Kockázati folyamatok gyakorló feladatok

Összetett eloszlások

1. a. Feldobok egy dobókockát, majd utánna annyi dobókockát, amennyi az első dobás eredménye. Adjuk meg a második dobás során a kapott értékek összegének eloszlását, karakterisztikus függvényét, várható értékét és szórását.

b. Addig dobok egy szabályos dobókockával, míg 4-nél nagyobb értéket nem kapok. Adjuk meg a dobások összegének eloszlását, momentumgeneráló függvényét, várható értékét és szórását.

2. Egy biztosítónál a lakásbiztosítások portfoliójában a kárbejelentések exponenciális időközönként érkeznek, havonta átlagosan 20. Az egyes kárértékek szintén exponenciális eloszlást követnek 5 millió forintos átlaggal. Feltehető, hogy az egyes kárértékek függetlenek egymástól és a kárszámfolyamattól.

a. Adjuk meg az egy hónapra jutó kárszám illetve az egy hónapra jutó teljes kárérték eloszlását, momentumgeneráló függvényét, várható értékét és szórását. Mennyi a biztosítás igazságos díja, ha havonta átlagosan a biztosítottak 0,02 százaléka szenved el kárt.

b. Tegyük fel, hogy január hónapban csak 10 káresemény volt, de meglepően magas, átlagosan 10 millió forint értékben. Mit mondhatunk, várhatóan hány káresemény lesz és összesen milyen értékben az év első felében?

c. Tegyük fel, hogy a kár értékétől függetlenül a biztosító rendre 5 százalék eséllyel nem fizet egy-egy biztosítottnak. Határozzuk meg az egy káreseményre jutó kifizetés eloszlását és várható értékét. Adjuk meg az egy hónapra jutó kárszám illetve kárérték eloszlását és várható értékét.

d. A biztosítónál külön alkalmazott kezeli a kicsi (várható érték alatt) és a nagy (várható érték feletti) károkat. A bejelentések mekkora hányada kis illetve nagy kár? Adjuk meg a kis illetve nagy kárértékek eloszlását. Határozzuk meg az egyes típusokhoz tartozó kárszám- és kárérték folyamat eloszlását. Ha január és február hónapban 30 kis értékű bejelentés volt összesen 60 millió forint értékben, akkor váthatóan összesen (a nagy értékű károkat is figyelembe véve) hány bejelentés jut és mekkora értékben az év első három hónapjára?

e. A biztosítónak van egy prémium biztosítási csomagja is, melyben szintén exponenciális időközönként érkeznek a bejelentések, havonta átlagosan 5, és a kárétékek millió forintban számolva egyenletes eloszlást követnek a [10,20] intervallumon. Feltehető, hogy a prémium és az alap portfólió minden szempontból független egymástól. Tegyük fel, hogy egyesítjük a két biztosítási portfóliót. Adjuk meg az egy hónapra jutó teljes kárérték eloszlását, karakterisztikus függvényét, várható értékét és szórását.

Felújítási egyenletek

1. Egy tetszőleges N_t, $t \geq 0$, felújítási folyamatot alapul véve tekintsük az alábbi $A(t)$, $t \geq 0$, függvényeket, írjunk fel olyan felújítási egyenleteket, melyeknek ezen A függvények a megoldásaik, és adjunk explicit formulát az egyenletek megoldásra. Továbbá, megfelelő matematikai feltételek mellett adjuk meg az A függvények végtelenben vett határértékét, valamint a Poisson-folyamat esetében adjuk meg az A függvények pontos értékét. Feltehető, hogy az A függvények lokálisan korlátosak.

a. A $t \geq 0$ rögzített időpont utáni első, illetve k-adik felújítás időpontjának várható értéke: $A(t) = E(S_{N_t+1})$, $A_k(t) = E(S_{N_t+k})$, $k \geq 1$.

b. A $t \geq 0$ időpont előtti utolsó felújítás időpontjának várható értéke: $A(t) = E(S_{N_t})$.

c. A folyamat pontonkénti második momentuma: $A(t) = E(N_t^2)$.

d. A rendszer teljes élettartamának a várható értéke: $A(t) = E(X_{N_t+1})$.

e. A rendszer élettartamának eloszlása: $A_y(t) = P(X_{N_t+1} > y)$, $y \geq 0$.

Kockázati folyamatok

Az alábbi feladatokban tegyük fel, hogy teljesülnek a klasszikus rizikófolyamatot definiáló tulajdonságok. Minden feladatban $\lambda > 0$ jelöli a kárszámfolyamat intenzitását, $\mu \geq 0$ az egyedi károk várható értékét és $c > 0$ az egységnyi időre jutó díjbevételt. Emellett

$$F_0(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \big[1 - F(z)\big]\, dz\,, \qquad x \geq 0\,.$$

1. Tegyük fel, hogy az egyedi károk χ^2-eloszlást követnek $k = 2$ szabadsági fokkal, tehát eloszlásban $Z = V_1^2 + V_2^2$, ahol V_1 és V_2 független standard normális eloszlású véletlen változó. Legyen továbbá $\lambda = 1$ és $c = 10$. Adjuk meg a káreloszlás várható értékét és momentumgeneráló függvényét. Határozzuk meg az R Lundberg kitevőt, majd írjuk fel a csődvalószínűség asszimptotikus viselkedését. Mekkora legyen az u kezdőtőke, ha az a célunk, hogy a csőd valószínűsége 0,1% alatt legyen?

2. Tegyük fel, hogy az egyedi károk Burr-eloszlást követnek $\alpha, \beta > 0$ paraméterrel, tehát az eloszlásfüggvényük

$$F(z) = 1 - \big(1 + x^\beta\big)^{-\alpha}\,, \qquad z \geq 0\,,$$

továbbá tegyük fel, hogy $c > \lambda\mu$. Milyen α és β értékek mellett lesz F_0 szubexponenciális eloszlásfüggvény? Írjuk fel ezekben az esetekben a csődvalószínűség asszimptotikus viselkedését.

3. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a módosítással, hogy az egyedi károk Weibull-eloszlást követnek $\alpha, \bar{\lambda} > 0$ paraméterrel, melynek eloszlásfüggvénye

$$F(z) = 1 - e^{-(x/\bar{\lambda})^\alpha}\,, \qquad z \geq 0\,.$$

4. A biztosítónkhoz egy év alatt 240 kárbejelentés érkezett, melyek összértéke 48 millió forint. Amennyiben az időegységet 1 hónapnak válaszjuk, akkor a kárnagyságok, mint statisztikai minta alapján felírt G_T függvény jó közelítéssel

$$G_T(r) = r^2 - 10r\,, \qquad r \in \mathbb{R}\,.$$

A biztosító havonta 5 millió forint díjat szed be, jelenlegi tőkéje 100 millió forint. Feltehető, hogy teljesülnek a Lundberg-kitevő létezését garantáló elméleti feltételek. Adjunk becslést a Lundberg-kitevőre és a csőd valószínűségére. Adjunk 99% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a Lundberg kitevőre és a csőd valószínűségére.