Valószínűségelmélet házifeladatok
2018/2019. tanév I. félév

Minden anyagrészhez 2–5 házi feladatot adok ki. A megoldásokat a kitűzés után két héten belül kell beadni, és később már nem lehet pótolni. Csak az jöhet vizsgázni, aki a 12 hét során kiadott feladatokból legalább 12 feladatot tökéletesen megold.

2. hét (szeptember 12-13)

1. Legyen $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ olyan függvény, mely monoton növekvő, jobbról folytonos és $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$. Legyen $Q_F(q) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant q\}$ ha $q \in (0,1)$.

   (a) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $q \in (0,1)$ esetén a $Q_F(q)$ szám q-kvantilise az F eloszlásfüggvényű eloszlásnak.

   (b) Bizonyítsa be, hogy ha U a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változó, akkor a $Q_F(U)$ véletlen változó eloszlásfüggvénye F.

   (c) Bizonyítsa be, hogy ha F folytonos és az X véletlen változó eloszlásfüggvénye F, akkor az $F(X)$ véletlen változó egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon.

2. Legyen $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz, $\mathcal{A} \subset \Omega$ halmazalgebra, $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ σ-véges mérték.

   (a) Bizonyítsa be, hogy a $\varrho : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to [0,\infty]$, $\varrho(A,B) := \mu(A \triangle B)$ függvény pszeudo-metrika, azaz szimmetrikus és érvényes a háromszögegyenlőtlenség (de $\varrho(A,B) = 0$ teljesülhet $A \neq B$ esetén is).

   (b) Bizonyítsa be, hogy az $\mathcal{A}$ halmazalgebrán az $A \sim B \iff \varrho(A,B) = 0$ reláció ekvivalencia-reláció.

   (c) A $\sim$ ekvivalencia-reláció szerinti osztályokra a ϱ függvényt természetes módon kiterjesztve metrikus teret kapunk; tekintsük ezen a metrikus téren a Cauchy-sorozatok halmazát; bizonyítsa be, hogy a Cauchy-sorozatok halmazán ekvivalencia-reláció az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} \varrho(A_n, B_n) = 0$ reláció.

   (d) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $A \in \sigma(\mathcal{A})$ halmazhoz létezik olyan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} \varrho(A_n, A) = 0$.

   (e) A $\sim$ ekvivalencia-reláció szerinti osztályok metrikus terét teljessé téve bizonyítsa be, hogy létezik olyan $\nu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0,\infty]$ σ-véges mérték, mely kiterjesztése a μ mértéknek, azaz $\nu|_{\mathcal{A}} = \nu$, vagyis tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mu(A) = \nu(A)$. Bizonyítsa be, hogy ez a kiterjesztés egyértelmű.

3. Legyen $\Omega := [0,1]^2$. Legyenek $X : \Omega \to \mathbb{R}$ és $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ a koordinátafüggvények, azaz $X(x,y) = x$ és $Y(x,y) = y$. Adja meg a $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $\sigma(X,Y)$ és $\sigma(X+Y)$ σ-algebrákat. Benne van-e az $\{(x,y) : x \leqslant 1/2 \text{ vagy } y \leqslant 1/2\}$ halmaz ezek közül valamelyik σ-algebrában?

4. Legyen $\Omega := [-1,1]$. Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ az identikus leképezés, azaz $X(x) = x$. Milyen tartalmazási relációk teljesülnek a $\sigma(X)$, $\sigma(|X|)$ és $\sigma(X^2)$ σ-algebrák között?

3. hét (szeptember 19-20)

1. Legyen $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz, $A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, részhalmazok. Milyen kapcsolat van a $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ és $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ halmazok között?

2. Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, mérhető halmazok. Bizonyítsa be, hogy a $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ és $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ mérhető halmazok benne vannak a $\{\emptyset, A_n, \Omega\setminus A_n, \Omega\}$, $n \in \mathbb{N}$, σ-algebrákhoz tartozó farok-σ-algebrában.

3. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$, független, λ paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változók. Bizonyítsa be, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{P-m.b.}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 0 \quad \text{P-m.b.}$$

Lehet-e megadni olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív számokból álló sorozatot, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{a_n} \in (0, \infty) \quad \text{P-m.b.}$$

teljesüljön?

4. Bizonyítsa be, hogy minden $x > 0$ esetén

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant \int_x^\infty \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Ez alapján bizonyítsa be, hogy léteznek olyan x_0, c_1 és c_2 pozitív számok, hogy minden $x \geqslant x_0$ esetén

$$\frac{c_1}{x}\mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{c_2}{x}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Ennek felhasználásával bizonyítsa be, hogy ha X_n, $n \in \mathbb{N}$, független, standard normális eloszlású véletlen változók, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = 1 \quad \text{P-m.b.}$$

5. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$, független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változók. Bizonyítsa be, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat torlódási pontjainak halmaza majdnem biztosan a $[0,1]$ intervallum.

4. hét (szeptember 26-27)

1. Bizonyítsa be, hogy ha X nemnegatív véletlen változó, akkor $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x$.

2. Legyen (X, Y) véletlen vektor egyenletes eloszlású a sík egységkörében. Határozza meg a marginális eloszlások sűrűségfüggvényét.

3. Mutassa meg, hogy ha p és q pozitív számok, akkor a

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

   függvény sűrűségfüggvény, ahol $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ ha $\alpha > 0$.

   Számolja ki ennek az eloszlásnak a várható értékét és varianciáját.

4. Legyenek $U_1, \ldots, U_n$ független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változók. Jelölje ezek nagyságsorrendbe rendezését $0 < U_{1,n} \leqslant \ldots \leqslant U_{n,n} < 1$. Határozza meg $U_{k,n}$ sűrűségfüggvényét.

5. Legyenek minden $\alpha \in (0,1)$ esetén $X_1^{(\alpha)}, X_2^{(\alpha)}, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók úgy, hogy $\mathrm{P}(X_1^{(\alpha)} = 1) = \alpha$ és $\mathrm{P}(X_1^{(\alpha)} = 0) = 1 - \alpha$. Legyen $Y^{(\alpha)} := \sum_{k=1}^\infty \frac{X_k^{(\alpha)}}{2^k}$.

   - Bizonyítsa be, hogy $Y^{(1/2)}$ egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon.
   - Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\alpha \neq \beta$ esetén az $Y^{(\alpha)}$ és $Y^{(\beta)}$ véletlen változók eloszlásai szingulárisak egymásra nézve.
   - Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $\alpha \in (0,1)$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ esetén az $Y^{(\alpha)}$ véletlen változó eloszlásfüggvénye folytonos és szinguláris.

5. hét (október 3-4)

1. Bizonyítsa be, hogy ha X és Y független, standard normális eloszlású véletlen változók, akkor $\frac{X}{Y}$ Cauchy eloszlású.

2. Legyenek X és Y független véletlen változók, X Poisson-eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, Y egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon. Bizonyítsa be, hogy az $X+Y$ véletlen változó abszolút folytonos, és határozza meg a sűrűségfüggvényét.

3. Legyenek X és Y független, abszolút folytonos eloszlású véletlen változók. Bizonyítsa be, hogy a $(\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\})$ véletlen vektor abszolút folytonos eloszlású, és határozza meg a sűrűségfüggvényét.

4. Határozza meg a $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlás karakterisztikus függvényét.

5. Határozza meg az (a,b) intervallumon egyenletes eloszlás karakterisztikus függvényét.

6. Bizonyítsa be, hogy $f(x) := \frac{1}{\pi \cosh x}$, $x \in \mathbb{R}$, sűrűségfüggvény. Határozza meg a karakterisztikus függvényét.

6. hét (október 10-11)

1. Határozza meg a Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvényét!

2. Bizonyítsa be karakterisztikus függvények segítségével, hogy minden x valós szám esetén
$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k},$$
ahol a baloldalt $x = 0$ esetén a $\lim\limits_{x \to 0}$ határértéknek értjük (azaz folytonosan kiterjesztjük 0-ba).

3. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\lambda_n \in (0, \infty)$ úgy, hogy $\lambda_n \to \infty$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ξ_n Poisson-eloszlású véletlen változó λ_n paraméterrel. Bizonyítandó, hogy $\frac{\xi_n - \mathrm{E}(\xi_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ amint $n \to \infty$.

4. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $p_n \in (0,1)$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ξ_n binomiális eloszlású véletlen változó (n, p_n) paraméterrel.

   - Bizonyítsa be, hogy ha $np_n \to \lambda \in (0, \infty)$, akkor $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Poisson}(\lambda)$ amint $n \to \infty$.
   - Bizonyítsa be, hogy ha $p_n \to p \in (0,1)$, akkor $\frac{\xi_n - \mathrm{E}(\xi_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ amint $n \to \infty$.

7. hét (október 18-19)

1. Bizonyítsa be, hogy ha X és Y független $\mathcal{N}(0,2)$ normális eloszlású véletlen változók, akkor $X \cdot Y$ eloszlása megegyezik $U^2 - V^2$ eloszlásával, ahol U és V független standard normális eloszlású véletlen változók.

2. Legyenek X és Y független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változók. Határozza meg az $X+Y$, $X-Y$, XY és $\frac{X}{Y}$ véletlen változók sűrűségfüggvényét.

8. hét (október 25, október 31, november 1)

1. Legyen ξ, η véletlen vektorok esetén

$$d(\xi,\eta) := \mathrm{E}\left(\frac{\|\xi-\eta\|}{1+\|\xi-\eta\|}\right).$$

Bizonyítandók a következő állítsok:

(a) d metrikát határoz meg a P-m.b. egyenlő véletlen vektorok ekvivalencia-osztályain.

(b) $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ akkor és csak akkor, ha $d(\xi_n,\xi) \to 0$.

2. Legyen ξ véletlen vektor. Bizonyítandó, hogy a következő állítsok ekvivalensek:

(a) $\mathrm{E}(\|\xi\|) < \infty$.

(b) Bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\|\xi\| > n\varepsilon) < \infty$.

(c) Létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\|\xi\| > n\varepsilon) < \infty$.

3. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ olyan független véletlen változók, melyekre

$$\mathrm{P}(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad \mathrm{P}(\xi_n = n^2) = \mathrm{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{2n^2}.$$

Bizonyítandó, hogy $\xi_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, $\mathrm{E}(\xi_n) \to 0$, de $\xi_n \overset{\|\cdot\|_1}{\not\to} 0$.

4. Adjunk példát olyan $\xi, \xi_2, \ldots$ véletlen változó sorozatra, melyre $\xi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} \xi$ valamely ξ véletlen változó és valamely $r > 0$ esetén, de $\xi_n \overset{\text{m.b.}}{\not\to} \xi$.

5. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, $(0,1)$-en egyenletes eloszlású véletlen változók, és $p \in [-\infty,\infty]$. Létezik-e olyan $c_p \in [0,\infty]$, melyre $M_p(\xi_1,\ldots,\xi_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} c_p$, ahol $M_p(a_1,\ldots,a_n)$ az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok p-edik hatványközepe:

$$M(a_1,\ldots,a_n) := \begin{cases} \min\{a_1,\ldots,a_n\} & \text{ha } p = -\infty, \\ \left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } p \in (-\infty,0)\cup(0,\infty), \\ \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} & \text{ha } p = 0, \\ \max\{a_1,\ldots,a_n\} & \text{ha } p = \infty. \end{cases}$$

9-10. hét (november 7-8)

1. Bizonyítandó, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n})\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

2. Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{2}{3}.$$

3. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ olyan független véletlen változók, melyekre valamely $\alpha < \frac{1}{2}$ esetén $\mathrm{P}(\xi_n = n^\alpha) = \mathrm{P}(\xi_n = -n^\alpha) = \frac{1}{2}$. Bizonyítandó, hogy $\overline{\xi}_n := \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

11. hét (november 14-15)

1. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ olyan független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathrm{E}(|\xi_1|) < \infty$, és jelölje $\overline{\xi}_n := \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$. Bizonyítandó, hogy $\mathrm{E}(\xi_k | \overline{\xi}_n) = \overline{\xi}_n$ majdnem biztosan tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén.

2. A ξ_1 véletlen változó legyen egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, a ξ_2 véletlen változó legyen egyenletes eloszlású a $(\xi_1, \xi_1 + 1)$ intervallumon, a ξ_3 véletlen változó legyen egyenletes eloszlású a $(\xi_2, \xi_2 + 1)$ intervallumon, és így tovább. Határozza meg ξ_n várható értékét.

3. A (ξ, η) véletlen vektor legyen standard normális eloszlású. Jelölje $(\varrho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ a (ξ, η) polárkoordinátáit, azaz $\xi = \varrho \cos \varphi$, $\eta = \varrho \sin \varphi$. Bizonyítandó, hogy φ feltételes eloszlása ϱ-ra nézve egyenletes eloszlás a $[0, 2\pi)$ intervallumon. Hogyan lehet ezt az eredményt általánosítani magasabb dimenzióra?

4. A ξ véletlen változó legyen egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, az η véletlen változó legyen ξ paraméterű exponenciális eloszlású. Határozza meg η sűrűségfüggvényét és várható értékét.

12. hét (november 21-22)

1. Legyen (ξ, η) normális eloszlású véletlen vektor.

   (a) Határozza meg a ξ véletlen változó feltételes eloszlását a $\xi+\eta$ véletlen változóra vonatkozóan.

   (b) Határozza meg az $\mathrm{E}(\xi \,|\, \xi+\eta = z)$ feltételes várható értéket és a $\mathrm{Var}(\xi \,|\, \xi+\eta = z)$ feltételes varianciát is.

2. Konstruáljon olyan (ξ, η) véletlen vektort, mely nem normális eloszlású, de ξ és η is normális eloszlású véletlen változó.

3. Legyenek ξ és η független exponenciális eloszlású véletlen változók λ, illetve μ paraméterrel. Határozza meg a ξ véletlen változó feltételes eloszlását a $\xi+\eta$ véletlen változóra vonatkozóan. Határozza meg az $\mathrm{E}(\xi \,|\, \xi + \eta = z)$ feltételes várható értéket is.

4. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független exponenciális eloszlású véletlen változók λ paraméterrel. Jelölje $S_k := \xi_1 + \cdots + \xi_k$ ha $k \in \mathbb{N}$, és legyen $S_0 := 0$. Legyen T pozitív szám.

   (a) Tekintsük azt az η_T véletlen változót, melynek értéke $\eta_T(\omega) := k$ valamely $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $S_k(\omega) \leqslant T < S_{k+1}$. Határozza meg η_T eloszlását.

   (b) Határozza meg S_1 feltételes eloszlását az $\eta_T = k$ feltételre vonatkozóan.

   (c) Határozza meg $(S_1, \ldots, S_k)$ feltételes eloszlását az $\eta_T = k$ feltételre vonatkozóan.

13. hét (november 28-29)

1. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ olyan független véletlen változók, melyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 2^n)$. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy teljesül a centrális határeloszlás-tétel, azaz
$$\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1),$$
de nem teljesül a Lindeberg-feltétel.

2. Legyen q pozitív egész, és legyeken $\varepsilon_{1-q}, \varepsilon_{2-q}, \ldots, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, melyekre $\mathrm{E}(|\varepsilon_1|) < \infty$. Legyenek $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ valós számok, és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n := \alpha_0\varepsilon_n + \alpha_1\varepsilon_{n-1} + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{n-q}$. Bizonyítandó, hogy ekkor
$$\overline{\xi}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathrm{E}(\varepsilon_1)\sum_{j=0}^{q} \alpha_j.$$