

## Valószínűségszámítás feladatsor 1. hét

**1. Feladat.** Bizonyítsuk be a következőket tetszőleges  $A$  és  $B$  eseményekre:

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- Ha  $P(A \Delta B) = 0$ , akkor  $P(A) = P(B)$
- $P(A \Delta C) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C)$
- $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$  (Mikor van egyenlőség?)

**2. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy  $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ . (Segítség: tekintsük az  $r + 1$ -elemű halmazokat, és számítsuk ki, hogy ezek közül hánynak lesz  $k + 1$  a legnagyobb eleme?)

**3. Feladat.** Hányféleképpen juthatunk el egy sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha minden lépésben csak egyet léphetünk vagy jobbra, vagy felfelé? Mi a helyzet 3-dimenziós "sakktáblánál", azaz ha az origóból akarunk eljutni a  $(8,8,8)$  pontba úgy, hogy minden lépésben pontosan az egyik koordinátát növeljük 1-gyel?

**4. Feladat.** Két dobókockával dobunk egyszerre. Mi a valószínűsége annak, hogy az összeg 6,7,8? A 9-et és a 10-et ugyanannyiféleképp tudjuk előállítani két 1 és 6 közti szám összegeként. Igaz-e, hogy megegyezik a valószínűségük? Mi a valószínűsége annak, hogy a két kapott szám relatív prím lesz? Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbsége páros lesz?

**5. Feladat.** Mennyi a valószínűsége annak, hogy 52 lapos franciakártya-pakliból 5 lapot húzva a következő kombinációkat kapjuk?

- egy pár (két egyforma értékű lap, a többi különböző)
- full (3 egyforma és két másik egyforma)
- póker (4 egyforma)

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 találatunk lesz az ötöslottón?

**6. Feladat.** Egy hallgató a 100 tételből 90-et tanult meg a vizsgára. Három tételt kell húznia, ha bármelyiket nem tudja, megbukik. Mi a valószínűsége, hogy átmegy a vizsgán? Mi a helyzet, ha csak egy tételből kell vizsgáznia, és azt két húzott tétel közül választhatja?

**7. Feladat.** Egy francia kártyapakliból egymás után húzunk lapokat. Mi a valószínűsége, hogy az első öt lap között lesz ász? Mi a valószínűsége, hogy előbb húzunk ászt, mint kettést?

**8. Feladat.** Mi a valószínűsége, hogy egy  $n$  fős osztályban két tanulónak egy napon van a születésnapja? Hány fős osztályban lesz legalább  $\frac{1}{2}$  az esély? Hány ismerősömnek kell lennie, hogy  $\frac{1}{2}$  eséllyel valamelyikükkel együtt legyen születésnapom?

**9. Feladat.** Egy sziget lakói egymástól függetlenül mindig  $\frac{2}{3}$  valószínűséggel hazudnak. Ezért a bíróságokon minden tanú vallomását egy másik tanúnak is meg kell erősítenie. Mennyi lesz így a hamis tanúvallomások aránya?

**10. Feladat.** Harmickét lapos magyar kártyából tíz lapot kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) egy színből hozzánk kerül az összes lap?
- (b) mind a négy színből lesz a kezünkben?

**11. Feladat.** Egy kurzuson 40 hallgató van, mindegyikük megtanult a 40 tételből 39-et (mindenkinél más maradt ki). Mi a valószínűsége, hogy egyikük sem bukik meg, ha

- (a) visszatevés nélkül húznak?
- (b) visszatevéssel húznak?

**12. Feladat.** Egy kém  $n$  ország titkosszolgálatának dolgozik egyszerre. Egy napon összekeveri a borítékokat és véletlenszerűen teszi beléjük a jelentéseket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden jelentés jó borítékba kerül? Hogy csak egyet ront el? Hogy mindet elrontja? Hogy pontosan  $k$ -t ront el?

## Valószínűségszámítás feladatsor 1. hét

**1. Feladat.** Bizonyítsuk be a következőket tetszőleges  $A$  és  $B$  eseményekre:

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- Ha  $P(A \Delta B) = 0$ , akkor  $P(A) = P(B)$
- $P(A \Delta C) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C)$
- $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$  (Mikor van egyenlőség?)

**2. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy  $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ . (Segítség: tekintsük az  $r + 1$ -elemű halmazokat, és számítsuk ki, hogy ezek közül hánynak lesz  $k + 1$  a legnagyobb eleme?)

**3. Feladat.** Hányféleképpen juthatunk el egy sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha minden lépésben csak egyet léphetünk vagy jobbra, vagy felfelé? Mi a helyzet 3-dimenziós "sakktáblánál", azaz ha az origóból akarunk eljutni a  $(8,8,8)$  pontba úgy, hogy minden lépésben pontosan az egyik koordinátát növeljük 1-gyel?

**4. Feladat.** Két dobókockával dobunk egyszerre. Mi a valószínűsége annak, hogy az összeg 6,7,8? A 9-et és a 10-et ugyanannyiféleképp tudjuk előállítani két 1 és 6 közti szám összegeként. Igaz-e, hogy megegyezik a valószínűségük? Mi a valószínűsége annak, hogy a két kapott szám relatív prím lesz? Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbsége páros lesz?

**5. Feladat.** Mennyi a valószínűsége annak, hogy 52 lapos franciakártya-pakliból 5 lapot húzva a következő kombinációkat kapjuk?

- egy pár (két egyforma értékű lap, a többi különböző)
- full (3 egyforma és két másik egyforma)
- póker (4 egyforma)

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 találatunk lesz az ötöslottón?

**6. Feladat.** Egy hallgató a 100 tételből 90-et tanult meg a vizsgára. Három tételt kell húznia, ha bármelyiket nem tudja, megbukik. Mi a valószínűsége, hogy átmegy a vizsgán? Mi a helyzet, ha csak egy tételből kell vizsgáznia, és azt két húzott tétel közül választhatja?

**7. Feladat.** Egy francia kártyapakliból egymás után húzunk lapokat. Mi a valószínűsége, hogy az első öt lap között lesz ász? Mi a valószínűsége, hogy előbb húzunk ászt, mint kettést?

**8. Feladat.** Mi a valószínűsége, hogy egy  $n$  fős osztályban két tanulónak egy napon van a születésnapja? Hány fős osztályban lesz legalább  $\frac{1}{2}$  az esély? Hány ismerősömnek kell lennie, hogy  $\frac{1}{2}$  eséllyel valamelyikükkel együtt legyen születésnapom?

**9. Feladat.** Egy sziget lakói egymástól függetlenül mindig  $\frac{2}{3}$  valószínűséggel hazudnak. Ezért a bíróságokon minden tanú vallomását egy másik tanúnak is meg kell erősítenie. Mennyi lesz így a hamis tanúvallomások aránya?

**10. Feladat.** Harmickét lapos magyar kártyából tíz lapot kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

- egy színből hozzánk kerül az összes lap?
- mind a négy színből lesz a kezünkben?

**11. Feladat.** Egy kurzuson 40 hallgató van, mindegyikük megtanult a 40 tételből 39-et (mindenkinél más maradt ki). Mi a valószínűsége, hogy egyikük sem bukik meg, ha

- visszatevés nélkül húznak?
- visszatevéssel húznak?

**12. Feladat.** Egy kém  $n$  ország titkosszolgálatának dolgozik egyszerre. Egy napon összekeveri a borítékokat és véletlenszerűen teszi beléjük a jelentéseket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden jelentés jó borítékba kerül? Hogy csak egyet ront el? Hogy mindet elrontja? Hogy pontosan  $k$ -t ront el?

## Valószínűségszámítás feladatsor 2. hét

**1. Feladat.** Egy harctéri bevetésre 6 ejtőernyős, 4 tengerész és 5 lövész jelentkezett. A bevetést egy 3 ejtőernyősből, 3 tengerészből és 2 lövészből álló egység fogja végrehajtani. Hányféleképpen lehet kiválasztani a jelentkezőkből a bevetésre kerülő egységet?

**2. Feladat.** Háromféle számlánk van: víz, gáz és villany. Ahhoz, hogy a bank befogadja a hitelkérelmünket, de ne tudja meg, hogy sok pénzünk van, az utolsó 5 havi számlánk közül pontosan 3 gázt, legalább 2 villanyt és legfeljebb 3 vizet kell befizetnünk. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

**3. Feladat.**

**4. Feladat.** Két dobókockával dobunk egyszerre. Mi a valószínűsége annak, hogy az összeg 6,7,8? A 9-et és a 10-et ugyanannyiféleképp tudjuk előállítani két 1 és 6 közti szám összegeként. Igaz-e, hogy megegyezik a valószínűségük? Mi a valószínűsége annak, hogy a két kapott szám relatív prím lesz? Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbsége páros lesz?

**5. Feladat.** Mennyi a valószínűsége annak, hogy 52 lapos franciakártya-pakliból 5 lapot húzva a következő kombinációkat kapjuk?

- egy pár (két egyforma értékű lap, a többi különböző)
- full (3 egyforma és két másik egyforma)
- póker (4 egyforma)

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 találatunk lesz az ötöslottón?

**6. Feladat.** Egy hallgató a 100 tételből 90-et tanult meg a vizsgára. Három tételt kell húznia, ha bármelyiket nem tudja, megbukik. Mi a valószínűsége, hogy átmegy a vizsgán? Mi a helyzet, ha csak egy tételből kell vizsgáznia, és azt két húzott tétel közül választhatja?

**7. Feladat.** Egy francia kártyapakliból egymás után húzunk lapokat. Mi a valószínűsége, hogy az első öt lap között lesz ász? Mi a valószínűsége, hogy előbb húzunk ászt, mint kettést?

**8. Feladat.** Mi a valószínűsége, hogy egy  $n$  fős osztályban két tanulónak egy napon van a születésnapja? Hány fős osztályban lesz legalább  $\frac{1}{2}$  az esély? Hány ismerősömnek kell lennie, hogy  $\frac{1}{2}$  eséllyel valamelyikükkel együtt legyen születésnapom?

**9. Feladat.** Harmickét lapos magyar kártyából tíz lapot kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) egy színből hozzánk kerül az összes lap?
- (b) mind a négy színből lesz a kezünkben?

**10. Feladat.** Egy kurzuson 40 hallgató van, mindegyikük megtanult a 40 tételből 39-et (mindenkinél más maradt ki). Mi a valószínűsége, hogy egyikük sem bukik meg, ha

- (a) visszatevés nélkül húznak?
- (b) visszatevéssel húznak?

**11. Feladat.** Egy kém  $n$  ország titkosszolgálatának dolgozik egyszerre. Egy napon összekeveri a borítékokat és véletlenszerűen teszi beléjük a jelentéseket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden jelentés jó borítékba kerül? Hogy csak egyet ront el? Hogy mindet elrontja? Hogy pontosan  $k$ -t ront el?

**12. Feladat.** Ha egy dartstáblán három kör átmérőjének aránya 1:2:3, mennyi az esélye, hogy a legbelsőbe találunk bele, ha a dobás véletlenszerűen éri el a táblát?

**13. Feladat.** Véletlenszerűen választunk két számot a  $[0; 1]$  intervallumról. Mi a valószínűsége, hogy az első nem lesz nagyobb, mint a második? Mi a valószínűsége, hogy a különbségük legfeljebb  $\frac{1}{2}$ ?

**14. Feladat.** Egy 2 m hosszú sörpad két lábának magassága véletlenszerűen alakul 30 és 40 cm között, egymástól függetlenül. Mekkora a valószínűsége, hogy a pad 5 foknál kisebb szögben fog lejtetni?

**15. Feladat.** Két szakasz hosszát a  $(0, 1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a két szakaszból és egy harmadik, 1 hosszúságú szakaszból hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni?

**16. Feladat** (Buffon-féle tűprobléma). A síkot  $d$  sáv szélességgel becsíkozunk és rádobunk egy  $r$  hosszú varrótűt. Mekkora az esélye, hogy a tű metszi két sáv határát?

## Valószínűségszámítás feladatsor 2. hét

**1. Feladat.** Egy harctéri bevetésre 6 ejtőernyős, 4 tengerész és 5 lövész jelentkezett. A bevetést egy 3 ejtőernyősből, 3 tengerészből és 2 lövészből álló egység fogja végrehajtani. Hányféleképpen lehet kiválasztani a jelentkezőkből a bevetésre kerülő egységet?

**2. Feladat.** Háromféle számlánk van: víz, gáz és villany. Ahhoz, hogy a bank befogadja a hitelkérelmünket, de ne tudja meg, hogy sok pénzünk van, az utolsó 5 havi számlánk közül pontosan 3 gázt, legalább 2 villanyt és legfeljebb 3 vizet kell befizetnünk. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

**3. Feladat.**

**4. Feladat.** Két dobókockával dobunk egyszerre. Mi a valószínűsége annak, hogy az összeg 6,7,8? A 9-et és a 10-et ugyanannyiféleképp tudjuk előállítani két 1 és 6 közti szám összegeként. Igaz-e, hogy megegyezik a valószínűségük? Mi a valószínűsége annak, hogy a két kapott szám relatív prím lesz? Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbsége páros lesz?

**5. Feladat.** Mennyi a valószínűsége annak, hogy 52 lapos franciakártya-pakliból 5 lapot húzva a következő kombinációkat kapjuk?

- egy pár (két egyforma értékű lap, a többi különböző)
- full (3 egyforma és két másik egyforma)
- póker (4 egyforma)

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 találatunk lesz az ötöslottón?

**6. Feladat.** Egy hallgató a 100 tételből 90-et tanult meg a vizsgára. Három tételt kell húznia, ha bármelyiket nem tudja, megbukik. Mi a valószínűsége, hogy átmegy a vizsgán? Mi a helyzet, ha csak egy tételből kell vizsgáznia, és azt két húzott tétel közül választhatja?

**7. Feladat.** Egy francia kártyapakliból egymás után húzunk lapokat. Mi a valószínűsége, hogy az első öt lap között lesz ász? Mi a valószínűsége, hogy előbb húzunk ászt, mint kettest?

**8. Feladat.** Mi a valószínűsége, hogy egy  $n$  fős osztályban két tanulónak egy napon van a születésnapja? Hány fős osztályban lesz legalább  $\frac{1}{2}$  az esély? Hány ismerősömnek kell lennie, hogy  $\frac{1}{2}$  eséllyel valamelyikükkel együtt legyen születésnapom?

**9. Feladat.** Harmickét lapos magyar kártyából tíz lapot kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) egy színből hozzánk kerül az összes lap?
- (b) mind a négy színből lesz a kezünkben?

**10. Feladat.** Egy kurzuson 40 hallgató van, mindegyikük megtanult a 40 tételből 39-et (mindenkinél más maradt ki). Mi a valószínűsége, hogy egyikük sem bukik meg, ha

- (a) visszatevés nélkül húznak?
- (b) visszatevéssel húznak?

**11. Feladat.** Egy kém  $n$  ország titkosszolgálatának dolgozik egyszerre. Egy napon összekeveri a borítékokat és véletlenszerűen teszi beléjük a jelentéseket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden jelentés jó borítékba kerül? Hogy csak egyet ront el? Hogy mindet elrontja? Hogy pontosan  $k$ -t ront el?

**12. Feladat.** Ha egy dartstáblán három kör átmérőjének aránya 1:2:3, mennyi az esélye, hogy a legbelsőbe találunk bele, ha a dobás véletlenszerűen éri el a táblát?

**13. Feladat.** Véletlenszerűen választunk két számot a  $[0; 1]$  intervallumról. Mi a valószínűsége, hogy az első nem lesz nagyobb, mint a második? Mi a valószínűsége, hogy a különbségük legfeljebb  $\frac{1}{2}$ ?

**14. Feladat.** Egy 2 m hosszú sörpad két lábának magassága véletlenszerűen alakul 30 és 40 cm között, egymástól függetlenül. Mekkora a valószínűsége, hogy a pad 5 foknál kisebb szögben fog lejtetni?

**15. Feladat.** Két szakasz hosszát a  $(0, 1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a két szakaszból és egy harmadik, 1 hosszúságú szakaszból hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni?

**16. Feladat** (Buffon-féle tűprobléma). A síkot  $d$  sáv szélességgel becsíkozunk és rádobunk egy  $r$  hosszú varrótűt. Mekkora az esélye, hogy a tű metszi két sáv határát?

## Valószínűségszámítás feladatsor 3. hét

**1. Feladat.** Öt házaspárt leültetünk egy asztal köré véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy pár egymás mellé kerül? És hogy legalább  $k$ , ahol  $k$  legfeljebb 5? Mi a valószínűsége, hogy senki nem kerül a párja mellé?

**2. Feladat.** Tíz pár cipő közül taláalomra kivesszünk 4 darabot. Mi a valószínűsége, hogy a kivett cipőkből összeállítható egy pár? Oldjuk meg úgy, ha a párok különböznek, és úgy is, ha nem (jobb- és bal láb természetesen számít!)

**3. Feladat.** Egy francia kártyapakliból egymás után húzunk lapokat. Mi a valószínűsége, hogy az első öt lap között lesz ász? Mi a valószínűsége, hogy előbb húzunk ászt, mint kettest?

**4. Feladat.** Egy kurzuson 40 hallgató van, mindegyikük megtanult a 40 tételből 39-et (mindenkinél más maradt ki). Mi a valószínűsége, hogy egyikük sem bukik meg, ha

(a) visszatevés nélkül húznak?

(b) visszatevéssel húznak?

**5. Feladat.** Egy kém  $n$  ország titkosszolgálatának dolgozik egyszerre. Egy napon összekeveri a borítékokat és véletlenszerűen teszi beléjük a jelentéseket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden jelentés jó borítékba kerül? Hogy csak egyet ront el? Hogy mindet elrontja? Hogy pontosan  $k$ -t ront el?

**6. Feladat.** Ha egy dartstáblán három kör átmérőjének aránya 1:2:3, mennyi az esélye, hogy a legbelsőbe találunk bele, ha a dobás véletlenszerűen éri el a táblát?

**7. Feladat.** Véletlenszerűen választunk két számot a  $[0; 1]$  intervallumról. Mi a valószínűsége, hogy az első nem lesz nagyobb, mint a második? Mi a valószínűsége, hogy a különbségük legfeljebb  $\frac{1}{2}$ ?

**8. Feladat.** Két szakasz hosszát a  $(0,1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a két szakaszból és egy harmadik, 1 hosszúságú szakaszból hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni?

**9. Feladat.** Egy 2 m hosszú sörpad két lábának magassága véletlenszerűen alakul 30 és 40 cm között, egymástól függetlenül. Mekkora a valószínűsége, hogy a pad 5 foknál kisebb szögben fog lejtetni?

**10. Feladat** (Buffon-féle tűprobléma). A síkot  $d$  sávszélességgel becsíkozzuk és rádobunk egy  $r$  hosszú varrótűt. Mekkora az esélye, hogy a tű metszi két sáv határát?

**11. Feladat.** Egy ejtőernyős egy 2 km oldalhosszúságú négyzetben ér földet. A négyzet sarkaiban fák vannak, amelyektől az ejtőernyősnek legalább  $\frac{1}{11}$  km távolságot kell tartania, hogy ne akadjon fenn az ágakon. Mekkora a valószínűsége, hogy gond nélkül földet ér?

**12. Feladat.** Egy falusi búcsúban a következő játékot játsszuk: egy asztal lapja négyzetrácsosra van felosztva, erre rádobunk egy pénzérmét. Ha az érme valamelyik négyzet belsejébe esik úgy, hogy nem érinti az oldalakat, akkor nyerünk. Mekkora ennek az esélye?

**13. Feladat.** Egy 8 perces üzleti beszélgetésről az egyik partner hangfelvételt készített, amely egy 60 perces kazetta 21. percénél kezdődik. Később véletlenül beletörölt a kazettába, nem tudja, hol, de 15 perc hosszúságban. Mennyi a valószínűsége, hogy az egész beszélgetést letörölte? Mennyi a valószínűsége, hogy beletörölt? Mi a helyzet, ha a beszélgetésről csak annyit tudunk, hogy valamikor a 21. perc után kezdődött?

## Valószínűségszámítás feladatsor 3. hét

**1. Feladat.** Öt házaspárt leültetünk egy asztal köré véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy pár egymás mellé kerül? És hogy legalább  $k$ , ahol  $k$  legfeljebb 5? Mi a valószínűsége, hogy senki nem kerül a párja mellé?

**2. Feladat.** Tíz pár cipő közül taláalomra kivesszünk 4 darabot. Mi a valószínűsége, hogy a kivett cipőkből összeállítható egy pár? Oldjuk meg úgy, ha a párok különböznek, és úgy is, ha nem (jobb- és bal láb természetesen számít!)

**3. Feladat.** Egy francia kártyapakliból egymás után húzunk lapokat. Mi a valószínűsége, hogy az első öt lap között lesz ász? Mi a valószínűsége, hogy előbb húzunk ászt, mint kettest?

**4. Feladat.** Egy kurzuson 40 hallgató van, mindegyikük megtanult a 40 tételből 39-et (mindenkinél más maradt ki). Mi a valószínűsége, hogy egyikük sem bukik meg, ha

(a) visszatevés nélkül húznak?

(b) visszatevéssel húznak?

**5. Feladat.** Egy kém  $n$  ország titkosszolgálatának dolgozik egyszerre. Egy napon összekeveri a borítékokat és véletlenszerűen teszi beléjük a jelentéseket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden jelentés jó borítékba kerül? Hogy csak egyet ront el? Hogy mindet elrontja? Hogy pontosan  $k$ -t ront el?

**6. Feladat.** Ha egy dartstáblán három kör átmérőjének aránya 1:2:3, mennyi az esélye, hogy a legbelsőbe találunk bele, ha a dobás véletlenszerűen éri el a táblát?

**7. Feladat.** Véletlenszerűen választunk két számot a  $[0; 1]$  intervallumról. Mi a valószínűsége, hogy az első nem lesz nagyobb, mint a második? Mi a valószínűsége, hogy a különbségük legfeljebb  $\frac{1}{2}$ ?

**8. Feladat.** Két szakasz hosszát a  $(0,1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a két szakaszból és egy harmadik, 1 hosszúságú szakaszból hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni?

**9. Feladat.** Egy 2 m hosszú sörpad két lábának magassága véletlenszerűen alakul 30 és 40 cm között, egymástól függetlenül. Mekkora a valószínűsége, hogy a pad 5 foknál kisebb szögben fog lejtetni?

**10. Feladat** (Buffon-féle tűprobléma). A síkot  $d$  sáv szélességgel becsíkozzuk és rádobunk egy  $r$  hosszú varrótűt. Mekkora az esélye, hogy a tű metszi két sáv határát?

**11. Feladat.** Egy ejtőernyős egy 2 km oldalhosszúságú négyzetben ér földet. A négyzet sarkaiban fák vannak, amelyektől az ejtőernyősnek legalább  $\frac{1}{11}$  km távolságot kell tartania, hogy ne akadjon fenn az ágakon. Mekkora a valószínűsége, hogy gond nélkül földet ér?

**12. Feladat.** Egy falusi búcsúban a következő játékot játsszuk: egy asztal lapja négyzetrácsosra van felosztva, erre rádobunk egy pénzérmét. Ha az érme valamelyik négyzet belsejébe esik úgy, hogy nem érinti az oldalakat, akkor nyerünk. Mekkora ennek az esélye?

**13. Feladat.** Egy 8 perces üzleti beszélgetésről az egyik partner hangfelvételt készített, amely egy 60 perces kazetta 21. percénél kezdődik. Később véletlenül beletörölt a kazettába, nem tudja, hol, de 15 perc hosszúságban. Mennyi a valószínűsége, hogy az egész beszélgetést letörölte? Mennyi a valószínűsége, hogy beletörölt? Mi a helyzet, ha a beszélgetésről csak annyit tudunk, hogy valamikor a 21. perc után kezdődött?

## Valószínűségszámítás feladatsor 4. hét

- 1. Feladat.** Egy dobókockával dobunk. Mi az a legszűkebb  $\sigma$ -algebra, amely leírja, hogy párosat, vagy páratlant dobtunk-e? És amelyik egyszerre írja le, hogy párosat dobtunk-e, és prímszámot dobtunk-e?
- 2. Feladat.** 14 nőt és 8 férfit véletlenszerűen leültetünk egy kör alakú asztal mellé. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé 2 férfi? Írjuk fel a valószínűségi mezőt!
- 3. Feladat.** Két szakasz hosszát a  $(0,1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a két szakaszból és egy harmadik, 1 hosszúságú szakaszból hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni?
- 4. Feladat.** Egy 8 perces üzleti beszélgetésről az egyik partner hangfelvételt készített, amely egy 60 perces kazetta 21. percénél kezdődik. Később véletlenül beletörölt a kazettába, nem tudja, hol, de 15 perc hosszúságban. Mennyi a valószínűsége, hogy az egész beszélgetést letörölte? Mennyi a valószínűsége, hogy beletörölt? Mi a helyzet, ha a beszélgetésről csak annyit tudunk, hogy valamikor a 21. perc után kezdődött?
- 5. Feladat.** Két számot választunk véletlenszerűen a  $[0,1]$  intervallumról az egyenletességi hipotézis szerint. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a két számmal, mint befogóval alkotott derékszögű háromszög kisebbik hegyesszöge legalább 30 fokos lesz!
- 6. Feladat.** A vasút hóskorában a Chicago–Los Angeles viszonylatot két vasúttársaság szolgálta ki. A chicagói állomáson felszálló 1000 utas egyenlő valószínűséggel választotta mindkét vonatot. Hány férőhelyes szerelvényt kellett összeállítaniuk a társaságoknak, hogy 99%-os valószínűséggel minden utasukat el tudják szállítani?
- 7. Feladat.** Egy étteremben naponta 400-an esznek, átlagosan egyötödük rendel almáspitét. Adjunk meg egy olyan tartományt, amely 95%-os valószínűséggel tartalmazza az adott napon rendelt almáspiték számát! Hány vendégnek kéne ahhoz lennie, hogy a rendelések aránya 95%-os valószínűséggel 19 és 21 százalék közé essen? (Tipp: Használjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget!)
- 8. Feladat.** A kukutyini egyetemen zabhegyezésből a 10000 hallgató mindegyike egyforma,  $p = 0,1$  valószínűséggel bukik meg. Vizsgázni legfeljebb kétszer lehet, aki átmegy elsőre, az nem javíthat. A tanszék 1020 pótvizsgahelyet hirdetett meg. Mennyi a valószínűsége, hogy minden bukott hallgatónak jut pótvizsgahely? Adjunk meg egy 1000-re szimmetrikus intervallumot, amelybe 90%-os valószínűséggel esik a pótvizsgázók száma!
- 9. Feladat.** Egy számítástechnikai boltban a legújabb játékgép első eladási napjára készülnek. 15000 vásárlót várnak, akiknek mindegyike egymástól függetlenül 12%-os valószínűséggel vásárolja meg az újdonságot. Mennyi a valószínűsége, hogy a 2000 darabos szállítmány már az első nap elfogy?  
A boltvezetőnek le kell adnia a következő heti rendelést. Előreláthatóan gyorsan fog csökkenni a kereslet, így nem szeretne túl sok felesleges darabot rendelni. A héten 50000 vásárlót várnak, akik ismét egymástól függetlenül 10%-os valószínűséggel vesznek játékgépet. Hány darabot rendeljen a boltvezető, hogy 95%-os valószínűséggel minden vevőt ki tudjanak szolgálni?
- 10. Feladat.** Bernoulliában minden választópolgár a többiektől függetlenül 40 %-os eséllyel szavazott a hivatalban lévő elnökre az elnökválasztáson. Mennyi a valószínűsége, hogy a 43350 választópolgárból 17442 és 17697 közé esett az elnök szavazóinak száma?
- 11. Feladat.** A valószínűségszámítás előadáson a 100 hallgató mindegyike egymástól függetlenül egyforma 30%-os valószínűséggel jelenik meg. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott előadáson 25 és 40 között lesz a hallgatók létszáma?
- 12. Feladat.** Egy téglalap két oldalának hosszát a  $(0,1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a téglalap területe legfeljebb  $\frac{1}{2}$  lesz?

## Valószínűségszámítás feladatsor 4. hét

- 1. Feladat.** Egy dobókockával dobunk. Mi az a legszűkebb  $\sigma$ -algebra, amely leírja, hogy párosat, vagy páratlant dobtunk-e? És amelyik egyszerre írja le, hogy párosat dobtunk-e, és prímszámot dobtunk-e?
- 2. Feladat.** 14 nőt és 8 férfit véletlenszerűen leültetünk egy kör alakú asztal mellé. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé 2 férfi? Írjuk fel a valószínűségi mezőt!
- 3. Feladat.** Két szakasz hosszát a  $(0,1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a két szakaszból és egy harmadik, 1 hosszúságú szakaszból hegyesszögű háromszöget lehet szerkeszteni?
- 4. Feladat.** Egy 8 perces üzleti beszélgetésről az egyik partner hangfelvételt készített, amely egy 60 perces kazetta 21. percénél kezdődik. Később véletlenül beletörölt a kazettába, nem tudja, hol, de 15 perc hosszúságban. Mennyi a valószínűsége, hogy az egész beszélgetést letörölte? Mennyi a valószínűsége, hogy beletörölt? Mi a helyzet, ha a beszélgetésről csak annyit tudunk, hogy valamikor a 21. perc után kezdődött?
- 5. Feladat.** Két számot választunk véletlenszerűen a  $[0,1]$  intervallumról az egyenletességi hipotézis szerint. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a két számmal, mint befogóval alkotott derékszögű háromszög kisebbik hegyesszöge legalább 30 fokos lesz!
- 6. Feladat.** A vasút hóskorában a Chicago–Los Angeles viszonylatot két vasúttársaság szolgálta ki. A chicagói állomáson felszálló 1000 utas egyenlő valószínűséggel választotta mindkét vonatot. Hány férőhelyes szerelvényt kellett összeállítaniuk a társaságoknak, hogy 99%-os valószínűséggel minden utasukat el tudják szállítani?
- 7. Feladat.** Egy étteremben naponta 400-an esznek, átlagosan egyötödük rendel almáspitét. Adjunk meg egy olyan tartományt, amely 95%-os valószínűséggel tartalmazza az adott napon rendelt almáspiték számát! Hány vendégnek kéne ahhoz lennie, hogy a rendelések aránya 95%-os valószínűséggel 19 és 21 százalék közé essen? (Tipp: Használjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget!)
- 8. Feladat.** A kukutyini egyetemen zabhegyezésből a 10000 hallgató mindegyike egyforma,  $p = 0,1$  valószínűséggel bukik meg. Vizsgázni legfeljebb kétszer lehet, aki átmegy elsőre, az nem javíthat. A tanszék 1020 pótvizsgahelyet hirdetett meg. Mennyi a valószínűsége, hogy minden bukott hallgatónak jut pótvizsgahely? Adjunk meg egy 1000-re szimmetrikus intervallumot, amelybe 90%-os valószínűséggel esik a pótvizsgázók száma!
- 9. Feladat.** Egy számítástechnikai boltban a legújabb játékgép első eladási napjára készülnek. 15000 vásárlót várnak, akiknek mindegyike egymástól függetlenül 12%-os valószínűséggel vásárolja meg az újdonságot. Mennyi a valószínűsége, hogy a 2000 darabos szállítmány már az első nap elfogy?  
A boltvezetőnek le kell adnia a következő heti rendelést. Előreláthatóan gyorsan fog csökkenni a kereslet, így nem szeretne túl sok felesleges darabot rendelni. A héten 50000 vásárlót várnak, akik ismét egymástól függetlenül 10%-os valószínűséggel vesznek játékgépet. Hány darabot rendeljen a boltvezető, hogy 95%-os valószínűséggel minden vevőt ki tudjanak szolgálni?
- 10. Feladat.** Bernoulliában minden választópolgár a többiektől függetlenül 40 %-os eséllyel szavazott a hivatalban lévő elnökre az elnökválasztáson. Mennyi a valószínűsége, hogy a 43350 választópolgárból 17442 és 17697 közé esett az elnök szavazóinak száma?
- 11. Feladat.** A valószínűségszámítás előadáson a 100 hallgató mindegyike egymástól függetlenül egyforma 30%-os valószínűséggel jelenik meg. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott előadáson 25 és 40 között lesz a hallgatók létszáma?
- 12. Feladat.** Egy téglalap két oldalának hosszát a  $(0,1)$  intervallumról választjuk az egyenletességi hipotézis szerint. Mi a valószínűsége, hogy a téglalap területe legfeljebb  $\frac{1}{2}$  lesz?



## Valószínűségszámítás feladatsor 5. hét

**1. Feladat.** A kukutyini egyetemen zabhegyezésből a 10000 hallgató mindegyike egyforma,  $p = 0,1$  valószínűséggel bukik meg. Vizsgázni legfeljebb kétszer lehet, aki átmegy elsőre, az nem javíthat. A tanszék 1020 pótvizsgahelyet hirdetett meg. Mennyi a valószínűsége, hogy minden bukott hallgatónak jut pótvizsgahely? Adjunk meg egy 1000-re szimmetrikus intervallumot, amelybe 90%-os valószínűséggel esik a pótvizsgázók száma!

**2. Feladat.** Egy számítástechnikai boltban a legújabb játék gép első eladási napjára készülnek. 15000 vásárlót várnak, akiknek mindegyike egymástól függetlenül 12%-os valószínűséggel vásárolja meg az újdonságot. Mennyi a valószínűsége, hogy a 2000 darabos szállítmány már az első nap elfogy?

A boltvezetőnek le kell adnia a következő heti rendelést. Előreláthatóan gyorsan fog csökkenni a kereslet, így nem szeretne túl sok felesleges darabot rendelni. A héten 50000 vásárlót várnak, akik ismét egymástól függetlenül 10%-os valószínűséggel vesznek játék gépet. Hány darabot rendeljen a boltvezető, hogy 95%-os valószínűséggel minden vevőt ki tudjanak szolgálni?

**3. Feladat.** Van egy pénzérménk, amelyről nem tudjuk hogy szabályos-e. Hogyan tudnánk szabályos pénzérmét szimulálni ezzel az érmével?

**4. Feladat.** Elhelyezünk  $n$  golyót  $N$  dobozba úgy, hogy minden elhelyezés egyformán valószínű. Feltéve, hogy az első dobozban van golyó, mekkora a valószínűsége, hogy  $k$  golyó van benne?

**5. Feladat.** 52 lapos franciákártyából kapunk 13 lapot. Legyen  $A$  az az esemény, hogy pontosan két ászt kapunk. Adjuk meg a  $P(A|B_i)$  feltételes valószínűségeket, ahol  $B_1$ : van legalább egy ászunk;  $B_2$ : nálunk van a kőr ász;  $B_3$ : elsőnek ászt kaptunk;  $B_4$ : elsőnek a kőr ászt kaptuk.

**6. Feladat.** Egy autógyártó cég motorjait 1:3:6 arányban készítik Tajvanon, Thaiföldön és Kínában; a selejtek aránya rendre 2, 3 és 4 százalék. Mi a valószínűsége, hogy egy 1000 autós szállítmányból pontosan 100 hibás autó van?

**7. Feladat.** András és Béla a következő játékot játsszák: mindketten dobnak egy dobókockával, az nyer, aki nagyobbat dob, ha egyformák a számok, akkor Béla nyer. András kockája cinkelt:  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel ad 6-ost, a többi valószínűség egyforma. Mekkora a valószínűsége, hogy András nyeri a játékot?

**8. Feladat** (Galton-paradoxon). Három pénzérmét dobunk fel. Legalább kettő egyforma, a harmadik pedig  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel ugyanolyan, mint ezek, vagyis  $\frac{1}{2}$  az esélye, hogy mindhárom egyforma lesz.

**9. Feladat.** Egy televíziós játék utolsó fordulójában három ajtó közül kell választanunk: az egyik mögött egy autó van, a másik kettő mögött semmi. Mután választottunk, a játékvezető kinyitja az egyik üres szobát és felajánlja, hogy megváltoztathatjuk a választásunkat. Érdemes-e váltani?

**10. Feladat.** Egy közvélemény-kutatásban azt szeretnénk megállapítani, hogy a férfiak hány százaléka énekel a fürdőszobában. Mivel lehet, hogy ezt még egy névtelen felmérésben sem vallaná be mindenki, a következő eljárást alkalmazzuk. Megkérjük a résztvevőket, hogy dobjanak egy kockával. Ha a dobott szám 6-os, válaszoljanak igent, ha 1-es, nemet. Ha ezek közé esik, válaszoljanak őszintén. Így mindenki mondhatja, hogy csak a kocka miatt válaszolt úgy, ahogy. A kutatás végén az igen válaszok aránya  $\frac{2}{3}$ . A férfiak hány százaléka énekel a fürdőszobában?

**11. Feladat.** Egy teszten a vizsgázó  $p$  valószínűséggel tudja a helyes választ az első kérdésre. Ha nem tudja, egyenlő esélyekkel választ egyet a három lehetséges válasz közül. Ha a válasz helyes, mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó jól tudta a választ?

**12. Feladat.** Három vadászpilóta,  $A$ ,  $B$  és  $C$  tűzharcba kerül, betűrendben lőnek, akit eltalálnak, az kiesik.  $A$  és  $C$  rendre  $\alpha$  és  $\gamma$  valószínűséggel találnak,  $B$  mindig talál, aki utoljára marad, az győz. Tudjuk, hogy

$$\gamma > \alpha > 1 - \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

és a résztvevők ismerik egymás találati pontosságát. Mutassuk meg, hogy  $A$ -nak megéri elsőre mellélőnie. (Segítség: Mi a pilóták helyében vajon melyik ellenfélre céloznánk?)

**13. Feladat.** Egy urnában  $p$  db piros és  $k$  db kék golyó van. Véletlenszerűen húzunk, majd a húzott golyót visszatesszük  $d$  db ugyanolyan színű másikkal együtt, ezt ismételjük vég nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a második golyó kék? Mi a valószínűsége, hogy az első golyó kék, ha a második kék volt? Mutassuk meg, hogy  $P(K_n) = P(K_1)$  minden  $n$ -re és  $P(K_n|K_m) = P(K_m|K_n)$  bármely  $m, n$ -re.

## Valószínűségszámítás feladatsor 5. hét

**1. Feladat.** A kukutyini egyetemen zabhegyezésből a 10000 hallgató mindegyike egyforma,  $p = 0,1$  valószínűséggel bukik meg. Vizsgázni legfeljebb kétszer lehet, aki átmegy elsőre, az nem javíthat. A tanszék 1020 pótvizsgahelyet hirdetett meg. Mennyi a valószínűsége, hogy minden bukott hallgatónak jut pótvizsgahely? Adjunk meg egy 1000-re szimmetrikus intervallumot, amelybe 90%-os valószínűséggel esik a pótvizsgázók száma!

**2. Feladat.** Egy számítástechnikai boltban a legújabb játék gép első eladási napjára készülnek. 15000 vásárlót várnak, akiknek mindegyike egymástól függetlenül 12%-os valószínűséggel vásárolja meg az újdonságot. Mennyi a valószínűsége, hogy a 2000 darabos szállítmány már az első nap elfogy?

A boltvezetőnek le kell adnia a következő heti rendelést. Előreláthatóan gyorsan fog csökkenni a kereslet, így nem szeretne túl sok felesleges darabot rendelni. A héten 50000 vásárlót várnak, akik ismét egymástól függetlenül 10%-os valószínűséggel vesznek játék gépet. Hány darabot rendeljen a boltvezető, hogy 95%-os valószínűséggel minden vevőt ki tudjanak szolgálni?

**3. Feladat.** Van egy pénzerménk, amelyről nem tudjuk hogy szabályos-e. Hogyan tudnánk szabályos pénzermét szimulálni ezzel az érmével?

**4. Feladat.** Elhelyezünk  $n$  golyót  $N$  dobozba úgy, hogy minden elhelyezés egyformán valószínű. Feltéve, hogy az első dobozban van golyó, mekkora a valószínűsége, hogy  $k$  golyó van benne?

**5. Feladat.** 52 lapos franciákártyából kapunk 13 lapot. Legyen  $A$  az az esemény, hogy pontosan két ászt kapunk. Adjuk meg a  $P(A|B_i)$  feltételes valószínűségeket, ahol  $B_1$ : van legalább egy ászunk;  $B_2$ : nálunk van a kőr ász;  $B_3$ : elsőnek ászt kaptunk;  $B_4$ : elsőnek a kőr ászt kaptuk.

**6. Feladat.** Egy autógyártó cég motorjait 1:3:6 arányban készítik Tajvanon, Thaiföldön és Kínában; a selejtelek aránya rendre 2, 3 és 4 százalék. Mi a valószínűsége, hogy egy 1000 autós szállítmányból pontosan 100 hibás autó van?

**7. Feladat.** András és Béla a következő játékot játsszák: mindketten dobznak egy dobókockával, az nyer, aki nagyobbat dob, ha egyformák a számok, akkor Béla nyer. András kockája cinkelt:  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel ad 6-ost, a többi valószínűség egyforma. Mekkora a valószínűsége, hogy András nyeri a játékot?

**8. Feladat** (Galton-paradoxon). Három pénzermét dobunk fel. Legalább kettő egyforma, a harmadik pedig  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel ugyanolyan, mint ezek, vagyis  $\frac{1}{2}$  az esélye, hogy mindhárom egyforma lesz.

**9. Feladat.** Egy televíziós játék utolsó fordulójában három ajtó közül kell választanunk: az egyik mögött egy autó van, a másik kettő mögött semmi. Mután választottunk, a játékvezető kinyitja az egyik üres szobát és felajánlja, hogy megváltoztathatjuk a választásunkat. Érdemes-e váltani?

**10. Feladat.** Egy közvélemény-kutatásban azt szeretnénk megállapítani, hogy a férfiak hány százaléka énekel a fürdőszobában. Mivel lehet, hogy ezt még egy névtelen felmérésben sem vallaná be mindenki, a következő eljárást alkalmazzuk. Megkérjük a résztvevőket, hogy dobjanak egy kockával. Ha a dobott szám 6-os, válaszoljanak igent, ha 1-es, nemet. Ha ezek közé esik, válaszoljanak őszintén. Így mindenki mondhatja, hogy csak a kocka miatt válaszolt úgy, ahogy. A kutatás végén az igen válaszok aránya  $\frac{2}{3}$ . A férfiak hány százaléka énekel a fürdőszobában?

**11. Feladat.** Egy teszten a vizsgázó  $p$  valószínűséggel tudja a helyes választ az első kérdésre. Ha nem tudja, egyenlő esélyekkel választ egyet a három lehetséges válasz közül. Ha a válasz helyes, mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó jól tudta a választ?

**12. Feladat.** Három vadászpilóta,  $A$ ,  $B$  és  $C$  tűzharcba kerül, betűrendben lőnek, akit eltalálnak, az kiesik.  $A$  és  $C$  rendre  $\alpha$  és  $\gamma$  valószínűséggel találnak,  $B$  mindig talál, aki utoljára marad, az győz. Tudjuk, hogy

$$\gamma > \alpha > 1 - \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

és a résztvevők ismerik egymás találati pontosságát. Mutassuk meg, hogy  $A$ -nak megéri elsőre mellélőnie. (Segítség: Mi a pilóták helyében vajon melyik ellenfélre céloznánk?)

**13. Feladat.** Egy urnában  $p$  db piros és  $k$  db kék golyó van. Véletlenszerűen húzunk, majd a húzott golyót visszatesszük  $d$  db ugyanolyan színű másikkal együtt, ezt ismétljük vég nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a második golyó kék? Mi a valószínűsége, hogy az első golyó kék, ha a második kék volt? Mutassuk meg, hogy  $P(K_n) = P(K_1)$  minden  $n$ -re és  $P(K_n|K_m) = P(K_m|K_n)$  bármely  $m, n$ -re.

## Valószínűségszámítás feladatsor 6. hét

**1. Feladat.** Három vadászpilóta,  $A$ ,  $B$  és  $C$  tűzharcba kerül, betűrendben lőnek, akit eltalálnak, az kiesik.  $A$  és  $C$  rendre  $\alpha$  és  $\gamma$  valószínűséggel találják,  $B$  mindig talál, aki utoljára marad, az győz. Tudjuk, hogy

$$\gamma > \alpha > 1 - \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

és a résztvevők ismerik egymás találati pontosságát. Mutassuk meg, hogy  $A$ -nak megéri elsőre mellélőnie. (Segítség: Mi a pilóták helyében vajon melyik ellenfélre céloznánk?)

**2. Feladat.** Egy urnában  $p$  db piros és  $k$  db kék golyó van. Véletlenszerűen húzunk, majd a húzott golyót visszatesszük  $d$  db ugyanolyan színű másikkal együtt, ezt ismétljük vég nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a második golyó kék? Mi a valószínűsége, hogy az első golyó kék, ha a második kék volt? Mutassuk meg, hogy  $P(K_n) = P(K_1)$  minden  $n$ -re és  $P(K_n|K_m) = P(K_m|K_n)$  bármely  $m, n$ -re.

**3. Feladat.** Egy fiú és egy lány megbeszéli, hogy egy forgalmas útkereszteződésnél találkoznak, de azt nem, hogy melyik sarkon.  $0,25$  valószínűséggel érkeznek mindegyik sarokra, ha a másik nincs ott,  $2,5$  percet várnak, majd  $0,5-0,5$  valószínűséggel átmennek egy szomszédos sarokra fél perc alatt, egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első  $3n$  percen belül találkoznak (akár a zebrán is)?

**4. Feladat.**  $A$ ,  $B$  és  $C$  a börtönből egyszerre folyamodnak feltételes szabadlábra helyezésért. Később megtudják, hogy kettejüket engedték ki, de nem tudják, hogy kiket.  $A$  megpróbál valami információt szerezni a döntésről – de a börtönőr úgysem mondaná meg, hogy őt kiengedték-e. Ezért úgy dönt, hogy azt kérdezi meg, ki a másik rab, akit vele együtt szabadlábra helyeznek (ha mindkettőt, akkor csak az egyiket kell megmondania az őrnök). Ezután viszont így okoskodik: "Ha nem kérdezek semmit, akkor  $\frac{2}{3}$  esélyem van. De ha megkérdezem az őrt, akkor ez  $\frac{1}{2}$ -re csökken, hiszen ha pl.  $B$ -t engedik ki, akkor vagy  $C$  megy vele, vagy én. Jobb lesz, ha nem is kérdezek semmit." Hol a hiba?

**5. Feladat.** Öt házaspárt leültetünk egy asztal köré véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy pár egymás mellé kerül? És hogy legalább  $k$ , ahol  $k$  legfeljebb 5? Mi a valószínűsége, hogy senki nem kerül a párja mellé?

**6. Feladat.** András és Béla a következő játékot játsszák: mindketten dobnak egy dobókockával, az nyer, aki nagyobbat dob, ha egyformák a számok, akkor Béla nyer. András kockája cinkelt:  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel ad 6-ost, a többi valószínűség egyforma. Mekkora a valószínűsége, hogy András nyeri a játékot?

**7. Feladat** (Bertrand-paradoxon). Három dobozunk van, mindkettőben egy fehér és egy fekete golyó. Véletlenszerűen választunk és csukott szemmel húzunk egy golyót. Nyilván  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel lesz fekete, a másik golyó is hasonlóképp. Tehát annak a valószínűsége, hogy a doboz különböző golyókat tartalmaz,  $\frac{1}{2}$ .

**8. Feladat.** Hányféleképp oszthatunk be 20 futót 5 db négyfős váltóba? Hányféleképp oszthatunk szét 10 cukorkát 6 gyerek közt? Mi a helyzet, ha mindenkinek kapnia kell legalább 1-et?

**9. Feladat.** 11 nőt és 8 férfit véletlenszerűen leültetünk egy kör alakú asztal köré. Mennyi a valószínűsége, hogy nem lesz két szomszédos férfi?

**10. Feladat.** Egy régi barátunkról tudjuk, hogy két gyereke van, de nem tudjuk, hogy milyen neműek. Egy találkozásnál meglátunk nála egy Barbie-babát, és elmondja, hogy a lányának viszi. Mekkora a valószínűsége, hogy a másik gyereke fiú?

## Valószínűségszámítás feladatsor 6. hét

**1. Feladat.** Három vadászpilóta,  $A$ ,  $B$  és  $C$  tűzharcba kerül, betűrendben lőnek, akit eltalálnak, az kiesik.  $A$  és  $C$  rendre  $\alpha$  és  $\gamma$  valószínűséggel találják,  $B$  mindig talál, aki utoljára marad, az győz. Tudjuk, hogy

$$\gamma > \alpha > 1 - \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

és a résztvevők ismerik egymás találati pontosságát. Mutassuk meg, hogy  $A$ -nak megéri elsőre mellélőnie. (Segítség: Mi a pilóták helyében vajon melyik ellenfélre céloznánk?)

**2. Feladat.** Egy urnában  $p$  db piros és  $k$  db kék golyó van. Véletlenszerűen húzunk, majd a húzott golyót visszatesszük  $d$  db ugyanolyan színű másikkal együtt, ezt ismételjük vég nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a második golyó kék? Mi a valószínűsége, hogy az első golyó kék, ha a második kék volt? Mutassuk meg, hogy  $P(K_n) = P(K_1)$  minden  $n$ -re és  $P(K_n|K_m) = P(K_m|K_n)$  bármely  $m, n$ -re.

**3. Feladat.** Egy fiú és egy lány megbeszéli, hogy egy forgalmas útkereszteződésnél találkoznak, de azt nem, hogy melyik sarkon.  $0,25$  valószínűséggel érkeznek mindegyik sarokra, ha a másik nincs ott,  $2,5$  percet várnak, majd  $0,5-0,5$  valószínűséggel átmennek egy szomszédos sarokra fél perc alatt, egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első  $3n$  percen belül találkoznak (akár a zebrán is)?

**4. Feladat.**  $A$ ,  $B$  és  $C$  a börtönből egyszerre folyamodnak feltételes szabadlábra helyezésért. Később megtudják, hogy kettejüket engedték ki, de nem tudják, hogy kiket.  $A$  megpróbál valami információt szerezni a döntésről – de a börtönőr úgysem mondaná meg, hogy őt kiengedték-e. Ezért úgy dönt, hogy azt kérdezi meg, ki a másik rab, akit vele együtt szabadlábra helyeznek (ha mindkettőt, akkor csak az egyiket kell megmondania az őrnök). Ezután viszont így okoskodik: "Ha nem kérdezek semmit, akkor  $\frac{2}{3}$  esélyem van. De ha megkérdezem az őrt, akkor ez  $\frac{1}{2}$ -re csökken, hiszen ha pl.  $B$ -t engedik ki, akkor vagy  $C$  megy vele, vagy én. Jobb lesz, ha nem is kérdezek semmit." Hol a hiba?

**5. Feladat.** Öt házaspárt leültetünk egy asztal köré véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy pár egymás mellé kerül? És hogy legalább  $k$ , ahol  $k$  legfeljebb 5? Mi a valószínűsége, hogy senki nem kerül a párja mellé?

**6. Feladat.** András és Béla a következő játékot játsszák: mindketten dobnak egy dobókockával, az nyer, aki nagyobbat dob, ha egyformák a számok, akkor Béla nyer. András kockája cinkelt:  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel ad 6-ost, a többi valószínűség egyforma. Mekkora a valószínűsége, hogy András nyeri a játékot?

**7. Feladat** (Bertrand-paradoxon). Három dobozunk van, mindkettőben egy fehér és egy fekete golyó. Véletlenszerűen választunk és csukott szemmel húzunk egy golyót. Nyilván  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel lesz fekete, a másik golyó is hasonlóképp. Tehát annak a valószínűsége, hogy a doboz különböző golyókat tartalmaz,  $\frac{1}{2}$ .

**8. Feladat.** Hányféleképp oszthatunk be 20 futót 5 db négyfős váltóba? Hányféleképp oszthatunk szét 10 cukorkát 6 gyerek közt? Mi a helyzet, ha mindenkinek kapnia kell legalább 1-et?

**9. Feladat.** 11 nőt és 8 férfit véletlenszerűen leültetünk egy kör alakú asztal köré. Mennyi a valószínűsége, hogy nem lesz két szomszédos férfi?

**10. Feladat.** Egy régi barátunkról tudjuk, hogy két gyereke van, de nem tudjuk, hogy milyen neműek. Egy találkozásnál meglátunk nála egy Barbie-babát, és elmondja, hogy a lányának viszi. Mekkora a valószínűsége, hogy a másik gyereke fiú?

## Valószínűségszámítás feladatsor 8. hét

**1. Feladat.** Jelöljük  $I_A$ -val az  $A$  halmaz indikátorfüggvényét:

$$I_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0 & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

Mutassuk meg a következőket:

$$A = B \equiv I_A = I_B; \quad I_\Omega = 1, I_\emptyset = 0; \quad I_{A \cap B} = I_A I_B; \quad I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B; \quad I_{\bar{A}} = 1 - I_A$$

**2. Feladat.**  $\xi$  egy diszkrét véletlen változó, amely pozitív egész értékeket vesz föl, és amelyről tudjuk, hogy

$$P(\xi = n) = \frac{c}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

valamely  $c$  valós számra. Mennyi lehet a  $c$  értéke?

**3. Feladat.** Egy pénzérmét addig dobálunk, amíg egymás után kétszer ugyanaz az eredmény nem születik. Mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hetedik dobásra, illetve a hetedik dobás előtt végzünk, illetve páros sok dobásra lesz szükség?

**4. Feladat.** A valószínűségszámítás-vizsgán mind az  $n$  hallgató  $p$  valószínűséggel megy át. Ha mindenki tetszőlegesen sokszor próbálkozhat, mi a valószínűsége, hogy egy hallgató  $k$ -adikra megy át? Mi a valószínűsége, hogy az oktatónak pontosan  $k$  vizsgát kell tartania?

**5. Feladat.**  $\xi$  és  $\eta$  véletlen változók Poisson-eloszlással,  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterekkel. Milyen az összeg eloszlása?

**6. Feladat.** Legyen  $\xi$  geometriai eloszlású véletlen változó  $p$  paraméterrel. Mennyi a  $P(\xi > k + 1 | \xi > k)$  valószínűség? Vajon miért hívjuk ezt örökifjú tulajdonságnak?

**7. Feladat.** Egy gabonakutató intézetben vetőmagmintát vizsgálnak. A fertőzött magok száma Poisson-eloszlást követ  $\lambda$  paraméterrel. Egy technikus vizsgálja a magokat, a fertőzött magokat egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel megtalálja és kiselejtezi. Mennyi lesz az átvizsgált mintában a magok eloszlása?

**8. Feladat.** A CSI:Chicago egyik részében egy gyilkosság felderítése közben bebizonyosodott, hogy a gyilkos rendelkezik egy igen ritka genetikai rendellenességgel, amely csak a népesség  $10^{-7}$  részében van jelen. Chicago népessége jó közelítéssel  $10^7$ . Ha a rendőrök találnak valakit, aki ez alapján gyanúsított lehet, mennyi az esélye, hogy találnak még egy embert? Mikor mondhatják 95 % valószínűséggel, hogy több gyanúsítottat már nem fognak találni,

**9. Feladat.** Legyenek  $\xi$  és  $\eta$  független azonos eloszlású pozitív egész értékű véletlen változók,  $P(\xi = n) = 2^{-n}$ . Mekkora a következők valószínűsége?  $\min(\xi, \eta) \leq x$ ,  $\eta > \xi$ ,  $\xi = \eta$ ,  $\xi | \eta$ ?

**10. Feladat.** Ha egy nap szép volt az idő, akkor  $p_1$  valószínűséggel másnap is szép lesz. Ha esett az eső, akkor másnap  $p_2$  valószínűséggel lesz szép idő (csak ezt a két időjárást különböztetjük meg). Mutassuk meg, hogy az egymást követő napokon a szép idő  $u_n$  valószínűsége teljesíti az

$$u_n = (p_1 - p_2)u_{n-1} + p_2, \quad n \geq 2$$

összefüggést. Konvergens-e a sorozat, és ha igen, hová? Ha ma szép az idő, várhatóan hány nap telik el az első esős napig?

**11. Feladat.** Eloszlásfüggvények-e a következők?

$$- e^{-e^{-x+y}}$$

$$- e^{-e^{-x} - e^{-y}}$$

**12. Feladat.** Legyen  $\xi$  és  $\eta$  együttes eloszlásfüggvénye

$$f(x, y) = cx^{n_1-1}(y-x)^{n_2-1}e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty$$

Mennyi  $c$  értéke, és mik a marginális eloszlások?

## Valószínűségszámítás feladatsor 8. hét

**1. Feladat.** Jelöljük  $I_A$ -val az  $A$  halmaz indikátorfüggvényét:

$$I_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0 & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

Mutassuk meg a következőket:

$$A = B \equiv I_A = I_B; \quad I_\Omega = 1, I_\emptyset = 0; \quad I_{A \cap B} = I_A I_B; \quad I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B; \quad I_{\bar{A}} = 1 - I_A$$

**2. Feladat.**  $\xi$  egy diszkrét véletlen változó, amely pozitív egész értékeket vesz föl, és amelyről tudjuk, hogy

$$P(\xi = n) = \frac{c}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

valamely  $c$  valós számra. Mennyi lehet a  $c$  értéke?

**3. Feladat.** Egy pénzérmét addig dobálunk, amíg egymás után kétszer ugyanaz az eredmény nem születik. Mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hetedik dobásra, illetve a hetedik dobás előtt végzünk, illetve páros sok dobásra lesz szükség?

**4. Feladat.** A valószínűségszámítás-vizsgán mind az  $n$  hallgató  $p$  valószínűséggel megy át. Ha mindenki tetszőlegesen sokszor próbálkozhat, mi a valószínűsége, hogy egy hallgató  $k$ -adikra megy át? Mi a valószínűsége, hogy az oktatónak pontosan  $k$  vizsgát kell tartania?

**5. Feladat.**  $\xi$  és  $\eta$  véletlen változók Poisson-eloszlással,  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterekkel. Milyen az összeg eloszlása?

**6. Feladat.** Legyen  $\xi$  geometriai eloszlású véletlen változó  $p$  paraméterrel. Mennyi a  $P(\xi > k + 1 | \xi > k)$  valószínűség? Vajon miért hívjuk ezt örökifjú tulajdonságnak?

**7. Feladat.** Egy gabonakutató intézetben vetőmagmintát vizsgálnak. A fertőzött magok száma Poisson-eloszlást követ  $\lambda$  paraméterrel. Egy technikus vizsgálja a magokat, a fertőzött magokat egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel megtalálja és kiselejtezi. Mennyi lesz az átvizsgált mintában a magok eloszlása?

**8. Feladat.** A CSI:Chicago egyik részében egy gyilkosság felderítése közben bebizonyosodott, hogy a gyilkos rendelkezik egy igen ritka genetikai rendellenességgel, amely csak a népesség  $10^{-7}$  részében van jelen. Chicago népessége jó közelítéssel  $10^7$ . Ha a rendőrök találnak valakit, aki ez alapján gyanúsított lehet, mennyi az esélye, hogy találnak még egy embert? Mikor mondhatják 95 % valószínűséggel, hogy több gyanúsítottat már nem fognak találni,

**9. Feladat.** Legyenek  $\xi$  és  $\eta$  független azonos eloszlású pozitív egész értékű véletlen változók,  $P(\xi = n) = 2^{-n}$ . Mekkora a következők valószínűsége?  $\min(\xi, \eta) \leq x$ ,  $\eta > \xi$ ,  $\xi = \eta$ ,  $\xi | \eta$ ?

**10. Feladat.** Ha egy nap szép volt az idő, akkor  $p_1$  valószínűséggel másnap is szép lesz. Ha esett az eső, akkor másnap  $p_2$  valószínűséggel lesz szép idő (csak ezt a két időjárást különböztetjük meg). Mutassuk meg, hogy az egymást követő napokon a szép idő  $u_n$  valószínűsége teljesíti az

$$u_n = (p_1 - p_2)u_{n-1} + p_2, \quad n \geq 2$$

összefüggést. Konvergens-e a sorozat, és ha igen, hová? Ha ma szép az idő, várhatóan hány nap telik el az első esős napig?

**11. Feladat.** Eloszlásfüggvények-e a következők?

$$- e^{-e^{-x+y}}$$

$$- e^{-e^{-x} - e^{-y}}$$

**12. Feladat.** Legyen  $\xi$  és  $\eta$  együttes eloszlásfüggvénye

$$f(x, y) = cx^{n_1-1}(y-x)^{n_2-1}e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty$$

Mennyi  $c$  értéke, és mik a marginális eloszlások?

## Valószínűségszámítás feladatsor 8. hét

**Feladat 1.**  $\xi$  és  $\eta$  véletlen változók Poisson-eloszlással,  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterekkel. Milyen az összeg eloszlása?

**Feladat 2.** Egy gabonakutató intézetben vetőmagmintát vizsgálnak. A fertőzött magok száma Poisson-eloszlást követ  $\lambda$  paraméterrel. Egy technikus vizsgálja a magokat, a fertőzött magokat egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel megtalálja és kiselejtezi. Mennyi lesz az átvizsgált mintában a magok eloszlása?

**Feladat 3.** Egy bank 20000 db ötezerest adott ki az ügyfeleinek, de utólag kiderült, hogy ezek közül 150 hamis volt. 100 bankjegyet visszakapnak. Milyen eloszlást követ ezek között a hamis bankjegyek száma,  $\xi$ ? Binomiális? Esetleg Poisson? Mennyi  $P(\xi \geq 2)$ ? Mennyire nehéz kiszámolni?

**Feladat 4.** A CSI:Chicago egyik részében egy gyilkosság felderítése közben bebizonyosodott, hogy a gyilkos rendelkezik egy igen ritka genetikai rendellenességgel, amely csak a népesség  $10^{-7}$  részében van jelen. Chicago népessége jó közelítéssel  $10^7$ . Ha a rendőrök találnak valakit, aki ez alapján gyanúsított lehet, mennyi az esélye, hogy találnak még egy embert? Mikor mondhatják nagy valószínűséggel, hogy nincs több gyanúsított?

**Feladat 5.** Legyenek  $\xi$  és  $\eta$  független véletlen változók, amelyek  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel vesznek föl 1 és  $-1$  értéket. Legyen  $\zeta = \xi\eta$ . Mutassuk meg, hogy a három változó páronként független. Függetlenek-e teljesen?

**Feladat 6.** Legyen  $\xi$  és  $\eta$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = cx^{n_1-1}(y-x)^{n_2-1}e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty$$

Mennyi  $c$  értéke, és mik a marginális eloszlások?

**Feladat 7.** Legyen  $\xi$  abszolút folytonos véletlen változó  $F$  eloszlásfüggvénnyel. Mutassuk meg, hogy  $F(\xi)$  egyenletes eloszlású a  $[0; 1]$  intervallumon,  $-\log F(\xi)$  pedig exponenciális eloszlású.

**Feladat 8.** Ha  $\xi$  abszolút folytonos  $F$  és  $f$  eloszlás- illetve sűrűségfüggvénnyel, mutassuk meg, hogy

$$\lim_{h \downarrow 0} P(\xi < x + h | \xi \geq x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

**Feladat 9.** Legyen  $\xi$  egyenletes eloszlású  $(0, 1)$ -en. Határozzuk meg  $\frac{1}{\xi}$  és  $\frac{\xi}{1+\xi}$  eloszlásfüggvényét!

**Feladat 10.** Mi a feltétele annak, hogy  $\xi$  és  $\frac{1}{\xi}$  azonos eloszlásúak legyenek?

**Feladat 11.** Legyen  $\xi$  exponenciális eloszlású változó  $\lambda$  paraméterrel. Mennyi  $\sin \xi$  várható értéke?

**Feladat 12.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $\xi$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(\xi)$ ?

**Feladat 13.** Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg egymás után kétszer ugyanazt nem kapjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

**Feladat 14.** Egy augusztusi éjszakán a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy hullócsillagot sem látunk,  $0,1$ . Mennyi az egész éjjel látott hullócsillagok várható száma?

## Valószínűségszámítás feladatsor 8. hét

**Feladat 1.**  $\xi$  és  $\eta$  véletlen változók Poisson-eloszlással,  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterekkel. Milyen az összeg eloszlása?

**Feladat 2.** Egy gabonakutató intézetben vetőmagmintát vizsgálnak. A fertőzött magok száma Poisson-eloszlást követ  $\lambda$  paraméterrel. Egy technikus vizsgálja a magokat, a fertőzött magokat egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel megtalálja és kiselejezi. Mennyi lesz az átvizsgált mintában a magok eloszlása?

**Feladat 3.** Egy bank 20000 db ötezerest adott ki az ügyfeleinek, de utólag kiderült, hogy ezek közül 150 hamis volt. 100 bankjegyet visszakapnak. Milyen eloszlást követ ezek között a hamis bankjegyek száma,  $\xi$ ? Binomiális? Esetleg Poisson? Mennyi  $P(\xi \geq 2)$ ? Mennyire nehéz kiszámolni?

**Feladat 4.** A CSI:Chicago egyik részében egy gyilkosság felderítése közben bebizonyosodott, hogy a gyilkos rendelkezik egy igen ritka genetikai rendellenességgel, amely csak a népesség  $10^{-7}$  részében van jelen. Chicago népessége jó közelítéssel  $10^7$ . Ha a rendőrök találnak valakit, aki ez alapján gyanúsított lehet, mennyi az esélye, hogy találnak még egy embert? Mikor mondhatják nagy valószínűséggel, hogy nincs több gyanúsított?

**Feladat 5.** Legyenek  $\xi$  és  $\eta$  független véletlen változók, amelyek  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel vesznek föl 1 és  $-1$  értéket. Legyen  $\zeta = \xi\eta$ . Mutassuk meg, hogy a három változó páronként független. Függetlenek-e teljesen?

**Feladat 6.** Legyen  $\xi$  és  $\eta$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = cx^{n_1-1}(y-x)^{n_2-1}e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty$$

Mennyi  $c$  értéke, és mik a marginális eloszlások?

**Feladat 7.** Legyen  $\xi$  abszolút folytonos véletlen változó  $F$  eloszlásfüggvénnyel. Mutassuk meg, hogy  $F(\xi)$  egyenletes eloszlású a  $[0; 1]$  intervallumon,  $-\log F(\xi)$  pedig exponenciális eloszlású.

**Feladat 8.** Ha  $\xi$  abszolút folytonos  $F$  és  $f$  eloszlás- illetve sűrűségfüggvénnyel, mutassuk meg, hogy

$$\lim_{h \downarrow 0} P(\xi < x + h | \xi \geq x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

**Feladat 9.** Legyen  $\xi$  egyenletes eloszlású  $(0, 1)$ -en. Határozzuk meg  $\frac{1}{\xi}$  és  $\frac{\xi}{1+\xi}$  eloszlásfüggvényét!

**Feladat 10.** Mi a feltétele annak, hogy  $\xi$  és  $\frac{1}{\xi}$  azonos eloszlásúak legyenek?

**Feladat 11.** Legyen  $\xi$  exponenciális eloszlású változó  $\lambda$  paraméterrel. Mennyi  $\sin \xi$  várható értéke?

**Feladat 12.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $\xi$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(\xi)$ ?

**Feladat 13.** Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg egymás után kétszer ugyanazt nem kapjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

**Feladat 14.** Egy augusztusi éjszakán a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy hullócsillagot sem látunk,  $0,1$ . Mennyi az egész éjjel látott hullócsillagok várható száma?



## Valószínűségszámítás feladatsor 10. hét

**1. Feladat.** Egy pénzérmét addig dobálunk, amíg egymás után kétszer ugyanaz az eredmény nem születik. Mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hetedik dobásra, illetve a hetedik dobás előtt végzünk, illetve páros sok dobásra lesz szükség?

**2. Feladat.** A valószínűségszámítás-vizsgán mind az  $n$  hallgató  $p$  valószínűséggel megy át. Ha mindenki tetszőlegesen sokszor próbálkozhat, mi a valószínűsége, hogy egy hallgató  $k$ -adikra megy át? Mi a valószínűsége, hogy az oktatónak pontosan  $k$  vizsgát kell tartania?

**3. Feladat.** Egy gabonakutató intézetben vetőmagmintát vizsgálnak. A fertőzött magok száma Poisson-eloszlást követ  $\lambda$  paraméterrel. Egy technikus vizsgálja a magokat, a fertőzött magokat egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel megtalálja és kiselejtezi. Mennyi lesz az átvizsgált mintában a magok eloszlása?

**4. Feladat.** Legyenek  $X$  és  $Y$  független véletlen változók, amelyek  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel vesznek föl 1 és  $-1$  értéket. Legyen  $Z = XY$ . Mutassuk meg, hogy a három változó páronként független. Függetlenek-e teljesen?

**5. Feladat.** Ha  $X$  abszolút folytonos  $F$  és  $f$  eloszlás- illetve sűrűségfüggvénnyel, mutassuk meg, hogy

$$\lim_{h \downarrow 0} P(X < x+h | X \geq x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

**6. Feladat.** Legyen  $X$  egyenletes eloszlású  $(0,1)$ -en. Határozzuk meg  $\frac{1}{X}$  és  $\frac{X}{1+X}$  eloszlásfüggvényét!

**7. Feladat.** Mi a feltétele annak, hogy  $X$  és  $\frac{1}{X}$  azonos eloszlásúak legyenek?

**8. Feladat.**  $X$  és  $Y$  független exponenciális eloszlású változók  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterrel. Határozzuk meg a minimum eloszlását! Melyik tulajdonságot használtuk ki a megoldásban? Ennek alapján melyik diszkrét eloszlásra lehet igaz hasonló állítás?

**9. Feladat.** Legyen  $X$  exponenciális eloszlású változó  $\lambda$  paraméterrel. Mennyi  $\sin X$  várható értéke?

**10. Feladat.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $X$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(X)$ ?

**11. Feladat.** Egy augusztusi éjszakán a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy hullócsillagot sem látunk,  $0,1$ . Mennyi az egész éjjel látott hullócsillagok várható száma?

**12. Feladat.** A skót bakák mellkasának körmérete normális eloszlást követ,  $\mu = 88$  és  $\sigma^2 = 10$  paraméterekkel. Mekkora hányaduk fér bele a 84-es zubbonyba?

**13. Feladat.** A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlású. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg és 20%-uk nehezebb, mint 7 kg. Mennyi a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

**14. Feladat.** Egy villanykörte élettartama években mérve exponenciális eloszlást követ, a paraméter  $\frac{1}{2}$ . Mennyi a valószínűsége, hogy egy új villanykörte legalább 1 évig világítani fog?

## Valószínűségszámítás feladatsor 8. hét

**1. Feladat.** Egy pénzérmét addig dobálunk, amíg egymás után kétszer ugyanaz az eredmény nem születik. Mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hetedik dobásra, illetve a hetedik dobás előtt végzünk, illetve páros sok dobásra lesz szükség?

**2. Feladat.** A valószínűségszámítás-vizsgán mind az  $n$  hallgató  $p$  valószínűséggel megy át. Ha mindenki tetszőlegesen sokszor próbálkozhat, mi a valószínűsége, hogy egy hallgató  $k$ -adikra megy át? Mi a valószínűsége, hogy az oktatónak pontosan  $k$  vizsgát kell tartania?

**3. Feladat.** Egy gabonakutató intézetben vetőmagmintát vizsgálnak. A fertőzött magok száma Poisson-eloszlást követ  $\lambda$  paraméterrel. Egy technikus vizsgálja a magokat, a fertőzött magokat egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel megtalálja és kiselejtezi. Mennyi lesz az átvizsgált mintában a magok eloszlása?

**4. Feladat.** Legyenek  $X$  és  $Y$  független véletlen változók, amelyek  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel vesznek föl 1 és  $-1$  értéket. Legyen  $Z = XY$ . Mutassuk meg, hogy a három változó páronként független. Függetlenek-e teljesen?

**5. Feladat.** Ha  $X$  abszolút folytonos  $F$  és  $f$  eloszlás- illetve sűrűségfüggvénnyel, mutassuk meg, hogy

$$\lim_{h \downarrow 0} P(X < x+h | X \geq x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

**6. Feladat.** Legyen  $X$  egyenletes eloszlású  $(0,1)$ -en. Határozzuk meg  $\frac{1}{X}$  és  $\frac{X}{1+X}$  eloszlásfüggvényét!

**7. Feladat.** Mi a feltétele annak, hogy  $X$  és  $\frac{1}{X}$  azonos eloszlásúak legyenek?

**8. Feladat.**  $X$  és  $Y$  független exponenciális eloszlású változók  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterrel. Határozzuk meg a minimum eloszlását! Melyik tulajdonságot használtuk ki a megoldásban? Ennek alapján melyik diszkrét eloszlásra lehet igaz hasonló állítás?

**9. Feladat.** Legyen  $X$  exponenciális eloszlású változó  $\lambda$  paraméterrel. Mennyi  $\sin X$  várható értéke?

**10. Feladat.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $X$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(X)$ ?

**11. Feladat.** Egy augusztusi éjszakán a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy hullócsillagot sem látunk,  $0,1$ . Mennyi az egész éjjel látott hullócsillagok várható száma?

**12. Feladat.** A skót bakák mellkasának körmérete normális eloszlást követ,  $\mu = 88$  és  $\sigma^2 = 10$  paraméterekkel. Mekkora hányaduk fér bele a 84-es zubbonyba?

**13. Feladat.** A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlású. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg és 20%-uk nehezebb, mint 7 kg. Mennyi a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

**14. Feladat.** Egy villanykörte élettartama években mérve exponenciális eloszlást követ, a paraméter  $\frac{1}{2}$ . Mennyi a valószínűsége, hogy egy új villanykörte legalább 1 évig világítani fog?

## Valószínűségszámítás feladatsor 11. hét

- Feladat.** Legyen  $X$  egyenletes eloszlású  $(0,1)$ -en. Határozzuk meg  $\frac{1}{X}$  és  $\frac{X}{1+X}$  eloszlásfüggvényét!
- Feladat.**  $X$  és  $Y$  független exponenciális eloszlású változók  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterrel. Határozzuk meg a minimum eloszlását! Melyik tulajdonságot használtuk ki a megoldásban? Ennek alapján melyik diszkrét eloszlásra lehet igaz hasonló állítás?
- Feladat.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $X$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(X)$ ?
- Feladat.** Egy augusztusi éjszakán a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy hullócsillagot sem látunk,  $0,1$ . Mennyi az egész éjjel látott hullócsillagok várható száma?
- Feladat.** A skót bakák mellkasának körmérete normális eloszlást követ,  $\mu = 88$  és  $\sigma^2 = 10$  paraméterekkel. Mekkora hányaduk fér bele a 84-es zubbonyba?
- Feladat.** A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlású. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg és 20%-uk nehezebb, mint 7 kg. Mennyi a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?
- Feladat.** Egy villanykörte élettartama években mérve exponenciális eloszlást követ, a paraméter  $\frac{1}{2}$ . Mennyi a valószínűsége, hogy egy új villanykörte legalább 1 évig világítani fog?
- Feladat.** Legyen  $X$  nemnegatív egész értékű véletlen változó véges várható értékkel. Mutassuk meg, hogy

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

- Feladat.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $X$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(X)$ ?
- Feladat.** Tekintsük azt a vektorváltozót, amely egyforma valószínűséggel veszi fel a  $(0,1)$ ,  $(0,-1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(-1,0)$  értékeket. Mennyi a koordináták korrelációja? Függetlenek-e a koordináták?
- Feladat.** Számítsuk ki  $1/(X+1)$  várható értékét, ha
  - $X \sim \text{Binom}(n, p)$
  - $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
  - $X$  geometriai eloszlású

- Feladat.** Egy szabályos kockával négyszer dobunk. Jelölje  $X_1$  a dobott egyesek,  $X_2$  a dobott kettesek számát. Határozzuk meg az együttes eloszlást és a peremeloszlásokat! Független-e a két változó?
- Feladat.** A focipálya a  $[-3;3]$  szakasz. A labda indulási helye a  $+1$ . A játékosok felváltva lőnek, pontosabban feldobnak egy kockát. Ha párost dobna, akkor a labda jobbra, ha páratlant, akkor balra gurul egy egységyit. Egyik kapu a  $+3$ , az ide guruló labda  $k$ -szoros gólnak számít.  $k$ -ra titkos ajánlatot tesznek, akié nagyobb, az ekkora  $k$  érték mellett védi a  $-3$  kaput. Milyen  $k$  mellett lesz a kétféle gól egyforma valószínűségű?

## Valószínűségszámítás feladatsor 11. hét

- Feladat.** Legyen  $X$  egyenletes eloszlású  $(0,1)$ -en. Határozzuk meg  $\frac{1}{X}$  és  $\frac{X}{1+X}$  eloszlásfüggvényét!
- Feladat.**  $X$  és  $Y$  független exponenciális eloszlású változók  $\lambda$  és  $\mu$  paraméterrel. Határozzuk meg a minimum eloszlását! Melyik tulajdonságot használtuk ki a megoldásban? Ennek alapján melyik diszkrét eloszlásra lehet igaz hasonló állítás?
- Feladat.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $X$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(X)$ ?
- Feladat.** Egy augusztusi éjszakán a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy hullócsillagot sem látunk,  $0,1$ . Mennyi az egész éjjel látott hullócsillagok várható száma?
- Feladat.** A skót bakák mellkasának körmérete normális eloszlást követ,  $\mu = 88$  és  $\sigma^2 = 10$  paraméterekkel. Mekkora hányaduk fér bele a 84-es zubbonyba?
- Feladat.** A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlású. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg és 20%-uk nehezebb, mint 7 kg. Mennyi a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?
- Feladat.** Egy villanykörte élettartama években mérve exponenciális eloszlást követ, a paraméter  $\frac{1}{2}$ . Mennyi a valószínűsége, hogy egy új villanykörte legalább 1 évig világítani fog?
- Feladat.** Legyen  $X$  nemnegatív egész értékű véletlen változó véges várható értékkel. Mutassuk meg, hogy

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

- Feladat.** Van egy urnánk, benne egy fehér és egy piros golyó. Visszatevéssel húzunk, minden húzás után még egy fehér golyót teszünk be. Legyen  $X$  a szükséges húzások száma, míg fehéret nem húzunk. Mennyi  $E(X)$ ?
- Feladat.** Tekintsük azt a vektorváltozót, amely egyforma valószínűséggel veszi fel a  $(0,1)$ ,  $(0,-1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(-1,0)$  értékeket. Mennyi a koordináták korrelációja? Függetlenek-e a koordináták?
- Feladat.** Számítsuk ki  $1/(X+1)$  várható értékét, ha
  - $X \sim \text{Binom}(n, p)$
  - $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
  - $X$  geometriai eloszlású

- Feladat.** Egy szabályos kockával négyszer dobunk. Jelölje  $X_1$  a dobott egyesek,  $X_2$  a dobott kettesek számát. Határozzuk meg az együttes eloszlást és a peremeloszlásokat! Független-e a két változó?
- Feladat.** A focipálya a  $[-3;3]$  szakasz. A labda indulási helye a  $+1$ . A játékosok felváltva lőnek, pontosabban feldobnak egy kockát. Ha párost dobna, akkor a labda jobbra, ha páratlant, akkor balra gurul egy egységyit. Egyik kapu a  $+3$ , az ide guruló labda  $k$ -szoros gólnak számít.  $k$ -ra titkos ajánlatot tesznek, akié nagyobb, az ekkora  $k$  érték mellett védi a  $-3$  kaput. Milyen  $k$  mellett lesz a kétféle gól egyforma valószínűségű?

## Valószínűségszámítás feladatsor 12. hét

**1. Feladat.** Számítsuk ki  $1/(X+1)$  várható értékét, ha

- $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- $X$  geometriai eloszlású

**2. Feladat.** A focipálya a  $[-3;3]$  szakasz. A labda indulási helye a  $+1$ . A játékosok felváltva lőnek, pontosabban feldobnak egy kockát. Ha párost dobunk, akkor a labda jobbra, ha páratlant, akkor balra gurul egy egységnyit. Egyik kapu a  $+3$ , az ide guruló labda  $k$ -szoros gólnak számít.  $k$ -ra titkos ajánlatot tesznek, akié nagyobb, az ekkora  $k$  érték mellett védi a  $-3$  kaput. Milyen  $k$  mellett lesz a kétféle gól egyforma valószínűsége?

**3. Feladat.** Egy dohányos minden nap 10 vagy 11 cigarettát szív el, rendre  $p$  és  $1-p$  valószínűséggel, egymástól függetlenül. Mennyi a 30 nap alatt elszívott cigarettái számának várható értéke és szórása?

**4. Feladat.** A craps nevű játékban két kockával dobunk. 2,3,12 esetén azonnal veszítünk; 7 vagy 11 esetén azonnal nyerünk. Bármely más dobás esetén megjegyezzük az elsőnek dobott számot. Ha ez hamarabb ismétlődik meg, mint ahogy elsőre 7-est dobunk, akkor nyerünk, ellenkező esetben veszünk. Mennyi a nyereség valószínűsége? Mennyi a dobások számának várható értéke?

**5. Feladat.** Legyen  $\theta$  egyenletes eloszlású  $(0, \alpha)$ -n. Számoljuk ki  $\text{Cov}(\sin \theta, \cos \theta)$ -t. Független-e a két változó?

**6. Feladat.** Egy gyümölcsösben minden gyümölcsben véletlen számú féreg van, ezek száma Poisson-eloszlást követ 2 paraméterrel. A gyümölcsösben permetezést végeznek, amely minden egyes férget  $p=0,75$  valószínűséggel öl meg, egymástól függetlenül. Ezután veszünk 10 darabot a gyümölcsökből.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen férget sem találunk?
- Mennyi a valószínűsége, hogy összesen pontosan  $k$  férget találunk?
- Mennyi a talált férgek várható értéke, szórása?
- Mennyi az egészséges gyümölcsök várható értéke, szórása?

**7. Feladat.** Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye  $c \sin(x+y)$ , ha  $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Állapítsuk meg a kovarianciát és a korrelációt.

**8. Feladat.** Legyen  $X$  egy  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változó,  $N$  pedig egy tőle független  $p$  paraméterű geometriai eloszlású változó. Adjuk meg  $NX$  eloszlását.

**9. Feladat.** Legyenek  $X, Y, Z$  független geometriai eloszlású véletlen változók  $p$  paraméterrel. Adjuk meg a következő valószínűségeket:  $P(X = Y), P(X \geq 2Y), P(X + Y \geq Z)$ . Legyen  $U = \min(X, Y)$  és  $V = X - Y$ . Mutassuk meg, hogy  $U$  és  $V$  függetlenek.

**10. Feladat.** Legyen  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Határozzuk meg  $2X+3, X^3$  és  $\sqrt{X}$  sűrűségfüggvényét.

**11. Feladat.** Adjuk meg a binomiális, a Poisson- és a geometriai eloszlás generátorfüggvényét.

**12. Feladat.** Egy halastóban  $N$  hal van. Kihalásunk közülük  $M$ -et, megjelöljük őket, és visszatesszük. Mikor elkeveredtek a populációban, kifogunk  $n$  halat, legyen ezekből a megjelöltek száma  $X$ . A teljes populáció becslésére az  $Mn/(X+1)$  becslést használjuk. Mennyi lesz ennek a várható értéke, szórása? Miért kell  $X+1$ -gyel osztani?

## Valószínűségszámítás feladatsor 12. hét

**1. Feladat.** Számítsuk ki  $1/(X+1)$  várható értékét, ha

- $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- $X$  geometriai eloszlású

**2. Feladat.** A focipálya a  $[-3;3]$  szakasz. A labda indulási helye a  $+1$ . A játékosok felváltva lőnek, pontosabban feldobnak egy kockát. Ha párost dobunk, akkor a labda jobbra, ha páratlant, akkor balra gurul egy egységnyit. Egyik kapu a  $+3$ , az ide guruló labda  $k$ -szoros gólnak számít.  $k$ -ra titkos ajánlatot tesznek, akié nagyobb, az ekkora  $k$  érték mellett védi a  $-3$  kaput. Milyen  $k$  mellett lesz a kétféle gól egyforma valószínűsége?

**3. Feladat.** Egy dohányos minden nap 10 vagy 11 cigarettát szív el, rendre  $p$  és  $1-p$  valószínűséggel, egymástól függetlenül. Mennyi a 30 nap alatt elszívott cigarettái számának várható értéke és szórása?

**4. Feladat.** A craps nevű játékban két kockával dobunk. 2,3,12 esetén azonnal veszítünk; 7 vagy 11 esetén azonnal nyerünk. Bármely más dobás esetén megjegyezzük az elsőnek dobott számot. Ha ez hamarabb ismétlődik meg, mint ahogy elsőre 7-est dobunk, akkor nyerünk, ellenkező esetben veszünk. Mennyi a nyereség valószínűsége? Mennyi a dobások számának várható értéke?

**5. Feladat.** Legyen  $\theta$  egyenletes eloszlású  $(0, \alpha)$ -n. Számoljuk ki  $\text{Cov}(\sin \theta, \cos \theta)$ -t. Független-e a két változó?

**6. Feladat.** Egy gyümölcsösben minden gyümölcsben véletlen számú féreg van, ezek száma Poisson-eloszlást követ 2 paraméterrel. A gyümölcsösben permetezést végeznek, amely minden egyes férget  $p=0,75$  valószínűséggel öl meg, egymástól függetlenül. Ezután veszünk 10 darabot a gyümölcsökből.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen férget sem találunk?
- Mennyi a valószínűsége, hogy összesen pontosan  $k$  férget találunk?
- Mennyi a talált férgek várható értéke, szórása?
- Mennyi az egészséges gyümölcsök várható értéke, szórása?

**7. Feladat.** Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye  $c \sin(x+y)$ , ha  $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Állapítsuk meg a kovarianciát és a korrelációt.

**8. Feladat.** Legyen  $X$  egy  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változó,  $N$  pedig egy tőle független  $p$  paraméterű geometriai eloszlású változó. Adjuk meg  $NX$  eloszlását.

**9. Feladat.** Legyenek  $X, Y, Z$  független geometriai eloszlású véletlen változók  $p$  paraméterrel. Adjuk meg a következő valószínűségeket:  $P(X = Y), P(X \geq 2Y), P(X + Y \geq Z)$ . Legyen  $U = \min(X, Y)$  és  $V = X - Y$ . Mutassuk meg, hogy  $U$  és  $V$  függetlenek.

**10. Feladat.** Legyen  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Határozzuk meg  $2X+3, X^3$  és  $\sqrt{X}$  sűrűségfüggvényét.

**11. Feladat.** Adjuk meg a binomiális, a Poisson- és a geometriai eloszlás generátorfüggvényét.

**12. Feladat.** Egy halastóban  $N$  hal van. Kihalásunk közülük  $M$ -et, megjelöljük őket, és visszatesszük. Mikor elkeveredtek a populációban, kifogunk  $n$  halat, legyen ezekből a megjelöltek száma  $X$ . A teljes populáció becslésére az  $Mn/(X+1)$  becslést használjuk. Mennyi lesz ennek a várható értéke, szórása? Miért kell  $X+1$ -gyel osztani?

## Valószínűségszámítás feladatsor 13. hét

**1. Feladat.** Számítsuk ki  $1/(X+1)$  várható értékét, ha

- $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- $X$  geometriai eloszlású

**2. Feladat.** Legyen az  $(X, Y)$  véletlen vektor sűrűségfüggvénye  $c(x+y)$  a  $[0,1]^2$  egységkockán. Adjuk meg  $c$  értékét, a peremeloszlásokat, a kovarianciát és korrelációt.

**3. Feladat** (A kupongyűjtő probléma). Egy matricásalbumban 100 matricának van hely, a matricákat egyesével, lezárt tasakban lehet megvásárolni (értelemszerűen vásárláskor nem tudjuk, hogy mi van a tasakban). Ha feltesszük, hogy minden csomagban minden matrica egyforma valószínűséggel található meg, és  $S_r$ -rel jelöljük azt a matricamennyiséget, amelyet meg kell vennünk, hogy legyen  $r$  különböző matricánk, adjuk meg  $S_{100}$  várható értékét, szórását! (Segítség: milyen eloszlású lesz  $S_{k+1} - S_k$ ?)

**4. Feladat.** Vérvizsgálatot végeznek  $n$  embernél. A vizsgálat mindenkinél egymástól függetlenül, egyforma  $p$  valószínűséggel pozitív. Takarékosági okokból  $k$  ember véréte összeöntik, és a kapott mintát vizsgálják: ha negatív, akkor mindenki negatív, ha pozitív, akkor egyenként megvizsgálják mindenkit.

- Adjuk meg a szükséges vizsgálatok  $X$  számának várható értékét (feltehetjük, hogy  $k|N$ )!
- Minimalizáljuk a fenti várható értéket  $k$  függvényében!
- Mutassuk meg, hogy az optimális  $k$  érték közel van  $\frac{1}{\sqrt{p}}$ -hez!

**5. Feladat.** Egy bálban  $n$  házaspár van, a nők véletlenszerűen állnak párba a férfiakkal. Állapítsuk meg az egymással táncoló házaspárok számának várható értékét, szórását!

**6. Feladat.** Whisky-kólát szeretnénk keverni 5 cl whiskyből és 25 cl kólából. Mivel azonban nem vagyunk hivatásos koktélkeverők, kissé bizonytalanul töltjük az italokat: mindkét ital esetében mindkét irányba legfeljebb 10% eltéréssel, ezen belül pedig egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a kész koktélban a whisky arányának várható értéke?

**7. Feladat.** Szabálytalan érmét dobálunk, ahol a fej valószínűsége  $p$ . Legyen  $X$  az első egyforma dobássorozat hossza (lehet 1 is!),  $Y$  pedig a másodiké. Határozzuk meg  $X$  és  $Y$  várható értékét!

**8. Feladat.** Egy kockát  $n$ -szer feldobunk. Mennyi az egyesek és hatosok számának kovarianciája, korrelációja?

**9. Feladat.** Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg kétszer egymás után ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

**10. Feladat.** Legyen  $X$  egy  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változó,  $N$  pedig egy tőle független  $p$  paraméterű geometriai eloszlású változó. Adjuk meg  $NX$  eloszlását.

**11. Feladat.** Legyenek  $X, Y, Z$  független geometriai eloszlású véletlen változók  $p$  paraméterrel. Adjuk meg a következő valószínűségeket:  $P(X=Y)$ ,  $P(X \geq 2Y)$ ,  $P(X+Y \geq Z)$ . Legyen  $U = \min(X, Y)$  és  $V = X - Y$ . Mutassuk meg, hogy  $U$  és  $V$  függetlenek.

**12. Feladat.** Legyen  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Határozzuk meg  $2X+3$ ,  $X^3$  és  $\sqrt{X}$  sűrűségfüggvényét.

## Valószínűségszámítás feladatsor 13. hét

**1. Feladat.** Számítsuk ki  $1/(X+1)$  várható értékét, ha

- $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- $X$  geometriai eloszlású

**2. Feladat.** Legyen az  $(X, Y)$  véletlen vektor sűrűségfüggvénye  $c(x+y)$  a  $[0,1]^2$  egységkockán. Adjuk meg  $c$  értékét, a peremeloszlásokat, a kovarianciát és korrelációt.

**3. Feladat** (A kupongyűjtő probléma). Egy matricásalbumban 100 matricának van hely, a matricákat egyesével, lezárt tasakban lehet megvásárolni (értelemszerűen vásárláskor nem tudjuk, hogy mi van a tasakban). Ha feltesszük, hogy minden csomagban minden matrica egyforma valószínűséggel található meg, és  $S_r$ -rel jelöljük azt a matricamennyiséget, amelyet meg kell vennünk, hogy legyen  $r$  különböző matricánk, adjuk meg  $S_{100}$  várható értékét, szórását! (Segítség: milyen eloszlású lesz  $S_{k+1} - S_k$ ?)

**4. Feladat.** Vérvizsgálatot végeznek  $n$  embernél. A vizsgálat mindenkinél egymástól függetlenül, egyforma  $p$  valószínűséggel pozitív. Takarékosági okokból  $k$  ember vérént összeöntik, és a kapott mintát vizsgálják: ha negatív, akkor mindenki negatív, ha pozitív, akkor egyenként megvizsgálják mindenkit.

- Adjuk meg a szükséges vizsgálatok  $X$  számának várható értékét (feltehetjük, hogy  $k|N$ )!
- Minimalizáljuk a fenti várható értéket  $k$  függvényében!
- Mutassuk meg, hogy az optimális  $k$  érték közel van  $\frac{1}{\sqrt{p}}$ -hez!

**5. Feladat.** Egy bálban  $n$  házaspár van, a nők véletlenszerűen állnak párba a férfiakkal. Állapítsuk meg az egymással táncoló házaspárok számának várható értékét, szórását!

**6. Feladat.** Whisky-kólát szeretnénk keverni 5 cl whiskyből és 25 cl kólából. Mivel azonban nem vagyunk hivatásos koktélkeverők, kissé bizonytalanul töltjük az italokat: mindkét ital esetében mindkét irányba legfeljebb 10% eltéréssel, ezen belül pedig egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a kész koktélban a whisky arányának várható értéke?

**7. Feladat.** Szabálytalan érmét dobálunk, ahol a fej valószínűsége  $p$ . Legyen  $X$  az első egyforma dobássorozat hossza (lehet 1 is!),  $Y$  pedig a másodiké. Határozzuk meg  $X$  és  $Y$  várható értékét!

**8. Feladat.** Egy kockát  $n$ -szer feldobunk. Mennyi az egyesek és hatosok számának kovarianciája, korrelációja?

**9. Feladat.** Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg kétszer egymás után ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

**10. Feladat.** Legyen  $X$  egy  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változó,  $N$  pedig egy tőle független  $p$  paraméterű geometriai eloszlású változó. Adjuk meg  $NX$  eloszlását.

**11. Feladat.** Legyenek  $X, Y, Z$  független geometriai eloszlású véletlen változók  $p$  paraméterrel. Adjuk meg a következő valószínűségeket:  $P(X=Y)$ ,  $P(X \geq 2Y)$ ,  $P(X+Y \geq Z)$ . Legyen  $U = \min(X, Y)$  és  $V = X - Y$ . Mutassuk meg, hogy  $U$  és  $V$  függetlenek.

**12. Feladat.** Legyen  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Határozzuk meg  $2X+3$ ,  $X^3$  és  $\sqrt{X}$  sűrűségfüggvényét.