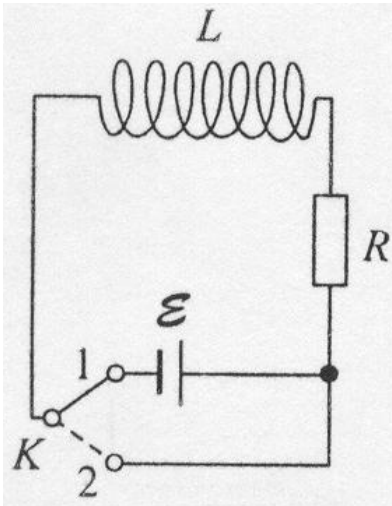
L_{12} pedig az „1” vezetőluknak a „2” vezetőlukra vonatkozó kölcsönös indukciós tényezője

Kimutatható, hogy: $L_{21} = L_{12} = M$,

ahol M -et a vezetőlukok *kölcsönös indukciós tényezőjének* nevezzük

(ezen a jelenségen alapul a transzformátor!)

Az áram mágneses terének energiája



- láttuk: ha a kör stacionárius állapotában a K kapcsolót „1” helyzetéből átkapcsoljuk „2” helyzetébe, akkor a \mathbf{B} indukcióvektor nagysága és a kör I árama időben monoton csökken, és $t \rightarrow \infty$ -re megszűnik

- ennek során a lecsengő mágneses tér energiája az R ellenálláson hővé alakul

A mágneses tér felépítésekor (ha a kör stacionárius állapotában a K kapcsolót „2” helyzetéből átkapcsoljuk „1” helyzetébe) a mágneses tér által végzett munka:

$$dW = \mathcal{E}_\delta \cdot I \cdot dt = -\frac{d\Phi}{dt} \cdot I \cdot dt = -I \cdot d\Phi$$

$d\Phi = L \cdot dI$ behelyettesítésével: $dW = -L \cdot I \cdot dI$, ebből pedig:

$$W = -\int_0^I L \cdot I \cdot dI = -\frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2,$$

tehát a tér *ellenében* végzett munka, vagyis

az önindukciós tekercs energiája:

$$E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

- a mágneses tér tehát ugyanúgy energiával rendelkezik, mint a feltöltött kondenzátorban lévő elektromos mező ($C \cdot U^2/2$), vagy a haladó mozgást végző test ($m \cdot v^2/2$), vagy a forgó mozgást végző test ($\Theta \cdot \omega^2/2$), stb.
- az L induktivitás hasonló szerepet játszik, mint az m , vagy a Θ

→ az önindukció jelenségében a mágneses tér tehetetlensége nyilvánul meg!

A mágneses tér energiasűrűsége

Alkalmazzuk az önindukciós tekercs energiájának fenti kifejezését szolenoid esetére!

A szolenoid belső mágneses terére és önindukciós együtthatójára korábban kapott összefüggések felhasználásával az energiát a mágneses indukcióval és a szolenoid adataival kifejezve:

$$E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n^2}{l^2} \cdot V \cdot \left(\frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot B \cdot V \quad ,$$

vagyis azt kaptuk, hogy *a szolenoid* (amelyről tudjuk, hogy (jó közelitással) benne a tér homogén, rajta kívül pedig zérus) *energiája a térfogatával arányos*:

$$E = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B \cdot V \quad .$$

Ezt a kifejezést az erőterfelfogás értelmében úgy tekinthetjük, hogy *a szolenoid energiája* voltaképpen *az általa létrehozott mágneses tér energiája*, amelyből:

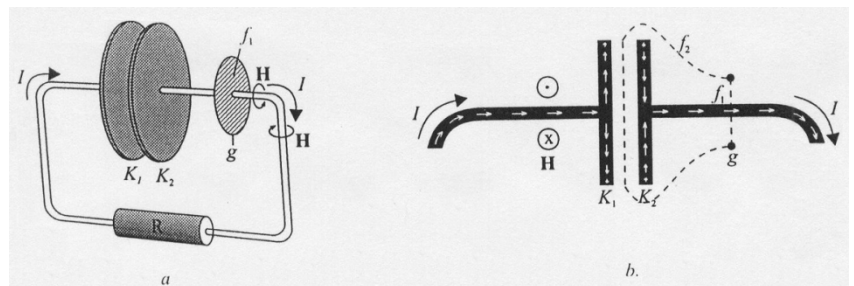
A mágneses tér $e \equiv \frac{E}{V}$ energiasűrűsége:

$$e = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$$

Az eltolódási áram és az első Maxwell-egyenlet

Tegyük fel, hogy egy áramkörben kondenzátor van, amelyet a körben folyó I áram feltölt vagy kisüt (ld. ábra)!

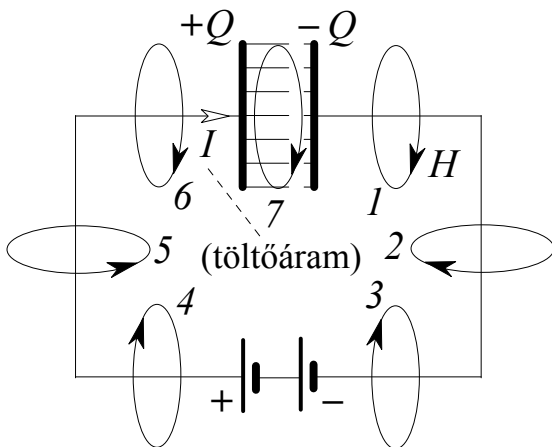
- ha az ábrán látható módon választott g zárt görbére felírjuk az Ampère-féle gerjesztési törvény eredeti alakját, akkor a



$\oint_g \mathbf{H} d\mathbf{l}$ vonalintegrálra a

g -re kifeszítendő f_1 felület választása esetén az $I (\neq 0)$ vezetési áramot kapjuk, viszont az f_2 felületet választva zérust (hiszen az f_2 -n nem megy át *vezetési* áram) \rightarrow ez **ellentmondás**, fel kell valahogyan oldani!

- ennek érdekében Maxwell feltételezte, hogy -a vezetékben folyó áramhoz hasonlóan- a kondenzátor időben változó elektromos terét *is* zárt mágneses erővonalak veszik körül



- a kondenzátor feltöltésekor, vagy kisütésekor a vezetékben folyó, időben változó vezetési áramot a *szigetelőben folytatódó*, a vezetési árammal megegyező nagyságú I_e "eltolódási áram" egészíti ki zárt köráramra

Ezt a szigetelőben folytatódó I_e eltolódási áramot kell tehát az elektromos tér jellemzőjével kifejeznünk:

- ha a vezetőkben éppen I (pillanatnyi) vezetési áram folyik, akkor az áramkört váltóáramú szempontból lezáró kondenzátor fegyverzetein dt idő alatt $dQ = I \cdot dt$ értékkel változik meg a töltés mennyisége

- ez -a kondenzátort síkkondenzátornak feltételezve- megváltoztatja az η felületi töltéssűrűséget, mégpedig $d\eta = dQ/f$ értékkel, amiből viszont -a (vákuummal határolt) vezető felületénél kialakuló elektromos térerősségre korábban látott $E = \eta/\epsilon_0$ összefüggésből dielektrikum esetén (amelyben $E = \eta/(\epsilon \cdot \epsilon_0)$) következő $D = \eta$ reláció miatt- a D dielektromos eltolódási vektor (amely anyagi minőségtől független, tehát ez az elektromos tér keresett jellemzője!) megváltozása következik: $dD = dQ/f$

- dQ helyébe a fenti $I \cdot dt$ -t írva adódik a vezetési és az eltolódási áramok keresett összefüggése: $I_e = f \cdot \frac{dD}{dt}$, amiből az

eltolódási áramsűrűség: $\mathbf{J}_e = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

Az eltolódási áram bevezetését indokló más megfontolás:

(a fenti gondolatmenethez hasonlóan ez is heurisztikus, vagyis bizonyító ereje nincs; helyességének bizonyítéka az, hogy az Ampère-féle gerjesztési törvénynek az eltolódási áram bevezetésével módosított alakja (az első Maxwell-egyenlet) minden tapasztalattal összhangban van!)

Az Ampère-féle gerjesztési törvény jobboldalát a Faraday-féle indukciós törvény (96. o. -on szereplő alakjának) *analógiájára* egészítjük ki

a $\int_f \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f}$ taggal (amely előjelének az energiamegmaradás elve értelmében kell itt pozitívnak lennie)!

A fent megadott eltolódási áramsűrűséggel az eltolódási áram tetszőleges, nyugvó f felületre:

$$I_e = \int_{(f)} \frac{\partial D_n}{\partial t} df \quad .$$

Ha a g zárt görbére kifeszített f felületen még

$$I = \int J_n df$$

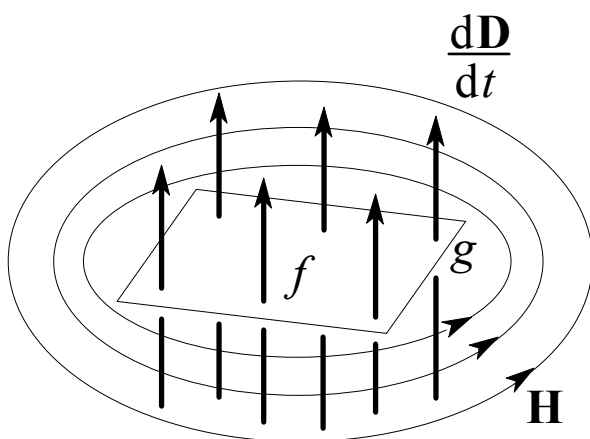
erősségű vezetési áram is áthalad, akkor a teljes áram: $I + I_e$.

Ez a teljes áram hozza létre a H mágneses teret; ezt írva az Ampère-féle gerjesztési törvény eredeti alakjába adódik a tapasztalattal tökéletes egyezésben lévő

első Maxwell-egyenlet:

$$\oint_{(g)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \int_{(f)} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{f}$$

Az egyenlet szemléletes jelentése:



A vezetési áramok mellett az időben változó elektromos tér is mágneses örvényteret létesít maga körül,

vagy másképpen:

az időben változó \mathbf{D} -vonalakat, valamint a vezetési áramokat zárt \mathbf{H} -vonalak veszik gyűrűszerűen körül

16. A Maxwell -egyenletek

- A Maxwell-egyenletek és a hozzájuk tartozó anyagegyenletek az elektromos és a mágneses teret jellemző mennyiségek, vagyis

az **E** elektromos térerősség

a **D** elektromos eltolódás

a **B** mágneses indukció

a **H** mágneses térerősség

a **J** áramsűrűség

a ρ elektromos töltéssűrűség,

valamint az ϵ_r , μ_r és σ anyagállandók

közötti összefüggések.

A fenomenológiai elektrodinamika alaptörvényei:

(A nyugvó közegek makroszkopikus elektromágnességére vonatkozó minden ismeretünk levezethető belőlük - bár általában nem egyszerűen ...)

(valójában eddig már mindegyiket tárgyaltuk: az (eltolódási árammal kiegészített) Ampère-féle gerjesztési törvény, a Faraday- féle indukciós törvény és a Gauss -törvények)

A Maxwell- egyenletek:

1.
$$\oint_{(g)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(f)} \mathbf{J} d\mathbf{f} + \int_{(f)} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{f}$$

(mind a vezetési áram, mind az eltolódási áram (az időben változó elektromos tér) mágneses örvényteret létesít)

2.
$$\oint_{(g)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{(f)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{f}$$

(az időben változó mágneses tér elektromos örvényteret hoz létre)

3.
$$\oint_{(f)} \mathbf{D} d\mathbf{f} = \int_{(V)} \rho dV$$

(a \mathbf{D} eltolódási vektor forrásai a valódi elektromos töltések)

4.
$$\oint_{(f)} \mathbf{B} d\mathbf{f} = 0$$

(a \mathbf{B} indukcióvektor tere forrásmentes (mert valódi, egymástól elválasztható "mágneses töltések" nincsenek))

Az ezekhez járuló *anyagegyenletek*:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

Az anyagegyenletekben szereplő (és az anyagi közegre jellemző) ε_r és μ_r és σ mennyiségeket a fenomenológiai Maxwell-elmélet (definíció szerint) tovább nem vizsgálendő anyagállandóknak tekinti, azaz nem is célja, hogy összekapcsolja azokat az anyag mikroszkopikus (atomi, ill. molekuláris) állandóival.

- megjegyzendő, hogy az \mathbf{E} ill. \mathbf{D} vektorok analogonjai most is rendre a \mathbf{H} ill. \mathbf{B} vektorok!

20. Elektromágneses hullámok

Az elektromágneses térre vonatkozó hullámegyenlet

Láttuk, hogy:

- időben változó mágneses tér elektromos teret hoz létre, másrészt
- időben változó elektromos tér mágneses teret hoz létre

Általában még a \mathbf{B} és \mathbf{D} időderiváltja is függ az időtől (különben változása csak időfüggetlen teret indukálna), ezért

- ahol időben változó elektromos tér van jelen, ott egyidejűleg időben változó mágneses tér is jelen van,

illetve

- ahol időben változó mágneses tér van jelen, ott egyidejűleg időben változó elektromos tér is jelen van



→ az időben változó elektromos és mágneses tér egymással összefonódik, *örvényes elektromágneses teret képez*

Kimutatható, hogy az időben változó elektromágneses mező a térben elektromágneses hullám alakjában, véges sebességgel terjed.

A homogén, izotrop dielektrikumra felírt Maxwell-egyenletekből levezethető hullámegyenletek:

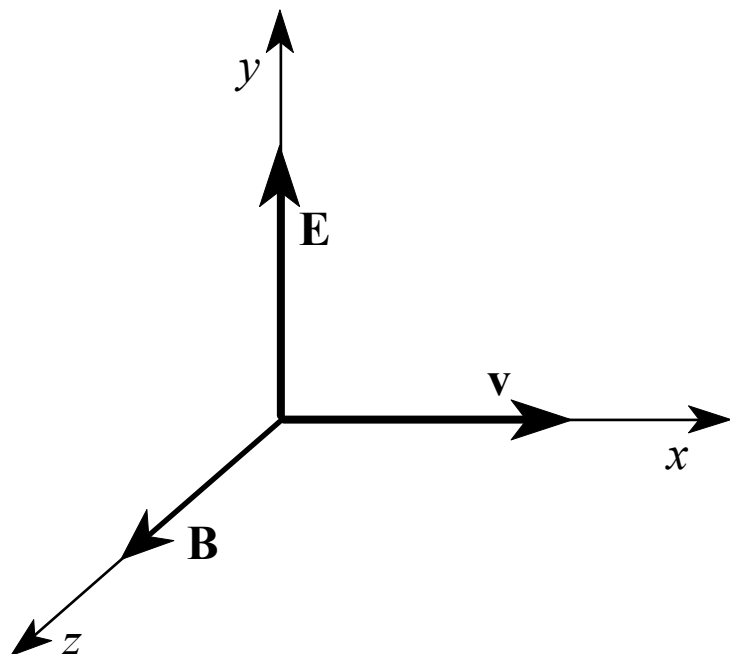
$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad , \text{ill.} \quad \Delta \mathbf{E} = \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad , \text{ ahol}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{az ún. Laplace -operátor}$$

- Az ezeket az egyenleteket kielégítő függvények olyan hullámokat írnak le, amelyek *(fázis)sebessége*:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}$$

- A hullámegyenletek megoldásai közül azok írnak le síkhullámot, amelyekre fennáll, hogy bármely időpillanatban a hullám terjedési irányra merőleges akármelyik síkban helytől független mind az $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ elektromos-, mind pedig a $\mathbf{H}(x,y,z,t)$ mágneses térerősségvektor.



Kimutatható, hogy a hullámban az \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{v} (és ugyanígy a \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{v}) vektorok mindig merőlegesek egymásra, és jobbsodrású rendszert képeznek.

A hullámegyenletek $E(t-x/v)$, ill. $H(t-x/v)$ típusú (az x irányban $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}$ sebességgel haladó síkhullám) megoldásai közül *monokromatikus síkhullám megoldások* azok, amelyekben az \mathbf{E} és a \mathbf{H} vektorok ω körfrekvenciájú harmonikus rezgést végeznek:

$$E_y = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

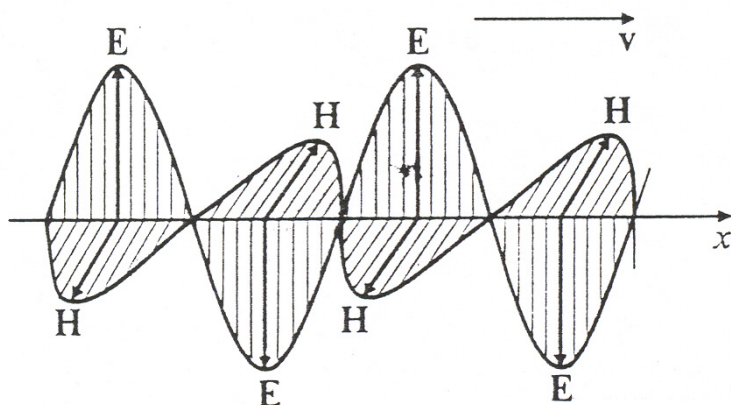
és

$$H_z = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

$$(E_x = E_z = H_x = H_y = 0),$$

ahol E_0 és H_0 időtől független hullámamplitúdók

Ez transzverzális, lineárisan poláros síkhullám (az \mathbf{E} vektor síkját (xy) rezgési síknak, a \mathbf{H} vektorét (xz) polarizációs síknak nevezik).



A haladó monokromatikus hullámban az \mathbf{E} és \mathbf{H} vektorok mindig azonos fázisban rezegnek.

Az elektromágneses tér energiája

Elektromágneses térre az energia megmaradásának tételét a

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 \right) dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \oint_f \mathbf{E} \times \mathbf{H} df$$

egyenlet fejezi ki (Poynting-tétel), amelyben a baloldali integrandusz

$$u = u_E + u_H = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2$$

(mint láttuk) az elektromos és a mágneses tér energiasűrűségének összege, azaz az elektromágneses tér teljes energiasűrűsége.

Az egyenlet baloldala így a V térfogatban lévő elektromágneses tér energiájának időegység alatti csökkenése (pozitív előjellel). Ez két ok miatt történik (az egyenlet az energiamérleget írja le):

a) A $\mathbf{JE} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$ mennyiség az idő- és térfogategységenként keletkező Joule-hő.

Az egyenlet jobboldalának első integrálja a V térfogatban lévő elektromágneses energia időegység alatti csökkenésének azt a részét adja meg, amely a vezetőben folyó áram által a V térfogatban időegység alatt termelt Joule-hőt fedezi.

b) Az

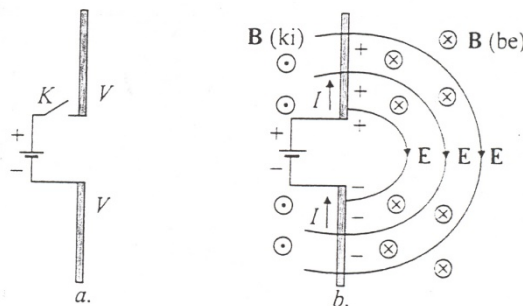
$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{Poynting-vektor}$$

(másnéven *energiasugárzási vektor*) az elektromágneses sugárzás általi energiaáramlást jellemzi: nagysága az energiaáramlás áramsűrűsége (energia/(felület·idő), egysége: 1W/m^2), iránya pedig az energiaáramlás iránya.

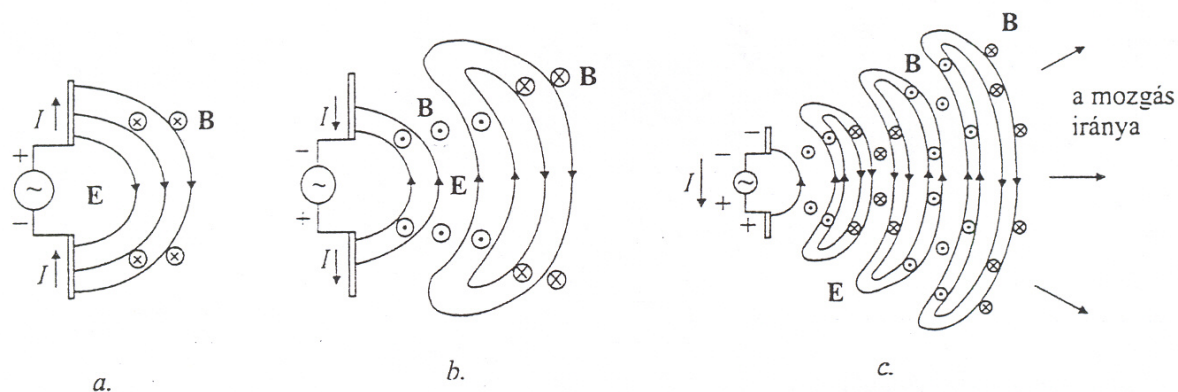
Az \mathbf{S} Poynting-vektornak a V térfogatot határoló f zárt felületre vett felületi integrálja (egyenletünk jobboldali 2. tagja) a V térfogatból a felületen időegység alatt *elektromágneses sugárzás formájában* kiáramló energiát adja meg.

Szabad elektromágneses hullámok

- az elektromágneses hullámokat sugárzó legegyszerűbb rendszer egy elektromos dipólus, amelynek dipólmomentuma az időben gyorsan változik:

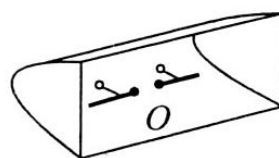
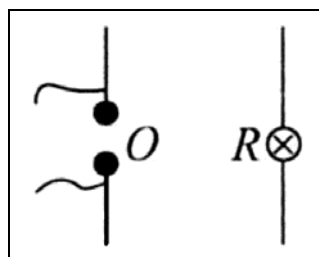


Rezgő elektromos dipólus

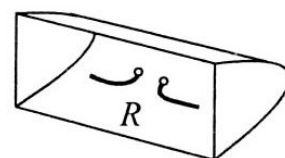
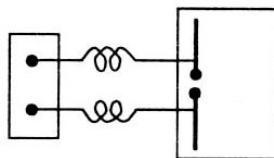


A változó terek a szabad térben elektromos és mágneses hullámok alakjában -az őket létrehozó töltésrendszerrel, illetve áramkörrel leszakadva- igen nagy távolságokra is eljuthatnak.

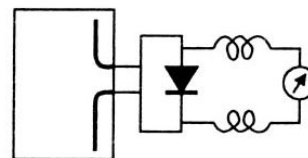
Hertz kísérletei: az elektromágneses hullámok terjedési tulajdonságai



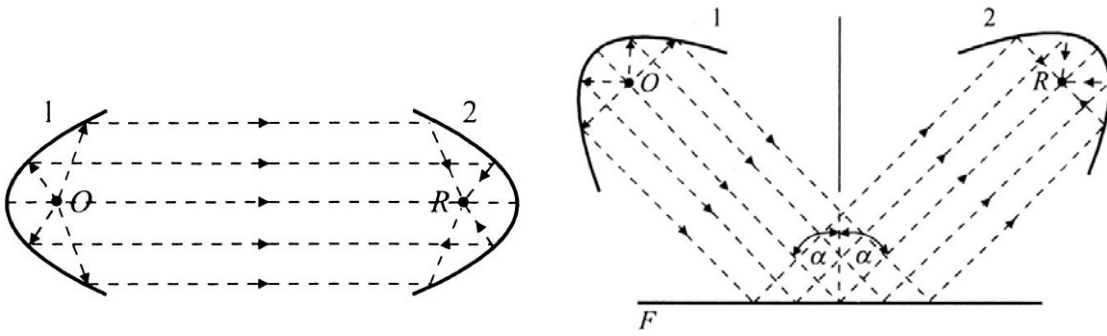
oszcillátor (O)



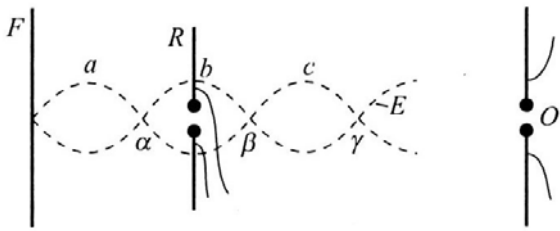
rezonátor (R)



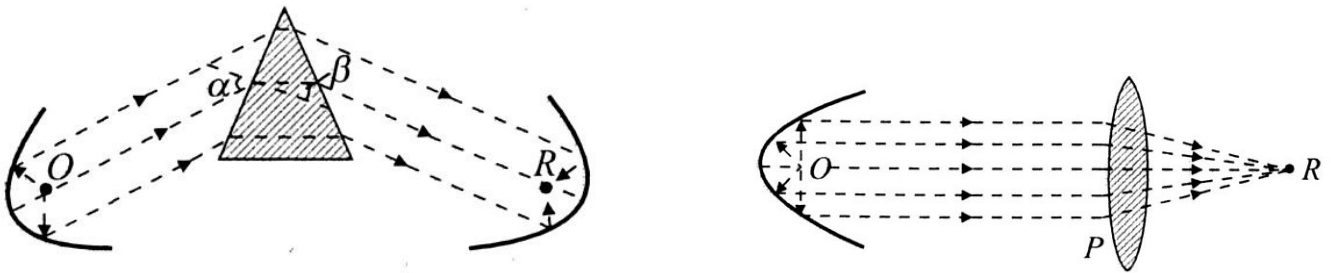
Elektromágneses hullámok keltése oszcillátorral (O) és érzékelése rezonátorral (R)



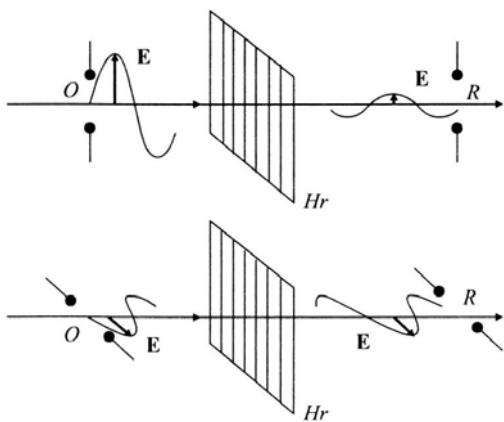
Elektromágneses hullámok terjedése és visszaverődése fém felületről



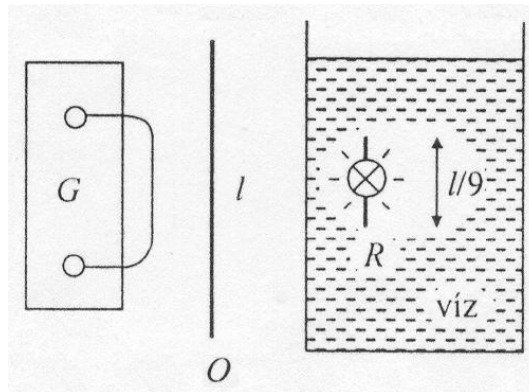
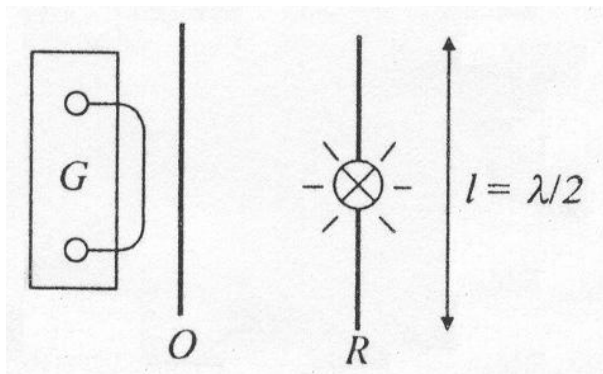
Elektromágneses hullámok interferenciája: állóhullámok



Elektromágneses hullámok törése; fókuszálás



Elektromágneses hullámok polarizációja



Elektromágneses hullámok terjedési sebessége szigetelőkben
 $c^2 = 1/\epsilon\mu$

Az elektromágneses spektrum

