Kockázati folyamatok

Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Szeged, 2012. őszi félév

A kurzus céljai

Alapvető feltevések a biztosítási matematikában:

- a kárnagyságok függetlenek és általában azonos eloszlásúak;
- a káresemények száma független a károk nagyságától.

Élet és nem-élet biztosítások:

- időben statikus modellek, egy rögzített időintervallumot vizsgálunk;
- cél a teljes kifizetés valelméleti és statisztikai jellemzése;
- további cél a biztosítási díj meghatározása (nagy számok törvénye).

Kockázati folyamatok:

- időben dinamikus modellek, „cash flow” szemlélet;
- fő kérdés: mekkora valósznűségel megy valaha csődbe a biztosító?
- további kérdés: mekkora kezdőtőkével induljon a biztosító, hogy ez a valószínűség elegendően kicsi legyen?

A nem-élet biztosítások kurzuson bevezetett modellek:

- A kifizetések $Z, Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ nemnegatív értékű, független és azonos eloszlású változók.
- Adott egy N nemnegatív egész értékű változó, mely független a károk nagyságától.
- A teljes kárigény a keletkezett károk összértéke, tehát a biztosító teljes kifizetése: $S_N = Z_1 + \cdots + Z_N$.

Egyedi kockázati modell

N a biztosítottak száma, determinisztikus.
Z az egy biztosítottra jutó kifizetés, ami lehet 0 is: $P(Z = 0) \geq 0$.
Fő szabály: az egy biztosítottra jutó c biztosítási díj legyen $c \geq E(Z)$.

Összetett kockázati modell

N a káresemények száma, nem determinisztikus.
Z a kár nagysága, ami egy pozitív véletlen változó: $P(Z = 0) = 0$.
Az S_N teljes kárigény független és azonos eloszlású véletlen változók véletlen tagszámú összege.

Új ötlet: azt is vegyük figyelembe, hogy mikor keletkeznek a károk.

- A **kárszámfolyamat** egy $N_t, \quad t \geq 0,$ számláló folyamat.
- A kárnagyságok $Z_1, Z_2, \ldots$ nemnegatív értékű független és azonos eloszlású változók, melyek függetlenek a kárszámfolyamattól.
- A **kárfolyamat** vagy **kárérték folyamat**:
$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n, \qquad t \geq 0.$$
- A $[0, t]$ időintervallumra jutó teljes biztosítási díjbevétel P_t.
- A biztosító kezdeti tőkéje $u \geq 0$.
- A **rizikófolyamat** a biztosító tőkéje a t időpontban:
$$U_t = u + P_t - S_t.$$

A fő kérdés annak a valószínűsége, hogy a biztosító valaha csődbe megy. A csőd valószínűségét a kezdőtőke függvényében fogjuk vizsgálni:

$$\Psi(u) = P\Big(\text{létezik} \quad t \geq 0, \quad \text{hogy} \quad U_t < 0\Big), \qquad u \geq 0.$$

Mi csak **klasszikus rizikófolyamatokat** fogunk majd vizsgálni, amikor N_t egy Poisson-folyamat és $P_t = ct$.

Összetett eloszlások

Összetett eloszlás

Egy X változó **összetett eloszlású**, ha előáll $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_N = Z_1 + \cdots + Z_N$ alakban, ahol $Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ FAE változó, N nemnegatív egész értékű, és N független a $Z_1, Z_2, \ldots$ sorozattól.

Megjegyzés: Nem biztos, hogy az X változó 1 valószínűséggel előáll $Z_1 + \cdots + Z_N$ alakban.

Az összetett Poisson- és összetett az negatív binomiális eloszlás

Ha a fenti definícióban $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, akkor azt mondjuk, hogy az X változó **összetett Poisson eloszlást** követ. Jele: $X \sim \mathrm{Po}(\lambda, F)$.

Ha a fenti definícióban $N \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$, akkor azt mondjuk, hogy az X változó **összetett negatív binomiális eloszlást** követ.

Megjegyzés: Panjer-rekurzió a Z változó eloszlásának meghatározására?

Generátorfüggvények

Egy tetszőleges X változó

- **karakterisztikus függvénye** $\phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$,
- **momentumgenerátló függvénye** $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$,
- **valószínűségi generátorfüggvénye** $g_X(t) = E\left(t^X\right)$.

Megjegyezések:

- tetszőleges X esetén $\phi_X(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$;
- ha X nemnegatív értékű, akkor $0 \leq M_X(t) < 1$, $t \leq 0$;
- ha X nemnegatív értékű, akkor $0 \leq g_X(t) < 1$, $0 \leq t < 1$.
- a generátorfüggvények meghatározzák az X változó eloszlását.

Összetett eloszlások karakterisztikus és momentumgeneráló függvénye

Ha X összetett eloszlást követ, (tehát $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Z_1 + \cdots + Z_N$,) akkor

$$\phi_X(t) = g_N\left(\phi_Z(t)\right), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{illetve} \qquad M_X(t) = g_N\left(M_Z(t)\right).$$

(A második azonosság azon t pontokban teljesül, ahol $M_Z(t)$ létezik.)

Wald azonosság

1. Ha X összetett eloszlást követ, és $E(N), E(Z) < \infty$, akkor
$$E(X) = E(S_N) = E(N)E(Z).$$
2. Ha ezen túl $D(N), D(Z) < \infty$, akkor
$$D^2(X) = D^2(S_N) = E(N)D^2(Z) + D^2(N)(E(Z))^2.$$

A Poisson és az összetett Poisson eloszlás néhány tulajdonsága

1. Ha $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, akkor $E(N) = D^2(N) = \lambda$ és $g_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
2. Ha $X \sim \mathrm{Po}(\lambda, F)$, akkor
$$E(X) = \lambda E(Z) \quad \text{és} \quad D^2(X) = \lambda\big(D^2(Z) + (E(Z))^2\big).$$
3. $X \sim \mathrm{Po}(\lambda, F)$ pontosan akkor, ha karakterisztikus függvénye
$$\phi_X(t) = \exp\left(\lambda(\phi_Z(t) - 1)\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$
4. Ha $X \sim \mathrm{Po}(\lambda, F)$, akkor $M_X(t) = \exp\big(\lambda(M_Z(t) - 1)\big)$ minden olyan $t \in \mathbb{R}$ pontban, ahol $M_Z(t)$ létezik.

Az összetett Poisson eloszlás tulajdonságai

Független összetett Poisson eloszlások összege

Ha $X \sim \text{Po}(\lambda, F)$ és $Y \sim \text{Po}(\mu, G)$, továbbá X és Y független, akkor $X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu, H)$, ahol

$$H(x) = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} F(x) + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu} G(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Független Poisson eloszlások összege

Ha $X \sim \text{Po}(\lambda)$ és $Y \sim \text{Po}(\mu)$ független, akkor $X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$.

Nemnegatív egész értékű változó Bernoulli-felbontása (ritkítása)

Legyen N nemnegatív egész értékű véletlen változó, továbbá legyen $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \ldots \sim \text{Bernoulli}(p)$ független egymástól és az N változótól. Ekkor az $M = \mathbb{1}_1 + \cdots + \mathbb{1}_N$ változót az N változó p valószínűség szerinti ritkításának, az $(M, N - M)$ párt Bernoulli-felbontásnak nevezzük.

Összetett Poisson eloszlás Bernoulli-felbontása (ritkítása)

Legyen $Z_1, Z_2, \ldots \sim F$, $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \ldots \sim \text{Bernoulli}(p)$ és $N \sim \text{Po}(\lambda)$ független véletlen változó, továbbá legyen

$$X = Z_1 + \cdots + Z_N \sim \text{Po}(\lambda, F) \qquad \text{és} \qquad Y = Z_1 \mathbb{1}_1 + \cdots + Z_N \mathbb{1}_N.$$

Az Y változót az X változó p valószínűség szerinti ritkításának, az $(Y, X - Y)$ párt a p szerinti Bernoulli-felbontásának nevezzük.

Összetett Poisson eloszlás Bernoulli felbontása (ritkítása)

Legyen Y az $X \sim \text{Po}(\lambda, F)$ változó p szerinti ritkítása. Ekkor $Y \sim \text{Po}(p\lambda, F)$, $X - Y \sim \text{Po}((1-p)\lambda, F)$, és Y és $X - Y$ független.

Poisson eloszlás Bernoulli felbontása

Legyen M az $N \sim \text{Po}(\lambda)$ változó p szerinti ritkítása. Ekkor $M \sim \text{Po}(p\lambda)$, $N - M \sim \text{Po}((1-p)\lambda)$, és M és $N - M$ független.

Összetett Poisson eloszlás érték szerinti ritkítása

Legyen $Z, Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ és $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ független véletlen változó. Legyen $B \in \mathcal{B}$ tetszőleges Borel halmaz, továbbá legyen $A = \{Z \in B\}$ és $p = P(Z \in B)$. Tekintsük az

$$X = Z_1 + \cdots + Z_N \qquad \text{és} \qquad Y = Z_1 \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} + \cdots + Z_N \mathbb{1}_{\{Z_N \in B\}}$$

változókat, és az

$$F_{Z,A}(x) = P\big(Z \leq x \,|\, A\big), \qquad F_{Z,\bar{A}}(x) = P\big(Z \leq x \,|\, \bar{A}\big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

feltételes eloszlásfüggvényeket. Ekkor a definiált változókra

$$Y \sim \mathrm{Po}\big(p\lambda, F_{Z,A}\big) \qquad \text{és} \qquad X - Y \sim \mathrm{Po}\big((1-p)\lambda, F_{Z,\bar{A}}\big),$$

továbbá Y és $X - Y$ független.

Az összetett Poisson folyamat

Legyen $X_1, X_2, \ldots \sim G$ FAE, és $T_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 0, 1, \ldots$

- **Felújítási folyamat:** $\mathbb{N} = \{N_t : t \geq 0\}$, $N_t = \max\{n : T_n \leq t\}$.
  Tisztán ugró lépcsős, monoton nő, mindenhol jobbtól folytonos.
- **Felújítási függvény:** $m(t) = E(N_t)$, $t \geq 0$.
  Az előző félévben láttuk: $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t)$, $t \geq 0$.
- **Felújítási díjfolyamat:** $\mathbb{S} = \{S_t, t \geq 0\}$, $S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$,
  ahol $Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ FAE és független az $\mathbb{N}$ folyamattól.
- Ha $X_1, X_2, \ldots \sim \text{Exp}(\lambda)$, akkor $\mathbb{N}$ **Poisson folyamat** λ intenzitással. Ekkor $m(t) = \lambda t$, $t \geq 0$.

Összetett Poisson folyamat

Ha az $\mathbb{N}$ folyamat Poisson folyamat $\lambda > 0$ intenzitással, akkor $\mathbb{S}$ **összetett Poisson folyamat**. Jelölésben: $\mathbb{S} \sim \text{Po}(\lambda, F, t \geq 0)$.

A folyamatok asszimptotikus viselkedése

1. Ha $P(X=0)<1$, akkor

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\frac{1}{E(X)} \quad \text{m.b.,} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{E(X)}\,.$$

2. Ha $P(X=0)<1$ és $E(Z)<\infty$, akkor

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_t}{t}=\frac{E(Z)}{E(X)} \quad \text{m.b.,} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{E(S_t)}{t}=\frac{E(Z)}{E(X)}\,.$$

Következmények:

- Ha $E(X)<\infty$, akkor mindenki asszimptotikusan lineáris:

$$N_t\sim m(t)\sim\frac{t}{E(X)}\,,\qquad S_t\sim E(S_t)\sim\frac{E(Z)t}{E(X)}\,,\qquad t\to\infty\,.$$

- A felújítási függvény véges és jobbról folytonos a pozitív félegyenesen.

Az összetett Poisson folyamat tulajdonságai

Legyen $\mathbb{N} = \{N_t, t \geq 0\}$ Poisson folyamat λ intenzitással, és legyen

$$\mathbb{S} = \{S_t, t \geq 0\} \sim \mathrm{Po}(\lambda, F, t \geq 0), \qquad S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n,$$

összetett Poisson folyamat. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. $\mathbb{S}$ független növekményű folyamat, és tetszőleges $0 \leq \tau \leq t$ esetén
$$S_t - S_\tau \sim \mathrm{Po}(\lambda(t-\tau), F).$$
2. Ha az $\mathbb{U} = \{U_t, t \geq 0\} \sim \mathrm{Po}(\mu, G, t \geq 0)$ folyamat független az $\mathbb{S}$ folyamattól, akkor az $\mathbb{S} + \mathbb{U} := \{S_t + U_t, t \geq 0\}$ összegfolyamatra
$$\mathbb{S} + \mathbb{U} \sim \mathrm{Po}(\lambda + \mu, H, t \geq 0),$$
ahol
$$H(x) = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} F(x) + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu} G(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
3. Ha $\mathbb{M} = \{M_t, t \geq 0\}$ Poisson folyamat μ internzitással, mely független az $\mathbb{N}$ folyamattól, akkor $\mathbb{N} + \mathbb{M} := \{N_t + M_t, t \geq 0\}$ Poisson folyamat $\lambda + \mu$ intenzitással.

Az összetett Poisson folyamat tulajdonságai (folyatatás)

4. (Összetett Poisson folyamat Bernoulli-felbontása)
Legyen $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \ldots \sim \text{Bernoulli}(p)$ FAE és független az $\mathbb{S}$ összetett Poisson folyamattól, és tekintsük az
$$\mathbb{U} = \{U_t, t \geq 0\}, \qquad U_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \mathbb{1}_n,$$
folyamatot. Ekkor $\mathbb{U}$ és $\mathbb{S} - \mathbb{U}$ független egymástól, továbbá
$$\mathbb{U} \sim \text{Po}\big(p\lambda, F, t \geq 0\big) \qquad \text{és} \qquad \mathbb{S} - \mathbb{U} \sim \text{Po}\big((1-p)\lambda, F, t \geq 0\big).$$

5. (Poisson folyamat Bernoulli felbontása)
Legyen $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \ldots \sim \text{Bernoulli}(p)$ FAE és független az $\mathbb{N}$ Poisson folyamattól, és tekintsük az
$$\mathbb{M} = \{M_t, t \geq 0\}, \qquad M_t = \sum_{n=1}^{N_t} \mathbb{1}_n,$$
folyamatot. Ekkor $\mathbb{M}$ és $\mathbb{N} - \mathbb{M}$ független Poisson folyamat rendre $p\lambda$ és $(1-p)\lambda$ intenzitással.

Az összetett Poisson folyamat tulajdonságai (folyatatás)

6. (Összetett Poisson folyamat érték szerinti felbontása)
Legyen $\mathbb{S} \sim \mathrm{Po}(\lambda, F, t \geq 0)$ összetett Poisson folyamat, és legyen $B \in \mathcal{B}$ tetszőleges Borel halmaz. Legyen továbbá $A = \{Z \in B\}$ és $p = P(A)$, és tekintsük az
$$\mathbb{U} = \{U_t, t \geq 0\}, \qquad U_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \mathbb{1}_{\{Z_n \in B\}},$$
folyamatot. Ekkor $\mathbb{U}$ és $\mathbb{S} - \mathbb{U}$ független egymástól, továbbá
$$\mathbb{U} \sim \mathrm{Po}\big(p\lambda, F_{Z,A}, t \geq 0\big) \quad \text{és} \quad \mathbb{S} - \mathbb{U} \sim \mathrm{Po}\big((1-p)\lambda, F_{Z,\bar{A}}, t \geq 0\big),$$
ahol
$$F_{Z,A}(x) = P\big(Z \leq x \,|\, A\big) \quad \text{és} \quad F_{Z,\bar{A}}(x) = P\big(Z \leq x \,|\, \bar{A}\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Függvények és sorozatok konvolúciója

Stieltjes-konvolúció

Legyen $\phi(x)$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, valós értékű mérhető függvény, és legyen G càdlàg („continue à droite, limitée à gauche") és korlátos változású a véges intervallumonkon. A két függvény **Stieltjes-konvolúciója**

$$(\phi \star G)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y - x)\, dG(x)\,,$$

ami azon $y \in \mathbb{R}$ pontokban van definiálva, ahol az integrál létezik. A G függvény ***n*-edik konvolúció hatványa** a $G^{\star n} := G \star \cdots \star G$ szorzat.

Független véletlen változók összege

Ha $X \sim G$ és $Y \sim H$ független változó, akkor $X + Y \sim G \star H$. Ebből következik, hogy ha $X_1, \ldots, X_n \sim G$ FAE, akkor $X_1 + \cdots + X_n \sim G^{\star n}$.

Követlezmény: Eloszlásfüggvények konvolúciója eloszlásfüggvény.

- Ha X és Y független és abszolút folytonos változó g és h sűrűségfüggvénnyel, akkor az $X+Y$ összeg is abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye g és h **Lebesgue-konvolúciója**:

$$(g * h)(y) := \int_{\infty}^{\infty} g(y-x)h(x)\,dx\,.$$

- Ha X és Y független egész értékű változó, akkor $X+Y$ is egész értékű. Legyen

$$p_n := P(X=n) = G(n) - G(n-1)\,, \qquad q_n := P(Y=n)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Ekkor

$$(G * H)(n) = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ k+l\leq n}} p_l q_k\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

amiből

$$P\big(X+Y=n\big) = (p*q)_n := \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ k+l=n}} p_l q_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k} q_k\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

A $p*q$ sorozat a p és a q **sorozatok konvolúciója**.

A konvolúció tulajdonságai

Legyen $\phi(x)$, $\psi(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $x \in \mathbb{R}$, valós értékű mérhető függvény, és tegyük fel, hogy G és H càdlàg és korlátos változású minden véges intervallumon.

1. Disztributivitás: Ha valamely pontban a $\phi \star G$, $\psi \star G$, $\phi \star H$ és $\psi \star H$ konvolúciók mindegyike létezik, akkor ebben a pontban tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a\phi + b\psi) \star (cG + dH) = ac(\phi \star G) + bc(\psi \star G) + ab(\phi \star H) + ab(\psi \star H).$$

2. Kommutativitás és asszociativitás: Ha az G és a H függvény előáll eloszlásfüggvények véges lineáris kombinációjaként, akkor

$$G \star H = H \star G, \qquad (\phi \star G) \star H = \phi \star (G \star H).$$

Ha $\phi(x) = G(x) = 0$ minden $x < 0$ esetén, akkor

$$(\phi \star G)(y) = \int_{[0,y]} \phi(y-x)\, dG(x)\,, \quad y \geq 0\,, \qquad (\phi \star G)(y) = 0\,, \quad y < 0\,.$$

Sűrűségfüggvényekre és sorozatokra: Ha $g(x) = h(x) = 0,\ x < 0$, és $p_n = q_n = 0,\ n < 0$, akkor $g * h = p * q = 0$ a negatív félegyenesen, továbbá $y \geq 0$ és $n \geq 0$ esetén

$$(g * h)(y) = \int_{[0,y]} g(y-x)h(x)\, dx\,, \qquad (p * q)_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k\,.$$

Fontos: Lebesgue–Stieltjes-integrál esetén általában $\int_{[0,y]} \neq \int_0^y = \int_{(0,y]}$.

A konvolúció létezése

Ha ϕ lokálisan korlátos, (azaz korlátos minden véges intervallumon,) és G càdlàg és korlátos változású a véges intervallumokon, továbbá minden $x < 0$ esetén $\phi(x) = G(x) = 0$, akkor a $\phi \star G$ konvolúció jól definiált a valós egyenesen, és lokálisan korlátos függvény.

A felújítási egyenlet

Legyen $X_1, X_2, \ldots \sim G$ FAE, nemnegatív értékű, $P(X=0)<1$. Ekkor

$$T_n := X_1 + \cdots + X_n \sim G^{\star n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Legyen N_t, $t \geq 0$, a kapcsolatos felújítási folyamat. A felújítási függvény:

$$m(t) = E(N_t) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t), \qquad t \geq 0.$$

Konvolúcióegyenlet a felújítási függvényre:

$$m(t) = G(t) + \int_{[0,t]} m(t-x)\, dG(x) = \big(G + m \star G\big)(t), \qquad t \geq 0.$$

Felújítási egyenlet

Legyen $a(t)$, $t \geq 0$, mérhető függvény. Az $A(t)$, $t \geq 0$, függvényre vonatkozó felújítási egyenlet:

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} A(t-x)\, dG(x) = \big(a + A \star G\big)(t), \qquad t \geq 0.$$

A felújítási egyenlet megoldása

Ha $a(t)$, $t \geq 0$, lokálisan korlátos függvény, akkor

$$A(t) := a(t) + \int_{[0,t]} a(t-x)\, dm(x) = (a + a \star m)(t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

lokálisan korlátos megoldása a felújítási egyenletnek, és ez az egyetlen megoldás a lokálisan korlátos függvények terében.

A felújítási függvény

A felújítási függvény esetében az egyenlet $m = G + m \star G$, azaz $a = G$.

$$A = G + G \star m = G + G \star \sum_{k=1}^{\infty} G^{\star k} = \sum_{k=1}^{\infty} G^{\star k} = m\,.$$

A felújítási egyenlet átrendezésével: $G = m - G \star m$.

A felújítási függvény egyértelműsége

A felújítási folyamatok esetében a G eloszlásfüggvény és az m felújítási függvény kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást.

Rácsos eloszlású változók

Azt mondjuk, hogy az X változó **rácsos eloszlású**, ha létezik $\delta > 0$, hogy X egy valószínűséggel a $\{k\delta : k \in \mathbb{Z}\}$ halmazba esik. A legnagyobb ilyen tulajdonságú δ értéket **rácsállandónak** nevezzük.

Rácsos eloszlású változók

Az egész értékű változók rácsosak, de az abszolút folytonosak nem.

Legyen $X \sim G$ nemnegatív egész értékű változó, és legyen

$$p_n := P(X = n) = G(n) - G(n-1)\,, \qquad r_n := m(n) - m(n-1)\,.$$

Ekkor

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n} p_k\,, \quad m(n) = \sum_{k=0}^{n} r_k\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,,$$

amiből a felújítási függvényre vonatkozó felújítási egyenlet szerint

$$r_n = p_n + \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}\, p_k = \left(p + r * p\right)_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

A diszkrét felújítási egyenlet

Legyen a_n, $n = 0, 1, \ldots,$ valós számsorozat. Az A_n, $n = 0, 1, \ldots,$ sorozatra vonatkozó **diszkrét felújítási egyenlet**:

$$A_n = a_n + \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} p_k = (a + A * p)_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

A diszkrét felújítási egyenlet megoldása

A diszkrét felújítási egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, mely

$$A_n := a_n + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} r_k = (a + a * r)_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Térjünk vissza az általános, nem feltétlenül diszkrét esethez, és legyen

$$M(t) = \begin{cases} m(t) + 1\,, & t \geq 0\,, \\ 0\,, & t < 0\,. \end{cases}$$

Ekkor az általános felújítási egyenlet megoldása

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} a(t-x)\, dm(x) = \int_{[0,t]} a(t-x)\, dM(x)\,.$$

A felújítási tétel

Tegyük fel, hogy $P(X = 0) < 1$.

1. Ha X nem rácsos eloszlású, akkor tetszőleges $h > 0$ esetén
$$m(t + h) - m(t) \to \frac{h}{E(X)}\,, \qquad t \to \infty\,.$$
2. Ha X rácsos eloszlású, és δ a rácsállandó, akkor a konvergencia érvényes minden $h = n\delta$, $n \in \mathbb{N}$, alakban előálló értékre.

A megoldás asszimptotikus viselkedése

Ha az X változó nem rácsos eloszlású, és $a(x)$, $x \geq 0$, előáll monoton integrálható függvények véges összegeként, akkor
$$A(t) \to \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a(x)\,dx\,, \qquad t \to \infty\,.$$

A reziduális idők várható értéke

Legyen $R_t := T_{N_t+1} - t$ a **hátralévő élettartam**, avagy **reziduális idő** a $t \geq 0$ időpontban, és legyen $A(t) := E(R_t)$, $t \geq 0$. Ekkor

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} A(t-x)\, dG(x)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

ahol $a(t) = \int_{(t,\infty)} (x-t) dG(x)$.
Ha $E(X) < \infty$, akkor A lokálisan korlátos, amiből

$$A(t) = \big(a + a \star m\big)(t) = a(t) + \int_{[0,t]} a(t)\, dm(t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Továbbá, ha X nem rácsos eloszlású, akkor

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a(x)\, dx\,.$$

A Poisson-folyamat esetén $A(t) = E(X^2)/2E(X) = 1/\lambda$, $t \geq 0$.

Parciális integrálás

Parciális integrálás

Legyen $F(x)$, $G(x)$, $x \in (a, b]$, monoton és càdlàg függvény. Ha a két függvénynek nincsen közös szakadási pontja, akkor

$$\int_{(a,b]} G(x)\, dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{(a,b]} F(x)\, dG(x)\,.$$

Változók függvényeinek várható értéke

Legyen $Z \sim F$ nemnegatív értékű véletlen változó, továbbá legyen $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton és abszolút folytonos függvény. Ekkor

$$E\phi(Z) = \phi(0) + \int_0^\infty \phi'(x)\,[1 - F(x)]\, dx\,,$$

továbbá ha $E\phi(Z) < \infty$, akkor $\phi(x)[1 - F(x)] \to 0$, $x \to \infty$.

Nemnegatív értékű változók momentumai

1. Ha $Z \sim F$ nemnegatív értékű véletlen változó, és $\alpha > 0$, akkor

$$EZ^\alpha = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left[1 - F(x)\right] dx \,,$$

és ha $EZ^\alpha < \infty$, akkor $x^\alpha[1 - F(x)] \to 0$, $x \to \infty$.

2. A változó momentumgeneráló függvénye az $r \in \mathbb{R}$ pontban

$$M_Z(r) = E\left(e^{rZ}\right) = 1 + r \int_0^\infty e^{rx} \left[1 - F(x)\right] dx \,,$$

és ha $M_Z(r) < \infty$, akkor $e^{rx}[1 - F(x)] \to 0$, $x \to \infty$.

A reziduális idők várható értéke (folytatás)

$$\int_0^\infty a(t)\, dt = \int_0^\infty \int_{(t,\infty)} (x - t)\, dG(x) dt = \frac{EX^2}{2} \,.$$

Rizikófolyamatok

Kárszámfolyamat: N_t, $t \geq 0$, számláló folyamat.

Kárnagyságok: $Z_1, Z_2, \ldots$ FAE és függetlenek a kárszámfolyamattól.

Kárfolyamat vagy **kárérték folyamat**:

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n, \qquad t \geq 0.$$

A $[0, t]$ időintervallumra jutó teljes biztosítási díjbevétel: P_t.

A biztosító kezdeti tőkéje: $u \geq 0$.

A biztosító pénze a t időpontban: $U_t = u + P_t - S_t$.

Rizikófolyamat és klasszikus rizikófolyamat

- Az U_t, $t \geq 0$, folyamatot **rizikófolyamatnak** nevezzük.
- Ha N_t Poisson folyamat, és $P_t = ct$, $t \geq 0$, akkor **klasszikus rizikófolyamatról** beszélünk.

A klasszikus rizikófolyamat előnye, hogy könnyen kezelhető:

- a Poisson-folyamat tulajdonságait már ismerjük;
- az összetett Poisson-folyamatok családja zárt számos műveletre.

Hátránya, hogy nem mindig áll összhangban a valósággal:

- rögzített t esetén $E(N_t) = \lambda t = D^2(N_t)$;
- a káresemények között exponenciális idő;
- időtől és kárszámtól függetlenül állandó a káresemények intenzitása.

Megoldásként alkalmazhatunk más kárszámfolyamatot:

- felújítási folyamatok: események között nem exponenciális idő;
- inhomogén Markov-láncok: időtől és állapottól függő intenzitás;
- Cox-folyamatok: véletlen intenzitás.

Mi a biztosításmatematikai kérdésekre csak klasszikus rizikófolyamat esetén válaszolunk, de hasonló módszerekkel általánosabb modellek is kezelhetőek.

Klasszikus rizikófolyamat esetén a jelölések:

- A károk eloszlása és várható értéke: $Z \sim F, \quad \mu = E(Z) > 0.$
- A Poisson-folyamat intenzitása: $\lambda > 0.$
- Az egységnyi időre jutó díjbevétel: $c > 0.$
- A biztosító kezdőtőkéje: $u \geq 0.$

A kurzus fő célja jellemezni a **csőd valószínűségét** a u kezdőtőke függvényében, tehát a következő függvénytfogjuk vizsgálni:

$$\Psi(u) = P\big(\text{létezik} \quad t \geq 0, \quad \text{hogy} \quad U_t < 0\big), \qquad u \geq 0.$$

Annak valószínűsége, hogy a biztosító sosem megy csődbe:

$$\Phi(u) = 1 - \Psi(u) = P\big(U_t \geq 0 \quad \text{minden} \quad t \geq 0 \quad \text{esetén}\big), \qquad u \geq 0.$$

A klasszikus rizikófolyamat néhány tulajdonsága

1. Az S_t és az U_t folyamat független és stacionárius növekményű.
2. A Ψ és a Φ függvény monoton és càdlàg.
3. A Φ függvény abszolút folytonos, tehát m.m. deriválható, és

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \int_0^u \Phi'(z)\, dz, \qquad u \geq 0.$$

A csődvalószínűség asszimptotikus viselkedése

1. Ha $c \leq \lambda\mu$, akkor $\Phi(u) = 0$, $u \geq 0$.
2. Ha $c > \lambda\mu$, akkor $\Phi(\infty) = 1$.
   Köv: Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $u > 0$, hogy $\Phi(u) > 1 - \varepsilon$.

A következő hetek témája: Mekkora a csőd valószínűsége $c > \lambda\mu$ esetén, illetve ha csődbe megyünk, akkor mennyire súlyos a csőd?

Részletösszegek asszimptotikus vislekedése

Legyen $Y_1, Y_2, \ldots$ független és azonos eloszlású $E(Y) \in [-\infty, \infty]$ várható értékkel. Ekkor 1 valószínűséggel teljesülnek az alábbiak.

1. Ha $E(Y) > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \infty$.
2. Ha $E(Y) < 0$, akkor $\lim_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = -\infty$.
3. Ha $E(Y) = 0$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \infty \qquad \text{és} \qquad \limsup_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = -\infty\,.$$

A csődvalószínűségre vonatkozó integrálegyenlet

Először megmutatjuk, hogy a Φ függvény kielégít egy integrálegyenletet, majd ennek segítségével felírunk egy hasonló egyenletet a Ψ függvényre.

A Φ függvényre vonatkozó integrálegyenlet

Klasszikus rizikófolyamat esetén a bevezetett $\Phi(u)$, $u \geq 0$, függvényre

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-z)\big[1 - F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \geq 0\,.$$

Az integrálegyenlet ekvivalens alakja

Klasszikus rizikófolyamat esetén a bevezetett $\Phi(u)$, $u \geq 0$, függvény pontosan akkor elégíti ki a fenti integrálegyenletet, ha a deriváltja

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{[0,u]} \Phi(u-z)\,dF(z)\,, \qquad u \geq 0\,.$$

A Φ és a Ψ függvény értéke az $u = 0$ pontban

Klasszikus rizikófolyamatra $c > \lambda\mu$ esetén

$$\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \qquad \text{és} \qquad \Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}\,.$$

A csőd valószínűsége exponenciális egyedi károk esetén

Ha a kárnagyságok exponenciálist eloszlást követnek, akkor

$$\Psi(u) = 1 - \Phi(u) = \frac{\lambda\mu}{c}\exp\left[-\frac{c-\lambda\mu}{\mu c}u\right], \qquad u \geq 0\,.$$

A csődvalószínűségre vonatkozó integrálegyenlet

Klasszikus rizikófolyamat esetén ha $c > \lambda\mu$, akkor

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\,dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)\big[1 - F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \geq 0\,.$$

A csődvalószínűség asszimptotikus viselkedése

A Z kárnagyság momentumgeneráló függvénye és ennek eltoltja:

$$M(r) = \int_{\mathbb{R}} e^{rz} dF(z) \qquad \text{és} \qquad h(r) = M(r) - 1\,.$$

Megjegyzések:

- A h függvény véges a negatív félegyenesen, és $h(0) = 0$.
- A h függvény konvex azon a halmazon, ahol véges. Emiatt a
$$h(r)/r = \lambda/c$$
egyenletnek legfeljebb egy pozitív megoldása van.
- Most $E(Z)$ véges, ezért ha az M momentumgeneráló függvény létezik egy $r \in \mathbb{R}$ pont valamely környezetében, akkor abban a pontban deriválható, és
$$M'(r) = \int_{[0,\infty)} z e^{rz}\, dF(z) = h'(r)\,,$$

A Cramér–Lundberg approximációs tétel

Tegyük fel, hogy a

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{h(r)}{r}$$

egyenletnek létezik pozitív R megoldása, továbbá tegyük fel, hogy a h függvény véges az R pont valamely környezetében. Ekkor

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = C := \frac{c-\lambda\mu}{\lambda h'(R)-c},$$

tehát a csőd valószínűsége asszimptotikusan $\Psi(u) \sim Ce^{-Ru}$, $u \to \infty$.
A tételben definiált R értéket **Lundberg-kitevőnek** nevezzük.

Az asszimptotikus viselkedés exponenciális egyedi károk esetén

Ha $Z \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$, akkor $\Psi(u) \sim Ce^{-Ru}$, $u \to \infty$, ahol

$$M(r) = \frac{1}{1-\mu r}, \qquad h(r) = \frac{\mu r}{1-\mu r}, \qquad R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}, \qquad C = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

A csődvalószínűség kiemelkedő egyedi károk esetén

Pareto-elv (1906): Egyes jelenségeknél a következmények k%-a az okok (100-k)%-ára vezethető vissza. Például, 80-20 szabály:

- Egy vállalat bevételének 80%-a a vevők 20%-ától jön.
- A földbirtokok 80%-a a népesség 20%-ának kezében van.

Ennek oka: Ha Z jelöli egy véletlenszerűen választott ember vagyonát, akkor

$$P(Z = k) \approx ck^{-\gamma}, \qquad k \in \mathbb{Z}^{+}.$$

Ekkor nagy valószínűséggel: $Z_1 + \cdots + Z_n \approx \max(Z_1, \ldots, Z_n)$.

Hasonló jelenségek, bár nem feltétlenül a 80–20 szabállyal:

- Településméretek: városok a Monarchiában.
- Nyersanyaglelőhelyek nagysága: olajmezők, gyémántbányák.
- Természeti katasztrófák által okozott kár: erdőtűz, földrengés.
- Bizonyos biztosítástípusoknál az egyedi kár nagysága.

Pareto-eloszlás

Egy nemnegatív értékű Z változó Pareto eloszlást követ $\alpha, \lambda > 0$ paraméterekkel, ha eloszlásfüggvénye, illetve sűrűségfüggvénye

$$F(z) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + z}\right)^{\alpha}, \qquad f(z) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + z)^{\alpha+1}}, \qquad z \geq 0\,.$$

A Pareto eloszlás momentumai és momentumgeneráló függvénye

Ha $Z \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$, akkor

$$E(Z^k) = \lambda^k k! \frac{\Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k < \alpha\,, \qquad M(t) = \infty\,, \quad t > 0\,.$$

Következmény: Pareto káreloszlás esetén a Cramér–Lundberg approximáció nem alkalmazható, nincsen Lundberg-kitevő.

A Pareto- és az exponenciális eloszlás

Ha $Z \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$, akkor $\ln(1 + Z/\lambda) \sim \text{Exp}(\alpha)$.

Legyen $F(z)$, $z \in \mathbb{R}$, tetsz. eloszlásfüggvény, $Z_1, \ldots, Z_n \sim F$ FAE, és

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} Z_n .$$

Vegyük észre, hogy ekkor

- $P(Z_1 + \cdots + Z_n > z) = 1 - F^{(*n)}(z), \qquad z \in \mathbb{R},$
- $P(M_n > z) \sim n[1 - F(z)], \qquad z \to \infty.$

Szubexponenciális eloszlásfüggvények

Tegyük fel, hogy az F eloszlásfüggvényre $F(0) = 0$, és $F(z) < 1$, $z > 0$. Az eloszlásfüggvény **szubexponenciális**, ha minden $n \geq 2$ egész esetén

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1 - F^{\star n}(z)}{1 - F(z)} = n\,.$$

Következmény: Subexponenciális eloszlásfüggvény esetén $z \to \infty$ mellett

$$P\big(Z_1 + \cdots + Z_n > z\big) = 1 - F^{\star n}(z) \sim n[1 - F(z)] \sim P(M_n > z),$$

tehát az összeg eloszlását lényegében a legnagyobb tag határozza meg.

A következő tétel szerint ugyanez véletlen kárszám esetén is teljesül:

Véletlen tagszámú kárösszegek

Legyen $Z_1, Z_2, \ldots \sim F$ FAE, ahol F szubexponenciális eloszlásfüggvény. Legyen N a sorozattól független nemnegatív egész értékű változó, és tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ mellett

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^k P(N = k) < \infty .$$

Legyen továbbá

$$S := Z_1 + \cdots + Z_N , \qquad M := \max\left(Z_1, \ldots, Z_N\right).$$

Ekkor

$$\frac{P(S > z)}{1 - F(z)} \to E(N), \qquad \frac{P(S > z)}{P(M > z)} \to 1, \qquad z \to \infty .$$

Milyen feltétel van a Cramér–Lindberg-tételben, ami esetleg nem teljesül?

Pl: Pareto-eloszlás esetén $M_Z(r) = \infty$, minden $r > 0$ esetén.

Ennek oka: Tetszőleges $r > 0$ esetén $e^{rz}[1 - F(z)] \to \infty$, $z \to \infty$.

Nehézfarkú eloszlásfüggvények

Legyen F egy nemnegatív értékű változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az eloszlásfüggvény **nehézfarkú**, ha tetszőleges $r > 0$ esetén

$$e^{rz}\big[1 - F(z)\big] \to \infty, \qquad z \to \infty.$$

Feltételek a szubexponenciális tulajdonságra

1. Ha F nehézfarkú eloszlásfüggvény, akkor szubexponenciális.
2. Ha az F eloszlásfüggvényre

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1 - F^{\star 2}(z)}{1 - F(z)} = 2\,,$$

akkor F szubexponenciális.

Szubexponenciális eloszlásfüggvények

Legyen N nemnegatív egész értékű változó, legyen $p_k = P(N = k)$, $k = 0, 1, \ldots,$ és tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ esetén

$$g_N(1+\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1+\varepsilon)^k < \infty.$$

Legyen $G(z)$, $z \in \mathbb{R}$, eloszlásfüggvény, melyre $G(0) = 0$, és legyen

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k G^{\star k}(z), \qquad z \in \mathbb{R}.$$

1. Ha G szubexponenciális eloszlásfüggvény, akkor

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1-H(z)}{1-G(z)} = E(N). \qquad (*)$$

2. Ha $(*)$ teljesül, és $p_k > 0$ valamely $k \geq 2$ esetén, akkor G szubexponenciális.
3. Ha G szubexponenciális, és valamely $k \geq 1$ esetén $p_k > 0$, akkor H is szubexponenciális eloszlásfüggvény.

A csődvalószínűség asszimptotikus viselkedése

Legyen $F(z)$, $z \in \mathbb{R}$, a kárnagyságok közös eloszlásfüggvénye, tegyük fel, hogy $\lambda\mu < c$, és legyen

$$F_0(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \big[1 - F(z)\big] dz\,, \qquad x \geq 0\,.$$

Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

1. F_0 szubexponenciális eloszlásfüggvény.
2. A $\Psi(u)$, $u \geq 0$, csődvalószínűségre

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Psi(u)}{1 - F_0(u)} = C_2 = \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu}\,.$$

Speciálisan, ha F_0 nehézfarkú, akkor testzőleges $r > 0$ esetén

$$e^{ru}\Psi(u) \sim C_2 e^{ru}\big[1 - F_0(u)\big] \to \infty, \qquad u \to \infty.$$

Ekkor a csődvalószínűség exponenciálisnál lassabban cseng le, tehát a Cramér–Lundberg approximáció nem alkalmazható.

A csődvalószínűség Pareto káreloszlás esetén

Ha a kárnagyságok $\text{Pareto}(\alpha, \lambda')$ eloszlást követnek, akkor

$$\mu = \frac{\lambda'}{\alpha - 1}, \qquad F_0(x) = 1 - \left(\frac{\lambda'}{\lambda' + x}\right)^{\alpha-1}, \quad x \geq 0,$$

amiből

$$\Psi(u) \sim \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu}\left(\frac{\lambda'}{\lambda' + u}\right)^{\alpha-1}, \qquad u \to \infty.$$

A szubexponenciális tulajdonság ellenőrzése

Tekintsük az előző tételben bevezetett jelöléseket. Ha az alábbi feltételek közül valamelyik teljesül, akkor F_0 szubexponenciális eloszlásfüggvény.

- Az F eloszlásfüggvényre
$$\limsup_{x\to\infty} \big[1 - F(x)\big] / \big[1 - F(2x)\big] < \infty.$$
- Az F eloszlásfüggvénynek létezik f sűrűségfüggvénye, és
$$\limsup_{x\to\infty} f(x) / \big[1 - F(x)\big] < \infty.$$

A Lundberg-kitevő becslése

Probléma: A gyakorlatban a kárszámfolyamat intenzitását és a káreloszlás momentumgeneráló függvényét nem ismerjük. Kérdések:

- Hogyan lehet a Lundberg-kitevőt megbecsülni?
- Milyen statisztikai tulajdonságai vannak a becslésnek?
- A becsült kitevő segítségével hogyan becsülhető a csőd valószínűsége?

Rögzített $T > 0$ mellett legyen

$$g(r) = h(r) - \frac{cr}{\lambda} = M(r) - 1 - \frac{cr}{\lambda} = E\left(e^{rZ}\right) - 1 - \frac{cr}{\lambda},$$

$$G_T(r) = \frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} e^{rZ_k} - 1 - \frac{cr}{N_T / T}, \qquad r \in \mathbb{R},$$

$$A_T = \left\{ \text{a } [0, T] \text{ intervallumon van pozitív kárnagyság} \right\}.$$

Megjegyzések:

- Az R Lundberg-kitevő a $g(r) = 0$ egyenlet egyetlen pozitív gyöke.
- A nagy számok törvénye szerint

$$P\big(G_T \text{ jól definiált}\big) = P(N_T > 0) \to 1\,, \qquad T \to \infty\,.$$

- G_T pontonként erősen konzisztens becslése a g függvénynek, tehát $G_T(r) \to g(r)$ m.b. azon $r \in \mathbb{R}$ pontokban, ahol g létezik.
- G_T' pontonként erősen konzisztens becslése a g' deriváltnak.
- Ha $P(Z = 0) < 1$, akkor $P(A_T) \to 1$.

Ha A_T bekövetkezik egy rögzített $T > 0$ mellett, akkor

- A G_T függvény konvex.
- A $G_T(r) = 0$ egyenlet gyökei: a 0 és egy $R_T > 0$ érték.

Az R Lundberg-kitevőt az R_T értékkel fogjuk becsülni.

A Lundberg-kitevő becslése

Tegyük fel, hogy $c > \lambda\mu$, $P(Z = 0) < 1$, és $g(R) = 0$ egy $R > 0$ értékre.

1. Ha $M(r)$ véges az R valamely környezetében, akkor

   $$P\big(\text{a } G_T(r) = 0 \text{ egyenletnek létezik egyértelmű pozitív gyöke}\big) \to 1\,,$$

   amint $T \to \infty$. Legyen ez a gyök R_T. Ekkor R_T az R Lundberg-kitevő erősen konzisztens becslése, tehát

   $$R_T \to R\,, \qquad T \to \infty\,, \qquad \text{m.b.}$$

2. Ha $M(2R) < \infty$, akkor $T \to \infty$ mellett

   $$\sqrt{T}\big(R_T - R\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\big(0, \sigma^2\big)\,, \qquad \sigma^2 = \frac{g(2R)}{\lambda[g'(R)]^2}\,.$$

Konfidencia intervallum a Lundberg kitevőre

Rögzített $\alpha \in (0,1)$ mellett legyen $x_\alpha \in \mathbb{R}$ azaz érték, melyre

$$P\Big(N(0,1) \le x_\alpha\Big) = 1 - \alpha/2.$$

Ha teljesülnek az előző tétel feltételei, akkor

$$\Big[R_T - \sigma x_\alpha/\sqrt{T}, R_T + \sigma x_\alpha/\sqrt{T}\Big]$$

egy asszimptotikusan $1-\alpha$ megbízhatóságú konfidencia intervallum a Lundberg kitevőre, tehát

$$P\left(R_T - \frac{\sigma x_\alpha}{\sqrt{T}} \le R \le R_T + \frac{\sigma x_\alpha}{\sqrt{T}}\right) \to 1-\alpha\,, \qquad T \to \infty\,.$$

A gyakorlatban a σ^2 ismeretlen, de van erősen konzisztens becslése:

$$\sigma_T^2 = \frac{G_T(2R_T)}{(N_T/T)[G_T'(R_T)]^2}\,.$$

Legyen

$$\Psi_T(u) = \frac{cT - S_T}{N_T G_T'(R_T)} e^{-R_T u}, \qquad u \geq 0.$$

A csődvalószínűség becslése

Tfh $c > \lambda\mu$, $P(Z = 0) < 1$, és $g(R) = 0$ valamely $R > 0$ értékre.

1. Ha $M(r)$ véges az R Lundberg-kitevő valamely környezetében, akkor a $\Psi_T(u)$ függvény pontonként erősen konzisztens becslése a $\Psi(u)$ csődvalószínűségnek, azaz tetszőleges $u \geq 0$ esetén

$$\Psi_T(u) \to \Psi(u) \qquad \text{m.b.}, \qquad T \to \infty.$$

2. Ha $M(2R) < \infty$, és $u = u(T)$ olyan, hogy

$$u \to \infty \qquad \text{és} \qquad u/\sqrt{T} \to \tilde{u} \in \mathbb{R}, \qquad T \to \infty,$$

akkor

$$\ln\left(\frac{\Psi_T(u)}{\Psi(u)}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, (\tilde{u}\sigma)^2\right), \qquad T \to \infty.$$