# Kockázati folyamatok

Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék

Utolsó frissítés: 2017. március 8.

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Alapozó ismeretek

## 1.1. Összetett eloszlások, az összetett Poisson-eloszlás

**1.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy $X$ véletlen változó **összetett eloszlású**, ha léteznek $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ független és azonos eloszlású változók, valamint egy tőlük független nemnegatív egész értékű $N$ változó, hogy az $S_N = Z_1 + \cdots + Z_N$ összeg eloszlása megegyezik $X$ eloszlásával.

Jegyezzük meg, hogy abból, hogy az $X$ változó összetett eloszlású, még nem következik, hogy 1 valószínűséggel előáll független és azonos eloszlású változóknak egy véletlen tagszámú összegeként. Ennek egy oka lehet például az, hogy a valószínűségi mező, melyen az $X$ változó értelmezve van, nem elég gazdag, ami azt jelenti, hogy nem tartalmaz elegendően sok kimenetelt ahhoz, hogy a fenti egymástól független változókat megkonstruálhassuk rajta. Házi feladat ilyen példát mutatni.

**1.2. Definíció.** Ha az $X$ változó összetett eloszlású, és az $N$ tagszám Poisson-eloszlást követ, akkor azt mondjuk, hogy az $X$ változó **összetett Poisson-eloszlású**. A továbbiakban az összetett Poisson-eloszlásra az $X \sim \mathrm{Po}(\lambda, F)$ jelölést fogjuk használni, ahol a $\lambda$ az $N$ változó paramétere, és $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, a $Z$ változó eloszlásfüggvénye.

Hasonló meggondolásból azt mondjuk, hogy az $X$ változó **összetett negatív binomiális eloszlást** követ, ha összetett eloszlású, és az $N$ változó eloszlása negatív binomiális.

Az összetett Poisson-eloszlással a hallgatóknak már találkozniuk kellett a korábbi félévek során. Házi feladat átismételni, hogy mi az a Panjer-rekurzió.

**1.3. Definíció.** Egy tetszőleges eloszlású $X$ véletlen változóra három különböző **generátorfüggvényt** szokás definiálni.

- **Karakterisztikus függvény**: $\phi_X(t) = E(e^{itX})$.
- **Momentumgeneráló függvény**: $M_X(t) = E(e^{tX})$.
- **Valószínűségi generátorfüggvény**: $g_X(t) = E(t^X)$.

A generátorfüggvények közös jellemzője, hogy ténylegesen nem az $X$ változótól, hanem csak a változó eloszlásától függnek. Továbbá, meg is határozzák az eloszlást, tehát különböző eloszlású változóknak különbözőek a generátorfüggvényeik. A leghasznosabb jellemzőjük a multiplikatív tulajdonság, ami azt jelenti, hogy független változók összegének a generátorfüggvénye felírható, mint a külön-külön vett generátorfüggvények szorzata. Értelmezési tartomány és értékkészlet szempontjából viszont jelentős különbségek vannak a három függvény között:

- A karakterisztikus függvény tetszőleges $X$ változó esetén az egész valós egyenesen értelmezett, de általában nem valós, hanem komplex értékű.
- A momentumgeneráló függvény általában nem értelmezhető az egész valós egyenesen. Nemnegatív értékű $X$ változó esetén a momentumgeneráló függvény jól definiált a negatív félegyenesen, továbbá $0 \le M_X(t) \le 1$, ha $t \le 0$.
- A valószínűségi generátorfüggvény általában szintén nem értelmezhető az egész valós egyenesen. Nemnegatív értékű $X$ változó esetén a függvény jól definiált a $[0,1)$ intervallumon, és $0 \le g_X(t) < 1$, ha $0 \le t < 1$.

A következő állítás az összetett eloszlások karakterisztikus és momentumgeneráló függvényével foglalkozik, a rákövetkező tétel pedig a várható értékre és a szórásra ad formulát.

**1.4. Állítás.** *Ha az $X$ változó összetett eloszlást követ, és $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_N = Z_1 + \cdots + Z_N$, akkor*

$$\phi_X(t) = g_N\big(\phi_Z(t)\big) \qquad \text{és} \qquad M_X(t) = g_N\big(M_Z(t)\big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

*Bizonyítás.* Csak a második egyenlőséget bizonyítjuk, a karakterisztikus függvényre vonatkozó azonosság ugyanígy vezethető le. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ mellett a teljes várható érték tételével

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\big(e^{tS_N}\big) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\big[e^{t(Z_1+\cdots+Z_N)} \mid N=n\big] P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\big[e^{t(Z_1+\cdots+Z_n)}\big] P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\big(e^{tZ_1}\big) \cdots E\big(e^{tZ_n}\big) P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \big[M_Z(t)\big]^n P(N=n) = g_N\big(M_Z(t)\big)\,, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy az $N$ diszkrét változóra

$$g_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(N=n)\,, \qquad t \ge 0\,. \qquad \square$$

**1.5. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $X$ összetett eloszlású, és $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_N = Z_1 + \cdots + Z_N$.*

(i) ***Wald első azonossága.*** *Ha $E(N)$ és $E(Z)$ véges, akkor $E(X) = E(N)E(Z)$.*

(ii) ***Wald második azonossága.*** *Ha $N$ és $Z$ véges szórású, akkor*

$$D^2(X) = E(N)D^2(Z) + D^2(N)\big(E(Z)\big)^2\,.$$

*Bizonyítás.* (i) A teljes várható érték tételével

$$
\begin{aligned}
E(X) = E(S_N) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\big[Z_1 + \cdots + Z_N \mid N = n\big] P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\big[Z_1 + \cdots + Z_n\big] P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nE(Z)P(N = n) = E(N)E(Z)\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Teleszkopikus összeget alkalamazva kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
D^2(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 &= E\Big(\big[S_N - NE(Z)\big] + \big[NE(Z) - E(N)E(Z)\big]\Big)^2 \\
&= E\big(S_N - NE(Z)\big)^2 + E\big(NE(Z) - E(N)E(Z)\big)^2 \\
&\quad + 2E\Big(\big[S_N - NE(Z)\big]\,\big[NE(Z) - E(N)E(Z)\big]\Big)
\end{aligned}
$$

A teljes várható érték tételével az első tag

$$
\begin{aligned}
&E\big(S_N - NE(Z)\big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\big(S_N - NE(Z)\big)^2 \mid N = n\Big] P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\big(S_n - nE(Z)\big)^2 P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} D^2(S_n) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} D^2\big(Z_1 + \cdots + Z_n\big) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nD^2(Z) P(N = n) = E(N)D^2(Z)\,.
\end{aligned}
$$

Felhasználva, hogy tetszőleges $n$ esetén $E(S_n - nE(Z)) = 0$, azonnal adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\big[S_N - NE(Z)\big]\,\big[NE(Z) - E(N)E(Z)\big]\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(\big[S_N - NE(Z)\big]\,\big[NE(Z) - E(N)E(Z)\big] \mid N = n\Big) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big[nE(Z) - E(N)E(Z)\big] E\big(S_n - nE(Z)\big) P(N = n) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Ekkor az $X$ változó szórásnégyzete

$$
D^2(X) = E(N)D^2(Z) + E\big(N - E(N)\big)^2 \big(E(Z)\big)^2 + 0\,,
$$

amiből az bizonyítandó egyenlőség már jön. □

Ha az $N$ változó $\lambda$ paraméteres Poisson-eloszlást követ, akkor várható értéke, szórásnégyzete illetve valószínűségi generátorfüggvénye

$$
E(N) = D^2(N) = \lambda \qquad \text{és} \qquad g_N(t) = e^{\lambda(t-1)}\,, \quad t \in [0,1]\,.
$$

Ekkor az 1.4 Állításból és az 1.5 Tételből azonnal jönnek a következő észrevételek.

**1.6. Következmény.** *Ha $X$ összetett Poisson-eloszlású változó, és $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Z_1 + \cdots + Z_N$, ahol az összeg tagszáma $\lambda$ paraméteres Poisson, akkor az $X$ változó várható értéke, szórásnégyzete, valamint karakterisztikus és momentumgeneráló függvénye*

$$E(X) = \lambda E(Z), \qquad D^2(X) = \lambda\Big(D^2(Z) + \big[E(Z)\big]^2\Big),$$

$$\phi_X(t) = \exp\Big(\lambda\big[\phi_Z(t) - 1\big]\Big), \qquad M_X(t) = \exp\Big(\lambda\big[M_Z(t) - 1\big]\Big).$$

Az összetett Poisson-eloszlások családja zárt számos műveletekre. Az alfejezet további részében ezzel kapcsolatban fogalmazunk meg állításokat.

**1.7. Állítás.** *Ha $X \sim \mathrm{Po}(\lambda, F)$ és $Y \sim \mathrm{Po}(\mu, G)$, továbbá $X$ és $Y$ független egymástól, akkor $X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda + \mu, H)$, ahol*

$$H(x) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} F(x) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} G(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*Bizonyítás.* Legyen most $Z \sim F$ és $V \sim G$ tetszőleges változó. Ekkor $X$ és $Y$ függetlensége miatt az 1.6. Következmény alkalmazásával

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) M_Y(t) = \exp\Big(\lambda\big[M_Z(t) - 1\big]\Big) \exp\Big(\mu\big[M_V(t) - 1\big]\Big) \\ &= \exp\left((\lambda+\mu)\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} M_Z(t) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} M_V(t) - 1\right]\right) \\ &=: \exp\Big((\lambda+\mu)\big[M(t) - 1\big]\Big), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy a $H$ függvény eloszlásfüggvény, hiszen monoton nő, mindenhol jobbról folytonos, továbbá határértéke a plusz és a minus végtelenben 1 illetve 0. Ez azt jelenti, hogy az állítás igazolásához elég annyit megmutatni, hogy az előző formulában definiált $M$ függvény a $H$ momentumgeneráló függvénye. Viszont a momentumgeneráló függvények definíciójával

$$\begin{aligned} M_H(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dH(x) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dF(x) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dG(x) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} M_Z(t) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} M_V(t) = M(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

és készen vagyunk. □

Az előző állítás szerint az $X + Y$ változó eloszlása felírható egy véletlen tagszámú összegként, ahol az összeg tagszáma $\lambda + \mu$ paraméteres Poisson-eloszlást követ, és az összeg tagjainak $H$ az eloszlásfüggvénye. Felmerülhet a kérdés, hogy mit mondhatunk az összeg tipikus tagjáról, mit is fejez ki a $H$ eloszlásfüggvény. Az

$$X + Y = \big(Z_1 + \cdots + Z_N\big) + \big(V_1 + \cdots + V_M\big)$$

összeghez az $X$ és az $Y$ változó várhatóan $\lambda$ illetve $\mu$ taggal járul hozzá. Heurisztikusan ez azt jelenti, hogy a teljes összeg egy véletlen tagjára rábökve ez a tag $\lambda/(\lambda+\mu)$ valószínűséggel lesz a $Z_i$, és $\mu/(\lambda+\mu)$ valószínűséggel lesz a $V_i$ változók egyike. Tehát heurisztikusan az $X+Y$ összeg tipikus eleme az alábbi **összetett eloszlást** követi:

$$W = \begin{cases} Z\,, & \lambda/(\lambda+\mu) \text{ valószínűséggel,} \\ V\,, & \mu/(\lambda+\mu) \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Kiderül, hogy ez a heurisztika helyes. Az előző állítás szerint az $X+Y$ összetett Poisson-eloszlás tipikus tagjának $H$ az eloszlásfüggvénye. Most viszont

$$\begin{aligned} P(W \le x) &= P\big(W \le x \,|\, W = Z\big)P(W = Z) + P\big(W \le x \,|\, W = V\big)P(W = V) \\ &= P(Z \le x)\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + P(V \le x)\frac{\mu}{\lambda+\mu} = H(x)\,, \end{aligned}$$

tehát a tipikus tagok azonos eloszlásúak a $W$ változóval.

**1.8. Következmény.** *Ha $X$ és $Y$ független Poisson-eloszlású változó rendre $\lambda$ és $\mu$ paraméterrel, akkor $X+Y$ Poisson-eloszlást követ $\lambda+\mu$ paraméterrel.*

*Bizonyítás.* Vegyük észre, hogy az $X$ változó felfogható, mint egy olyan összeg, melynek $X$ tagja van, és a tagok determinisztikusan az 1 értéket veszik fel. Tehát, ha $\delta_1$ jelöli az 1 pontban degenerált eloszlást, akkor

$$X \sim \mathrm{Po}(\lambda, \delta_1) \qquad \text{és} \qquad Y \sim \mathrm{Po}(\mu, \delta_1)\,.$$

Ekkor az 1.7. Állítás értelmében $X+Y \sim \mathrm{Po}(\lambda+\mu, \delta_1)$, vagyik az $X+Y$ változó $\lambda+\mu$ paraméteres Poisson-eloszlást követ. □

**1.9. Definíció.** Legyen $N$ nemnegatív egész értékű véletlen változó, továbbá legyenek az $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \ldots \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ változók független egymástól és az $N$ véletlen változótól. Ekkor az $M = \mathbb{1}_1 + \cdots + \mathbb{1}_N$ összeget az $N$ nemnegatív egész értékű változó $p$ valószínűség szerinti **ritkításának**, az $(M, N-M)$ párt pedig a **Bernoulli-felbontásának** nevezzük.

**1.10. Definíció.** Legyenek a $Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ és $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \ldots \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ változók függetlenek egymástól és az $N$ nemnegatív egész értékű véletlen változótól, és legyen

$$X = Z_1 + \cdots + Z_N \qquad \text{és} \qquad Y = Z_1\mathbb{1}_1 + \cdots + Z_N\mathbb{1}_N\,.$$

Ekkor az $Y$ változót az $X$ összetett eloszlású változó $p$ valószínűség szerinti **ritkításának**, az $(Y, X-Y)$ párt pedig a $p$ szerinti **Bernoulli-felbontásának** nevezzük.

Az $N$ nemnegatív egész értékű változó Bernoulli-felbontását úgy lehet elképzelni, hogy tekintünk egy $N$ elemű halmazt, és a halmazból az elemeket egymástól függetlenül rendre $1-p$ valószínűséggel kidobjuk. Ekkor a megmaradt elemek száma $M$, a kidobott elemek száma $N-M$. Hasonló a helyzet az összetett eloszlások Bernoulli-felbontásánál, ahol az $X$ változót definiáló összeg tagjait dobáljuk ki véletlenszerűen az összegből.

**1.11. Állítás.** *Legyen $X \sim \mathrm{Po}(\lambda, F)$, továbbá legyen $Y$ az $X$ változó $p$ szerinti ritkítása. Ekkor $Y \sim \mathrm{Po}(p\lambda, F)$ és $X-Y \sim \mathrm{Po}((1-p)\lambda, F)$, valamint $Y$ és $X-Y$ független egymástól.*

*Bizonyítás.* A Bernoulli-felbontásban szereplő jelöléseknek megfelelően reprezentáljuk az $X$ változót $X = Z_1 + \cdots + Z_N$ alakban, és legyen $Y = Z_1 \mathbb{1}_1 + \cdots + Z_N \mathbb{1}_N$. Vegyük észre, hogy a második összegben a $Z_1\mathbb{1}_1, Z_2\mathbb{1}_2, \ldots$ tagok függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá függetlenek az $N$ tagszámtól is, ami azt jelenti, hogy $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda, G)$, ahol $G$ a $Z\mathbb{1}$ változó eloszlásfüggvénye. Ekkor a teljes valószínűség tételével

$$\begin{aligned} G(x) &= P\big(Z\mathbb{1} \le x\big) = P\big(Z\mathbb{1} \le x \mid \mathbb{1} = 1\big) P(\mathbb{1} = 1) + P\big(Z\mathbb{1} \le x \mid \mathbb{1} = 0\big) P(\mathbb{1} = 0) \\ &= P(Z \le x)p + P(0 \le x)(1-p) = pF(x) + (1-p)\mathbb{1}_{\{x \ge 0\}} \,. \end{aligned}$$

A kapcsolatos momentumgeneráló függvény

$$M_G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dG(x) = p \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dF(x) + (1-p) \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, d\mathbb{1}_{\{x \ge 0\}} = pM_F(t) + (1-p)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ekkor az 1.6. Következmény szerint az $Y$ változó momentumgeneráló függvénye

$$M_Y(t) = \exp\Big(\lambda\big[M_G(t) - 1\big]\Big) = \exp\Big((p\lambda)\big[M_F(t) - 1\big]\Big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

ami viszont azonos a $\mathrm{Po}(p\lambda, F)$ összetett Poisson-eloszlás momentumgeneráló függvényével. Ebből azonnal jön, hogy $Y \sim \mathrm{Po}(p\lambda, F)$.

Egyszerű algebrával adódik, hogy

$$X - Y = Z_1(1 - \mathbb{1}_1) + \cdots + Z_N(1 - \mathbb{1}_N)\,.$$

Vegyük észre, hogy a fenti összegben az $1 - \mathbb{1}_1, 1 - \mathbb{1}_2, \ldots$ változók függetlenek egymástól és az $X$ változótól, továbbá azonosan $1-p$ paraméteres Bernoulli-eloszlást követnek. Ez azt jelenti, hogy az $X - Y$ az $X$ változónak egy $1-p$ valószínűség szerinti ritkítása, és a bizonyítás eddigi eredményeit alkalmazva kapjuk, hogy $X - Y \sim \mathrm{Po}((1-p)\lambda, F)$. Ez egyben azt is jelenti, hogy az $X - Y$ változó momentumgeneráló függvénye

$$M_{X-Y}(t) = \exp\Big((1-p)\lambda\big[M_F(t) - 1\big]\Big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Már csak az maradt hátra, hogy megmutassuk az $Y$ és az $X - Y$ változó függetlenségét. Ehez szükségünk lesz a két változó együttes momentumgeneráló függvényére, ami az

$$M_{Y,X-Y}(s,t) = E\big(e^{sY + t(X-Y)}\big)\,, \qquad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

formulával definiálható. A karakterisztikus függvények elméletével analóg módon bebizonyítható, hogy két véletlen változó pontosan akkor független egymástól, ha az együttes momentumgeneráló függvényük előáll, mint a külön-külön vett momentumgeneráló függvények szorzata. Tehát, a jelen bizonyításban a függetlenséghez elég azt megmutatni, hogy $M_{Y,X-Y}(s,t) = M_Y(s)M_{X-Y}(t)$ minden $s,t \in \mathbb{R}$ értékre. Induljunk ki a bizonyítandó egyenlőség bal oldalából:

$$\begin{aligned}
M_{Y,X-Y}(s,t) &= E\Big(\exp\Big[sY + t(X-Y)\Big]\Big) \\
&= E\Big(\exp\Big[s\big(Z_1\mathbb{1}_1 + \cdots + Z_N\mathbb{1}_N\big) + t\big(Z_1(1-\mathbb{1}_1) + \cdots + Z_N(1-\mathbb{1}_N)\big)\Big]\Big) \\
&= E\Big(\exp\Big[1\Big(Z_1\big[s\mathbb{1}_1 + t(1-\mathbb{1}_1)\big] + \cdots + Z_N\big[s\mathbb{1}_N + t(1-\mathbb{1}_N)\big]\Big)\Big]\Big) \\
&= E\big(\exp\big[1W\big]\big) = M_W(1)\,,
\end{aligned}$$

ahol a

$$W = Z_1\big[s\mathbb{1}_1 + t(1-\mathbb{1}_1)\big] + \cdots + Z_N\big[s\mathbb{1}_N + t(1-\mathbb{1}_N)\big]$$

változó szintén összetett Poisson-eloszlású. A $W$ változót definiálló összegben az általános tag eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}
H(x) &:= P\Big(Z\big[s\mathbb{1} + t(1-\mathbb{1})\big] \le x\Big) \\
&= P\Big(Z\big[s\mathbb{1} + t(1-\mathbb{1})\big] \le x \mid \mathbb{1} = 1\Big)P(\mathbb{1} = 1) + P\Big(Z\big[s\mathbb{1} + t(1-\mathbb{1})\big] \le x \mid \mathbb{1} = 0\Big)P(\mathbb{1} = 0) \\
&= P(Zs \le x)p + P(Zt \le x)(1-p) = pF_{sZ}(x) + (1-p)F_{tZ}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

amiből az általános tag momentumgeneráló függvénye

$$\begin{aligned}
M_H(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\tau x}\, dH(x) = p\int_{\mathbb{R}} e^{\tau x}\, dF_{sZ}(x) + (1-p)\int_{\mathbb{R}} e^{\tau x}\, dF_{tZ}(x) \\
&= pM_{sZ}(\tau) + (1-p)M_{tZ}(\tau) = pE\big(e^{(s\tau)Z}\big) + (1-p)E\big(e^{(t\tau)Z}\big) \\
&= pM_Z(s\tau) + (1-p)M_Z(t\tau)\,, \qquad \tau \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Ekkor az összetett Poisson-eloszlások momentumgeneráló függvényével

$$\begin{aligned}
M_{Y,X-Y}(s,t) &= M_W(1) = \exp\Big(\lambda\big[M_H(1) - 1\big]\Big) = \exp\Big(\lambda\big[pM_Z(s) + (1-p)M_Z(t) - 1\big]\Big) \\
&= \exp\Big(p\lambda\big[M_Z(s) - 1\big]\Big)\exp\Big((1-p)\lambda\big[M_Z(t) - 1\big]\Big) = M_Y(s)M_{X-Y}(t)\,, \qquad s,t \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

amivel a függetlenséget is sikerült bebizonyítani. □

**1.12. Következmény.** *Legyen $N$ Poisson-eloszlású változó $\lambda$ paraméterrel, továbbá legyen $M$ az $N$ változó $p$ valószínűség szerinti ritkítása. Ekkor $M$ és $N-M$ Poisson-eloszlást követ rendre $p\lambda$ és $(1-p)\lambda$ paraméterrel, továbbá a két változó független egymástól.*

*Bizonyítás.* A levezetés ugyanazon az észrevételen alapul, mint az 1.8. Következmény bizonyítása, azon, hogy a Poisson-eloszlások felfoghatóak összetett Poisson-eloszlásként. A részleteket az olvasóra bízzuk. □

**1.13. Állítás.** *Legyen $Z, Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ és $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ független véletlen változó. Rögzítsünk egy tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ Borel-halmazt, és legyen $A = \{Z \in B\}$ valamint $p = P(Z \in B)$. Tekintsük továbbá az*

$$X = Z_1 + \cdots + Z_N \qquad \textit{és} \qquad Y = Z_1\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} + \cdots + Z_N\mathbb{1}_{\{Z_N \in B\}}\,.$$

*változókat, és az*

$$F_{Z|A}(x) = P\big(Z \le x \,|\, A\big)\,, \qquad F_{Z|\bar{A}}(x) = P\big(Z \le x \,|\, \bar{A}\big)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

*feltételes eloszlásfüggvényeket. Ekkor*

$$Y \sim \mathrm{Po}\big(p\lambda, F_{Z|A}\big) \qquad \text{és} \qquad X - Y \sim \mathrm{Po}\big((1-p)\lambda, F_{Z|\bar{A}}\big)\,,$$

*továbbá $Y$ és $X-Y$ független egymástól.*

*Bizonyítás.* A levezetés több lépésből áll, a gondolatmenet az 1.11. Állítás bizonyításában bemutatott utat követi. Az $Y$ változó definíciójából azonnal jön, hogy $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda, G)$, ahol $G$ a $Z\mathbb{1}_{\{Z\in B\}}$ általános tag eloszlásfüggvénye, tehát

$$\begin{aligned} G(x) &= P\big(Z\mathbb{1}_{\{Z\in B\}} \le x\big) \\ &= P\big(Z\mathbb{1}_{\{Z\in B\}} \le x \,|\, Z \in B\big)P(Z\in B) + P\big(Z\mathbb{1}_{\{Z\in B\}} \le x \,|\, Z \notin B\big)P(Z \notin B) \\ &= P\big(Z \le x \,|\, A\big)p + P(0 \le x)(1-p) = pF_{Z|A}(x) + (1-p)\mathbb{1}_{\{x\ge 0\}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

A kapcsolatos momentumgeneráló függvény

$$M_G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dG(x) = p\int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dF_{Z|A}(x) + (1-p)\int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, d\mathbb{1}_{\{x\ge 0\}} = pM_{F_{Z|A}}(t) + (1-p)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

amiből az $Y$ összetett Poisson-eloszlású változó momentumgeneráló függvénye

$$M_Y(t) = \exp\Big(\lambda\big[M_G(t) - 1\big]\Big) = \exp\Big(p\lambda\big[M_{F_{Z|A}}(t) - 1\big]\Big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ebből azonnal következik, hogy $Y \sim \mathrm{Po}(p\lambda, F_{Z|A})$.

A bizonyítás következő lépéseként vegyük észre, hogy

$$X - Y = Z_1\mathbb{1}_{\{Z_1\in\bar{B}\}} + \cdots + Z_N\mathbb{1}_{\{Z_N\in\bar{B}\}}\,,$$

amiből a bizonyítás eddigi eredményeit alkalmazva azonnal következik, hogy $X-Y$ összetett Poisson-eloszlást követ az állításban szereplő paraméterekkel.

Az utolsó lépésben $Y$ és $X-Y$ függetlenségét mutatjuk meg. A két változó együttes momentumgeneráló függvénye

$$\begin{aligned} M_{Y,X-Y}(s,t) &= E\Big(\exp\big[sY + t(X-Y)\big]\Big) \\ &= E\Big(\exp\Big[Z_1\big(s\mathbb{1}_{\{Z_1\in B\}} + t\mathbb{1}_{\{Z_1\in\bar{B}\}}\big) + \cdots + Z_N\big(s\mathbb{1}_{\{Z_N\in B\}} + t\mathbb{1}_{\{Z_N\in\bar{B}\}}\big)\Big]\Big) \\ &=: E\big(1\cdot\exp[W]\big) = M_W(1)\,, \end{aligned}$$

ahol a $W$ változó összetett Poisson-eloszlást követ, és az általános tag eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} G(x) &= P\Big(Z\big(s\mathbb{1}_{\{Z_N\in B\}} + t\mathbb{1}_{\{Z_N\in\bar{B}\}}\big) \le x\Big) \\ &= P\Big(Z\big(s\mathbb{1}_{\{Z_N\in B\}} + t\mathbb{1}_{\{Z_N\in\bar{B}\}}\big) \le x \,|\, Z \in B\Big)P(Z\in B) \\ &\qquad + P\Big(Z\big(s\mathbb{1}_{\{Z_N\in B\}} + t\mathbb{1}_{\{Z_N\in\bar{B}\}}\big) \le x \,|\, Z \in \bar{B}\Big)P(Z\in\bar{B}) \\ &= P\big(Zs \le x \,|\, A\big)P(A) + P\big(Zt \le x \,|\, \bar{A}\big)P(\bar{A}) \\ &= pF_{Zs|A}(x) + (1-p)F_{Zt|\bar{A}}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

A kapcsolatos momentumgeneráló függvény

$$\begin{aligned}M_G(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\tau x}\,dG(x) = p\int_{\mathbb{R}} e^{\tau x}\,dF_{Zs|A}(x) + (1-p)\int_{\mathbb{R}} e^{\tau x}\,dF_{Zt|\bar{A}}(x)\\ &= pE\big(e^{\tau sZ}\mid A\big) + (1-p)E\big(e^{\tau tZ}\mid \bar{A}\big) = pM_{F_{Z|A}}(\tau s) + (1-p)M_{F_{Z|\bar{A}}}(\tau t)\,,\end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned}&M_{Y,X-Y}(s,t) = M_W(1) = \exp\Big(\lambda\big[M_G(1)-1\big]\Big)\\ &= \exp\Big(p\lambda\big[M_{F_{Z|A}}(s)-1\big]\Big)\exp\Big((1-p)\lambda\big[M_{F_{Z|\bar{A}}}(t)-1\big]\Big) = M_Y(s)M_{X-Y}(t)\,.\end{aligned}$$

Ebből viszont $Y$ és $X-Y$ függetlensége már azonnal következik. □

## 1.2. Az összetett Poisson-folyamat és fontosabb tulajdonságai

## 1.3. Függvények és sorozatok konvolúciója

**1.14. Definíció.** Legyen $\phi(x)$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, valós értékű mérhető függvény, és tegyük fel, hogy $G$ càdlàg („continue à droite, limitée à gauche”, tehát mindenhol jobbról folytonos, és mindenhol létezik baloldali határértéke,) és korlátos változású minden véges intervallumon. Ekkor a két függvény **Stieltjes-konvolúciója**

$$(\phi\star G)(y) := \int_{-\infty}^{\infty}\phi(y-x)\,dG(x)\,.$$

A konvolúció azon $y\in\mathbb{R}$ pontokban van definiálva, ahol az integrál létezik. A $G$ függvény **$n$-edik konvolúció hatványa** az $n$ tényezős $G^{\star n} := G\star\cdots\star G$ konvolúció.

Az olvasó korábbi tanulmányai során talán már találkozott a következő tétellel, melynek bizonyítását most mellőzzük:

**1.15. Tétel.** *Ha $X$ és $Y$ független véletlen változó rendre $G(x)$ és $H(x)$, $x\in\mathbb{R}$, eloszlásfüggvénnyel, akkor az $X+Y$ összegváltozó eloszlásfüggvénye $(G\star H)(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Továbbá, ha $X_1,\dots,X_n$ független és azonos eloszlású változó $G$ eloszlásfüggvénnyel, akkor $X_1+$ $+\cdots+X_n$ eloszlásfüggvénye $G^{\star n}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.*

Ezen tétel két speciális esetével érdemes részletesebben foglalkozni. Ha az $X$ és az $Y$ változó abszolút folytonos rendre $g(x)$ és $h(x)$ eloszlásfüggvénnyel, akkor a Fubini-tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned}(G\star H)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(y-x)\,dH(x) = \int_{\infty}^{\infty}\left[\int_{\infty}^{y} g(t-x)\,dt\right]h(x)\,dx\\ &= \int_{\infty}^{y}\int_{\infty}^{\infty} g(t-x)h(x)\,dxdt\,,\end{aligned}$$

amiből jön, hogy az $X+Y$ összeg is abszolút folytonos

$$(g*h)(t) := \int_{\infty}^{\infty} g(t-x)h(x)\,dx\,, \qquad t\in\mathbb{R}\,,$$

sűrűségfüggvénnyel. Az $g*h$ függvényt $g$ és $h$ **Lebesgue-konvolúciójának** hívjuk.

A másik fontos eset, mikor $X$ és $Y$ egész értékű változó. Ekkor az $F$ és a $G$ eloszlásfüggvény lépcsős függvény, mely az egész pontokban ugrik. Mivel ebben az esetben $X+Y$ is egész értékű változó, ugyanezt elmondhatjuk az $F\star G$ konvolúcióról is. Legyen

$$p_n := P(X=n) = F(n)-F(n-1)\,, \qquad q_n := P(Y=n) = G(n)-G(n-1)\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,,$$

amiből

$$F(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} p_n\,, \qquad G(n) = \sum_{k=\infty}^{n} q_n\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Ekkor a konvolúció definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned}(F\star G)(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(n-x)\,dG(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n-k)\big[G(k)-G(k-1)\big]\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Bigg[\sum_{l=-\infty}^{n-k} p_l\Bigg] q_k = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ k+l\le n}} p_l q_k\,,\end{aligned}$$

és így kapjuk, hogy

$$P\big(X+Y=n\big) = (F\star G)(n)-(F\star G)(n-1) = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ k+l=n}} p_l q_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k}q_k\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

A kapott sorozatot a $p$ és a $q$ **sorozatok konvolúciójának** nevezzük:

$$(p*q)_n := \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}q_k\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

**1.16. Állítás.** *Az alábbiakban legyen $\phi(x)$, $\psi(x)$, $G(x)$ és $H(x)$, $x\in\mathbb{R}$, valós értékű mérhető függvény, és tegyük fel, hogy $G$ és $H$ càdlàg és korlátos változású minden véges intervallumon. Ekkor a konvolúcióra teljesülnek az alábbi tulajdonságok.*

(i) *Disztributivitás: Ha valamely pontban a $\phi\star G$, $\phi\star H$, $\psi\star G$ és $\psi\star H$ konvolúciók mindegyike létezik, akkor ebben a pontban tetszőleges $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ értékek esetén*

$$\big(a\phi+b\psi\big)\star\big(cG+dH\big) = ac(\phi\star G)+ad(\phi\star H)+bc(\psi\star G)+bd(\psi\star H)\,.$$

(ii) *Kommutativitás és asszociativitás: Ha $G$ és $H$ előáll eloszlásfüggvényeknek véges lineáris kombinációjában, akkor*

$$G\star H = H\star G \qquad \textit{és} \qquad (\phi\star G)\star H = \phi\star(G\star H)\,.$$

*Bizonyítás.* (i) Azonnal következik a Lebesgue–Stieltjes-integrál elemi tulajdonságaiból.

(ii) Kezdjük azzal az esettel, mikor $G$ és $H$ eloszlásfüggvény. Ekkor létezik $X$ és $Y$ független véletlen változó úgy, hogy $X \sim G$ és $Y \sim H$. Jegyezzük meg, hogy az 1.15. Tétel szerint $X+Y \sim G\star H$ és $Y+X \sim H\star G$. Mivel a két összegváltozó azonos eloszlású, (ennél több is igaz, 1 valószínűséggel egyenlőek,) az eloszlásfüggvényeiknek azonosnak kell lennie, tehát $G\star H = H\star G$.

Az asszociativitáshoz vegyük észre, hogy a várható érték általános formulája szerint

$$\big[\phi\star(G\star H)\big](t) = \int_{\infty}^{\infty} \phi(t-x)\, d(G\star H)(x) = E\phi\big(t-(X+Y)\big)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,.$$

Hasonló gondolatmenettel

$$e(y) := (\phi\star G)(y) = \int_{\infty}^{\infty} \phi(y-x)\, dG(x) = E\phi(y-X)\,,$$

amiből $X$ és $Y$ függetlensége miatt

$$e(t-y) = E\phi\big((t-y)-X\big) = E\Big[\phi\big(t-(y+X)\big)\big|Y=y\Big] = E\Big[\phi\big(t-(Y+X)\big)\big|Y=y\Big]\,, \qquad t,y\in\mathbb{R}\,.$$

Ebből a teljes várható érték tételével azonnal jön, hogy

$$\begin{aligned}\big[(\phi\star G)\star H\big](t) &= (e\star H)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t-y)\, dH(y) = \int_{-\infty}^{\infty} E\Big[\phi\big(t-(Y+X)\big)\big|Y=y\Big]\, dH(y)\\ &= E\phi\big(t-(Y+X)\big) = \big[\phi\star(G\star H)\big](t)\,, \qquad t\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Tekintsük most az általános esetet, mikor $G$ és $H$ nem feltétlenül eloszlásfüggvény, de előáll

$$G(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k G_k(x)\,, \qquad H(x) = \sum_{l=1}^{m} d_l H_l(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,,$$

alakban, ahol az $G_k$ és $H_l$ függvények már eloszlásfüggvények. Ekkor a disztributívitás és az eloszlásfüggvényekre már bizonyított kommutativitás alkalmazásával

$$G\star H = \bigg(\sum_{k=1}^{n} c_k G_k\bigg)\star\bigg(\sum_{l=1}^{m} d_l H_l\bigg) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} c_k d_l \big(G_k\star H_l\big) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_k d_l\big(H_l\star G_k\big) = H\star G\,.$$

Az asszociativitás az általános esetre hasonlóan igazolható, ezt az olvasóra bízzuk. □

A továbbiakban vizsgáljuk azt az esetet, mikor $\phi(x) = G(x) = 0$ minden $x<0$ esetén. Vegyük észre, hogy ekkor

$$\begin{aligned}(\phi\star G)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi(y-x)\, dG(x) = \int_{(-\infty,y)}\phi(y-x)\, d0 + \int_{[0,y]}\phi(y-x)\, dG(x)\\ &\quad + \int_{(y,\infty)} 0\, dG(x) = \int_{[0,y]}\phi(y-x)\, dG(x)\,, \qquad y\ge 0\,,\end{aligned}$$

és hasonló meggondolásból $(\phi\star G)(y)=0$, ha $y<0$. Ugyanígy adódik, hogy ha a $g(x)$ és a $h(x)$, $x\in\mathbb{R}$, sűrűségfüggvény eltűnik a negatív félegyenesen, akkor

$$(g*h)(y)=\int_{[0,y]} g(y-x)h(x)\,dx\,,\quad y\geq 0\,,\qquad\qquad (g*h)(y)=0\,,\quad x<0\,,$$

továbbá ha a $p_n$ és a $q_n$, $n\in\mathbb{Z}$, sorozat olyan, hogy $p_n=q_n=0$ minden $n<0$ esetén, akkor

$$(p*q)_n=\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}p_k\,,\quad n\geq 0\,,\qquad\qquad (p*q)_n=0\,,\quad n<0\,.$$

Vegyük észre, hogy a fentiekben Lebesgue–Stieltjes-integrállal dolgoztunk, ezért általában

$$\int_{[0,y]}\phi(y-x)\,dG(x)\neq\int_0^y\phi(y-x)\,dG(x)=\int_{(0,y]}\phi(y-x)\,dG(x)\,.$$

Ezzel szemben a klasszikus Lebesgue-mérték már atommentes, és így

$$\int_{[0,y]} g(y-x)h(x)\,dx=\int_{(0,y]} g(y-x)h(x)\,dx\,.$$

**1.17. Állítás.** *Ha $\phi$ lokálisan korlátos, (azaz korlátos minden véges intervallumon,) és $G$ càdlàg és korlátos változású a véges intervallumokon, továbbá $\phi(x)=G(x)=0$ minden $x<0$ esetén, akkor a $\phi\star G$ konvolúció jól definiált a valós egyenesen, és lokálisan korlátos függvény.*

*Bizonyítás.* Most $\phi\star G=0$ a negatív számok halmazán, ezért a konvolúció létezését és lokális korlátosságát elég a pozitív félegyenesen bizonyítani. Legyen $t>0$ tetszőleges rögzített érték, és jelölje $V_{[0,t]}(G)$ a $G$ függvény teljes változását a $[0,t]$ intervallumon. Ekkor

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq y\leq t}\big|(\phi\star G)(y)\big| &= \sup_{0\leq y\leq t}\left|\int_{[0,y]}\phi(y-x)\,dG(x)\right| \\ &\leq \sup_{0\leq y\leq t}\,\sup_{0\leq x\leq y}|\phi(y-x)|V_{[0,y]}(G)=\sup_{0\leq x\leq t}|\phi(x)|V_{[0,t]}(G)<\infty\,.\end{aligned}$$ □

## 1.4. A felújítási egyenlet

Legyen $X_1,X_2,\ldots$ független és azonos eloszlású változó közös $G(x)$, $x\in\mathbb{R}$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor

$$T_n:=X_1+\cdots+X_n\sim G^{\star n}\,,\qquad n=1,2,\ldots$$

Jelölje $N_t$, $t\geq 0$, a kapcsolatos felújítási folyamatot, tehát legyen

$$N_t=\max\{n\geq 0:T_n\leq t\}\,.\qquad t\geq 0\,.$$

A sztochasztikus folyamatok kurzuson láttuk, hogy ekkor a felújítási függvény

$$m(t) = E(N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

alakban áll elő.

A következőkben egy integrálegyenletet fogunk felírni a felújítási függvényre. Legyen $N'_t := N_{X_1+t} - 1$, $t \geq 0$, mely nem más, mint az $X_2, X_3, \dots$ változók, mint felújítások közötti idők által definiált felújítási folyamat. Vegyük észre, hogy most az $N'_t$, $t \geq 0$, folyamat értékeit meghatározzák az $X_2, X_3, \dots$ sorozat értékei, tehát $\sigma(N'_t, t \geq 0) \subseteq \sigma(X_2, X_3, \dots)$. Viszont az $X_2, X_3, \dots$ változók függetlenek az $X_1$ változótól, amiből következik, hogy az $N'_t$, $t \geq 0$, folyamat is független az $X_1$ változótól. Jegyezzük meg azt is, hogy mivel a két folyamat esetében a felújítások közötti idők eloszlása azonos, (ezeknek mindkét esetben $G$ az eloszlásfüggvénye,) tetszőleges rögzített $t \geq 0$ esetén az $N_t$ és az $N'_t$ változó eloszlása is azonos, (miért?,) amiből

$$m(t) = E(N_t) = E(N'_t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy tetszőleges rögzített $x \geq 0$ esetén, ha $t \geq x$, akkor

$$E\big[N_t \,|\, X_1 = x\big] = E\big[1 + N'_{t-x} \,|\, X_1 = x\big] = 1 + E[N'_{t-x}] = 1 + m(t-x)\,,$$

míg ha $0 \leq t < x$, akkor

$$E\big[N_t \,|\, X_1 = x\big] = E\big[0 \,|\, X_1 = x\big] = 0\,.$$

Mivel $X$ nemnegatív értékű változó, az $G$ eloszlásfüggvény konstans 0 a negatív félegyenesen. Ekkor a teljes várható érték tételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} m(t) = E(N_t) &= \int_{[0,\infty)} E\big[N_t \,|\, X_1 = x\big]\, dG(x) \\ &= \int_{[0,t]} \big[1 + m(t-x)\big]\, dG(x) + \int_{(t,\infty)} 0\, dG(x) \\ &= G(t) + \int_{[0,t]} m(t-x)\, dG(x) = G(t) + (m \star G)(t)\,, \qquad t \geq 0\,. \end{aligned}$$

Az $m = G + m \star G$ egyenletet az $m$ felújítási függvényre vonatkozó felújítási egyenletnek nevezzük.

**1.18. Definíció.** Legyen $a(t)$, $t \geq 0$, ismert valós értékű mérhető függvény. Ekkor az

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} A(t-x)\, dG(x) = \big(a + A \star G\big)(t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

függvényegyenletet az $A(t)$, $t \geq 0$, függvényre vonatkozó **felújítási egyenletnek** nevezzük.

**1.19. Tétel.** *Ha $a(t)$, $t \geq 0$, lokálisan korlátos függvény, akkor az*

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} a(t-x)\, dm(x) = (a + a \star m)(t)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

*függvény lokálisan korlátos megoldása a felújítási egyenletnek, továbbá ez az egyetlen megoldás a lokálisan korlátos függvények terében.*

*Bizonyítás.* Mivel a tételben szereplő összes függvény konstans nulla a negatív félegyenesen, az állítást elég a nemnegatív számok halmazán ellenőrizni. az 1.17. Állítás szerint az $a \star m$ konvolúció jól definiált és lokálisan korlátos. Ekkor tetszőleges rögzített $t_0 > 0$ esetén

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \big|(a + a \star m)(t)\big| \leq \sup_{0 \leq t \leq t_0} |a(t)| + \sup_{0 \leq t \leq t_0} \big|(a \star m)(t)\big| < \infty\,,$$

tehát $a + a \star m$ is lokálisan korlátos.

A következőkben azt fogjuk ellenőrizni, hogy $a + a \star m$ megoldás. Behelyettesítés után a konvolúció azonosságait alkalmazva kapjuk, hogy

$$a + (a + a \star m) \star G = a + a \star G + a \star \left( \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n} \right) \star G = a + a \star \left( G + \sum_{n=2}^{\infty} G^{\star n} \right) = a + a \star m\,.$$

(Jegyezzük meg, hogy a konvolúció disztributív voltát mi csak eloszlásfüggvények véges lineáris kombinációjára bizonyítottuk. Határátmenet segítségével megmutatható, hogy a jelen esetben ez a tulajdonság eloszlásfüggvények végtelen összegére is alkalmazható, tehát a fenti átalakítás helyes volt.)

Végül azt mutatjuk meg, hogy a megoldás egyértelmű. Tegyük fel, hogy $A_2(t)$, szintén lokálisan korlátos megoldása az egyenletnek, és legyen $B(t) := A(t) - A_2(t)$, $t \geq 0$. Felhasználva, hogy $A$ és $A_2$ megoldása a felújítási egyenletnek, kapjuk, hogy

$$B = A - A_2 = \big(a + A \star G\big) - \big(a + A_2 \star G\big) = (A - A_2) \star G = B \star G\,,$$

amiből iterációval $B = B \star G^{\star n}$ minden $n \geq 1$ egészre. Vegyük észre, hogy $G^{\star n}(t) \to 0$, amint $n \to \infty$, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t)$ sor pontonként konvergens. Mivel a $B$ függvény szintén lokálisan korlátos, kapjuk, hogy tetszőleges rögzített $t \geq 0$ pont esetén

$$|B(t)| = \left| \int_{[0,t]} B(t-x)\, dG^{\star n}(x) \right| \leq V_{[0,t]}\big(G^{\star n}\big) \sup_{0 \leq x \leq t} |B(x)| = G^{\star n}(t) \sup_{0 \leq x \leq t} |B(x)| \to 0\,,$$

amint $n \to \infty$, amiből $B(t) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $B$ konstans nulla a pozitív félegyenesen, és ezáltal $A_2(t) = A(t)$ minden $t \geq 0$ pontban. Mivel a negatív számok halmazán mindkét függvény eltűnik, kapjuk, hogy $A_2 = A$, tehát $A$ egyértelmű megoldása az egyenletnek a lokálisan korlátos függvények terén. □

**1.20. Példa.** Az $m(t)$, $t \geq 0$, felújítási függvény esetében $a = G$. Mivel a felújítási függvény előáll

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t)$$

alakban, kapjuk, hogy a tételben szereplő megoldás

$$A = G + G\star m = G + \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star(n+1)} = m\,.$$

Ez az eredmény nem meglepő, hiszen tudtuk, hogy $m$ lokálisan korlátos megoldása a felújítási egyenletnek, és az előző tétel szerint ő az egyetlen ilyen megoldás. Éppen az lett volna a kellemetlen, ha találunk egy másik lokálisan korlátos megoldást is.

Vegyük észre, hogy a felújítási egyenlet átrendezésével

$$G(t) = m(t) - \int_{[0,t]} G(t-x)\,dm(t) = \big(m - G\star m\big)(t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

**1.21. Tétel.** *A felújítási folyamatok esetében a $G$ eloszlásfüggvény és az $m$ felújítási függvény kölcsönösen meghatározza egymást.*

*Bizonyítás.* Mivel

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

a $G$ eloszlásfüggvény meghatározza az $m$ felújítási függvényt. A továbbiakban belátjuk, hogy ez a kapcsolat fordítva is teljesül.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $H$ eloszlásfüggvény, hogy a hozzá kapcsolódó felújítási folyamat felújítási függvénye szintén az $m$ függvény. Megmutatjuk, hogy ekkor $H = G$. A korábbi eredmények szerint a $G$ függvényre $G = m - G\star m$ a pozitív félegyenesen, amiből

$$\begin{aligned} G\star H &= \big(m - G\star m\big)\star H = m\star H - G\star\sum_{n=1}^{\infty} H^{\star(n+1)} \\ &= H\star m - G\star(m-H) = (H-G)\star m + G\star H\,, \end{aligned}$$

és így $(H-G)\star m = 0$ a nemnegatív számok halmazán. Innen azonnal jön, hogy

$$H - G = \big(m - H\star m\big) - \big(m - G\star m\big) = -(H-G)\star m \equiv 0$$

a pozitív félegyenesen, tehát $H = G$. $\square$

**1.22. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $X$ **rácsos eloszlású**, ha létezik $\delta > 0$, mellyel az $X$ változó egy valószínűséggel a $\{k\delta : k \in \mathbb{Z}\}$ halmazba esik. A legnagyobb ilyen tulajdonságú $\delta$ értéket **rácsállandónak** nevezzük.

**1.23. Példa.** Az egész értékű változók rácsos eloszlásúak. A folytonos változók nem azok, hiszen értékkészletük nem megszámlálható.

Legyen $X$ rácsos eloszlású, és az egyszerűség kedvéért nemnegatív egész értékű. Ekkor a felújítási folyamatot elég az egész időpillanatokban vizsgálni. Legyen $p_n = P(X = n)$, és $r_n = m(n) - m(n-1)$, $n = 0,1,\ldots$ Kapjuk, hogy

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} p_k\,, \qquad m(n) = \sum_{k=0}^{n} r_k\,, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Ezt behelyettesítve a felújítási egyenletbe

$$m(n) = F(n) + \int_{[0,n]} m(n-x)\,dF(x) = F(n) + \sum_{k=0}^{n} m(n-k)p_k = \sum_{k=0}^{n} p_k + \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n} r_{l-k}p_k\,,$$

amiből

$$r_n = m(n) - m(n-1) = p_n + \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}p_k = p_n + (r*p)_n\,.$$

**1.24. Definíció.** Legyen $a_n$, $n = 0,1,\dots$, valós számsorozat. Ekkor az

$$A_n = a_n + \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}p_k = \big(a + A*p\big)_n\,, \qquad n = 0,1,\dots\,,$$

egyenletet az $A_n$, $n$=0,1, ..., sorozatra vonatkozó diszkrét felújítási egyenletnek nevezzük.

**1.25. Tétel.** *A diszkrét felújítási egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, mely*

$$A_n = a_n + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}r_k = \big(a + a*r\big)_n\,, \qquad n = 0,1,\dots\,,$$

*alakban áll elő.*

Terjünk vissza az általános felújítási egyenlethez. A következőkben azt fogjuk megvizsgálni, hogy miként viselkedik aszimptotikusan a felújítási egyenlet megoldása. Ehez szükségünk lesz egy tételre, melyet nem bizonyítunk.

**1.26. Tétel** (Felújítási tétel)**.** *Tegyük fel, hogy* $P(X = 0) < 1$.

(i) *Ha $X$ nem rácsos, akkor tetszőleges $h > 0$ esetén*

$$m(t+h) - m(t) \to \frac{h}{E(X)}\,, \qquad t \to \infty\,.$$

(ii) *Ha $X$ rácsos, és $\delta$ a rácsállandó, akkor $h = n\delta$, $n \in \mathbb{N}$, esetén az (i) konvergencia érvényben marad.*

A továbbiakban legyen

$$M(t) := \begin{cases} m(t)+1\,, & t \ge 0\,,\\ 0\,, & t < 0\,. \end{cases}$$

Ekkor a felújítási egyenlet lokálisan korlátos megoldása

$$\begin{aligned} A(t) &= a(t) + \int_{[0,t]} a(t-x)\,dm(x) = \int_{\{0\}} a(t-x)\,d\mathbb{1}_{\{x\ge 0\}} + \int_{[0,t]} a(t-x)\,dm(x)\\ &= \int_{[0,t]} a(t-x)\,d\mathbb{1}_{\{x\ge 0\}} + \int_{[0,t]} a(t-x)\,dm(x) = \int_{[0,t]} a(t-x)\,dM(x)\,. \end{aligned}$$

**1.27. Tétel.** *Ha az $X$ változó nem rácsos eloszlású, és $a(x)$, $x \geq 0$, előáll monoton integrálható függvények véges összegeként, akkor a felújítási egyenlet lokálisan korlátos megoldására*

$$A(t) \to \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a(x)\,dx\,, \qquad t \to \infty\,.$$

*Bizonyítás.* Legyen $a(x) = \mathbb{1}_{[c,d)}(x)$, $x \geq 0$, a $[c,d)$ intervallum indikátora, ahol $0 \leq c < d$. Ha $t \geq d$, akkor

$$A(t) = \int_{[0,t]} a(x)\,dM(x) = \int_{(t-d,t-c]} 1\,dM(x) = M(t-c) - M(t-d) = m(t-c) - m(t-d)\,,$$

amiből az 1.26. Tétel alkalmazásával

$$A(t) = m(t-c) - m(t-d) \to \frac{d-c}{E(X)} = \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a(x)\,dx\,, \qquad t \to \infty\,.$$

Ebből azonnal következik, hogy az állítás igaz az

$$a(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbb{1}_{[c_k,d_k)}(x)\,, \qquad x \geq 0\,,$$

alakban felírható lépcsős függvényekre is, ahol $b_k \in \mathbb{R}$, $0 \leq c_k \leq d_k$, $k = 1, \ldots, n$. Ismert, hogy ilyen függvények segítségével minden integrálható függvény tetszőlegesen közelíthető. Legyen most $a_n(t)$, $t \geq 0$, lépcsős függvényeknek egy sorozata úgy, hogy

$$|a_n(t)| \leq |a(t)| \qquad \text{és} \qquad a_n(t) \to a(t)\,, \quad n \to \infty\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Ekkor a fentiek szerint

$$\int_{[0,t]} a_n(x)\,dM(x) \to \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a_n(x)\,dx\,, \qquad t \to \infty\,,$$

továbbá a monoton konvergenciatétel alkalmazásával tetszőleges rögzített $t \geq 0$ esetén

$$\int_{[0,t]} a_n(x)\,dM(x) \to \int_{[0,t]} a(x)\,dM(x)\,, \qquad \int_0^\infty a_n(x)\,dx \to \int_0^\infty a(x)\,dx\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Ebből már heurisztikusan jön, hogy elegendően nagy $t$ és $n$ esetén

$$A(t) = \int_{[0,t]} a(x)\,dM(x) \approx \int_{[0,t]} a_n(x)\,dM(x) \approx \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a_n(x)\,dx \approx \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a(x)\,dx\,.$$

A bizonyítás egy kis epszilonozással tehető precízzé, amit az olvasóra bízunk. □

**1.28. Példa.** A következőkben egy olyan problémát fogunk tárgyalni, mely hasonlít az előző félévben vett buszmegálló paradoxonhoz (inspection paradox), de nem azonos vele.

Legyen $X_1, X_2, \ldots \geq 0$ független és azonos eloszlású véletlen változó közös $G$ eloszlásfüggvénnyel, és tegyük fel, hogy $P(X=0)<1$. Legyen a korábbiakhoz hasonlóan $N_t$, $t \geq 0$, a kapcsolatos felújítási folyamat, és jelölje

$$T_n = X_1 + \cdots + X_n\,, \qquad n = 0,1,\ldots,$$

az $n$-dik érkezési időt. Ekkor egy rögzített $t \geq 0$ időpont mellett a következő esemény sorszáma $N_t+1$, és a következő esemény a $T_{N_t+1} \geq t$ időpontban következik be. Ez azt jelenti, hogy a $t$ időponttól számolva $R_t := T_{N_t+1} - t$ időt kell várnunk a következő esemény bekövetkezéséig. Ezt reziduális, avagy hátralévő időnek szokták nevezni. A feladat felírni az $A(t) := E(R_t)$, $t \geq 0$, függvényt, továbbá meghatározni a határértékét, amint $t \to \infty$.

A munkánk során ismét szükségünk lesz az $N'_t := N_{X_1+t} - 1$, $t \geq 0$, folyamatra. Korábban már meggondoltuk, hogy ez a folyamat az $X_2, X_3, \ldots$ változók, mint események közötti idők által definiált felújítási folyamat, amiből két dolog következik. Egyrészt az $N'_t$, $t \geq 0$, folyamat független az $X_1$ változótól. Másrészt a folyamat azonos eloszlású az $N_t$, $t \geq 0$, felújítási folyamattal, amiből következik, hogy az $R_t$ reziduális idő azonos eloszlású az $N'_t$ folyamatra analóg módon bevezetett $R'_t$ reziduális idővel, és így

$$A(t) = E(R_t) = E(R'_t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

A következőkben felírunk egy felújítási egyenletet az $A$ függvényre, hasonló módszert fogunk alkalmazni, mint az $m$ felújítási függvényre vonatkozó egyenlet felírásakor. Tehát, rögzítjük a $t \geq 0$ időpont értékét, és alkalmazzuk a teljes várható értékét, amiből

$$A(t) = E(R_t) = \int_{[0,\infty)} E\big[R_t | X_1 = x\big]\, dG(x)\,.$$

Vegyük észre, hogy ha $x > t$, akkor

$$E\big[R_t | X_1 = x\big] = E\big[x - t | X_1 = x\big] = x - t\,,$$

míg ha $0 \leq x \leq t$, akkor

$$E\big[R_t | X_1 = x\big] = E\big[R'_{t-x} | X_1 = x\big] = E\big(R'_{t-x}\big) = A(t-x)\,.$$

Kapjuk, hogy

$$A(t) = \int_{(t,\infty)} (x-t)\, dG(x) + \int_{[0,t]} A(t-x)\, dG(x)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

ami pontosan az $A = a + A \star G$ felújítási egyenlet az

$$a(t) = \int_{(t,\infty)} (x-t)\, dG(x)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

determinisztikus függvénnyel.

Megmutatható, hogy ha $E(X)<\infty$, akkor az $A$ és az $a$ függvény lokálisan korlátos, amiből a felújítási egyenlet megoldására vonatkozó tételünk szerint $A$ nem lehet más, mint az egyenlet egyetlen lokálisan korlátos megoldása, azaz

$$A(t)=\big(a+a\star m\big)(t)=a(t)+\int_{[0,t]} a(t-x)\,dm(x)\,,\qquad t\geq 0\,,$$

ahol $m(t)$, $t\geq 0$, a kapcsolatos felújítási függvény. Természetesen ezzel a kifejezéssel ilyen általános feltételek mellett nem sok mindent lehet kezdeni, de bizonyos esetekben az integrálok értékei minden további nélkül kiszámolhatóak. Az olvasóra bízzuk azt megmutatni, hogy a $\lambda>0$ intenzitású Poisson-folyamat esetében $A(t)=1/\lambda$, $t\geq 0$. (Ez miért nem meglepő eredmény?)

Tegyük, hogy az $X$ változó nem rácsos eloszlású. Ebben az esetben a felújítási egyenlet megoldásának aszimptotikus viselkedésére vonatkozó tételünk szerint

$$A(t)\to\frac{1}{E(X)}\int_0^\infty a(x)\,dx\,,\qquad t\to\infty\,.$$

A későbbiekben az 1.28. Példában meg fogjuk mutatni, hogy a fenti integrál értéke $E(X^2)/2$, amiből

$$A(t)=E(R_t)\to\frac{E(X^2)}{2E(X)}\,,\qquad t\to\infty\,.$$

(Hol találkoztunk már korábban ezzel a határértékkel?) Jegyezzük meg, hogy a Poisson-folyamatra

$$E(R_t)=\frac{1}{\lambda}=\frac{2/\lambda^2}{2/\lambda}=\frac{E(X^2)}{2E(X)}\,,\qquad t\geq 0\,,$$

tehát ebben az esetben a konvergencia triviálisan teljesül.

**1.29. Példa.** Az előző példa jelöléseit alkalmazva legyen

$$A_y(t):=P(R_t>y)\,,\qquad t,y\geq 0\,.$$

Rögzített $y\geq 0$ mellett írjunk fel egy felújítási egyenletet az $A_y$ függvényre, adjuk meg az egyenlet egyetlen lokálisan korlátos megoldását, valamint határozzuk meg az $A_y$ függvény határértékét, amint $t\to\infty$. Továbbá, a Poisson-folyamat esetében írjuk fel az $A_y$ függvényt egy olyan egyszerű alakban, melyből az $R_t$ változó eloszlása már leolvasható.

## 1.5. Véletlen változók momentumai

Legyen $Z$ nemnegatív értékű véletlen változó $F(x)$, $x\in\mathbb{R}$, eloszlásfüggvénnyel, $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pedig legyen mérhető függvény. Ebben az esetben a $\phi(Z)$ változó várható értéke

$$E\phi(Z)=\int_{[0,\infty)}\phi(x)\,dF(x)$$

alakban írható fel, ami egy Lebesgue–Stieltjes-integrál. A további munkánk során többször is szükségünk lesz egy olyan formulára, melynek segítségével ez az integrál átírható egy könnyebben kezelhető improprius integrálba.

**1.30. Tétel.** *Legyen $Z$ nemnegatív értékű változó $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, eloszlásfüggvénnyel, továbbá tekintsünk egy $\phi(x)$, $x \geq 0$, valós értékű monoton és abszolút folytonos függvényt. Ekkor*

$$E\phi(Z) = \phi(0) + \int_0^\infty \phi'(x)\big[1 - F(x)\big]\, dx\,,$$

*amit úgy értünk, hogy ha a kifejezés valamely oldala véges, akkor a másik oldal is véges, és a két oldal egyenlő. Továbbá, ha $E\phi(Z)$ véges, akkor*

$$\lim_{x\to\infty} \phi'(x) P\big(Z > x\big) = \lim_{x\to\infty} \phi'(x)\big[1 - F(x)\big] = 0\,.$$

*Bizonyítás.* A $\phi$ függvény abszolút folytonosságából következik, hogy deriválható, és

$$\phi(z) = \phi(0) + \int_0^z \phi'(x)\, dx\,, \qquad z \geq 0\,.$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy

$$\int_\Omega \mathbb{1}_{\{x<Z\}}\, dP = E\mathbb{1}_{\{x<Z\}} = P(x < Z) = 1 - F(x)\,, \qquad x \geq 0\,.$$

Ekkor a Fubini-tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned} E\phi(Z) &= \int_\Omega \phi(Z)\, dP = \int_\Omega \left[\phi(0) + \int_0^Z \phi'(x)\, dx\right] dP \\ &= h(0) + \int_\Omega \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x<Z\}} \phi'(x)\, dx\, dP = h(0) + \int_0^\infty \phi'(x) \int_\Omega \mathbb{1}_{\{x<Z\}}\, dP\, dx \\ &= h(0) + \int_0^\infty \phi'(x)\big[1 - F(x)\big]\, dx\,. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a Fubini-tétel alkalmazásánál szükség volt arra, hogy $\phi$ monoton függvény legyen, ugyanis ez garantálja azt, hogy $\phi'$ nem vált előjelet a pozitív félegyenesen. Ezzel az első állítást bebizonyítottuk. A második állítás azonnal következik abból az analízisbeli tényből, hogy egy függvény improprius integrálja csak akkor lehet véges, ha a függvénynek létezik és nulla a határértéke a végtelenben. □

**1.31. Következmény.** *Legyen $Z$ nemnegatív értékű véletlen változó $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, eloszlásfüggvénnyel.*

(i) *A $Z$ változó $\alpha > 0$ rendű momentumára*

$$EZ^\alpha = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}\big[1 - F(x)\big]\, dx\,.$$

*Továbbá, ha az $\alpha$ rendű momentum véges, akkor*

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} P\big(Z > x\big) = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha}[1-F(x)] \to 0\,,$$

*tehát a $P(Z > x)$ farokvalószínűségek legalább polinomiális rendben csengenek le a végtelenben.*

(ii) *A $Z$ változó momentumgeneráló függvénye egy tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ pontban*

$$M_Z(r) = E\big(e^{rZ}\big) = 1 + r\int_0^{\infty} e^{rx}\big[1-F(x)\big]\,dx\,.$$

*Továbbá, ha a momentumgeneráló függvény létezik valamely $r > 0$ pontban, akkor*

$$\lim_{x\to\infty} e^{rx} P\big(Z > x\big) = \lim_{x\to\infty} e^{rx}[1-F(x)] \to 0\,,$$

*azaz a farokvalószínűségek legalább exponenciális rendben csengenek le.*

**1.32. Példa.** A fenti eredmények segítségével már meghatározhatjuk azon integrálok értékét, melyekkel az 1.28. Példában találkoztunk. Vegyük észre, hogy az ott definiált $a(t)$, $t \geq 0$, függvényre

$$a(t) = \int_{(t,\infty)} (x-t)\,dG(x) = \int_{[0,\infty)} \phi(x)\,dG(x) = E\phi(X)\,,$$

ahol

$$\phi(x) := \big[x-t\big]^{+} := \begin{cases} x-t\,, & x \geq t\,,\\ 0\,, & x < t\,.\end{cases}$$

Ekkor az 1.30. Tétel alkalmazásával

$$a(t) = \phi(0) + \int_0^{\infty} \phi'(x)\big[1-G(x)\big]\,dx = 0 + \int_t^{\infty} 1\cdot\big[1-G(x)\big]\,dx\,, \qquad t \geq 0\,.$$

az 1.28. Példában megmutattuk, hogy az ott definiált $A(t)$, $t \geq 0$, függvényre

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{1}{E(X)}\int_0^{\infty} a(x)\,dx\,,$$

amennyiben létezik az $E(X)$ várható érték. Vegyük észre, hogy a most az $1-G(x)$, $x \geq 0$, függvény nemnegatív értékű, így a Fubini-tétel és az 1.31. Következmény alkalmazásával

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} a(t)\,dt &= \int_0^{\infty}\int_t^{\infty} \big[1-G(x)\big]\,dxdt = \int_0^{\infty}\int_0^{x} \big[1-G(x)\big]\,dtdx\\ &= \int_0^{\infty} x\big[1-G(x)\big]\,dx = E(X^2)/2\,.\end{aligned}$$

Tehát kapjuk, hogy a reziduális idők várható értékére $A(t) \to E(X^2)/(2E(X))$, $t \to \infty$.

# 2. fejezet

# Kockázati folyamatok

## 2.1. Rizikófolyamatok

A továbbiakban egy biztosítótársaságot fogunk modellezni, és arra keressük a választ, hogy a biztosító mekkora valószínűséggel megy csődbe az idők folyamán, továbbá milyen súlyos lehet ez a csőd. A modellben a következő feltevésekkel fogunk élni. A káresemények bekövetkezési időpontját egy $N_t$, $t\geq 0$, számláló folyamat határozza meg, melyet **kárszámfolyamatnak** nevezünk. A káresemények bekövetkezése közötti időt jelölje $X_1, X_2, \ldots$, mely változók felújítási folyamat esetén függetlenek és azonos eloszlásúak. Az egyes károk nagysága legyen $Z_1, Z_2, \ldots$ független és azonos eloszlású nemnegatív értékű változó, mely változók függetlenek a kárszámfolyamattól. Ekkor a biztosító teljes kifizetése $t \geq 0$ időponttal bezárólag

$$S_t := \sum_{n=0}^{N_t} Z_n = Z_1 + \cdots + Z_{N_t}\,,$$

melyet **kárértékfolyamatnak** vagy röviden **kárfolyamatnak** nevezünk. Jelölje $P_t$, $t\geq 0$, a biztosító $[0,t]$ intervallumra eső díjbevételét, mely a legtöbb alkalmazásban determinisztikus, valamint legyen $u\geq 0$ a társaság tőkéje a 0 időpillanatban. Ekkor a biztosító pénze a $t \geq 0$ időpontban

$$U_t := u + P_t - S_t\,.$$

**2.1. Definíció.** Az $U_t$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamatot **rizikófolyamatnak** nevezzük. Ha az $N_t$, $t\geq 0$, számláló folyamat Poisson-folyamat, és a díjbevétel $P_t = ct$, $t\geq 0$, alakban írható fel valamilyen $c > 0$ konstans segítségével, akkor **klasszikus rizikófolyamatról** beszélünk.

Terjedelmi okok miatt mi ezen a kurzuson csak a legfontosabb kérdéseket fogjuk megválaszolni, és azokat is csak a legegyszerűbb esetben, klasszikus rizikófolyamat esetén. A klasszikus rizikófolyamatnak előnye, hogy matematikailag könnyen kezelhető. Ez annak a ténynek köszönhető, hogy a károk bekövetkezési időpontjait leíró folyamat egy Poisson-folyamat, ami felújítási folyamat és Markov-lánc egyszerre. A modell gyakorlati alkalmazását az is motiválja, hogy a klasszikus esetben az $S_t$, $t\geq 0$, kárfolyamat összetett Poisson-folyamat, és az összetett Poisson-folyamatok családja zárt számos műveletre. A klasszikus eset hátránya, hogy nem minden esetben illeszkedik az empirikus adatokhoz. Például, rögzített $t \geq 0$ esetén a Poisson-folyamat tulajdonságai szerint $E(N_t) = \lambda t = D^2(N_t)$, viszont egyes biztosítástípusoknál statisztikailag megmutatható, hogy a kárszám varianciája nem egyenlő a várható értékkel. További hátrány, hogy a modell nem vesz figyelembe szezonális ingadozásokat, a kárszámfolyamat intenzitása időtől és kárszámtól függetlenül állandó. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban bemutatott módszertanhoz hasonló eszközökkel bizonyos általánosabb modellek is kezelhetőek. A legkézenfekvőbb megoldás az $N_t$, $t \geq 0$, folyamattól csak annyit megkövetelni, hogy felújítási folyamat legyen. Egy másik irány az, hogy a kárszámfolyamatot egy inhomogén, tehát időben változó intenzitású folytonos idejű Markov-lánccal modellezzük. Ezen utóbbi módszer további általánosítása a Cox-folyamatok alkalmazása, amikor az alkalmazott Markov-lánc intenzitását is véletlenítjük.

Klasszikus rizikófolyamat esetén a következő jelöléseket fogjuk majd alkalmazni:

- a Poisson-folyamat intenzitása: $\lambda > 0$;
- az károsemények között eltelt idő: $X_1, X_2, \ldots \sim G$, ahol $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$;
- az egyedi károk nagysága: $Z_1, Z_2, \ldots \sim F$;
- az egyedi károk nagyságának várható értéke: $\mu = E(Z) > 0$;
- az egységnyi időintervallumra eső díjbevétel: $c > 0$;
- a biztosító kezdőtőkéje: $u \geq 0$.

Fontos megjegyezni, hogy a kockázati folyamatok témakörében a biztosítási termék, és ezáltal a káreloszlás, a kárszámfolyamat és a díjbevétel rögzített. Egyetlen szabad változóval dolgozhatunk, az $u$ kezdőtőke függvényében fogunk válaszolni különféle kérdésekre. A legfontosabb probléma a

$$\Psi(u) := P\big(\exists t \geq 0 : U_t < 0\big) = P\big(\text{a biztosító } u \text{ kezdőtőkével indulva valaha csődbe megy}\big)$$

csődvalószínűség leírása, optimális esetben explicit módon való meghatározása. Látni fogjuk, hogy az első lépések megtételénél inkább a

$$\begin{aligned}\Phi(u) &:= 1 - \Psi(u) = P\big(\forall t \geq 0 : U_t \geq 0\big) \\ &= P\big(\text{a biztosító } u \text{ kezdőtőkével sosem megy csődbe}\big)\end{aligned}$$

függvényt lesz érdemes használni. A következő állításban megfogalmazzuk a klasszikus rizikófolyamat, illetve a $\Phi$ és a $\Psi$ függvény néhány fontos tulajdonságát.

**2.2. Állítás.** *Klasszikus rizikófolyamat esetén teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Az $S_t$, $t \geq 0$, kárfolyamat és az $U_t$, $t \geq 0$, rizikófolyamat független és stacionárius növekményű.*

(ii) *A $\Psi$ függvény monoton csökkenő, a $\Phi$ függvény monoton növekvő, és mindkét függvény càdlàg a pozitív félegyenesen.*

(iii) *A* $\Phi(u)$, $u \geq 0$, *függvény abszolút folytonos, tehát majdnem mindenhol deriválható, és*
$$\Phi(u) = \Phi(0) + \int_0^u \Phi'(z)\, dz\,, \qquad u \geq 0\,.$$

*Bizonyítás.* (i) Most az $S_t$, $t \geq 0$, kárfolyamat összetett Poisson-folyamat, amiről már megmutattuk, hogy független és stacionárius növeknényű. Az $U_t$ , $t \geq 0$, folyamat független és stacionárius növekményűsége ebből már azonnal következik.

(ii) A monotonitás szemléletesen nyilvánvaló, de most adunk egy formális bizonyítást is. Jegyezzük meg, hogy a biztosító csak olyan időpillanatban mehet csődbe, amikor káresemény történik. Az $n$-dik káresemény időpontjában a biztosító pénze
$$u + c\big(X_1 + \cdots + X_n\big) - \big(Z_1 + \cdots + Z_n\big) = u + Y_1 + \cdots Y_n\,,$$
ahol $Y_n := cX_n - Z_n$. Bevezetve az
$$M := \inf_{n\geq 1} \big(Y_1 + \cdots + Y_n\big) \in [-\infty, \infty)$$
általános értelemben vett változót, kapjuk, hogy
$$\inf_{t\geq 0} U_t = \inf_{n\geq 1} \big(u + Y_1 + \cdots + Y_n\big) = u + M\,.$$
Tehát annak a valószínűsége, hogy a biztosító $u$ kezdőtőkéről indulva sosem megy csődbe
$$\Phi(u) = P\big(\inf_{t\geq 0} U_t \geq 0\big) = P\big(u + M \geq 0\big) = P(-M \leq u)\,.$$
Tehát a $\Phi$ függvény nem más, mint a $-M$ általános értelemben vett véletlen változó eloszlásfüggvény, amiből már következik, hogy $\Phi$ monoton növekvő és càdlàg. Mivel most $\Psi(u) = 1 - \Phi(u)$, $u \geq 0$, a $\Psi$ függvény motonon csökkenő és càdlàg.

(iii) Ennek az állításnak a bizonyítása már nehezebb, ezért most mellőzük. □

Az alfejezet hátralevő részében azt fogjuk megmutatni, hogy a paraméterek bizonyos értékei mellett a vizsgált függvények triviálisak. Ehez azonban szükségünk lesz az alábbi tételre.

**2.3. Tétel.** *Legyen* $Y_1, Y_2, \ldots$ *független és azonos eloszlású változó* $E(Y) \in [-\infty, \infty]$ *várható értékkel. Ekkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Ha* $E(Y) > 0$, *akkor 1 valószínűséggel* $\lim_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = +\infty$.

(ii) *Ha* $E(Y) < 0$, *akkor 1 valószínűséggel* $\lim_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = -\infty$.

(iii) *Ha* $E(Y) = 0$ *és* $P(Y = 0) < 1$, *akkor 1 valószínűséggel*
$$\liminf_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = -\infty \qquad \text{\emph{és}} \qquad \limsup_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = +\infty\,.$$

Jegyezzük meg, hogy a 2.3. Tétel (i) és (ii) pontja a nagy számok erős törvényének egy egyszerű következménye. A (iii) pont lényegében azt mondja, hogy az első két állítás megfordítható, tehát a tételbeli „akkor" kifejezések helyére azt is írhatnánk, hogy „akkor és csak akkor".

**2.4. Tétel.** *Klasszikus rizikófolyamat esetén teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Ha* $c \le \lambda\mu$, *akkor* $\Phi(u) = 0$, $u \ge 0$, *tehát tetszőlegesen nagy kezdőtőkéről is indulva a biztosító 1 valószínűséggel csődbe megy.*

(ii) *Ha* $c > \lambda\mu$, *akkor a* $\Phi(\infty) := \lim_{u\to\infty} \Phi(u)$ *határértékre* $\Phi(\infty) = 1$ *majdnem biztosan. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* $u > 0$, *hogy* $\Phi(u) > 1 - \varepsilon$.

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk az előző bizonyításban bevezetett jelöléseket, és vegyük észre, hogy az ott definiált $Y_n = cX_n - Z_n$, $n = 1,2,\dots$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak

$$E(Y_n) = cE(X_n) - E(Z_n) = \frac{c}{\lambda} - \mu$$

várható értékkel. Ha $c \le \lambda\mu$, akkor $E(Y_n) \le 0$, amiből a 2.3. Tétel szerint

$$M = \inf_{n\ge 1} Y_n = -\infty\,, \qquad \text{m.b.}$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $u \ge 0$ mellett

$$\inf_{t\ge 0} U_t = u + M = -\infty\,, \qquad \text{m.b.,}$$

amiből már következik, hogy $\Phi(u) = 0$.

Ezzel szemben, ha $c > \lambda\mu$, akkor a 2.3. Tétel ismételt alkalmazásával $Y_1 + \dots + Y_n \to \infty$ majdnem biztosan, amint $n \to \infty$, amiből következik, hogy 1 valószínűséggel $M > -\infty$. Tehát ebben az esetben a $-M$ változó egy véges véletlen változó. Mivel a $\Phi$ függvény nem más, mint a $-M$ eloszlásfüggvénye, az állítás azonnal következik. □

## 2.2. A csődvalószínűségre vonatkozó integrálegyenlet

A következőkben bebizonyítunk egy azonosságot a csőd elkerülésének $\Phi(u)$, $u \ge 0$, valószínűségére. Ez az egyenlet lesz majd az az eszköz, melynek segítségével állításokat fogalmazhatunk meg a csőd valószínűségére. a 2.5. Tételt a 2.6 és a 2.7. Állítás segítségével fogjuk igazolni.

**2.5. Tétel.** *A klasszikus rizikófolyamatra bevezetett* $\Phi(u)$, $u \ge 0$, *függvény megoldása a következő integrálegyenletnek:*

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\big[1 - F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \ge 0\,.$$

**2.6. Állítás.** *Az*

$$I(u) = \int_0^u \Phi(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \geq 0\,,$$

*integrálfüggvény jól definiált, abszolút folytonos és a deriváltja*

$$I'(u) = \Phi(0)\big[1-F(u)\big] + \int_0^u \Phi'(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \geq 0\,.$$

*Bizonyítás.* Legyen

$$f(u,z) := \Phi(u-z)\big[1-F(z)\big]\,, \qquad u,z \geq 0\,.$$

Mivel $I(u) = \int_0^u f(u,z)dz$ és az $f$ függvény korlátos az első síknegyedben, az $I$ függvény jól definiált.

A következő lépésben az abszolút folytonosságot mutatjuk meg. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges érték. Mivel $\Phi$ abszolút folytonos, létezik $\delta > 0$, hogy ha az $[x_i, y_i]$, $y_i \geq x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, tetszőleges intervallumok hosszúságainak összege kisebb, mint $\delta$, akkor

$$\sum_{i=1}^k \big|\Phi(y_i) - \Phi(x_i)\big| < \varepsilon\,.$$

Jegyezzük meg, hogy ekkor tetszőleges $z \geq 0$ esetén

$$\sum_{i=1}^k \big|\Phi(y_i - z) - \Phi(x_i - z)\big| < \varepsilon$$

is teljesül. A fentieken túl legyen $\delta \leq \varepsilon$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k \big|I(y_i) - I(x_i)\big| &= \sum_{i=1}^k \left| \int_0^{y_i} \Phi(y_i - z)\big[1-F(z)\big]\,dz - \int_0^{x_i} \Phi(x_i - z)\big[1-F(z)\big]\,dz \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^k \int_0^{x_i} \big|\Phi(y_i - z) - \Phi(x_i - z)\big|\big[1-F(z)\big]\,dz + \sum_{i=1}^k \int_{x_i}^{y_i} \Phi(y_i - z)\big[1-F(z)\big]\,dz \\
&\leq \int_0^\infty \sum_{i=1}^k \big|\Phi(y_i - z) - \Phi(x_i - z)\big|\big[1-F(z)\big]\,dz + \sum_{i=1}^k \int_{x_i}^{y_i} 1\,dz \\
&\leq \varepsilon \int_0^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz + \delta \leq \varepsilon\mu + \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

amiből már következik, hogy az $I$ függvény is abszolút folytonos.

Már csak az maradt hátra, hogy meghatározzuk az $I$ függvény deriváltját. Vezessük be a

$$J(x,y) = \int_0^y f(x,z)\,dz\,, \qquad x,y \geq 0\,,$$

függvényt, és jegyezzük meg, hogy

$$\frac{dJ}{dx}(x,y)=\int_0^y \frac{df}{dx}(x,z)\,dz\,, \qquad \frac{dJ}{dy}(x,y)=f(x,y)\,.$$

Legyen $x(u)$, $y(u)$, $u\geq 0$, nemnegatív értékű és deriválható függvény. Ekkor a láncszabály értelmében

$$\frac{dJ}{du}\big(x(u),y(u)\big)=\frac{dJ}{dx}\big(x(u),y(u)\big)\frac{dx}{du}(u)+\frac{dJ}{dy}\big(x(u),y(u)\big)\frac{dy}{du}(u)\,.$$

Mivel most teljesül az $I(u)=J(u,u)$ azonosság, az $x(u)=y(u)=u$, $u\geq 0$, függvények mellett a láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned}
I'(u)&=\frac{dJ}{du}(u,u)=\frac{dJ}{dx}(u,u)\cdot 1+\frac{dJ}{dy}(u,u)\cdot 1\\
&=\int_0^u f(u,z)\,dz+f(u,u)\\
&=\int_0^u \Phi'(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz+\Phi(u-u)\big[1-F(u)\big]\,.
\end{aligned}$$

Mivel $\Phi$ abszolút folytonos, a parciális integrálás formulájával és az

$$\int_{\{0\}} \Phi(u-z)\,dF(z)=\Phi(u)F(0)$$

azonosságból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I'(u)&=-\int_{(0,u]}\big[1-F(z)\big]\Phi(u-dz)+\Phi(0)\big[1-F(u)\big]\\
&=-\Bigg[\big[1-F(u)\big]\Phi(u-u)-\big[1-F(0)\big]\Phi(u-0)-\int_{(0,u]}\Phi(u-z)\,d\big[1-F(z)\big]\Bigg]\\
&\qquad+\Phi(0)\big[1-F(u)\big]\\
&=\Phi(u)-\int_{\{0\}}\Phi(u-z)\,dF(z)-\int_{(0,u]}\Phi(u-z)\,dF(z)\\
&=\Phi(u)-\int_{[0,u]}\Phi(u-z)\,dF(z)\,.
\end{aligned}$$

□

**2.7. Állítás.** *A klasszikus rizikófolyamatra bevezetett $\Phi(u)$, $u\geq 0$, függvény pontosan akkor megoldása a 2.5. Tétel integrálegyenletének, ha a deriváltja*

$$\Phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_{[0,u]}\Phi(u-z)\,dF(z)\,, \qquad u\geq 0\,.$$

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a $\Phi$ függvény kielégíti a 2.5. Tétel egyenletet. Ekkor

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} I(u)\,, \qquad u \geq 0\,,$$

amiből az eddigiek szerint

$$\Phi'(u) = 0 + \frac{\lambda}{c} I'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_{[0,u]} \Phi(u-z)\,dF(z)\,, \qquad u \geq 0\,,$$

ami pontosan a 2.7. Állítás egyenlete. Visszafelé, tegyük fel, hogy a $\Phi$ függvény deriváltja olyan alakban áll elő, ahogyan az az állításban szerepel. Ekkor a 2.6. Állítás szerint

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \int_0^u \Phi'(z)\,dz = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u I'(z)\,dz = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} I(u)\,, \qquad u \geq 0\,,$$

amiből már következik a bizonyítandó. □

*Bizonyítás (2.5. Tétel).* Megmutatjuk, hogy a $\Phi$ függvény deriváltja olyan alakban írható fel, amint ami a 2.7. Állításban szerepel, amiből már következik a bizonyítandó állítás.

Az állítás bizonyításához a „kis megváltozások módszerét” használjuk, melyet Cramér is alkalmazott. Adott $u \in \mathbb{R}$ és $t \geq 0$ értékek mellett legyen $A_t(u)$ az az esemény, hogy a biztosító a $t$ időpontban $u$ kezdőtőkéről indulva sosem megy csődbe. A teljes valószínűség tételét alkalmazva

$$\begin{aligned}\Phi(u) = P\big(A_0(u)\big) &= P\big(A_0(u) \mid N_t = 0\big)P(N_t = 0) \\ &\quad + P\big(A_0(u) \mid N_t = 1\big)P(N_t = 1) + P\big(A_0(u) \mid N_t \geq 2\big)P(N_t \geq 2)\end{aligned}$$

A Poisson folyamat tulajdonságai szerint $t \downarrow 0$ esetén

$$P(N_t = 0) = 1 - \lambda t + o(t)\,, \qquad P(N_t = 1) = \lambda t + o(t)\,, \qquad P(N_t \geq 2) = o(t)\,.$$

Ha a $[0,t]$ intevallumon nem történik káresemény, akkor

$$P\big(A_0(u) \mid N_t = 0\big) = P\big(A_t(u+ct) \mid N_t = 0\big) = P\big(A_t(u+ct)\big) = \Phi(u+ct)\,,$$

ahol a második egyenlőség abból következik, hogy a klasszikus rizikófolyamat független független növekményű, míg a harmadik abból, hogy a folyamat stacionárius növekményű. Mivel az első káresemény $Z_1$ nagysága független az $N_t$, $t \geq 0$, Poisson folyamattól, ezért

$$F_{Z_1|\{N_t=1\}}(z) = P\big(Z_1 \leq z \mid N_t = 1\big) = P(Z_1 \leq z) = F(z)\,, \qquad z \in \mathbb{R}\,.$$

Ebből a teljes valószínűség tételét alkalmazva jön, hogy

$$\begin{aligned}P\big(A_0(u) \mid N_t = 1\big) &= \int_{[0,\infty)} P\big(A_0(u) \mid N_t = 1, Z_1 = z\big)\,dF_{Z_1|\{N_t=1\}}(z) \\ \approx \int_{[0,\infty)} P\big(A_t(u+ct-z) \mid N_t = 1, Z_1 = z\big)\,dF(z) &= \int_{[0,u+ct]} \Phi(u+ct-z)\,dF(z)\,,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\Phi(u+ct-z)=0$ ha $z>u+ct$. (Jegyezzük meg, hogy a fenti formulában a második lépésben elkövettünk egy hibát, ezért használjuk a $\approx$ jelet egyenlőség helyett. Itt nem részletezzük, de megmutatható, hogy ez a hiba a végeredmény szempontjából elhanyagolható.) Továbbá, a valószínűség elemi tulajdonságai miatt a

$$P\big(A_0(u)\,|\,N_t=0\big)\,, \qquad P\big(A_0(u)\,|\,N_t=1\big)\,, \qquad P\big(A_0(u)\,|\,N_t\geq 2\big)$$

kifejezések korlátosak, amiből jön, hogy ezeket a $o(t)$ taggal szorozva az eredmény szintén $o(t)$ lesz. Innen kapjuk, hogy

$$\Phi(u)=(1-\lambda t)\Phi(u+ct)+\lambda t\int_{[0,u+ct]}\Phi(u+ct-z)\,dF(z)+o(t)\,.$$

Mivel a $\Phi(u)$ függvény deriválható, vehetjük az $u$ pont körüli kéttagú Taylor sorfejtését, amiből

$$(1-\lambda t)\Phi(u+ct)=(1-\lambda t)\big[\Phi(u)+ct\Phi'(u)+o(ct)\big]=\Phi(u)+ct\Phi'(u)-\lambda t\Phi(u)+o(t)\,.$$

Azonnal következik, hogy

$$\Phi(u)=\Phi(u)+ct\Phi'(u)-\lambda t\Phi(u)+\lambda t\int_{[0,u+ct]}\Phi(u+ct-z)\,dF(z)+o(t),$$

amiből átrendezéssel

$$\Phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c}\Phi(u)\int_{[0,u+ct]}\Phi(u+ct-z)\,dF(z)+\frac{o(t)}{t}\,.$$

Ebből $t\downarrow 0$ határátmenettel kapjuk az állítás egyenletét.

A tételre adunk egy egyszerűbb és immár matematikailag teljesen precíz bizonyítást is, mely szintén a teljes valószínűség tételére épül. Mivel az első káresemény $X_1$ bekövetkezési időpontja és $Z_1$ nagysága független, a két változó együttes eloszlásfüggvénye

$$H(z,x)=P\big(Z_1\leq z, X_1\leq x\big)=F(z)G(x)\,,$$

ahol

$$G(x)=P(X_1\leq x)=1-e^{-\lambda x}\,, \qquad x\geq 0\,.$$

Mivel a biztosító leghamarabb az $X_1$ időpontban mehet csődbe, a Fubini-tétellel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Phi(u)&=P\big(A_0(u)\big)=P\big(A_{X_1}(u+cX_1-Z_1)\big)\\
&=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}P\big(A_{X_1}(u+cX_1-Z_1)\,|\,X_1=x, Z_1=z\big)\,H(dz,dx)\\
&=\int_0^\infty\int_{[0,\infty)}\Phi(u+cx-z)\,dF(z)\,dG(x)\\
&=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda x}\int_{[0,u+cx]}\Phi(u+cx-z)\,dF(z)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Ebből $y = u + cx$ helyettesítéssel jön, hogy

$$\Phi(u) = \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} e^{-\lambda y/c} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\, dF(z)\, dy\,.$$

A $\Phi(u)$ függvényt deriválva, valamint az utolsó lépésben az előző formulát újra felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Phi'(u) &= -\frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} e^{-\lambda u/c} \int_{[0,u]} \Phi(u-z)\, dF(z) + \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} \left[\frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c}\right] e^{-\lambda y/c} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\, dF(z)\, dy \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_{[0,u]} \Phi(u-z)\, dF(z) + \frac{\lambda}{c}\Phi(u)\,,\end{aligned}$$

ami pontosan a bizonyítandó egyenlőség. □

**2.8. Következmény.** *Klasszikus rizikófolyamatra* $c > \lambda\mu$ *esetén* $\Phi(0) = 1 - \lambda\mu/c$.

*Bizonyítás.* Tetszőleges $z \geq 0$ rögzített érték esetén

$$\Phi(u-z)\mathbb{1}_{\{z \leq u\}} \to \Phi(\infty)\,, \qquad u \to \infty\,,$$

továbbá

$$\int_0^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz = \mu < \infty\,.$$

Ezekből a majoráns konvergenciatétel alkalmazásával jön, hogy $u \to \infty$ esetén

$$\begin{aligned}\Phi(\infty) \leftarrow \Phi(u) &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-z)\big[1 - F(z)\big]\, dz \\ &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \Phi(u-z)\mathbb{1}_{\{z \leq u\}}\big[1 - F(z)\big]\, dz \\ &\to \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \Phi(\infty)\big[1 - F(z)\big]\, dz \\ &= \Phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\Phi(\infty)\,,\end{aligned}$$

azaz

$$\Phi(\infty) = \Phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\Phi(\infty)\,.$$

A 2.4. Tételben megmutattuk, hogy a $c > \lambda\mu$ esetben $\Phi(\infty) = 1$, amiből

$$1 = \Phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c} \cdot 1\,,$$

vagyis $\Phi(0) = 1 - \lambda\mu/c$. □

**2.9. Példa.** A 2.5. Tétel egyenletét általában nehéz megoldani, de ha az egyedi károk exponenciális eloszlást követnek, akkor a $\Phi(u)$, $u \geq 0$, függvényre könnyen adható explicit formula. Mivel $E(Z) = \mu$, azonnal jön, hogy az exponenciális eloszlás paramétere $1/\mu$, vagyis

$$F(z) = 1 - e^{-z/\mu}, \qquad dF(z) = \frac{1}{\mu} e^{-z/\mu}, \qquad z \geq 0.$$

Ekkor a 2.7. Állításból $v = u - z$ helyettesítéssel

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(v)\left[\frac{1}{\mu}e^{-(u-v)/\mu}\right] dv.$$

Deriválással, majd az előző egyenlet ismételt alkalmazásával

$$\begin{aligned}\Phi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\Phi'(u) - \left[\frac{\lambda}{c\mu}\Phi(u)e^{-(u-u)/\mu} - \frac{1}{\mu}\frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u \Phi(v)e^{-(u-v)/\mu}\, dv\right] \\ &= \frac{\lambda}{c}\Phi'(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\Phi(u) + \frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \Phi'(u)\right] = -R\Phi'(u),\end{aligned}$$

ahol $R = 1/\mu - \lambda/c > 0$. Kétszeres integrálással jön, hogy megfelelően választott $D_1, D_2$ konstansokkal

$$\Phi(u) = D_1 e^{-Ru} + D_2, \qquad u \geq 0.$$

A $\Phi(0) = \lambda\mu/c$ és a $\Phi(\infty) = 1$ peremfeltétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}e^{-Ru}, \qquad u \geq 0.$$

**2.10. Tétel.** *Ha $c > \lambda\mu$, akkor a $\Psi(u)$, $u \geq 0$, csődvalószínűség megoldása az alábbi függvényegyenletnek:*

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)\big[1 - F(z)\big]\, dz.$$

*Bizonyítás.* Most

$$\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = 1 - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz,$$

így a 2.5. Tételből értelmében

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\big[1 - F(z)\big]\, dz, \qquad u \geq 0.$$

Mivel $\Psi(u) = 1 - \Phi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, adódik, hogy

$$\begin{aligned}\Psi(u) = 1 - \Phi(u) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \big(1 - \Psi(u-z)\big)\big[1 - F(z)\big]\, dz, \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)\big[1 - F(z)\big]\, dz. \qquad \square\end{aligned}$$

## 2.3. A csődvalószínűség aszimptotikus viselkedése

Legyen $M(r)=E(e^{rZ})$ a $Z_1, Z_2, \ldots$ kárnagyságok közös momentumgeneráló függvénye, és legyen

$$h(r) := M(r) - 1 = \int_{\mathbb{R}} e^{rz} dF(z) - 1\,.$$

Mivel a kárnagyságok nemnegatívak, a $h$ függvény létezik a negatív félegyenesen. Emellett a függvény konvex azon az intervallumon, ahol létezik, ezért a $h(r)=cr/\lambda$ egyenletnek legfeljebb két megoldása megoldása lehet. Mivel most $h(0)=0$, a fenti egyenletnek legfeljebb egy pozitív gyöke van.

**2.11. Tétel** (Cramér–Lundberg approximáció)**.** *Tegyük fel, hogy a*

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{h(r)}{r}$$

*egyenletnek létezik pozitív $R$ megoldása, továbbá tegyük fel, hogy a $h$ függvény véges az $R$ pont valamely környezetében. Ekkor*

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c}\,.$$

*Az $R$ értéket Lundberg-kitevőnek nevezzük.*

A tétel gyakorlatilag azt állítja, hogy a csőd valószínűsége az $u$ kezdőtőke függvényében assziptotikusan exponenciális, hiszen

$$\Psi(u) \sim \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c} e^{-Ru}\,, \qquad u \to \infty\,.$$

*Bizonyítás.* Mivel a momentumgeneráló függvény létezik az $R$ pontban, az

$$M(R) = E\big(e^{RZ}\big) = \int_{[0,\infty)} e^{Rz} dF(z)$$

integrál véges. Ekkor az 1.31. Következmény (ii) pontja szerint

$$h(R) = M(R) - 1 = R\int_0^\infty e^{Rz}\big[1 - F(z)\big]\, dz\,,$$

amiből a $h$ függvény és az $R$ érték definíciója miatt

$$1 = \frac{\lambda}{cR} h(R) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rz}\big[1 - F(z)\big] dz\,.$$

Ezt azt jelenti, hogy a

$$g(z) := \begin{cases} \lambda e^{Rz}\big[1 - F(z)\big]/c\,, & z \geq 0\,, \\ 0\,, & z < 0\,, \end{cases}$$

függvény egy abszolút folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye, méghozzá egy olyan eloszlásé, mely a pozitív félegyenesre van koncentrálva. Legyen

$$G(z) := \int_0^z g(x)\,dx\,,$$

a kapcsolatos eloszlásfüggvény, továbbá legyen $\xi$ egy olyan változó, melynek $G$ az eloszlásfüggvénye. Legyen továbbá

$$a(u) = \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\,dz\,, \qquad A(u) = e^{Ru}\Psi(u)\,, \qquad u \in \mathbb{R}\,.$$

Ekkor a 2.10. Tétel függvényegyenletéből

$$e^{Ru}\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\,dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^u e^{R(u-z)}\Psi(u-z) e^{Rz}\big[1 - F(z)\big]\,dz\,,$$

ami a bevezetett jelölésekkel az

$$A(u) = a(u) + \int_0^u A(u-z)g(z)\,dz = a(u) + \int_0^u A(u-z)\,dG(z)$$

felújítási egyenletet adja. Mivel $\xi$ folytonos, nem lehet rácsos eloszlású, továbbá deriválással megmutatható, hogy $a$ monoton csökkenő függvény. Ekkor az 1.27. Tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{u\to\infty} A(u) = \frac{1}{E(\xi)} \int_0^\infty a(z)dz = \frac{C_1}{C_2}\,,$$

ahol

$$C_1 = \int_0^\infty a(z)dz \qquad \text{és} \qquad C_2 = E(\xi)\,.$$

A továbbiakban meghatározzuk $C_1$ és $C_2$ értékét.

Mivel az $M$ momentumgeneráló függvény véges az $R$ pont egy környezetében, az $M$ függvény deriválható ebben a pontban, (miért?,) továbbá

$$\infty > h'(R) = M'(R) = \int_{[0,\infty)} z e^{Rz}\,dF(z) = E\phi(Z)\,,$$

a $\phi(z) := ze^{Rz}$, $z \geq 0$, függvénnyel. Kis számolással ellenőrizhető, hogy

$$\phi(z) = \frac{\phi'(z) - e^{Rz}}{R}\,, \qquad z \geq 0\,.$$

Mivel $\phi$ monoton és abszolút folytonos, az 1.30. Tétellel és az $R$ érték definíciójával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
C_2 = E(\xi) &= \int_0^\infty z g(z)\,dz = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \phi(z)\big[1 - F(z)\big]\,dz \\
&= \frac{\lambda}{cR}\int_0^\infty \phi'(z)\big[1 - F(z)\big]\,dz - \frac{\lambda}{cR}\int_0^\infty e^{Rz}\big[1 - F(z)\big]\,dz \\
&= \frac{\lambda}{cR}\Big[E\phi(Z) - \phi(0)\Big] - \frac{\lambda}{cR^2}h(R) = \frac{\lambda}{cR}h'(R) - \frac{1}{R} = \frac{\lambda h'(R) - c}{cR}\,.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a $H(u) := 0$, $u < 0$, és

$$H(u) := \frac{1}{\mu}\int_0^u \big[1 - F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \geq 0\,,$$

formulákkal definiált függvény eloszlásfüggvény, hiszen monoton növekvő, càdlàg (sőt, abszolút folytonos), és a határértéke a két végtelenben 0 és 1. Ha $\eta$ egy olyan változó, melynek $H$ az eloszlásfüggvénye, akkor

$$E\big(e^{R\eta}\big) = \int_0^\infty e^{Ru}\,dH(u) = \int_0^\infty e^{Rz}\frac{1}{\mu}\big[1 - F(z)\big]\,dz = \frac{h(R)}{\mu R} = \frac{c}{\lambda\mu} < \infty\,,$$

amiből az 1.31. Következmény (ii) pontjának segítségével

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Ru}\int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\,dz du = \frac{\lambda\mu}{cR}\int_0^\infty Re^{Ru}\big[1 - H(z)\big]\,du \\ &= \frac{\lambda\mu}{cR}\bigg[\int_0^\infty e^{Ru}\,dH(u) - 1\bigg] = \frac{\lambda\mu}{cR}\bigg[\frac{c}{\lambda\mu} - 1\bigg] = \frac{c - \lambda\mu}{cR}\,. \end{aligned}$$

Innen

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c}\,,$$

tehát az állítást bebizonyítottuk. □

**2.12. Példa.** Ha az egyedi károk exponenciális eloszlást követnek $1/\mu$ paraméterrel, akkor

$$M(r) = E\big(e^{rZ}\big) = \frac{1}{1 - \mu r}\,, \quad h(r) = M(r) - 1 = \frac{\mu r}{1 - \mu r}\,, \quad h'(r) = \frac{\mu}{(1 - \mu r)^2}\,, \quad r < \frac{1}{\mu}\,.$$

Ekkor a $h(r)/r = c/\lambda$ egyenletnek van pozitív megoldása, ami

$$R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\,.$$

Vegyük észre, hogy most $R < 1/\mu$, tehát a $h$ függvény létezik az $R$ Lundberg-kitevő valamely környezetében. Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$h'(R) = \mu\Big(\frac{c}{\lambda\mu}\Big)^2,$$

amiből

$$\Psi(u) \sim \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c}e^{-Ru} = \frac{\lambda\mu}{c}e^{-Ru}\,, \qquad u \to \infty\,.$$

Jegyezzük meg, hogy exponenciális eloszlás esetén nem csak aszimptotikus egyenlőség van, hanem ennél több is teljesül. Nevezetesen, az előző fejezet végén tárgyalt példából

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c}e^{-Ru}\,, \qquad u \geq 0\,.$$

## 2.4. A csődvalószínűség kiemelkedő egyedi károk esetén

Pareto-elvként vonult be a köztudatba az az észrevétel, hogy bizonyos jelenségeknél a következmények k%-a az okok (100-k)%-ára vezethető vissza. Maga Pareto erre 1906-ban két példát adott. Egyrészt sok vállaltnál a bevétel 80%-a a vevők 20%-ától jön, másrészt a földbirtokok 80%-a a népesség 20%-ának kezében van. Erre a jelenségre Pareto azt a magyarázatot adta, hogy a népességen pelül a jövedelem hatványeloszlást követ, tehát ha $Z$ jelöli egy véletlenszerűen választott ember vagyonát, akkor

$$P(Z=k)\approx ck^{-\gamma}\,,\qquad k\in\mathbb{Z}^+\,.$$

Innen megfelelő $\gamma>1$ esetén már matematikai levezetéssel jön a Pareto-elv.

A Pareto-elv, tehát a nagy jövedelemkülönbségek egy fontos következménye, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk néhány embert, akiknek a vagyona $Z_1,\dots,Z_n$ független és azonos eloszlású változó a fenti eloszlással, akkor

$$Z_1+\dots+Z_n\approx\max(Z_1,\dots,Z_n)\,,$$

tehát a csoport összvagyona jól kövelíthető a leggaddagabb egyén vagyonával. Ezt a jelenséget az élet más területein is megfigyelhetjük, bár nem feltétlenül a 80-20-as szabály formályában. Tipikus példák a településméretek, egyes nyersanyagok lelőhelyeinek (olajmezők, gyémántbányák) nagysága, a természeti katasztrófák (erdőtűz, földrengés) által okozott kár, és végül, de nem utolsó sorban, bizonyos biztosítástípusoknál az egyedi kár nagysága.

Napjainkban a Pareto-eloszlást az alábbi módon definiáljuk.

**2.13. Definíció.** Egy nemnegatív értékű $Z$ változó Pareto-eloszlást követ $\alpha,\lambda>0$ paraméterekkel, ha eloszlásfüggvénye illetve sűrűségfüggvénye

$$F(z)=1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+z}\right)^{\alpha},\qquad f(z)=\frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+z)^{\alpha+1}}\,,\qquad z\ge 0\,.$$

**2.14. Állítás.** *Ha a $Z$ változó Pareto-eloszlást követ $\alpha$ és $\lambda$ paraméterrel, akkor $k$-dik momentuma*

$$E\big(Z^k\big)=\lambda^k k!\,\frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\,,\qquad k\in\mathbb{N}\,,k<\alpha\,,$$

*és a $k$-dik momentum nem létezik, ha $k\ge\alpha$. Speciálisan, az eloszlás várható értéke pontosan akkor véges, ha $1<\alpha$, és ekkor $E(Z)=\lambda/(\alpha-1)$. Továbbá, a változó momentumgeneráló függvénye nem létezik a pozitív félegyenesen, tehát $M(r)=\infty$, ha $r>0$.*

*Bizonyítás.* A $k$-dik momentum

$$E\big(Z^k\big)=\int_0^\infty z^k f(z)\,dz=\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\infty z^k\left[\frac{\lambda}{\lambda+z}\right]^{\alpha+1}dz\,.$$

Az $y = \lambda(\lambda+z)^{-1}$ helyettesítést alkalmazva

$$E\big(Z^k\big) = \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1 \left[\frac{\lambda(1-y)}{y}\right]^k y^{\alpha+1}\frac{\lambda}{y^2}\,dy = \alpha\lambda^k\int_0^1 y^{\alpha-k-1}(1-y)^k dy\,.$$

Tekintsük a

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\,, \qquad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\,, \qquad \alpha,\beta > 0\,.$$

formulákkal definiált beta- illetve gamma-függvényt. A függvényekre vonatkozó ismert összefüggések szerint

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,, \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\,, \qquad \Gamma(k) = (k-1)!\ .$$

Ekkor

$$E\big(Z^k\big) = \alpha\lambda^k B(\alpha-k,k+1) = \alpha\lambda^k\frac{\Gamma(\alpha-k)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \lambda^k k!\,\frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\,.$$

Speciálisan, $k=1$ esetén, ha $\alpha > 1$, akkor

$$E(X) = \lambda\frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} = \frac{\lambda}{\alpha-1}\,.$$

A momentumgeneráló függvény tetszőleges $r > 0$ esetén

$$M(r) = \int_0^\infty e^{rz}f(z)\,dz = \infty\,,$$

hiszen $e^{rz}f(z) \to \infty$, amint $z \to \infty$. □

A tétel egyik fontos következménye, hogy ha a $Z_1, Z_2, \ldots$ egyedi károk Pareto eloszlást követnek, akkor a csődvalószínűség nem közelíthető a Cramér–Lundberg approximáció segítségével, hiszen nincsen Lundberg-kitevő.

**2.15. Állítás.** *Ha $Z$ Pareto-eloszlást követ $\alpha,\lambda > 0$ paraméterekkel, akkor az $\ln(1+Z/\lambda)$ változó exponenciális eloszlású $\alpha$ paraméterrel.*

*Bizonyítás.* Nyilvánvaló, hogy $\ln(1+Z/\lambda) \geq 0$, azaz a transzformált változó eloszlásfüggvénye 0 a negatív félegyenesen. Továbbá, tetszőleges $y \geq 0$ esetén

$$P\left(\ln\left[1+\frac{Z}{\lambda}\right] \leq y\right) = P\big(Z \leq \lambda(e^y-1)\big) = 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\lambda(e^y-1)}\right)^\alpha = 1-e^{-\alpha y}\,.$$

Ez pedig pontosan az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye. □

Legyen $F(z)$, $z\in\mathbb{R}$, tetszőleges eloszlásfüggvény, legyen $Z_1, \ldots, Z_n$ független és azonos eloszlású közös $F$ eloszlásfüggvénnyel, továbbá legyen

$$M_n = \max_{1\le k\le n} Z_n \,.$$

Ekkor a változók összegére

$$P\big(Z_1+\cdots+Z_n > z\big) = 1-P\big(Z_1+\cdots+Z_n \le z\big) = 1-F^{\star n}(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

A változók függetlenségét alkalmazva a maximum eloszlása

$$\begin{aligned}
P(M_n > z) &= \sum_{k=1}^{n} P\big(\text{a } Z_1, \ldots, Z_n \text{ változók közül pontosan } k \text{ darab nagyobb, mint } z\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P\big(Z_1 > z, \ldots, Z_k > z, Z_{k+1} \le z, \ldots, Z_n \le z\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \big[1-F(z)\big]^k F^{n-k}(z)\\
&\le n\big[1-F(z)\big]F^{n-1}(z) + C\big[1-F(z)\big]^2,
\end{aligned}$$

ahol $C > 0$ olyan valós szám, mely függ $n$ értékétől, de $z$-től már nem. Tegyük fel, hogy $F(z) < 1$ minden $z \ge 0$ esetén. Mivel $z\to\infty$ mellett $F(z)\to 1$ és $1-F(z)\to 0$, kapjuk, hogy

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(M_n > z)}{n[1-F(z)]} = 1\,.$$

**2.16. Definíció.** Tegyük fel, hogy az $F(z)$, $z\in\mathbb{R}$, eloszlásfüggvényre $F(0)=0$, és $F(z)<1$, ha $z>0$. Az eloszlásfüggvény **szubexponenciális**, ha tetszőleges $n\ge 2$ egész esetén

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1-F^{\star n}(z)}{1-F(z)} = n\,.$$

Ha az $F$ eloszlásfüggvény szubexponenciális, akkor a fenti gondolatmenet szerint

$$P\big(Z_1+\cdots+Z_n > z\big) = 1-F^{\star n}(z) \sim n[1-F(z)] \sim P(M_n > z)\,, \qquad z\to\infty\,.$$

Tehát, ha $z$ elég nagy, akkor

$$P\big(Z_1+\cdots+Z_n > z\big) \approx P(M_n > z)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy az összeg eloszlását alapvetően a legnagyobb tag határozza meg, és mellette a többi tag nagy valószínűséggel elhanyagolható. A következő állításban megmuttajuk, hogy ugyanez véletlen tagszám esetén is teljesül.

**2.17. Állítás.** *Legyen $Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ független véletlen változó, ahol $F(z)$, $z \in \mathbb{R}$, szubexponenciális eloszlásfüggvény. Legyen továbbá $N$ a sorozattól független nemnegatív egész értékű változó, és tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ mellett*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^k P(N=k) < \infty\,.$$

*Ekkor az*

$$S := Z_1 + \cdots + Z_N\,, \qquad M := \max\big(Z_1, \ldots, Z_N\big)\,,$$

*változókra teljesül, hogy*

$$\frac{P(S>z)}{1-F(z)} \to E(N)\,, \qquad \frac{P(S>z)}{P(M>z)} \to 1\,, \qquad z \to \infty\,.$$

A korábbiakban már láttuk, hogy Pareto-eloszlás esetén a momentumgeneráló függvény nem létezik sehol sem a pozitív félegyenesen. Ennek az az oka, hogy tetszőleges $r>0$ esetén $e^{rz}[1-F(z)] \to \infty$, amint $z \to \infty$. Ugyanis, ha a momentumgeneráló függvény létezne bármely $r > 0$ pontban, akkor az 1.31. Következmény (ii) pontja szerint erre az értékre $e^{rz}[1-F(z)] \to 0$, $z \to \infty$, teljesülne. Az ilyen tulajdonságú eloszlásokat nehézfarkú eloszlásoknak nevezzük.

**2.18. Definíció.** Legyen $F(z)$, $z \in \mathbb{R}$, egy nemnegatív értékű változó eloszlásfüggvénye. Az eloszlásfüggvény **nehézfarkú**, ha tetszőleges $r > 0$ esetén

$$e^{rz}\big[1-F(z)\big] \to \infty\,, \qquad z \to \infty\,.$$

**2.19. Állítás.** (i) *Ha egy eloszlásfüggvény nehézfarkú, akkor szubexponenciális.*

(ii) *Ha az $F$ eloszlásfüggvényre*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1-F^{\star 2}(z)}{1-F(z)} = 2\,,$$

*akkor $F$ szubexponenciális.*

**2.20. Tétel.** *Legyen $N$ nemnegatív egész értékű változó, legyen $p_k = P(N=k)$, $k=0,1,\ldots$, és tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ esetén*

$$g_N(1+\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1+\varepsilon)^k < \infty\,.$$

*Legyen $G(z)$, $z \in \mathbb{R}$, tetszőleges eloszlásfüggvény, melyre $G(0) = 0$, és legyen*

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k G^{\star k}(z)\,, \qquad z \in \mathbb{R}\,.$$

(i) *Ha $G$ szubexponenciális eloszlásfüggvény, akkor*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1-H(z)}{1-G(z)} = E(N) \qquad (*)\,.$$

(ii) *Ha $(*)$ teljesül, és valamely $k \geq 2$ esetén $p_k > 0$, akkor $G$ szubexponenciális.*

(iii) *Ha $G$ szubexponenciális, és valamely $k\geq 1$ esetén $p_k>0$, akkor $H$ is szubexponenciális eloszlásfüggvény.*

*Bizonyítás (2.17. Állítás).* Ha $H(z)$, $z \in \mathbb{R}$, jelöli az $S$ változó eloszlásfüggvényét, akkor a teljes valószínűség tételével

$$\begin{aligned} H(z) = P(S \leq z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\big(Z_1 + \cdots + Z_N \leq z \mid N = k\big) P(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\big(Z_1 + \cdots + Z_k \leq z\big) P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{\star k}(z) P(N = k)\,. \end{aligned}$$

Mivel most $F$ szubexponenciális eloszlásfüggvény, a 2.20. Tétel (i) pontjából következik, hogy

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1-H(z)}{1-F(z)} = E(N)\,.$$

A másik állításért vegyük észre, hogy a változók függetlenségét alkalmazva

$$\begin{aligned} P(M > z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(Z_{k+1} > z,\, \max_{1\leq j\leq k} Z_j \leq z, N > k\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{k+1} > z) P\Big(\max_{1\leq j\leq k} Z_j \leq z\Big) P(N > k) \\ &= P(Z_1 > z) \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 \leq z)^k P(N > k)\,. \end{aligned}$$

Ekkor a monoton konvergenciatételt és az 1.31. Következmény (i) pontját alkalmazva

$$\frac{P(M > z)}{P(Z > z)} = \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(Z_1 \leq z\Big)^k P(N > k) \to \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot P(N > k) = E(N)\,, \qquad z \to \infty\,.$$

A jelen állítás már igazolt részéből

$$\frac{P(S > z)}{P(M > z)} = \frac{P(S > z)}{P(Z > z)} \frac{P(Z > z)}{P(M > z)} \to E(N) \frac{1}{E(N)}\,, \qquad z \to \infty\,,$$

ami pontosan a bizonyítandó konvergencia. □

**2.21. Tétel** (A csődvalószínűség aszimptotikus viselkedése)**.** *Legyen $F(z)$, $z \in \mathbb{R}$, a kárnagyságok közös eloszlásfüggvénye, tegyük fel, hogy $\lambda\mu < c$, és tekintsük az*

$$F_0(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bigl[1 - F(z)\bigr] dz\,, \qquad x \geq 0\,.$$

$F_0(x) = 0$, $x < 0$, *eloszlásfüggvényt. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) $F_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *szubexponenciális eloszlásfüggvény.*

(ii) *A* $\Psi(u)$, $u \geq 0$, *csődvalószínűségre*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Psi(u)}{1 - F_0(u)} = \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu}\,.$$

Jegyezzük meg, hogy ha $F_0$ nehézfarkú eloszlásfüggvény, akkor tetszőleges $r>0$ mellett

$$e^{ru}\Psi(u) \sim \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu} e^{ru}\bigl[1 - F_0(u)\bigr] \to \infty\,, \qquad u \to \infty\,,$$

tehát a Cramér–Lundberg approximációval szemben most a csődvalószínűség exponenciálisnál lassabb rendben cseng le.

*Bizonyítás.* A $\lambda\mu<c$ feltétel miatt a $\Phi(u)$, $u\geq 0$, függvényre vonatkozó integrálegyenletből

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-z)\bigl[1 - F(z)\bigr] dz\,, \qquad u \geq 0\,.$$

Vezessük be az $\alpha = \lambda\mu/c < 1$ értéket. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$\Phi(u) = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k F_0^{(*k)}(u)\,, \qquad u \geq 0\,.$$

Jelölje $\Phi_1(u)$ a fenti kifejezés jobb oldalát, és vegyük észre, hogy a $F_0$ függvény definíciója szerint

$$\bigl[1 - F(u)\bigr] du = \mu\, dF_0(u)\,.$$

A $\Phi_1$ függvényt az integrálegyenlet bal oldalába helyettesítve és a monoton konvergenciatételt alkalmazva

$$\begin{aligned}
1 - &\frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi_1(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz \\
&= (1-\alpha) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \left[(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star k}(u-z)\right]\mu\,dF_0(z) \\
&= (1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)\int_0^u \lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\alpha^k F_0^{\star k}(u-z)\,dF_0(z) \\
&= (1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\alpha^k \int_0^u F_0^{\star k}(u-z)\,dF_0(z) \\
&= (1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star(k+1)}(u) \\
&= (1-\alpha)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star k}(u)\right] = \Phi_1(u)\,.
\end{aligned}$$

Tehát a $\Phi_1$ függvény kielégíti a $\Phi$ függvényre vonatkozó integrálegyenletet. Itt ugyan nem részletezzük, de analízisbeli eszközökkel megmutatható, hogy bizonyos függvények között az egyenlet megoldása egyértelmű, amiből kapjuk, hogy $\Phi(u) = \Phi_1(u)$, $u \geq 0$.

Legyen $N$ egy olyan változó, melynek eloszlása

$$p_k = P(N = k) = (1-\alpha)\alpha^k\,, \qquad k = 0,1,\ldots$$

Ekkor $N$ momentumgeneráló függvénye

$$g_N(1+\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^k p_k = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\big[\alpha(1+\varepsilon)\big]^k < \infty\,,$$

ha $\alpha(1+\varepsilon) < 1$, ami teljesül, ha $\varepsilon < 1/\alpha - 1$. Továbbá, az $N$ változó várható értéke

$$\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\alpha)\alpha^k = (1-\alpha)\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\alpha^k - \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\right] \\
&= (1-\alpha)\left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)' - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}\,.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a 2.20. Tételben ha $G = F_0$, akkor

$$H(z) = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star k}(z)\,, \qquad z \in \mathbb{R}\,.$$

Mivel most $p_k >$ minden $k$ nemnegatív egész esetén, a bizonyítandó állítás következik a 2.20. Tétel (i) és (ii) pontjából. $\square$

A következő állítás segítséget nyújt a szubexponenciális tulajdonság leellenőrzéséhez.

**2.22. Állítás.** *Tekintsük az előző tételben bevezetett jelöléseket. Ha az alábbi feltételek közül valamelyik teljesül, akkor $F_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, szubexponenciális eloszlásfüggvény.*

- *Az $F$ eloszlásfüggvényre*
$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{1-F(2x)} < \infty\,.$$
- *Az $F$ eloszlásfüggvénynek létezik $f$ sűrűségfüggvénye, és*
$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1-F(x)} < \infty\,.$$

**2.23. Példa.** Ha $Z$ Pareto eloszlást követ $\alpha > 1$ és $\lambda' > 0$ paraméterrel, akkor várható értéke $\mu = E(Z) = \lambda'/(\alpha-1)$, valamint integrálással

$$F_0(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \big[1-F(z)\big]\,dz = 1 - \left[\frac{\lambda'}{\lambda'+x}\right]^{\alpha-1}, \qquad x \ge 0\,.$$

Jegyezzük meg, hogy $F_0$ az $\alpha-1$ és $\lambda'$ paraméteres Pareto eloszlás eloszlásfüggvénye, ami nehézfarkú eloszlás, tehát szubexponenciális. (A szubexponenciális tulajdonság a 2.22. Állítás segítségével is belátható.) Ekkor

$$\Psi(u) \sim \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}\left(\frac{\lambda'}{\lambda'+u}\right)^{\alpha-1}, \qquad u \to \infty\,,$$

tehát a csődvalószínűség polinomiális rendben cseng le.

## 2.5. A Lundberg-kitevő becslése

A 2.11. Tétel garantálja, hogy bizonyos könnyen ellenőrizhető elméleti feltételek mellett létezik az $R$ Lundberg-kitevő. A nehézség az, hogy a valóságban nem ismerjük $\lambda$ pontos értékét és a $Z$ káreloszlás momentumgeneráló függvényét, és emiatt $R$ értékét nem tudjuk elméleti úton meghatározni. Rögzített $T > 0$ mellett legyen

$$G_T(r) = \frac{1}{N_T}\sum_{k=1}^{N_T} e^{rZ_k} - 1 - \frac{cr}{N_T/T}\,, \qquad r \in \mathbb{R}\,,$$

és

$$g(r) = h(r) - \frac{cr}{\lambda} = M(r) - 1 - \frac{cr}{\lambda} = E\big(e^{rZ}\big) - 1 - \frac{cr}{\lambda}\,.$$

Vegyük észre, hogy $G_T$ csak az $\{N_T > 0\}$ eseményen van definiálva, de $T \to \infty$ esetén a nagy számok erős törénye miatt $N_T/T \to \lambda$. Ekkor

$$P\big(\text{létezik } T \ge 0, \text{ hogy } N_T > 0\big) = 1\,,$$

vagyis 1 valószínűséggel teljesül, hogy ha $T$ elég nagy, akkor $G_T$ létezik. Emellett

$$G_T(r) \to g(r)\,, \qquad T \to \infty\,, \qquad \text{m.b.},$$

továbbá

$$G_T'(r) = \frac{1}{N_T}\sum_{k=1}^{N_T} Z_k e^{rZ_k} - \frac{c}{N_T/T} \to E\big(Ze^{rZ}\big) - \frac{c}{\lambda} = g'(r)\,, \qquad T \to \infty \qquad \text{m.b.}$$

minden olyan $r$ pontban, ahol az $M$ momentumgeneráló függvény illetve annak deriváltja létezik. Tehát $G_T$ és $G_T'$ egy pontonként erősen konzisztens becslése a $g$ illetve a $g'$ függvénynek.

Vegyük észre, hogy $G_T$ konvex függvények (véletlen tagszámú) összegeként van definiálva, tehát maga is konvex. Emellett

$$G_T'(0) \to g'(0) = \mu - \frac{c}{\lambda} < 0\,, \qquad T \to \infty\,.$$

Mivel $G_T(0)=0$, és tetszőlegesen rögzített $T>0$ esetén $G_T(r) \to \infty$ amint $r \to \infty$, kapjuk, hogy ha $T$ elég nagy, akkor a $G_T(r) = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív $r = R_T$ gyöke van. A célunk azt megmutatni, hogy $R_T$ jó becslése a Lundberg-kitevőnek.

**2.24. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $c > \lambda\mu$ és $P(Z=0) < 1$, továbbá tegyük fel, hogy létezik az $R$ Lundberg-kitevő, tehát a $h(r)/r = c/\lambda$ egyenletnek van pozitív megoldása.*

(i) *Ha $h(r)$ véges az $R$ valamely valamely környezetében, akkor a $G_T(r)=0$ egyenletnek 1-hez tartó valószínűséggel pontosan egy pozitív $R_T$ megoldása van, továbbá*

$$R_T \to R\,, \qquad T \to \infty\,, \qquad \textit{m.b.}$$

(ii) *Ha $h(2R) < \infty$, akkor*

$$\sqrt{T}(R_T - R) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma^2)\,, \quad T \to \infty\,, \qquad \textit{ahol} \qquad \sigma^2 = \frac{g(2R)}{\lambda(g'(R))^2}\,.$$

A tétel (i) pontja azt állítja, hogy $R_T$ aszimptotikusan jól definiált és erősen konzisztens becslése a Lundberg-kitevőnek. A (ii) segítségével konfidencia intervallumot szerkeszthetünk az $R$ értékre. Legyen ugyanis $0 < \alpha < 1$ tetszőleges, továbbá legyen $x_\alpha \in \mathbb{R}$ az az egyértelmű érték, melyre

$$P\big(N(0{,}1) \le x_\alpha\big) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,.$$

Ekkor

$$P\left(R_T - \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{T}} \le R \le R_T + \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{T}}\right) = P\Big(-x_\alpha\sigma \le \sqrt{T}(R_T - R) \le x_\alpha\sigma\Big)$$
$$\to P\big(-x_\alpha\sigma \le N(0,\sigma^2) \le x_\alpha\sigma\big) = P\big(-x_\alpha \le N(0{,}1) \le x_\alpha\big) = 1 - \alpha\,,$$

tehát

$$\left[R_T - \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{T}}, R_T + \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{T}}\right]$$

egy aszimptotikusan $1-\alpha$ megbízhatóságú konfidencia intervallum az $R$ Lundberg-kitevőre.∎

*Bizonyítás.* (i) Az állítás első részét már bizonyítottuk. Mivel $g$ konvex, továbbá 0 és $R$ a két zéróhelye, a függvény monoton nő az $R$ valamely környezetében. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges olyan érték, melyre $g$ monoton nő az $(R-\varepsilon, R+\varepsilon)$ intervallumon. Mivel most $g(R) = 0$, és $G_T$ konvergál a $g$ függvényhez, kapjuk, hogy

$$G_T(R-\varepsilon) \to g(R-\varepsilon) < 0 \qquad G_T(R+\varepsilon) \to g(R+\varepsilon) > 0\,, \qquad T \to \infty\,.$$

Ebből azonnal jön, hogy ha $T$ elég nagy, akkor a $G_T$ függvény $R_T$ gyöke az $(R-\varepsilon, R+\varepsilon)$ intervallumba esik. Mivel $\varepsilon$ tetszőlegesen kicsi pozitív érték volt, kapjuk, hogy $R_T \to R$ majdnem biztosan.

(ii) A $G_T$ függvény létezik és konvex, és emiatt deriválható az $R$ pont elegendően kicsi környezetében. A Lagrange-tétel értelmében ekkor létezik egy $\tilde{R}_T$ érték $R$ és $R_T$ között, melyre

$$\frac{G_T(R_T) - G_T(R)}{R_T - R} = G_T'\big(\tilde{R}_T\big)\,.$$

Nyilván $G_T(R_T) = 0$ és $\tilde{R}_T \to R$, továbbá megmutatható, hogy $G_T'$ konvergál a $g'$ függvényhez azokban a pontokban, ahol $g$ létezik. Ekkor $g$ folytonossága miatt

$$\frac{G_T(R)}{R_T - R} = -G_T\big(\tilde{R}_T\big) = -g\big(\tilde{R}_T\big) + \big[g\big(\tilde{R}_T\big) - G_T\big(\tilde{R}_T\big)\big] \to -g'(R) + 0\,,$$

tehát

$$R_T - R \sim -\frac{G_T(R)}{g'(R)}\,, \qquad T \to \infty\,, \qquad \text{m.b.}$$

A továbbiakban meghatározzuk $G_T(R)$ határeloszlását. Vegyük észre, hogy a

$$\sqrt{T}G_T(R) = \sqrt{\frac{T}{N_T}}\frac{1}{\sqrt{N_T}}\sum_{k=1}^{N_T}\bigg[\Big(e^{RZ_k} - 1 - h(R)\Big) - cR\Big(X_k - \frac{1}{\lambda}\Big)\bigg] - cR\frac{T - Y_{N_T}}{\sqrt{N_T}}\sqrt{\frac{T}{N_T}}\,,$$

formulában a nagy számok erős törvénye miatt $N_T/T \to \lambda$ amint $T \to \infty$. Legyen $\varepsilon, \delta > 0$ tetszőleges érték. A Markov-egyenlőséget és az inspection paradox eredményét felhasználva

$$P\bigg(T - Y_{N_T} > \frac{1}{\delta}\bigg) \le \frac{E(T - Y_{N_T})}{1/\delta} \to \frac{\delta E(X^2)}{2E(X)} = \frac{\delta}{\lambda}\,, \qquad T \to \infty\,.$$

Ekkor a valószínűség szubadditív tulajdonsága miatt

$$\begin{aligned} P\bigg(\frac{T - Y_{N_T}}{\sqrt{N_T}} > \varepsilon\bigg) &\le P\bigg(\Big\{T - Y_{N_T} > \frac{1}{\delta}\Big\} \bigcup \Big\{\frac{1}{\sqrt{N_T}} > \delta\varepsilon\Big\}\bigg) \\ &\le P\big(T - Y_{N_T} > 1/\delta\big) + P\big(N_T < (\delta\varepsilon)^2\big) \to \delta/\lambda\,. \end{aligned}$$

Mivel $\delta > 0$ tetszőlegesen kicsi érték lehet, kapjuk, hogy

$$P\bigg(\frac{T - Y_{N_T}}{\sqrt{N_T}} > \varepsilon\bigg) \to 0\,, \qquad T \to \infty\,,$$

azaz $(T-Y_{N_T})/\sqrt{N_T}$ sztochasztikusan konvergál nullához. Ebből azonnal jön, hogy

$$cr\frac{T-Y_{N_T}}{\sqrt{N_T}}\sqrt{\frac{T}{N_T}}\xrightarrow{P} cr\cdot 0\cdot\sqrt{\frac{1}{\lambda}}=0\,,\qquad T\to\infty\,.$$

A $\sqrt{T}G_T(R)$ változóra adott formulában az összeg tagjai független és azonos eloszlású változók, melyek közös várható értéke 0. Mivel a $Z_k$ kárnagyság rendre független az $X_k$ exponenciális változótól, kapjuk, hogy a tagok közös szórásnégyzete

$$\begin{aligned}
&D^2\Big[\Big(e^{RZ}-1-h(R)\Big)-cr\Big(X-\frac{1}{\lambda}\Big)\Big]=E\Big(e^{RZ}-1-h(R)\Big)^2+(cR)^2D^2(X)\\
&=Ee^{2RZ}-2\big[1+h(R)\big]Ee^{RZ}+\big[1+h(R)\big]^2+(cR)^2/\lambda^2\\
&=\big[h(2R)+1\big]-2\big[1+h(R)\big]\big[1+h(R)\big]+\big[1+h(R)\big]^2+h^2(R)\\
&=h(2R)-2h(R)=h(2R)-2cR/\lambda=g(2R)\,.
\end{aligned}$$

Ekkor a Lévy-féle centrális határeloszlás-tétel szerint

$$\sqrt{T}G_T(R)\xrightarrow{\mathcal{D}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}N\big(0,g(2R)\big)-0=N\Big(0,\frac{g(2R)}{\lambda}\Big)\,.$$

Ebből azonnal jön, hogy

$$\sqrt{T}(R_T-R)\sim-\sqrt{T}\frac{G_T(R)}{g'(R)}\xrightarrow{\mathcal{D}}N(0,\sigma^2)\,,\qquad T\to\infty\,,$$

majdnem biztosan. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

Természetesen a Lundberg-kitevőt azért akartuk megbecsülni, hogy ennek segítségével kapjunk egy közelítést a csőd valószínűségére. Legyen

$$\Psi_T(u)=\frac{cT-S_T}{N_TG_T'(R_T)}e^{-R_Tu}=C_Te^{-R_Tu}\,.$$

Ekkor tetszőleges rögzített $u\geq 0$ mellett

$$\Psi_T(u)=\frac{c-S_T/T}{(N_T/T)G_T'(R_T)}e^{R_Tu}\to\frac{c-\lambda\mu}{\lambda g'(R)}e^{-Ru}\,,\qquad T\to\infty\,,\qquad \text{m.b.},$$

és a Cramér–Lundberg approximációs tétel szerint a jobb oldal aszimptotikusan egyenlő a $\Psi(u)$ csődvalószínűséggel, amint $u\to\infty$. Ezen észrevételnél kicsivel többet állít a következő tétel.

**2.25. Tétel.** *Tegyük fel, hogy létezik a Lundberg-kitevő és $h(2R)$ véges, továbbá legyen $u=u(T)\to\infty$ olyan módon, hogy $u/\sqrt{T}\to\tilde{u}\in\mathbb{R}$. Ekkor*

$$\ln\frac{\Psi_T(u)}{\Psi(u)}\xrightarrow{\mathcal{D}}N\big(0,(\tilde{u}\sigma)^2\big)\,,\qquad T\to\infty\,.$$

## 2.6. A csőd súlyosságának elemzése

Ebben a fejezetben nem csupán azt vizsgáljuk, hogy mekkora valószínűséggel megy csődbe a biztosító, hanem azt is, hogy a csőd pillanatában mekkora az $U_t$ rizikófolyamat értéke. Legyen

$$T_u = \inf\{t \geq 0 : U_t < 0\} \in (0, \infty]$$

a csőd időpontja, ha a biztosító $u \geq 0$ kezdőtőkével indul. Célunk a

$$\Psi(u,y) = P\big(T_u < \infty, U_{T_u} \geq -y\big)\,, \qquad u,y \geq 0\,,$$

valószínűség vizsgálata. A fejezetben végig feltesszük, hogy $c > \lambda\mu$.

**2.26. Tétel.** *A $\Psi(u,y)$ függvény kielégíti a*

$$\Psi(u,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z,y)\big(1-F(z)\big)\,dz + \frac{\lambda}{c}\int_u^{u+y}\big(1-F(z)\big)\,dz\,, \qquad u,y \geq 0\,.$$

*integrálegyenletet.*

Vegyük észre, hogy a definícióból $\Psi(u,y) \to \Psi(u)$ monoton növekedve, amint $y \to \infty$. Ekkor a monoton Lebesgue lemmát alkalmazva a 2.26. Tétel egyenletére $y \to \infty$ mellett kapjuk, hogy

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)\big(1-F(z)\big)\,dz + \frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}\big(1-F(z)\big)\,dz\,, \qquad u \geq 0\,.$$

Ez pontosan a $\Psi(u)$ csődvalószínűségre korábban levezetett egyenlet.

*Bizonyítás.* Jelölje $X_1$ az első káresemény időpontját és $Z_1$ az első kár nagyságát. A függetlenség miatt a két változó együttes eloszlásfüggvénye

$$H(z,x) = P\big(Z_1 \leq z, X_1 \leq x\big) = F(z)\big(1-e^{-\lambda x}\big)\,, \qquad x,z \geq 0\,.$$

Jelölje továbbá $A_t(u,y)$ azt az eseményt, hogy a biztosító csődbe megy, ha a $t \geq 0$ időpontban $u \geq 0$ tőkéje van, és a csőd pillanatában a rizikófolyamat értéke nem kisebb, mint $-y$, ahol $y \geq 0$. Ekkor a teljes valószínűség tételével

$$\begin{aligned}
\Psi(u,y) &= P\big(A_0(u,y)\big) = P\big(A_{X_1}(u+cX_1-Z_1,y)\big)\\
&= \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} P\big(A_{X_1}(u+cX_1-Z_1,y)\,|\,X_1=x, Z_1=z\big)\,H(dz,dx)\\
&= \int_0^\infty \int_{[0,\infty)} \Psi(u+cx-z,y)\,dF(z)\,dG(x)\\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left[\int_{[0,u+cx]} \Psi(u+cx-z,y)\,dF(z) + \int_{u+cx}^{u+cx+y} 1\,dF(z) + \int_{u+cx+y}^{\infty} 0\,dF(z)\right]dx\,.
\end{aligned}$$

Ebből $s = u + cx$ helyettesítés után

$$\Psi(u,y) = \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} e^{-\lambda s/c} \left[ \int_{[0,s]} \Psi(s-z,y)\, dF(z) + \int_s^{s+y} 1\, dF(z) \right] ds$$

Ezen egyenlet segítségével megmutatható, hogy tetszőleges rögzített $y$ esetén $\Psi(u,y)$ abszolút folytonos az $u$ változóban. A függvény $u$ szerint deriváltja

$$\begin{aligned}
\Psi'(u,y) &= -\frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} e^{-\lambda u/c} \left[ \int_{[0,u]} \Psi(u-z,y)\, dF(z) + \int_u^{u+y} 1\, dF(z) \right] \\
&\quad + \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \right] e^{-\lambda s/c} \left[ \int_{[0,s]} \Psi(s-z,y)\, dF(z) + \int_s^{s+y} 1\, dF(z) \right] ds \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_{[0,u]} \Psi(u-z,y)\, d\big[1-F(z)\big] - \frac{\lambda}{c} \int_u^{u+y} 1\, dF(z) + \frac{\lambda}{c} \Psi(u,y)\,.
\end{aligned}$$

A deriváltban parciális integrálással

$$\begin{aligned}
\int_{[0,u]} \Psi(u-z,y)\, d\big[1-F(z)\big] &= \int_0^u \Psi(u-z,y)\, d\big[1-F(z)\big] - \Psi(u-0,y)F(0) \\
&= \left[ \Psi(u-u,y)\big[1-F(u)\big] - \Psi(u-0,y)\big[1-F(0)\big] - \int_0^u \big[1-F(z)\big]\, \Psi(u-dz,y) \right] \\
&\quad - \Psi(u,y)F(0) \\
&= \Psi(0,y)\big[1-F(u)\big] - \Psi(u,y) + \int_0^u \big[1-F(z)\big] \Psi'(u-z,y)\, dz\,.
\end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy a deriváltban kiesik a $\Psi(u,y)$ tag. Innen azonnal jön, hogy

$$\begin{aligned}
\Psi(u,y) - \Psi(0,y) &= \int_0^u \Psi'(v,y)\, dv = \frac{\lambda}{c} \Psi(0,y) \int_0^u \big[1-F(v)\big]\, dv \\
&\quad + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \int_0^v \big[1-F(z)\big] \Psi'(v-z,y)\, dz\, dv - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \int_v^{v+y} 1\, dF(z) dv\,.
\end{aligned}$$

Az integrálok felcserélésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_0^u \int_0^v \big[1-F(z)\big] \Psi'(v-z,y)\, dz\, dv &= \int_0^u \int_z^u \big[1-F(z)\big] \Psi'(v-z,y)\, dv\, dz \\
&= \int_0^u \big[1-F(z)\big] \big[\Psi(u-z,y) - \Psi(0,y)\big]\, dz\,,
\end{aligned}$$

amiből

$$\Psi(u,y) = \Psi(0,y) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Psi(u-z,y)\big[1-F(z)\big]\, dz - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \int_v^{v+y} 1\, dF(z)\, dv\,.$$

Mivel $u \to \infty$ esetén az $A_0(u,y)$ események szűkülő rendszert alkotnak, a

$$\Psi(\infty,y) = \lim_{u\to\infty} \Psi(u,y) = \lim_{u\to\infty} P\big(A_0(u,y)\big) \in [0,1]$$

határérték létezik. Továbbá, megmutatható, hogy ha $c > \lambda\mu$, akkor $\Psi(\infty, y) = 0$ tetszőleges $y \geq 0$ mellett. Ha most $u \to \infty$, akkor a monoton Lebesgue tétel miatt

$$\begin{aligned}\Psi(\infty, y) &= \Psi(0, y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Psi(\infty, y)\big[1 - F(z)\big]\, dz - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_v^{v+y} 1\, dF(z)\, dv \\ &= \Psi(0, y) + \frac{\lambda}{c}\Psi(\infty, y)\mu - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_v^{v+y} 1\, dF(z)\, dv\,,\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}\Psi(0, y) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_v^{v+y} 1\, dF(z)\, dv = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[F(v+y) - F(v)\big]\, dv \\ &= \frac{\lambda}{c}\bigg[\int_0^\infty \big[1 - F(s)\big]\, ds - \int_y^\infty \big[1 - F(s)\big]\, ds\bigg] = \frac{\lambda}{c}\int_0^y \big[1 - F(s)\big]\, ds\,.\end{aligned}$$

Hasonló módszerrel

$$\int_0^u \int_v^{v+y} 1\, dF(z)\, dv = \int_0^u \big[F(v+y) - F(v)\big]\, dv = \int_0^u \big[1 - F(s)\big]\, ds - \int_y^{u+y} \big[1 - F(s)\big]\, ds\,.$$

Visszahelyetteítés után

$$\begin{aligned}\Psi(u, y) &= \Psi(0, y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u - z, y)\big[1 - F(z)\big]\, dz - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \int_v^{v+y} 1\, dF(z)\, dv \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_0^y \big[1 - F(z)\big]\, dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u - z, y)\big[1 - F(z)\big]\, dz \\ &\quad - \frac{\lambda}{c}\bigg[\int_0^u \big[1 - F(z)\big]\, dz - \int_y^{u+y} \big[1 - F(z)\big]\, dz\bigg] \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_u^{u+y} \big[1 - F(z)\big]\, dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u - z, y)\big[1 - F(z)\big]\, dz\,,\end{aligned}$$

ami pontosan a bizonyítandó. □

A fentiekben a következő állítást is bebizonyítottuk.

**2.27. Állítás.** *Ha $c > \lambda\mu$, akkor*

$$\Psi(0, y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^y \big[1 - F(z)\big]\, dz\,.$$

*Speciálisan, $y = \infty$ mellett visszakapjuk az ismert $\Psi(0) = \Psi(0, \infty) = \lambda\mu/c$ egyenlőséget.*

A következő tétel azt állítja, hogy ha létezik az $R$ Lundberg-kitevő, akkor a $\Psi(u, y)$ függvény exponenciális rendben cseng le, amint $u \to \infty$.

**2.28. Tétel.** *Legyen $c > \lambda\mu$. Tegyük fel, hogy a*

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{h(r)}{r}$$

*egyenletnek létezik pozitív $R$ megoldása, továbbá tegyük fel, hogy a $h$ függvény véges az $R$ pont valamely környezetében. Ekkor*

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u,y) = C_3(y) = \frac{\lambda R \int_0^\infty e^{Ru} \int_u^{u+y} \left[1-F(z)\right] dz du}{\lambda h'(R) - c},$$

*tehát $\Psi(u,y) \sim C_3(y)e^{-Ru}$, $u \to \infty$.*

A tétel bizonyítása hasonlóan megy, mint a Cramér–Lundberg approximáció levezetése.

**2.29. Példa.** Legyenek az egyedi károk exponenciális eloszlásúak $1/\mu$ paraméterrel. A korábbi példák szerint ekkor

$$F(z) = 1 - e^{-z/\mu}, \quad z \geq 0, \qquad R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}, \qquad h'(R) = \mu\left(\frac{c}{\lambda\mu}\right)^2.$$

Direkt számolással

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{Ru} \int_u^{u+y} \left[1-F(z)\right] dz\, du &= \int_0^\infty e^{Ru}\left[\mu e^{-u/\mu} - \mu e^{-(u+y)/\mu}\right] du \\ &= \mu\left(1-e^{-y/\mu}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda u/c}\, du = \frac{c\mu}{\lambda}\left(1-e^{-y/\mu}\right),\end{aligned}$$

amiből

$$C_3(y) = \frac{\lambda\mu}{c}\left(1-e^{-y/\mu}\right), \qquad y \geq 0.$$

Kapjuk, hogy

$$\Psi(u,y) \sim \frac{\lambda\mu}{c}\left(1-e^{-y/\mu}\right)e^{-Ru} = \left(1-e^{-y/\mu}\right)\Psi(u), \qquad u\to\infty, \quad y \geq 0.$$

Vegyük észre, hogy valóban a korábbiaknak megfelelően $\Psi(u,\infty) = \Psi(u)$. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy az előző formula jobb oldala eleget tesz a 2.26. Tétel egyenletének, ami azt jelenti, hogy exponenciális eloszlás esetén nem csak aszimptotikus egyenlőség áll fenn, hanem

$$\Psi(u,y) = \frac{\lambda\mu}{c}e^{-Ru}\left(1-e^{-y/\mu}\right), \qquad u, y \geq 0.$$