Biomatematika és biostatisztika feladatok

1. Elemi függvények

1.1. A zárt tartályban tárolt gázok nyomása függ a hőmérséklettől. Egy tartályban a nyomás 20 °C hőmérsékleten 10 000 Pascal, és a nyomás 34 Pascallal nő valahányszor a hőmérséklet 1 fokkal emelkedik. Jelölje $p(x)$ a tartályban uralkodó nyomást x °C hőmérséklet esetén. Írjuk fel formulával és ábrázoljuk a $p(x)$ függvényt. Hány fokkal kell megemelni a hőmérsékletet ahhoz, hogy a nyomás megduplázódjon? Fejezzük ki a hőmérsékletet a nyomás függvényeként.

1.2. Lajos nyer a lottón 50 millió forintot, ezért felmond a munkahelyén, és elkezd úri módon élni. Havonta 200 ezer forintot él fel a vagyonából. Jelölje $f(x)$ azt, hogy mennyi pénze marad x hónap elteltével millió forintban kifejezve. (Feltehető, hogy a havi apanázst a hónap folyamán nem nagyobb részletekben, hanem időben egyenletesen költi el.) Írjuk fel formulával és ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt. Mennyi idő alatt feleződik meg a pénze első illetve második alkalommal? Fejezzük ki az eltelt időt a megmaradt pénz függvényeként.

1.3. Az orvosi diagnosztikában több területen alkalmaznak rádioaktív anyagokat. Például a pajzsmirígy vizsgálatához általában a 123-as tömegszámú jód izotópot használják, ugyanis ez jól beépül a szövetekbe. Egy páciensnek 200 MBq aktivitású injekciót adnak be. A jód fizikai bomlása miatt az aktivitás óránként 5,1 százalékkal csökken. Jelölje $f(x)$ az aktivitást az injekció után x órával.

- **a.** Írjuk fel formulával és ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt. Az egész x értékekre rajzoljuk be a függvénygörbe érintőit, majd vázlatosan ábrázoljuk a függvény deriváltját. A derivált értéke az $x_0 = 10$ pontban $f'(10) = -6{,}2$. Ennek segítségével adjunk közelítést az $f(x)$ függvényre az $x_0 = 10$ pont kis környezetében.
- **b.** Mennyi idő alatt csökken le az aktivitás az 1MBq értékre? Mennyi az izotóp felezési ideje? Fejezzük ki az eltelt időt az aktivitás függvényeként.

1.4. Egy baktériumtenyészetben kezdetben 1 mg mennyiség baktérium található, és a baktériumok mennyisége óránként 10 százalékkal nő. Jelölje $m(x)$ azt, hogy mekkora tömegű baktérium van a tenyészetben x óra elteltével.

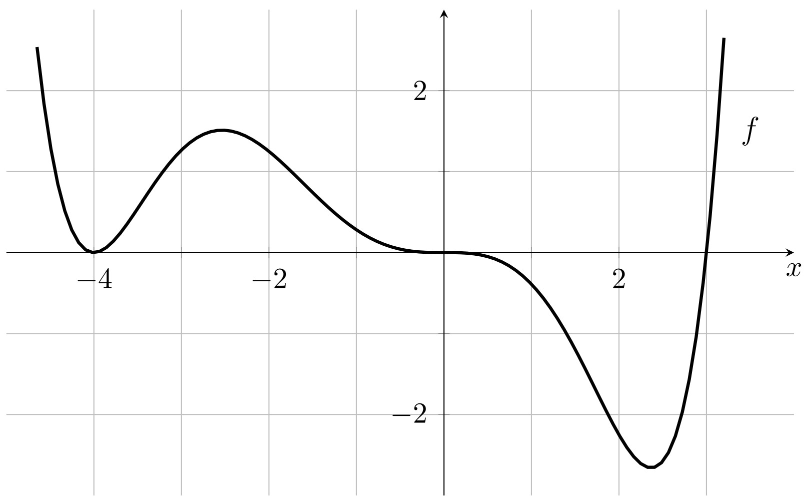
- **a.** Írjuk fel formulával és ábrázoljuk az $m(x)$ függvényt. Az egész x értékekre rajzoljuk be a függvénygörbe érintőit, majd vázlatosan ábrázoljuk a deriváltfüggvényt. A derivált értéke az $x_0 = 4$ pontban $m'(4) = 0{,}14$. Ennek segítségével adjunk közelítést az $m(x)$ függvényre az $x_0 = 4$ pont kis környezetében.
- **b.** Mennyi idő alatt duplázódik meg a baktériumok mennyisége? Fejezzük ki az eltelt időt a baktériumok mennyiségének függvényeként.

1.5. A rádiokarbonos kormeghatározás a 14-es tömegszámú szén atomokra épül. Ez az izotóp rádioaktív, felezési ideje 5730 év. Tegyük fel, hogy valamilyen szerves anyag

10 mg ^{14}C atomot tartalmaz, és jelölje $m(x)$ az izotóp tömegét x év elteltével. Írjuk fel formulával és ábrázoljuk az $m(x)$ függvényt. A ^{14}C atomok mekkora hányada bomlik le egy évezred alatt? Fejezzük ki az eltelt időt a megmaradt izotóp tömegének függvényeként.

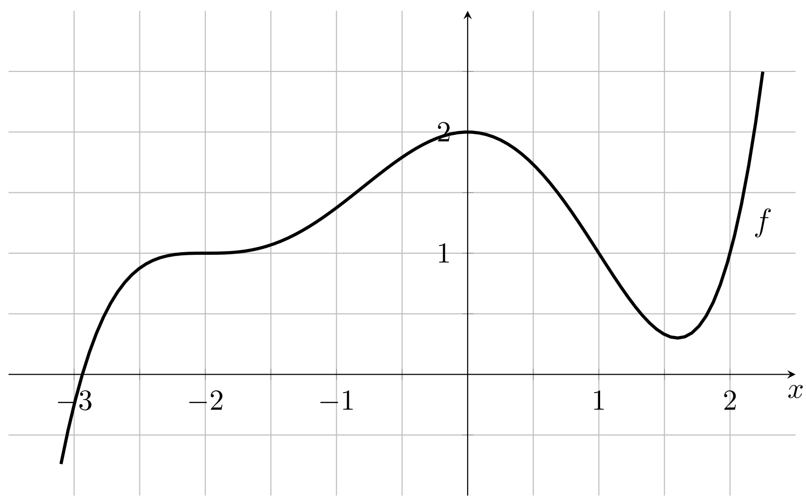
1.6. Elemezzük az alábbiakban ábrázolt függvényt: határozzuk meg a lokális és globális szélsőértékeket illetve az inflexiós pontokat, továbbá adjuk meg, hogy mely intervallumokon monoton növekvő illetve csökkenő a függvény. Ezek alapján hol milyen előjelű a függvény deriváltja? Adjunk becslést a derivált értékére a megadott x_0 pontban. Vázlatosan ábrázoljuk is a deriváltfüggvényt.

a.



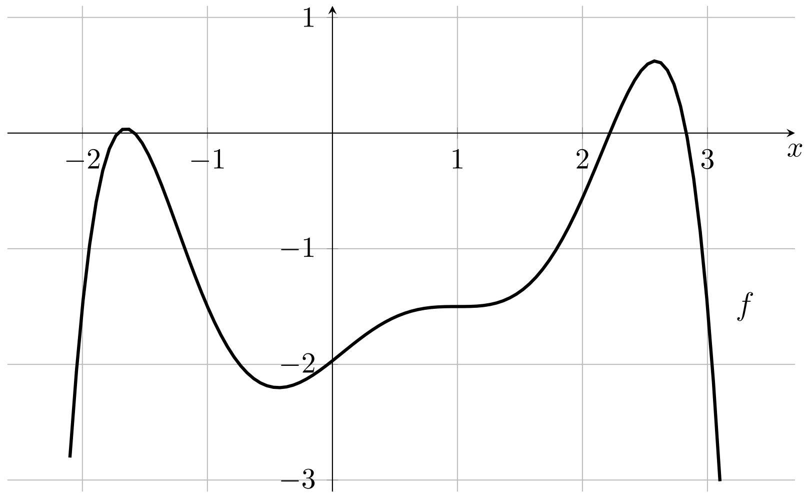
$x_0 = 1{,}5$

b.



$x_0 = -1$

c.

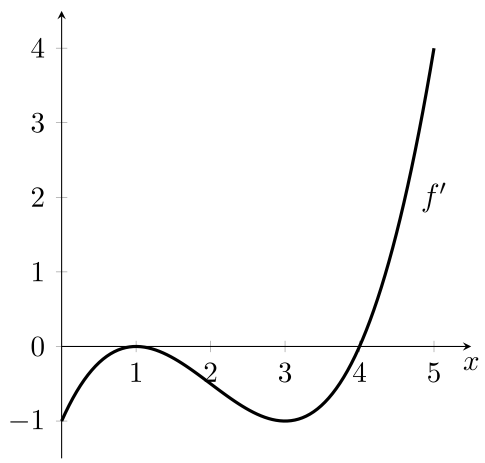


$x_0 = 2$

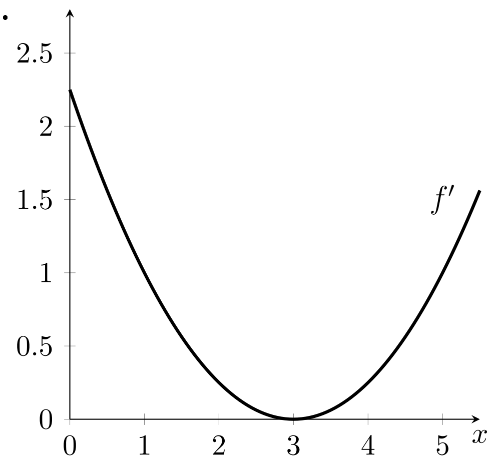
2. Függvények deriválása és integrálása

2.1. Az alábbi grafikonokon egy f függvény deriváltja látható. Végezzünk függvényelemzést a derivált segítségével. Olvassuk le a derivált értékét az egész x helyeken, majd ábrázoljuk az érintőmezőt. Vázlatosan rajzoljuk fel az f függvény grafikonját.

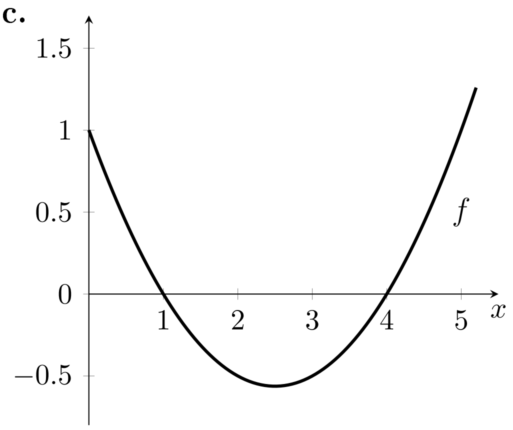
a.



b.



c.



2.2. Deriváljuk le az alábbi $f(x)$, $x \geq 0$, függvényt. Számoljuk ki a derivált értékét a megadott x pontokban, majd ábrázoljuk koordináta-rendszerben az érintőmezőt. Határozzuk meg a derivált zéróhelyeit, és végezzünk függvényvizsgálatot. Vázlatosan rajzoljuk fel az f függvényt.

a. $f(x) = e^{-2x} - e^{-5x}$, $x = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$.

b. $f(x) = -x^3/3 + 2x^2 - 3x + 2$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

2.3. Deriváljuk le az alábbi f függvényeket, majd adjuk meg a deriváltak egy primitív függvényét. A kapott primitív függvény azonos a kiindulási f függvénnyel? Ha nem, akkor mi ennek az oka?

a. $f(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$

b. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

c. $f(x) = 2\sqrt{x} - 3^x + \ln(x) + e^2$

d. $f(x) = e^3 + \lg(x) - 1/(2x^2) + x^5/5$

e. $f(x) = 2^x - 4\log_3 x - 1/(\pi\sqrt{x}) + \sqrt{2}$

2.4. Legyen $f(x) = e^{5x+2}$ és $g(x) = e^{3x+1}$, $x \geq 0$.

a. Mutassuk meg, hogy $f(x) \geq g(x) \geq 0$ minden $x \geq 0$ esetén. Határozzuk meg a két függvény egy-egy primitív függvényét. Deriválással ellenőrizzük is le a kapott eredményt.

b. Adjuk meg az f függvény görbéje alatti területet az $x = 0$ és az $x = 1$ pontok között. Határozzuk meg az f és a g függvény görbéje által közbezárt területet is ezen pontok között.

2.5. Legyen $f(x) = (2x + 1)^2$ és $g(x) = 1/(2x + 1)$, $x \geq 0$.

a. Mutassuk meg, hogy $f(x) \geq g(x) \geq 0$ minden $x \geq 0$ esetén. Határozzuk meg a két függvény egy-egy primitív függvényét. Deriválással ellenőrizzük is le a kapott eredményt.

b. Adjuk meg az f függvény görbéje alatti területet az $x = 1$ és az $x = 2$ pontok között. Határozzuk meg az f és a g függvény görbéje által közbezárt területet is ezen pontok között.

2.6. Jelölje $m(x)$ valamely anyag grammban kifejezett mennyiségét a szervezetben az $x \geq 0$ időpontban. A változási sebességet az alábbi függvény írja le:

$$v(x) = m'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2}$$

a. Határozzuk meg a $v(x)$ egy primitív függvényét. Ennek segítségével adjuk meg az $m(x)$ függvényt az $m(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

b. Határozzuk meg az átlagos változási sebességet az $x = 1$ és az $x = 3$ pillanatok között. Hogyan viselkedik az m függvény az $x = 1$ pontban?

2.7. Jelölje $m(x)$ a baktériumon mennyiségét egy tenyészetben az $x \geq 0$ időpontban. A tenyészetben eredetileg $m(0) = 10$ milligramm baktérium található, és a baktériumon mennyiségének a változási sebességét az alábbi függvény írja le:

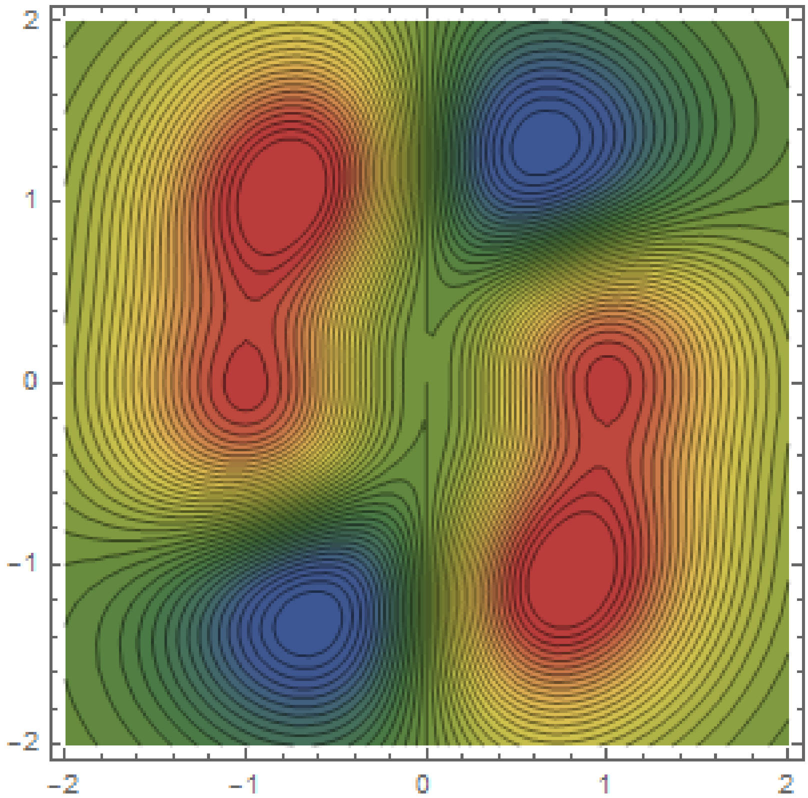
$$v(x) = m'(x) = xe^{-x^2}$$

Nőni vagy csökkenni fog a tenyészet mérete az idő múlásával? Határozzuk meg a $v(x)$ egy primitív függvényét, majd ennek segítségével adjuk meg az $m(x)$ függvényt. Határozzuk meg az átlagos változási sebességet az $x = 0$ és az $x = 2$ pillanatok között.

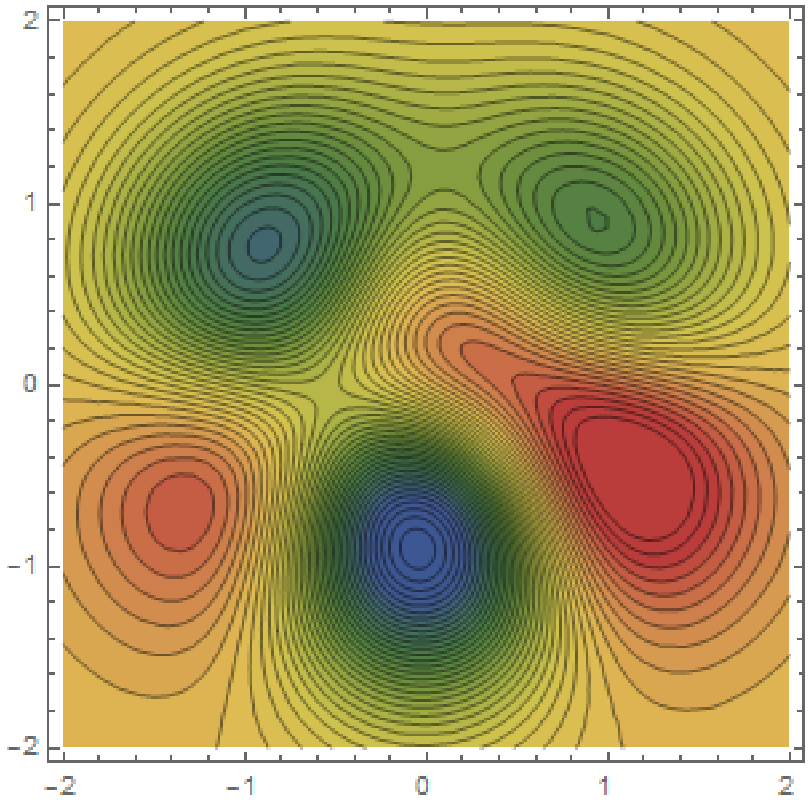
3. Kétváltozós függvények

3.1. Az alábbi grafikonokon egy-egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény szintvonalas ábrája látható. Vázlatosan ábrázoljuk a függvényt a megadott egyenesek mentén. Az egész koordinátájú pontokban rajzoljuk be a gradiensvektort. Határozzuk meg a minimum- és maximumhelyeket, valamint a nyeregpontokat. Mennyi ezekben a pontokban a parciális deriváltak értéke? Milyen előjelűek a parciális deriváltak a megadott (x_0, y_0) pontban? Merre kell elindulnunk ezen pontból, ha el akarjuk érni a legközelebbi lokális maximumot? Mi történik, ha elengedünk egy golyót ebből a pontból?

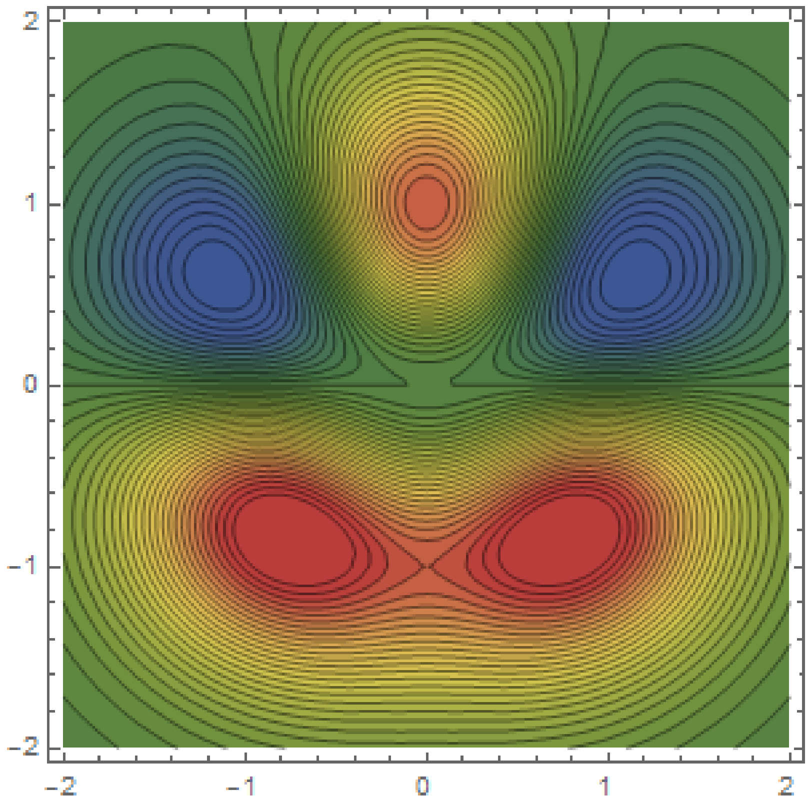
a. Egyenesek: $x = 1$ illetve $y = 0$, kezdőpont: $(x_0, y_0) = (0.5, 0.2)$



b. Egyenesek: $x = 0$ illetve $y = -1$, kezdőpont: $(x_0, y_0) = (0, 0.6)$



c. Egyenesek: $x = 0$ illetve $y = 1$, kezdőpont: $(x_0, y_0) = (-0.4, -0.4)$



`https://www.youtube.com/watch?v=XVih2KtzIDU`

3.2. Írjuk fel formulával illetve ábrázoljuk grafikonon az alábbi $f(x, y)$ függvények $x = 2$ illetve $y = 0$ egyenes mentén vett metszeteit. Írjuk fel formulával a szintvonalakat, majd ábrázoljuk a $c = -4, -2, 0, 2, 4$ szintekhez tartozó színtvonalakat. Határozzuk meg a parciális deriváltakat. Számoljuk ki és ábrázoljuk a gradiensvektort az $x, y = -4, -2, 0, 2, 4,$ koordinátájú pontokban. Határozzuk meg, hogy az f függvénynek hol van szélsőértéke illetve nyeregpontja.

a. $f(x, y) = 2x - y + 1$

b. $f(x, y) = xy - y$

c. $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$

4. A Malthus-modell

4.1. Legyen $p(t)$ egy populáció mérete a $t \geq 0$ időpontban. A populációban a szaporodási ráta 3, ezért az egyedszámot a $p'(t) = 2p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, p) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $p = -2, -1, 0, 1, 2$. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = -1$, a $p(0) = 0$ illetve a $p(0) = +1$ kezdeti feltétel mellett.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett. Mennyi idő alatt duplázódik meg a populáció egyedszáma? Függ ez az idő a kezdeti feltételtől?

4.2. Egy sejttenyészetben jelölje $p(t)$ a sejtek számát a $t \geq 0$ időpontban. A sejtek 0.5-ös rátával pusztulnak el, a sejtek számát a $p'(t) = -0.5p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, p) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $p = -2, -1, 0, 1, 2$. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = -2$, a $p(0) = 0$ illetve a $p(0) = +2$ kezdeti feltétel mellett.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett. Mennyi idő alatt feleződik meg a sejtek száma? Függ ez az idő a kezdeti feltételtől?

4.3. Egy halgazdaságban jelölje $m(t)$ a halállomány tonnában kifejezett tömegét $t \geq 0$ hónap elteltével. A halak szaporodási rátája 1, és havonta 4 tonna halat halásznak le az állományból. Emiatt a halállomány tömegét az $m'(t) = m(t) - 4$ differenciálegyenlettel írhatjuk le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, m) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $m = 0, 2, 4, 6, 8$. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását az $m(0) = 3$, az $m(0) = 4$ illetve az $m(0) = 5$ kezdeti feltétel mellett.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $m(0)$ kezdeti feltétel mellett. Ha kezdetben 3 tonna volt az állomány mérete, akkor mennyi idő alatt hal ki az állomány?

4.4. Legyen $m(t)$ egy gyógyszer milligrammban kifejezett mennyisége egy páciens szervezetében a kezelés kezdete után $t \geq 0$ órával. A gyógyszer óránkénti kiürülési rátája 0.2. A gyógyszert infúzióban adagoljuk a beteg számára 1 mg/óra segességgel. Ezek alapján a gyógyszer mennyisége az $m'(t) = -0.2m(t) + 1$ differenciálegyenlettel írható le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, m) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $m = 0, 2.5, 5, 7.5, 10$. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását az $m(0) = 0$, az $m(0) = 5$ illetve az $m(0) = 10$ kezdeti feltétel mellett.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $m(0)$ kezdeti feltétel mellett. Ha a kezelés kezdetekor 1 mg gyógyszer volt a beteg szervezetében, akkor a gyógyszer mennyisége mennyi idő alatt éri el a 4 mg szintet?

5. A Verhulst-modell

5.1. Egy populáció területfoglalását vizsgáljuk. Jelölje $p(t)$ az elfoglalt terület teljes területhez viszonyított arányát a $t \geq 0$ időpontban. Legyen a kolonizációs ráta 5, az eltartóképesség 1, a kihalási ráta pedig 3. Ekkor a populáció méretének a változását a $p'(t) = 5p(t)(1 - p(t)) - 3p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, p) pontokban, ahol $t, p = 0, 0.2, \dots, 1$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = 0, 0.2, \dots, 1$ kezdeti feltételek mellett. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

b. Adjuk meg a differenciálegyenlet formális megoldását tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett.

c. Jelölje k a kolonizációs rátát, és tekintsük a $p'(t) = kp(t)(1-p(t))-3p(t)$ egyenletet. Mik azok a $k \geq 0$ értékek, amikor a populáció a $p(0)$ kezdeti feltételtől függetlenül mindenképpen kihal?

5.2. Valamilyen vadállomány méretének a változását vizsgáljuk, jelölje $p(t)$ a populáció nagyságát a $t \geq 0$ időpontban. A kolonizációs ráta 2, az eltartóképesség 5, és az állományból a vadászok állapotfüggő módon $4p(t)$ sebességgel lőnek ki egyedeket. A folyamatot a $p'(t) = 2p(t)(5 - p(t)) - 4p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, p) pontokban, ahol $t = 0, 1, \dots, 4$ és $p = 0, 1, \dots, 5$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = 0, 1, \dots, 5$ kezdeti feltételek mellett. Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

b. Adjuk meg a differenciálegyenlet formális megoldását tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett.

c. Tegyük fel, hogy a vadászok $ap(t)$ sebességgel lövik ki az egyedeket, ahol $a \geq 0$ rögzített konstans. Tekintsük a $p'(t) = 2p(t)(5 - p(t)) - ap(t)$ egyenletet. Mik azok az a értékek, amikor a populáció a $p(0)$ kezdeti feltételtől függetlenül mindenképpen kihal?

5.3. Egy sejtpopuláció növekedését vizsgáljuk, jelölje $m(t)$ az össztömeget milligrammban kifejezve $t \geq 0$ óra elteltével. Legyen a növekedési ráta 4, az eltartóképesség 1, és a populációból időegységenként 1 milligramm sejtet távolítunk el. Ekkor a folyamatot a $p'(t) = 4p(t)(1 - p(t)) - 1$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, p) pontokban, ahol $t, p = 0, 0.25, \dots, 1$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = 0, 0.25, \ldots, 1$ kezdeti feltételek mellett. Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

b. Tegyük fel, hogy időegységenként $a \geq 0$ milligramm sejtet távolítunk el, és tekintsük a $p'(t) = 4(t)(1 - p(t)) - a$ egyenletet. Mik azok az $a \geq 0$ értékek, amikor a populáció a $p(0)$ kezdeti feltételtől függetlenül mindenképpen kihal?

5.4. Jelölje $m(t)$ egy ország államadósságát milliárd petákban t év elteltével. Az adósság alakulását a következő egyenlettel modellezhetjük: $m'(t) = 0.1m(t)(m(t)-10)+1.6$. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, m) pontokban, ahol $t, m = 0, 2, \ldots, 10$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását az $m(0) = 0, 2, \ldots, 10$ kezdeti feltételek mellett. Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

6. A Lotka–Volterra-modell

Az alábbi feladatokban jelölje $x(t)$ illetve $y(t)$ két faj egyedszámát a t időpontban. A populációk méretét minden esetben egy egyenletrendszerrel írhatjuk fel. Minden feladatban válaszoljunk a következő kérdésekre:

a. Az egyes fajok számára előnyös, közömbös vagy hátrányos az interakció? Hogyan nevezzük ezt a kölcsönhatást? Mondjunk példát ilyen típusú interakcióra.

b. Írjuk fel formulával és ábrázoljuk a nullklínákat, majd adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket. Határozzuk meg a nullklínák közötti tartományokon a deriváltak előjelét. Vázlatosan ábrázoljuk az irányvektorokat a nullklínákon és a nullklínák közötti tartományokon. Ezek segítségével következtessünk az egyensúlyi helyzetek stabilitási tulajdonságaira. Hosszú távon mi lesz a populációk sorsa?

6.1. $x' = 2x(2 - x), \quad y' = y(3 - y).$

6.2. $x' = 2x(1 - x), \quad y' = xy - y/2.$

6.3. $x' = 5x(1 - x/2) - xy, \quad y' = y(1 - y/2) - xy/4.$

6.4. $x' = x(1 - x + y/4), \quad y' = y(1 - y + x/2)$

6.5. $x' = 5x(1 - x/4) - xy, \quad y' = y(2 - x - y).$

Végül jöjjön valami nehezebb!

6.6. Továbbra is jelölje $x(t)$ és $y(t)$ két faj egyedszámát a t időpontban. A populációk méretét az alábbi egyenletrendszerrel írhatjuk fel, ahol a, b, k_1, k_2 pozitív paraméterek:

$$x' = k_1x(1 - ax - y), \quad y' = k_2y(1 - x - by).$$

A paraméterek függvényében írjuk fel az egyensúlyi helyzeteket, valamint határozzuk meg ezen helyzetek típusát.

7. Valószínűség, diszkrét valószínűségi változók

7.1. A biológus szakos hallgatók ebben a félévben két kötelezően választható kurzust vehettek fel. A „Sárkányok élettana” című tárgyra a hallgatók 60, a „Micimackó anatómiája” című kurzusra a hallgatók 40 százaléka jelentkezett. Mindkét kurzust az évfolyam 24 százaléka vette fel. Véletlenszerűen kiválasztunk egy hallgatót.

a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy választott hallgató a „Sárkányok élettana” című tárgyat felvette, de a „Micimackó anatómiája” című kurzust nem? Mennyi az esélye annak, hogy egyik kurzust sem vette fel?

b. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hallgató felvette a „Sárkányok élettana” című tárgyat, ha tudjuk, hogy a másik kurzusra jelentkezett. Mennyi az esélye annak, hogy felvette a sárkányos tárgyat, ha azt tudjuk, hogy a Micimackós kurzust nem vette fel? A két kurzusra történő jelentkezés egymástól független, vagy tapasztalható közöttük valamilyen kapcsolat?

7.2. Egy ország lakosságát vizsgáljuk haj- és szemszín szempontjából. Az országban az emberek 30 százaléka fekete, 50 százaléka pedig barna hajú, a többiek szőkék. A barna szem aránya 60 százalék, a többiek kék szeműek. Tudjuk még, hogy egyaránt 5 százalék a szőke hajú és barna szemű, illetve a fekete hajú és kék szemű emberek aránya. Véletlenszerűen kiválasztunk egy embert az országból.

a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott ember szőke és kék szemű? Mennyi az esélye annak, hogy barna hajjal és barna szemmel rendelkezik?

b. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott ember fekete hajú, ha tudom, hogy barna a szeme? Mennyi ez a valószínűség akkor, ha a kiválasztott ember kék szemű? Hogyan hat a szem színe a fekete haj megjelenésére? Végezzük el ugyanezt az elemzést a barna és a szőke hajra is. Mely események függetlenek egymástól? Független egymástól a szem és a haj színe úgy általában?

c. Milyen arányban fordulnának elő a lehetséges hajszín-szemszín kombinációk, ha a két tényező független lenne egymástól?

7.3. Egy borsópopulációban a növények 70 százalékának piros, a maradéknak fehér a virága. Ugyanezen populáción belül 60 százaléknak sárga a maghéja, míg a többinek zöld. Genetikából ismert, hogy a borsó növénynél a virág és a maghéj színe egymástól függetlenül öröklődik. Emiatt feltehető, hogy a populáción belül a virág és a maghéj színe két egymástól független tényező.

a. A piros virágú növények között milyen arányban jelenik meg a sárga illetve a zöld maghéj? A sárga maghéjjal rendelkező egyedek körében mennyi az aránya a piros illetve a fehér virágú növényeknek? Értelmezzük ezeket az arányokat feltételes valószínűségként is.

b. Írjuk fel, hogy a 4 lehetséges virág-maghéj színkombináció milyen arányban fordul elő a populáción belül.

7.4. Egy szerencsejátékban a játékos 1000, 2000, 3000 vagy 5000 forintot nyerhet, ezen nyeremények esélye 50, 30, 15 illetve 5 százalék. Egyszer játszuk ezt a játékot, jelölje ξ a nyeremény összegét. Írjuk fel a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi a játék „igazságos ára”?

7.5. A biológiai kutatások egyik új és fontos területe a sárkányok vizsgálata. A tudósok eddig 1, 3, 7 és 12 fejű sárkányokat figyeltek meg, ezek aránya a populáción belül 10, 40, 30 illetve 20 százalék. Véletlenszerűen kiválasztunk egy egyedet a populációból, és jelölje ξ a fejek számát a választott egyednél. Adjuk meg a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását.

8. Folytonos valószínűségi változók

8.1. Jelölje ξ a napi középhőmérséklet egy véletlenszerűen kiválasztott januári napon. A ξ egy folytonos változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = 1/20$, ha $-15 \leq x \leq 5$, és $f(x) = 0$ egyébként. Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt, és mutassuk meg, hogy a görbe alatti terület 1. Határozzuk meg a ξ változó értékkészletét. Mennyi annak az esélye, hogy a ξ változó -10 és -2 közé esik? Határozzuk meg a napi középhőmérséklet várható értékét és szórását. Írjuk fel a ξ változó eloszlásfüggvényét, majd adjuk meg a mediánt és a kvartiliseket.

8.2. A ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = 3\sqrt{x}/2$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $f_\xi(x) = 0$ minden más x valós számra. Mutassuk meg, hogy a görbe alatti terület 1, és írjuk fel ξ értékkészletét. Mi a $P(0{,}5 < \xi < 1{,}5)$ valószínűség értéke? Adjuk meg a változó várható értékét és szórását. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt, majd ez alapján határozzuk meg a 80%-os kvantilist.

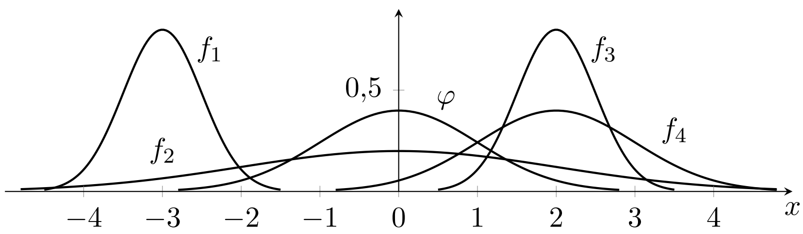
8.3. Egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = x/2$, ha $0 \leq x \leq 2$, és $f_\xi(x) = 0$ minden más x valós számra. Mutassuk meg, hogy a görbe alatti terület 1, és írjuk fel ξ értékkészletét. Mekkora valószínűséggel vesz fel a változó 1,5-nél nagyobb értéket? Mennyi az esélye, hogy a ξ változó -1 és $+1$ közé esik? Adjuk meg a változó várható értékét és szórását. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt, majd ez alapján határozzuk meg a 40%-os kvantilist.

8.4. Az alábbi ábrán φ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg, hogy az f_1, f_2, f_3, f_4 sűrűségfüggvények közül melyik tartozik az alábbi μ várható értékkel és σ szórással definiált normális eloszlásokhoz. Adjuk meg a kimaradt sűrűségfüggvényhez tartozó várható értéket és szórást is.

a. $\mu = 2, \sigma = 0{,}5$

b. $\mu = 2, \sigma = 1$

c. $\mu = 0, \sigma = 2$



8.5. Az IQ teszteket úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt populáción belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. A felnőtt népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 90 és 120 közé? A Mensa egy nemzetközi egyesület, ahol a belépés feltétele a legalább 131 pontos IQ. A népesség hány százaléka felel meg ennek a követelménynek? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az emberek 95 százalékának ebbe az intervallumba esik az IQ pontszáma.

8.6. Biológusok azt vizsgálták, hogy a szavannán élő majmok reggelente milyen eloszlás szerint ébrednek fel, és másznak le a fáról. A megfigyelések alapján az ébredési idő egy normális eloszlású valószínűségi változó. A majmok átlagosan reggel 7 órakor kellnek fel, a szórás 0,75 óra. A majmok mekkora hányada kel fel 6 és 7 óra között? És 8 óra után? Adjunk meg egy olyan időintervallumot, melyre teljesül, hogy a majmok 90 százaléka ebben az időintervallumban mászik le a fáról. (Valós kutatás alapján.)

8.7. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott felnőtt ember szisztolés vérnyomása higanymilliméterben (mmHg) kifejezve. A statisztikai adatok alapján ξ egy-egy földrajzi területen lognormális eloszlást követ, ami azt jelenti, hogy az $\ln \xi$ valószínűségi változó normális eloszlású. A paraméterek országonként változóak, például az Egyesült Államokban az $\ln \xi$ változó várható értéke $\mu = 4{,}78$, szórása $\sigma = 0{,}16$. (Forrás: National Health and Nutrition Examination Survey, 2006.) Az orvosi szakirodalom a 140 mmHg feletti vérnyomást tekinti kórosan magasnak. Ez az amerikai felnőtt népesség mekkora hányadát érinti? Az emberek mekkora hányadának esik a vérnyomása az egészségesnek tekintett tartományba, tehát 90 és 130 mmHg közé? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a felnőtt népesség 95 százalékának a szisztolés vérnyomása ide esik.

9. Leíró statisztikák és grafikonok

9.1. **a.** Olvassuk be a „Davis” adatsort a „car” vagy a „carData” csomagból, és fussuk át az adatsor leírását! Kérdezzük le és értelmezzük a „height” és a „repwt” változóra a következő leíró statisztikákat: mintaátlag, korrigált empirikus szórás, standard hiba, IQR, minimum, maximum, medián, alsó illetve felső kvartilis! Mekkora a minta mérete és hány megfigyelés hiányzik az egyes változóknál?

b. Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a „height” változó várható értékére. A Student-eloszlás táblázatából $\Phi_{199}(1{,}97) = 0{,}975$.

c. Ábrázoljuk a „height” változó boxplotját és hisztogrammját! Vegyük észre, hogy az egyik alany adatait elírták! Keressük meg a hibás sort, és javítsuk ki az adatokat!

d. Ábrázoljuk a megfigyelt magasság-tömeg értékpárokat koordináta rendszerben! Ábrázoljuk úgy is a megfigyelt értékeket, hogy különböző színnel jelöljük a nemeket!

e. Számoljuk ki az adatsorban szereplő emberek testtömegindexét a következő formulával:

$$\mathrm{BMI} = \frac{\text{testtömeg (kg)}}{\text{testmagasság}^2(\mathrm{m}^2)}.$$

Az a. ponthoz hasonlóan kérdezzük le a „BMI" változó leíró statisztikáit, de ezúttal nemenkénti bontásban. Ábrázoljuk a „BMI" változó hisztogrammját és boxplotját is, szintén nemek szerinti bontásban.

f. Kérdezzük le a nemek százalékos megoszlását a mintában! Ábrázoljuk a nem változót oszlop- és tortadiagrammal! Jól reprezentálja a felnőtt népességet ez a statisztikai minta?

g. Dobjuk ki az adatsorból a 180 cm feletti megfigyeléseket, az új adatsor neve legyen „Davis2". Ezek után dobjuk ki a férfiakat, az adatsor neve maradjon „Davis2".

9.2. **a.** Olvassuk be a „Mroz" adatsort a „car" vagy a „carData" csomagból, és fussuk át az adatsor leírását! Kérdezzük le és értelmezzük az „age" változóra a következő leíró statisztikákat: mintaátlag, korrigált empirikus szórás, standard hiba, IQR, minimum, maximum, medián, 40%-os kvantilis! Mekkora a minta mérete és hány megfigyelés hiányzik az „age" változónál? Vegyük fel az „age" változó boxplotját és hisztogrammját is!

b. Adjunk meg egy 90% megbízhatóságú konfidenciai intervallumot az „age" változó várható értékére. A Student-eloszlás táblázatából $\Phi_{752}(1{,}65) = 0{,}95$.

c. Ábrázoljuk a megfigyeléseket az „age" és az „inc" változó által meghatározott koordináta rendszerben! Ábrázoljuk úgy is a megfigyelt értékeket, hogy a „hc" változó értékei szerint különböző színnel ábrázoljuk az embereket! Az ábra alapján mitől függ inkább az „inc" változó értéke: az „age" változótól vagy a „hc" változótól?

d. Számoljuk ki a gyerekek számát a következő formulával: $\mathrm{children} = \mathrm{k5} + \mathrm{k618}$. Kérdezzük le, hogy a „children" változóra a mintaátlagot és a korrigált empirikus szórást az „lfp" változó értékei szerinti bontásban. Mit tapasztalunk?

e. Dobjuk ki az adatsorból a 30 év alatti embereket. Ezek után dobjuk ki azokat a megfigyeléseket, ahol a „wc" változó értéke „no". Az új adatsor neve legyen „Morz2".

10. A várható érték tesztelése

Az adatsorok az előadás Coospace oldaláról vagy az előadó oldaláról tölthetőek le.

10.1. Egy orvosi kísérlet keretei között két új kísérleti vérnyomáscsökkentő gyógyszert vizsgáltak magas vérnyomásos betegeken. Az eredmény a „vernyom.txt" fájlban található. A változók:

CSOPKOD: betegcsoport kódja (0=hagyományos gyógyszer, 1=1. kísérleti gyógyszer, 2=2. kísérleti gyógyszer)
CSOPNEV: betegcsoport neve, lásd CSOPKOD
SYS1: kezelés előtti szisztolés vérnyomás
SYS2: kezelés utáni szisztolés vérnyomás

a. Adjunk becslést a SYS1 változó átlagos értékére és szórására a teljes populációban! Mennyire pontos a populációátlagra kapott becslés? Vegyük fel a SYS1 változó hisztogrammját is! Vajon normális eloszlásból származik a minta?

b. Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a SYS1 változó teljes populációban vett átlagos értéke 165 Hgmm! Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is a populációátlagra!

c. Ábrázoljuk a SYS1 változó boxplotját és hisztogrammját betegcsoportonkénti bontásban! Látható jelentős eltérés a vérnyomásértékek eloszlása között?

d. Dobjuk ki az adatsorból a kontroll csoport tagjait! Teszteljük 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a SYS1 változó várható értéke azonos a kiserleti1 és a kiserleti2 csoportban. Adjunk meg továbbá egy 90% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a várható értékek különbségére! Ha szükséges, akkor előtte teszteljük le a szórások egyenlőségét is. Értelmezzük a kapott eredményt. Mi ennek a jelentősége a jelenlegi kísérlet keretei között?

e. A kiserleti1 betegcsoport tagjain teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a SYS1 és a SYS2 változónak azonos a várható értéke! Adjunk meg egy 95%-os konfidencia intervallumot is a várható értékek jülönbségére. Értelmezzük a kapott eredményt!

f. Ismételjük meg az előző pont elemzését a kiserleti2 betegcsoporton.

10.2. Az írisz adatsor a matematikai statisztika egyik legismertebb adatsora, mellyel az elmúlt 80 évben számos statisztikai módszert illusztráltak. Az adatsor az „iriszadat.txt” állományban érhető el, továbbá egy rövid ismertető található a Wikipedian. Az adatsor 150 írisz (nőszirom) növényről tartalmaz adatokat. A változók:

cseszehossz: szélelevél hossza (cm)
cseszeszel: csészelevél szélessége (cm)
sziromhossz: sziromlevél hossza (cm)
sziromszel: sziromlevél szélessége (cm)
faj: faj megnevezése
fajkod: lásd faj

a. Ábrázoljuk a sziromszel változó hisztogrammját! Vajon hány módusza van ennek az eloszlásnak? Mi ennek az oka? Mi a szokásos eljárás, ha statisztikában ilyen adatsorral találkozunk? Ábrázoljuk a hisztogrammot fajonkénti bontásban is!

b. Adjunk becslést a sziromszel változó elméleti várható értékére és elméleti szórására fajonkénti bontásban. Hogyan értelmezhető az elméleti várható érték és az elméleti szórás ebben a feladatban.

c. Dobjuk ki a „setosa" és a „versicolor" fajhoz tartozó növényeket. Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a megmaradt növényeknél („virginica" faj) a sziromszel változó várható értéke 2 cm. Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is erre a várható értékre.

d. Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a „virginica" fajnál a sziromlevél átlagos hossza azonos a csészelevél átlagos hosszával! (Szükség esetén a szórásokat is teszteljük le!) Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidenciai intervallumot a két populációátlag eltérésére is!

e. Térjünk vissza a teljes adatsorhoz, majd dobjuk ki a „setosa" fajhoz tartozó növényeket! Teszteljük le 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a megmaradt két fajnál azonos a csészelevél átlagos szélessége! Adjunk meg egy 90% megbízhatóségú konfidencia intervallumot is a populációátlagok különbségére!

10.3. A „UScars.txt" adatsorban több, az amerikai piacon a '80-as években forgalmazott autótípus fontosabb műszaki paraméterei szerepelnek. A változók:

MODEL: gyártó és modell
COUNTRY: melyik országból vagy kontinensről származik
COUNTRYCODE: lásd COUNTRY
VOL: utastér térfogata (köbláb)
HP: teljesítmény (lóerő)
MPG: fogyasztás (mérföld/gallon)
SP: végsebesség (mérföld/óra)
WT: teljes tömeg (100 font)

a. Adjunk becslést az amerikai piacon a '80-as években forgalmazott összes autótípus körében az átlagos fogyasztásra illetve a fogyasztás szórására. Mennyire pontos az átlagfogyasztásra adott becslés? Vegyük fel az MPG változó hisztogrammját is! Vajon normális eloszlásból származik a minta?

b. Teszteljük le 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy az MPG változó elméleti várható értéke 35! Adjunk meg egy 90% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is erre a várható értékre!

c. Kérdezzük le az MPG változóra a mintaátlagot és a korrigált empirikus szórást országonkénti bontásban. Dobjuk ki az adatsorból az európai autókat! Teszteljük le 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy az amerikai és a japán autók körében azonos az átlagfogyasztás! Adjunk meg egy 90% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is a két átlagfogyasztás közötti különbségre! (Szükség esetén a szórások egyenlőségét is teszteljük le!)

11. ANOVA és lineáris regresszió

Az adatsorok az előadás Coospace oldaláról vagy az előadó oldaláról tölthetőek le. Az adatsorok leírása megtalálható a 10. feladatsorban.

11.1. Nyissuk meg a „vernyom.txt” adatsort, majd válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

- **a.** A három betegcsoportot összehasonlítva tapasztalható szignifikáns eltérés a SYS1 változó elméleti várható értékei között? Vizsgáljuk meg ilyen módon az elméleti szórásokat is! Ezek alapján mit mondhatunk: homogén vagy nem homogén a három betegcsoport a kezelés előtti vérnyomás szempontjából?
- **b.** Végezzük el az előző pont elemzését a SYS2 változóra is.
- **c.** Zárjuk ki a vizsgálatból a kiserleti1 és kisérleti2 csoportot. Becsüljük meg a SYS1 és a SYS2 változó közötti korrelációs együttható értékét. Ezek alapján milyen irányú és milyen erősségű kapcsolat van a két változó között. Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a két változó független egymástól. Ábrázoljuk is az adatokat koordináta rendszerben (scatterplot)!
- **d.** Az előző pont folytatásaként végezzünk lineáris regressziót a SYS1 és a SYS2 változó között. Írjuk fel a regressziós egyenes egyenletét! Mennyire jó az adatsor illeszkedése a regresszós egyeneshez? Ezek alapján jól alkalmazható a gyakorlatban ez a regressziós modell? Vegyük fel a regressziós egyenest az előző pont ábrájára!

11.2. Nyissuk meg a „UScars.txt” adatsort.

- **a.** Teszteljük azt nullhipotézist, hogy a származási ország által meghatározott kategóriákon belül azonos a HP változó elméleti szórása illetve elméleti várható értéke.
- **b.** Ábrázoljuk az autók műszaki paramétereit páronként koordináta-rendszerben (scatterplot matrix). Mely változók között tapasztalható kapcsolat, és milyen irányú a kapcsolat?
- **c.** Becsüljük meg a HP és az SP változó elméleti korrelációs együtthatóját. Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a két változó független egymástól. Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is az elméleti korrelációra. Végezzünk lineáris regressziót a két változóra. Adjuk meg a regressziós egyenes egyenletét, illetve ábrázoljuk az egyenes a megfigylt értékekkel együtt. Mennyire jó az illeszkedés? Adjunk becslést egy olyan autó végsebességére, melynek a motorja 80 lóerős.
- **d.** Végezzük el az előző pont elemzését a HP és a VOL változóra!
- **e.** Adjunk becslést a HP segítségével az MPG változóra $\text{MPG} \approx a/\text{HP} + b$ alakban! Ez egy szabályos regresszió? Mennyire jó a modell illeszkedése?
- **f.** Adjunk becslést a HP segítségével az MPG változóra $\text{MPG} \approx \exp(a\text{HP} + b)$ alakban! A kapott eredmény egy szabályos regressziós modell?

12. Valószínűségek becslése és tesztelése

Az adatsorok az előadás Coospace oldaláról vagy az előadó oldaláról tölthetőek le.

12.1. Felmérést végeztek egy egyetemen. Azt kérdezték meg 1000 véletlenszerűen kiválasztott hallgatótól, hogy dohányzik-e, illetve tart-e valamilyen háziállatot. A felmérés eseménye a „catsdogs.txt” adatsorban található. A változók:

Gender, GenderCode: a hallgató neme (M=1=férfi, F=0=nő)
Smokes, SmokesCode: dohányzik-e (1=yes, 0=no)
CatsDogs: van-e kutyája vagy macskája
Cats, Dogs: van-e kutyája/macskája (1=yes, 0=no)

a. Ábrázoljuk a Gender változót oszlopdiagramm segítségével. Adjunk becslést a férfiak arányára az egész egyetemen! Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is erre az arányra! Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy az egyetemen azonos a férfi és női hallgatók száma!

b. Adjunk becslést a dohányosok arányára nemenkénti bontásban! Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a férfiak és a nők azonos arányban dohányoznak! Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is az arányok különbségére!

c. Adjunk becslést a kutyát illetve a macskát tartó hallgatók arányára. Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a hallgatók azonos arányban tartanak kutyát illetve macskát! Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is az arányok különbségére!

d. Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a háziállatok tartása nem hat a dohányzásra! Pontosabban: a dohányosok aránya megegyezik a CatsDogs változó által definiált részpopulációkban.

e. Ábrázoljuk a CatsDogs változót kördiagramm segítségével! Adjunk becsést arra, hogy a teljes populáción belül a hallgatók milyen arányban esnek a CatsDogs változó által definiált részcsoportokba! Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy 5% tart kutyát és macskát is, 20% csak macskát, 20% csak kutyát, a maradék pedig egyiket sem! Várhatóan hány hallgató esik az egyes csoportokba az 1000 fős mintában, ha a nullhipotézis igaz? Papíron számoljuk ki a χ^2-próba próbastatisztikájában a négy tagot. Ezek alapján a nullhipotézisben melyik aránnyal lőttük a legjobban mellé?

Megoldások

1.1. $p(x) = 9320 + 34x$, 294°C, $x(p) = (p - 9320)/34$.

1.2. $f(x) = 50 - 0{,}2x$, 125 hónap illetve 62,5 hónap, $x(f) = 250 - 5f$.

1.3. **a.** $f(x) = 200 \cdot 0{,}949^x$, az $x_0 = 10$ pont kis környezetében: $f(x) \approx 262 - 6{,}2x$.

b. 101,2 óra, 13,2 óra, $x(f) = \log_{0{,}949}(f/200) = -44 \lg f + 101{,}22$.

1.4. **a.** $m(x) = 1{,}1^x$, az $x_0 = 4$ pont kis környezetében: $m(x) \approx 0.9 + 0{,}14x$.

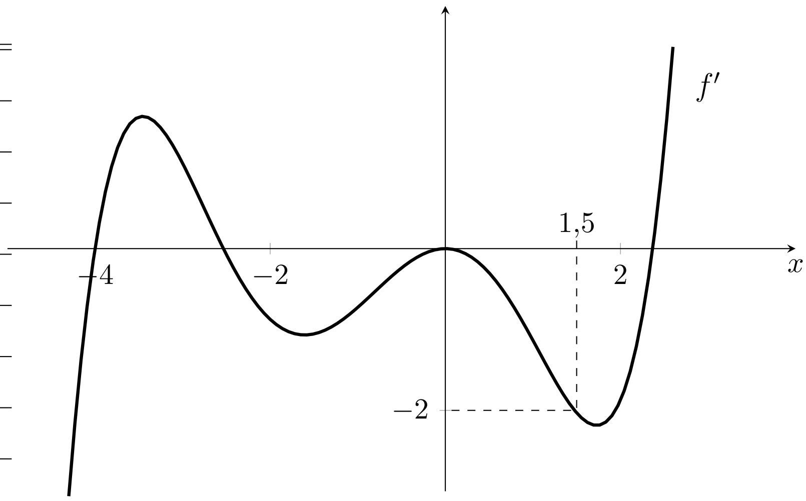
b. 7,27 óra, $x(m) = \log_{1{,}1} m = 24{,}16 \lg m$.

1.5. **a.** $m(x) = 20 \cdot 0{,}5^{x/5730} = 20 \cdot 0{,}99988^x$, 11,4%, $x(m) = \log_{0{,}99988}(x/20)$.

b. 7,27 óra, $x(m) = \log_{1{,}1} m = 24{,}16 \lg m$.

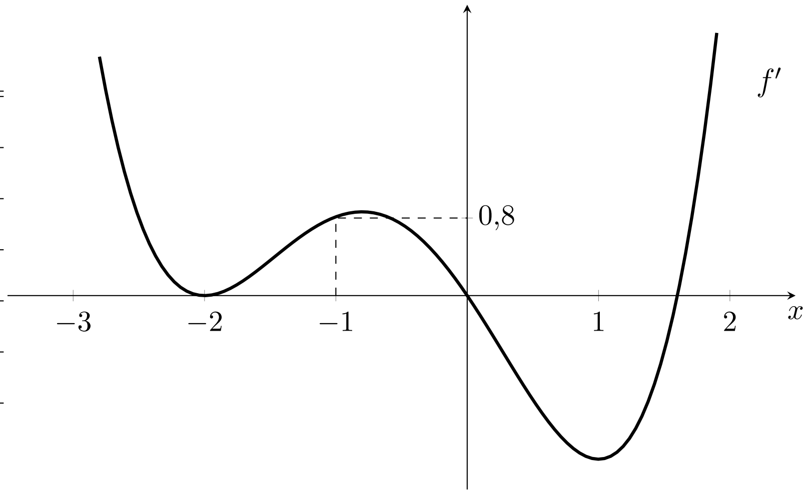
1.6. **a.** $f'(1{,}5) \approx -2$

x	$f(x)$	$f'(x)$
$(-\infty, -4)$	$\searrow$	$-$
-4	min.	0
$(-4, -2{,}5)$	$\nearrow$	$+$
$-2{,}5$	max.	0
$(-2{,}5, 0)$	$\searrow$	$-$
0	inflex.	0
$(0, 2{,}4)$	$\searrow$	$-$
2,4	min.	0
$(2{,}4, +\infty)$	$\nearrow$	$+$



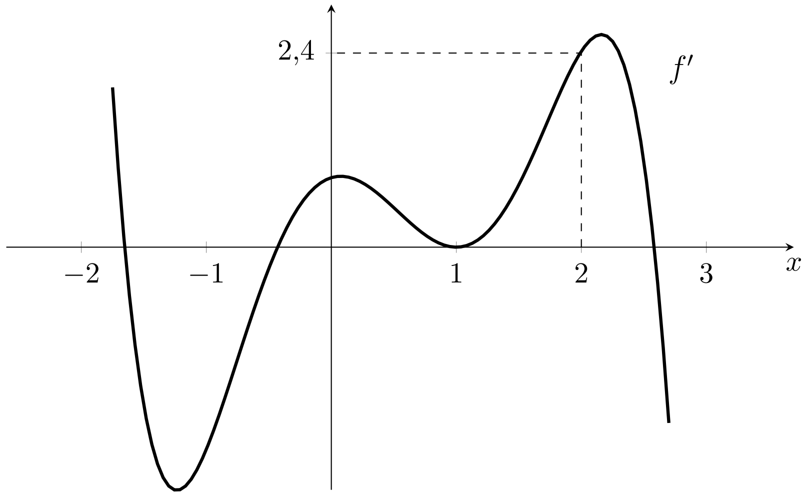
b. $f'(-1) \approx -0{,}8$

x	$f(x)$	$f'(x)$
$(-\infty, -2)$	$\nearrow$	$+$
-2	inflex.	0
$(-2, 0)$	$\nearrow$	$+$
0	max.	0
$(0, 1{,}6)$	$\searrow$	$-$
1,6	min.	0
$(1{,}6, +\infty)$	$\nearrow$	$+$



c. $f'(2) \approx 2{,}4$

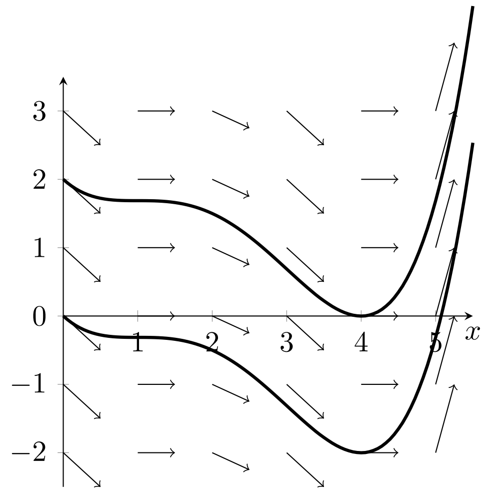
x	$f(x)$	$f'(x)$
$(-\infty, -1{,}6)$	$\nearrow$	$+$
$-1{,}6$	max.	0
$(-1{,}6, -0{,}4)$	$\searrow$	$-$
$-0{,}4$	min.	0
$(-0{,}4, 1)$	$\nearrow$	$+$
1	inflex.	0
$(1, 2{,}5)$	$\nearrow$	$+$
$2{,}5$	max.	0
$(2{,}5, \infty)$	$\searrow$	$-$



2.1. a.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(0, 1)$	$-$	$\searrow$
1	0	inflex.
$(1, 4)$	$-$	$\searrow$
4	0	min.
$(4, +\infty)$	$+$	$\nearrow$

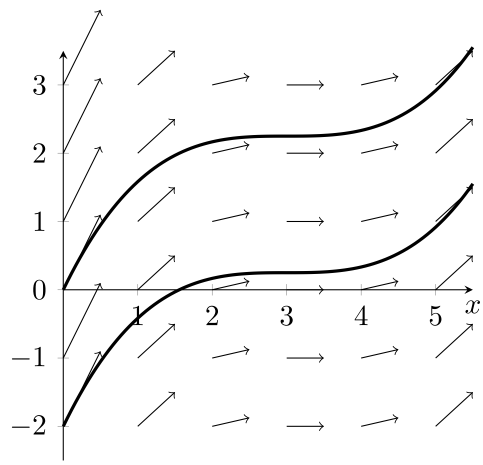
x	$f'(x)$
0	-1
1	0
2	-0.5
3	-1
4	0
5	4



b.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(0, 3)$	$+$	$\nearrow$
3	0	inflex.
$(3, +\infty)$	$+$	$\nearrow$

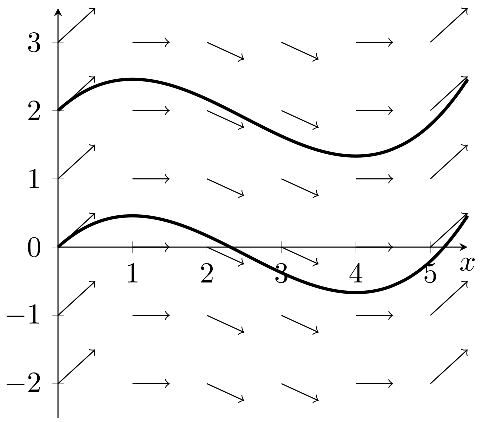
x	$f'(x)$
0	2.25
1	1
2	0.25
3	0
4	0.25
5	1



c.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(0,1)$	$+$	$\nearrow$
1	0	max.
$(1,4)$	$-$	$\searrow$
4	0	min.
$(4,+\infty)$	$+$	$\nearrow$

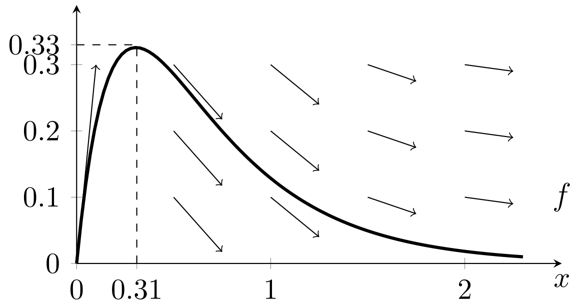
x	$f'(x)$
0	1
1	0
2	-0.5
3	-0.5
4	0
5	1



2.2. **a.** $f(0)=0$, $f'(x)=-2e^{-2x}+5e^{-5x}$, zéróhely: $x=\ln(5/2)/3\approx 0{,}31$

x	$f'(x)$
0	3
0.5	-0.33
1	-0.24
1.5	-0.1
2	-0.04

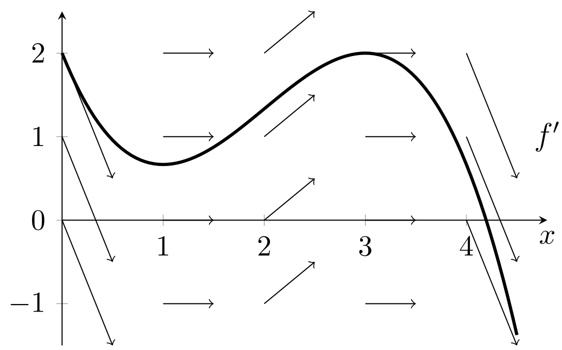
x	$f'(x)$	$f(x)$
$(0,0.31)$	$+$	$\nearrow$
0.31	0	max.
$(0.31,+\infty)$	$-$	$\searrow$



b. $f(0)=2$, $f'(x)=-x^2+4x-3$, zéróhelyek: $x=1$ és $x=3$.

x	$f'(x)$
0	-3
1	0
2	1
3	0
4	-3

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(0,1)$	$-$	$\searrow$
1	0	min.
$(1,3)$	$+$	$\nearrow$
0.3	0	max.
$(0.3,+\infty)$	$-$	$\searrow$



2.3. **a.** $f'(x)=1+x+x^2/2$

b. $f'(x)=1/(2\sqrt{x})+1/(3\sqrt[3]{x^2})+1/(4\sqrt[4]{x^3})$

c. $f'(x)=1/\sqrt{x}-3^x\ln 3+1/x$

d. $f'(x)=1/(x\ln 10)+1/x^3+x^4$

e. $f'(x)=2^x\ln 2-4/(x\ln 3)-1/(2\pi\sqrt{x^3})$

2.4. **a.** $f(x)=(e^5)^x e^2\geq (e^3)^x e^2\geq 0$, $\int f(x)dx=e^{5x+2}/5$, $\int g(x)dx=e^{3x+1}/3$

b. $\int_0^1 f(x)dx=e^{5\cdot 1+2}/5-e^{5\cdot 0+2}/5\approx 218$

$\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=[e^{5\cdot 1+2}/5-e^{3\cdot 1+1}/3]-[e^{5\cdot 0+2}/5-e^{3\cdot 0+1}/3]\approx 201$

2.5. **a.** $f(x) \geq 1 \geq g(x) \geq 0$, $\int f(x)dx = (2x+1)^3/6$, $\int g(x)dx = (\ln(2x+1))/2$

b. $\int_1^2 f(x)dx = (2 \cdot 2+1)^3/6 - (2 \cdot 1+1)^3/6 \approx 16{,}3$

$\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx = [(2\cdot 2+1)^3/6-(\ln(2\cdot 2+1))/2]-[(2\cdot 1+1)^3/6-(\ln(2\cdot 1+1))/2]$

2.6. **a.** $v(x)1 - 2x/(1+x^2)$, $\int v(x)dx = x - \ln(1+x^2)$,

$m(y) = m(0)+\int_0^y m'(x)dx = 1+[y-\ln(1+y^2)]-[0-\ln(1+0^2)] = 1+y-\ln(1+y^2)$

b. Megváltozás: $m(3) - m(1) = 2 - \ln(10) + \ln(2) \approx 0{,}39$

Átlagsebesség: $[m(3) - m(1)]/[3 - 1] \approx 0{,}195$

Most $m'(1) = 0$, tehát az $x = 1$ helyen egy nevezetes pont van. Mivel $m'(x) \geq 0$ minden x-re, ezért az m függvény monoton növekvő, azaz $x = 1$ egy inflexiós pont.

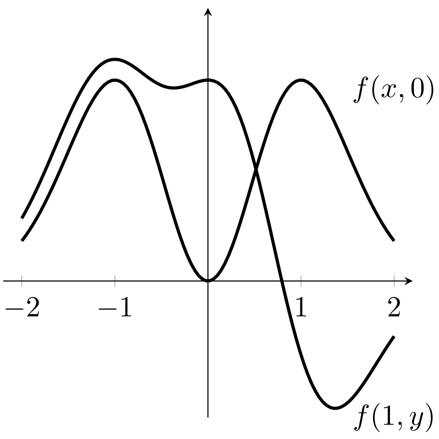
2.7. $v(x) > 0$, tehát a tenyészet mindvégig nőni fog; $\int v(x)dx = -e^{-x^2}/2$;

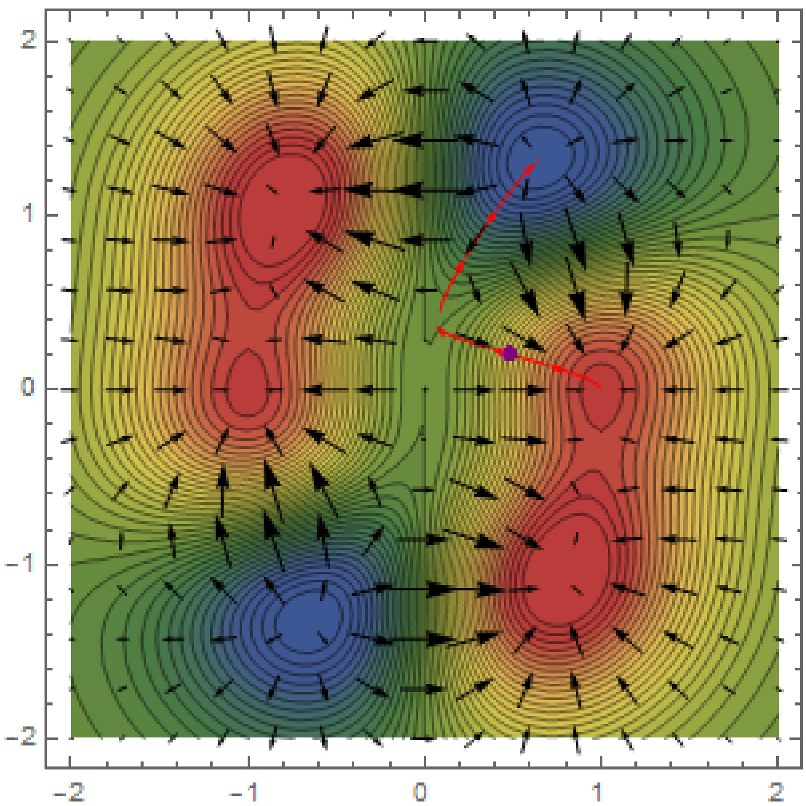
$m(y) = m(0) + \int_0^y m'(x)dx = 10 + [-e^{-y^2}/2 + e^{-0^2}/2] = 10{,}5 - e^{-y^2}/2$

Megváltozás: $m(2) - m(0) = e^0 - e^{-2} \approx 0{,}86$;

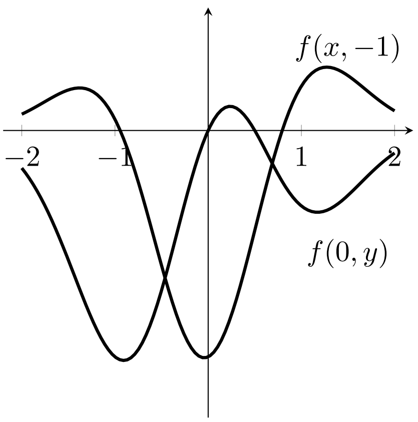
Átlagsebesség: $[m(2) - m(0)]/[2 - 0] \approx 0{,}43$

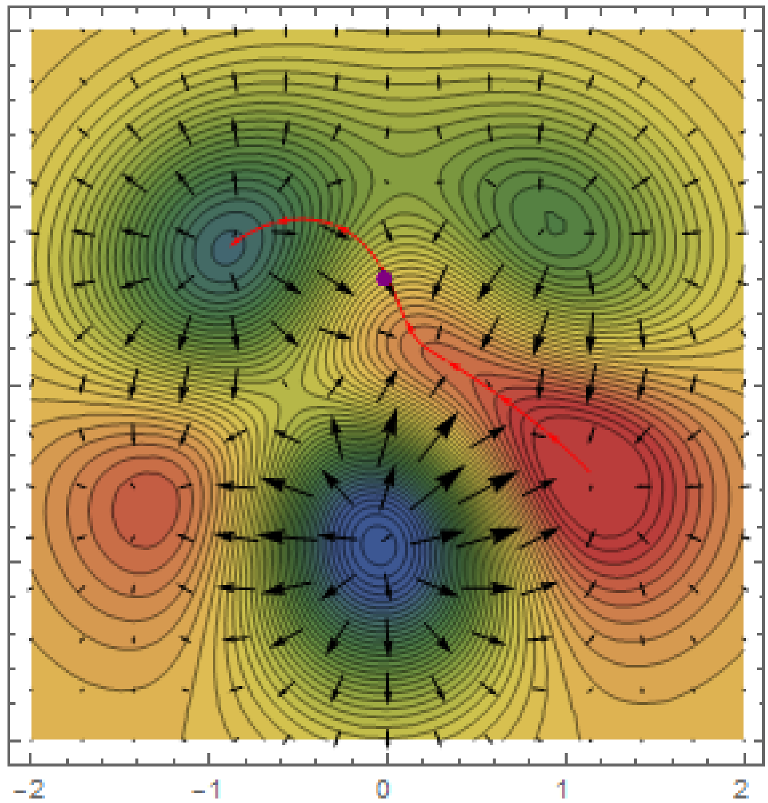
3.1. **a.** $f_x(0.5, 0.2) > 0$, $f_y(0.5, 0.2) \approx 0$



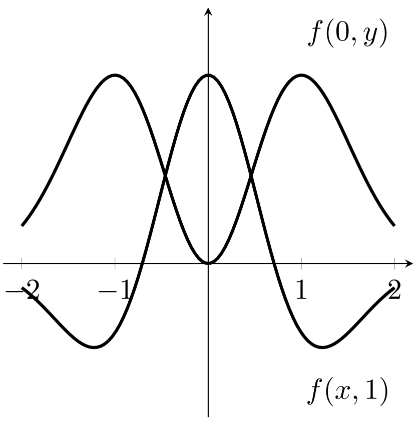


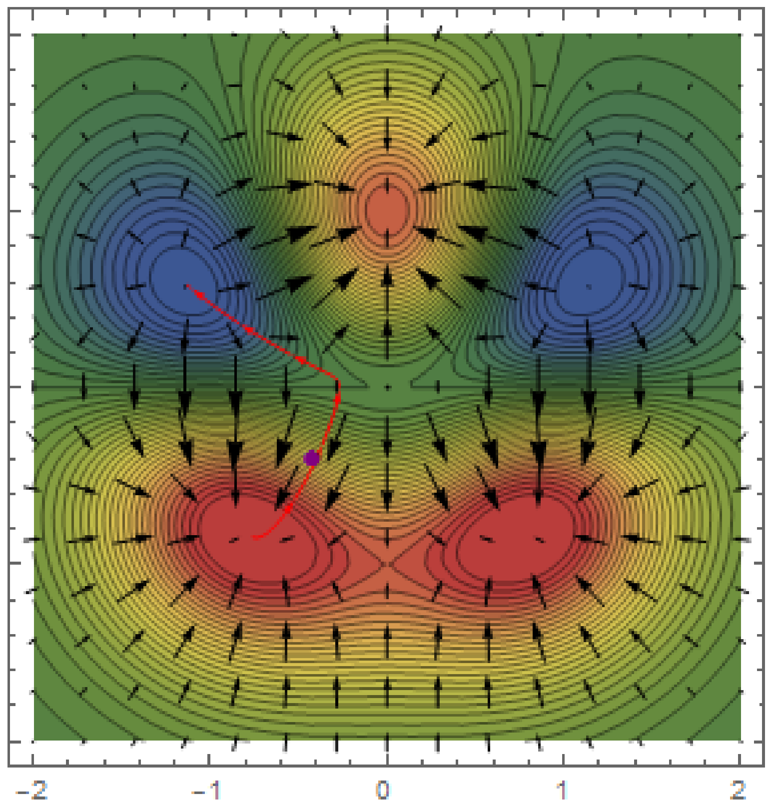
b. $f_x(0, 0.6) \approx 0$, $f_y(0, 0.6) < 0$





c. $f_x(-0.4,-0.4) < 0,\ f_y(-0.4,-0.4) < 0$



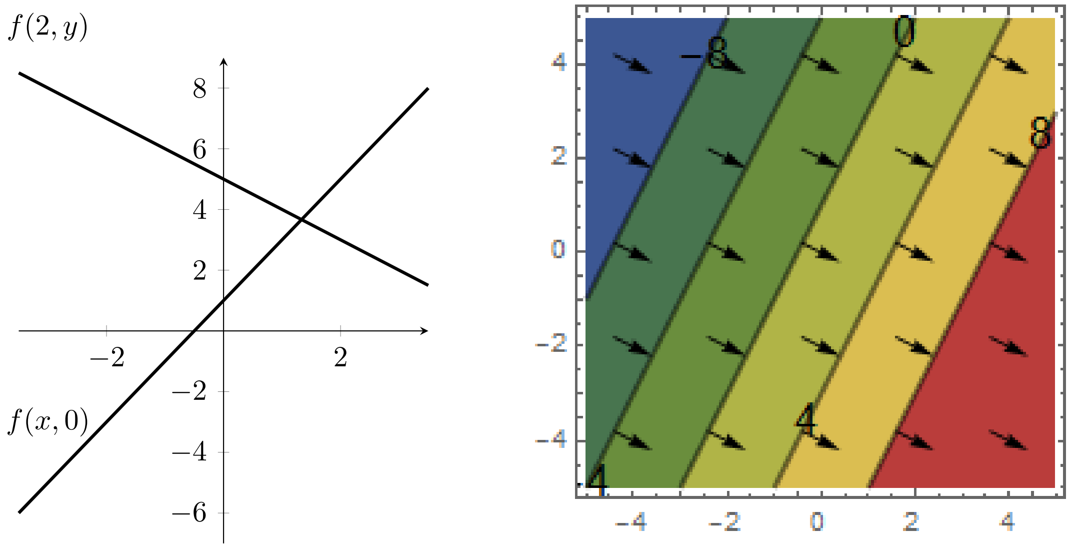


3.2. a. Metszetek: $f(2,y) = -y+5$, $f(x,0) = 2x+1$.

Szintvonalak: $2x - y + 1 = c$, amiből $y = 2x + (1-c)$.

Parciális deriváltak: $f_x = 2$, $f_y = -1$, $\nabla f(x,y) = (2,-1)$.

Nevezetes pontok: a $f_x = 0$, $f_y = 0$ egyenletrendszernek nincs megoldása, ezért nincsen nevezetes pont.

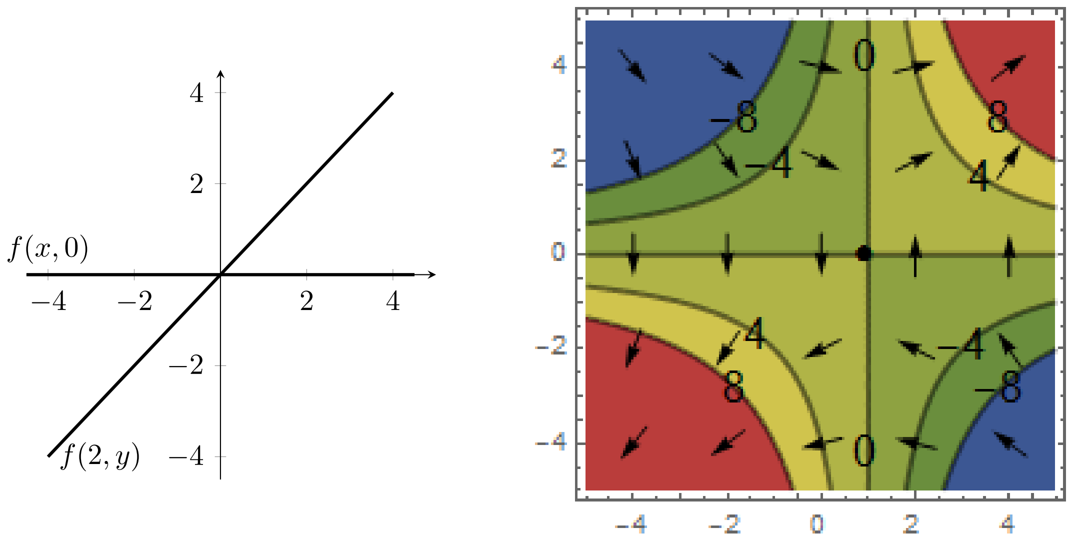


b. Metszetek: $f(2,y) = y$, $f(x,0) = 0$.

Szintvonalak: $xy - y = c$, amiből $y = c/(x-1)$, ha $c \neq 0$. A $c = 0$ szinthez tartozó szintvonal speciális, két egyenes alkotja: $x = 1$ és $y = 0$.

Parciális deriváltak: $f_x = y$, $f_y = x - 1$, $\nabla f(x,y) = (y, x-1)$.

Nevezetes pontok: $f_x = 0$, $f_y = 0$ egyenletrendszernek egy megoldása van, $x = 1$, $y = 0$. A szintvonalas ábra alapján ez egy nyeregpont.

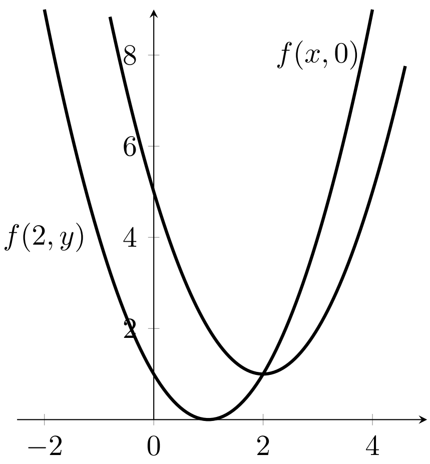


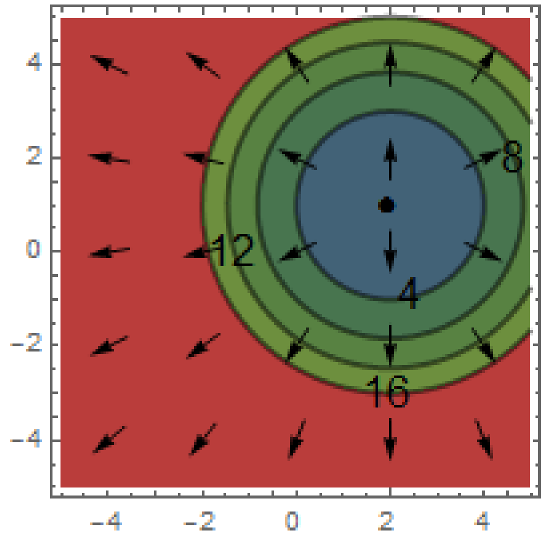
c. Metszetek: $f(2,y) = (y-1)^2$, $f(x,0) = (x-2)^2 + 1$.

Szintvonalak: $(x-2)^2+(y-1)^2=c$, ami csak $c \geq 0$ esetén értelmezhető, és ez egy $\sqrt{c}$ sugarú és $(2,1)$ középpontú körvonal.

Parciális deriváltak: $f_x = 2x-4$, $f_y = 2y-2$, $\nabla f(x,y) = (4x-4, 2y-2)$.

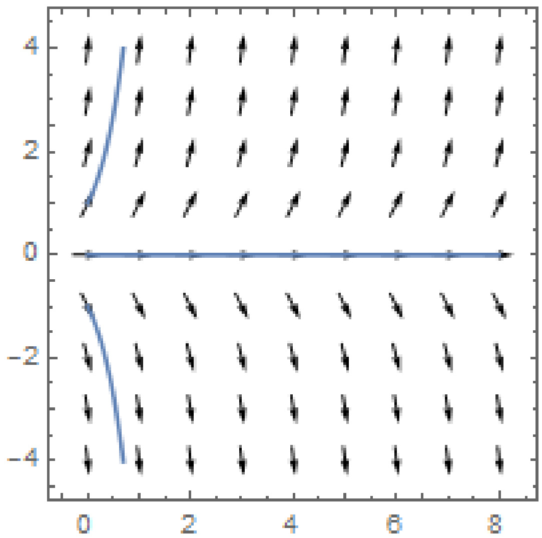
Nevezetes pontok: a $f_x = 0$, $f_y = 0$ egyenletrendszernek egy megoldása van, $x = 2$, $y = 1$. A szintvonalas ábra alapján ez egy minimumhely.





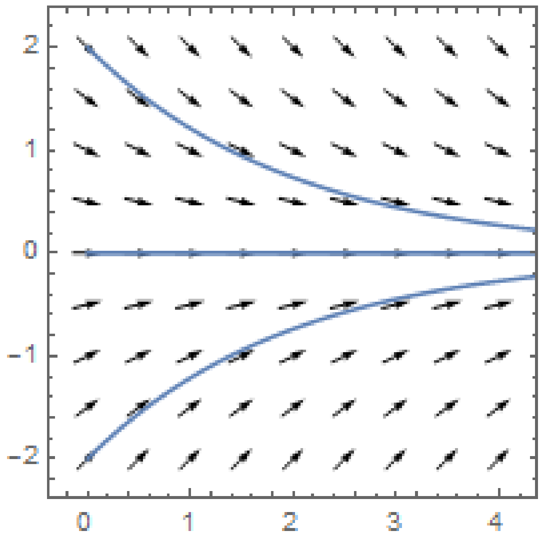
4.1. Egyensúlyi helyzet: $p = 0$, instabil. Formális megoldás: $p(t) = p(0)e^{2t}$, $t \geq 0$.

Duplázási idő: $p(0)e^{2T} = 2p(0)$, amiből $T = (\ln 2)/2 \approx 0.35$.

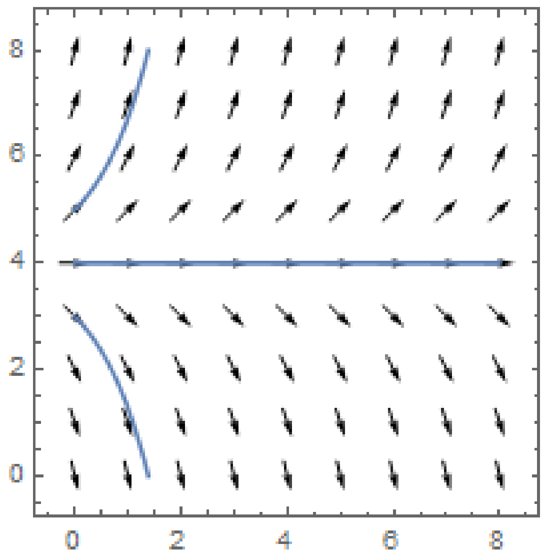


4.2. Egyensúlyi helyzet: $p = 0$, stabil. Formális megoldás: $p(t) = p(0)e^{-0.5t}$, $t \geq 0$.

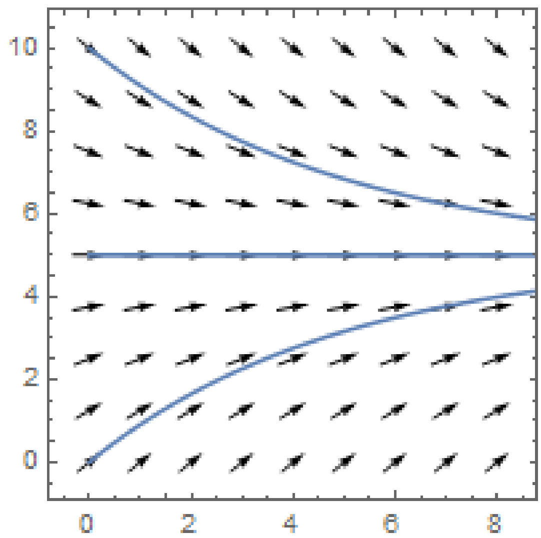
Felezési idő: $p(0)e^{-0.5T} = p(0)/2$, amiből $T = -(\ln 0.5)/0.5 \approx 1.39$.



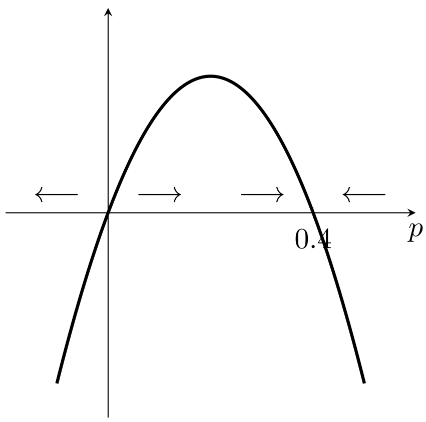
4.3. Egyensúlyi helyzet: $m = 4$, instabil. Formális megoldás: $m(t) = [m(0) - 4]e^t + 4$.
A megoldás a $p(0) = 3$ kezdeti feltétel mellett: $m(t) = -e^t + 4$.
Kihalási idő: $-e^T + 4 = 0$, amiből $T = \ln 4 \approx 1.39$.

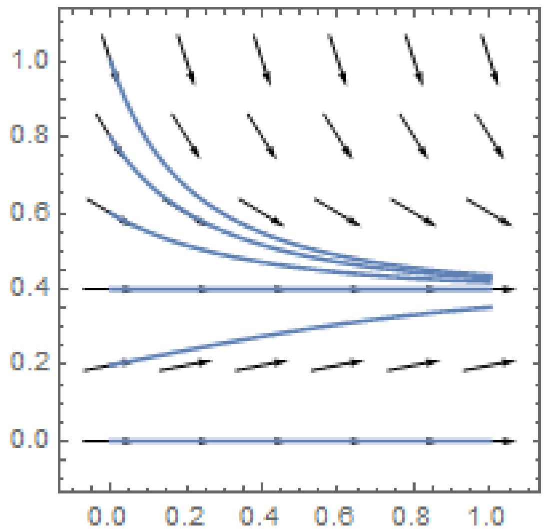


4.4. Egyensúlyi helyzet: $m = 5$, stabil. Formális megoldás: $m(t) = [m(0) - 5]e^{-0.2t} + 5$.
Megoldás az $m(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett: $m(t) = -4e^{-0.2t} + 5$.
A 4 mg elérésének időpontja: $-4e^{-0.2T} + 5 = 4$, amiből $T = -\ln 0.25/0.2 \approx 6.93$.



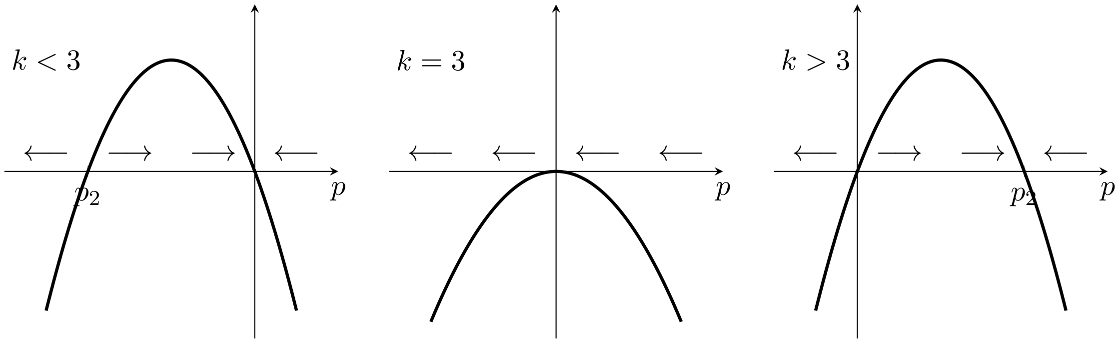
5.1. a. Egyensúlyi helyzetek: $p = 0$, instabil; $p = 0.4$, stabil.





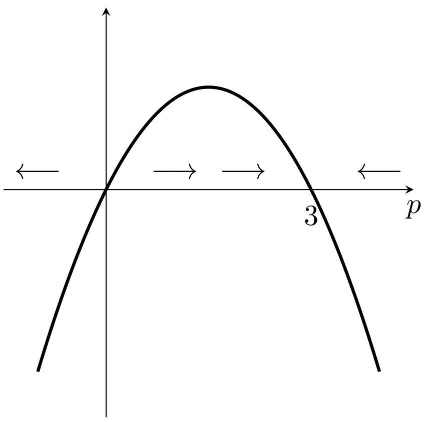
b. $p(t) = \frac{2p(0)e^{2t}}{2-5p(0)+5p(0)e^{2t}}$, $t \geq 0$.

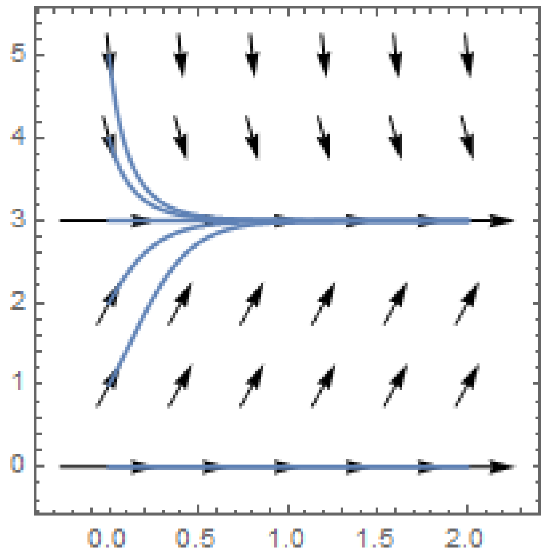
c. A $kp(1-p) - 3p = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ahol p az ismeretlenben. Az egyenlet bal oldalát átírva: $kp(1-3/k-p) = 0$. Tehát a két egyensúlyi helyzet: $p_1 = 0$ és $p_2 = 1 - 3/k$. Az alábbi ábrán vázlatosan ábrázoljuk, hogy mi történik a $k < 3$, a $k = 3$ és a $k > 3$ esetben.



- $k < 3$ esetén $p_2 < 0 = p_1$. Ekkor a p_2 instabil, a 0 stabil egyensúlyi helyzet. Tehát a populáció tetszőleges $p(0) > 0$ esetén kihal.
- $k = 3$ esetén $p_2 = 0 = p_1$. Egy egyensúlyi helyzet van, a 0, ami a pozitív irányból vonzó, a negatív irányból taszító. Tehát a populáció kihal tetszőleges $p(0) > 0$ esetén.
- $k > 3$ esetén $p_2 > 0 = p_1$. Ekkor a p_2 stabil, a 0 instabil egyensúlyi helyzet. Tehát ha $p(0) > 0$, akkor a populáció nem hal ki.

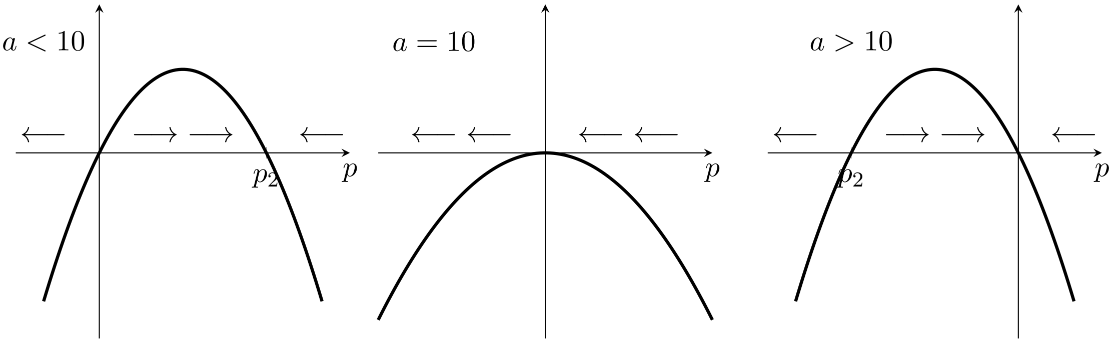
5.2. **a.** Egyensúlyi helyzetek: $p = 0$, instabil; $p = 3$, stabil.





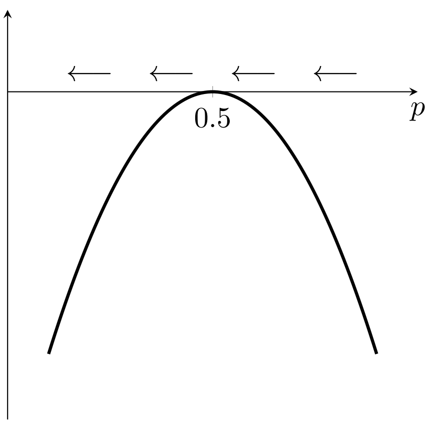
b. $p(t) = \frac{3p(0)e^{6t}}{3-p(0)+p(0)e^{6t}}$, $t \geq 0$.

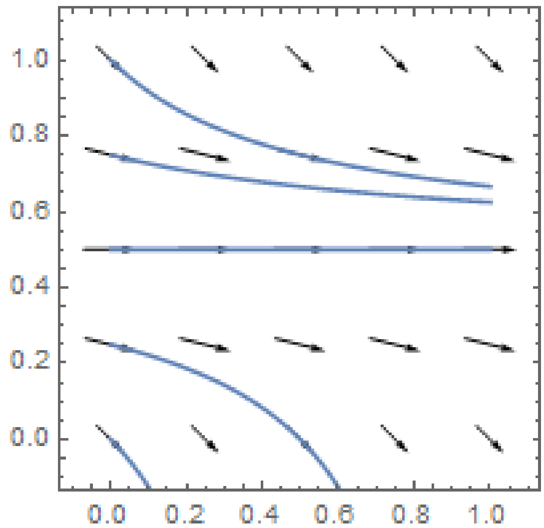
c. A $2p(5-p) - ap = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ahol p az ismeretlenben. Az egyenlet bal oldalát átírva: $2p(5 - a/2 - p) = 0$. Tehát a két egyensúlyi helyzet: $p_1 = 0$ és $p_2 = 5 - a/2$. Az alábbi ábrán vázlatosan ábrázoljuk, hogy mi történik az $a < 10$, az $a = 10$ és az $a > 10$ esetben.



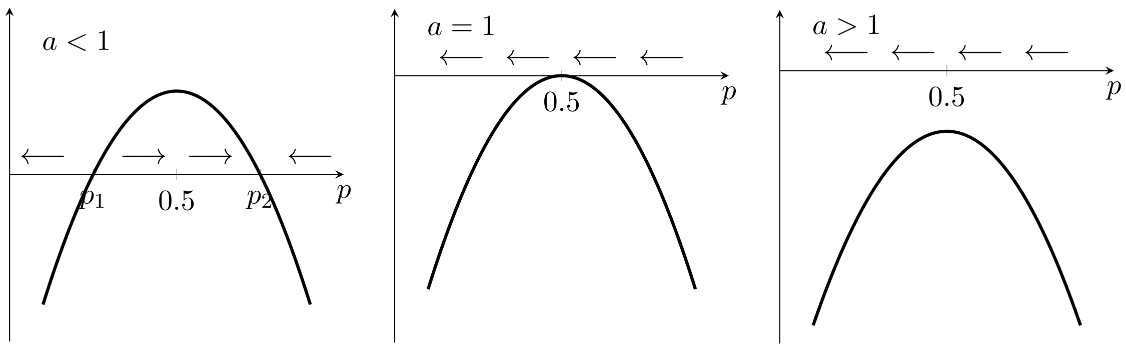
- $a < 10$ esetén $p_2 > 0 = p_1$. Ekkor a p_2 stabil, a 0 instabil egyensúlyi helyzet. Tehát ha $p(0) > 0$, akkor a populáció nem hal ki.
- $a = 10$ esetén $p_2 = 0 = p_1$. Egy egyensúlyi helyzet van, a 0, ami a pozitív irányból vonzó, a negatív irányból taszító. Tehát a populáció kihal tetszőleges $p(0) > 0$ esetén.
- $a < 10$ esetén $p_2 < 0 = p_1$. Ekkor a p_2 instabil, a 0 stabil egyensúlyi helyzet. Tehát a populáció tetszőleges $p(0) > 0$ esetén kihal.

5.3. **a.** Egyensúlyi helyzetek: $p = 0.5$, pozitív irányból vonzó, negatív irányból taszító.



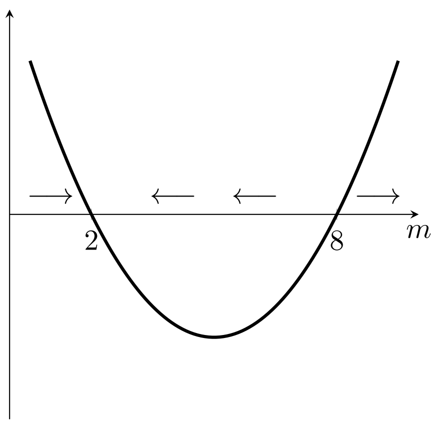


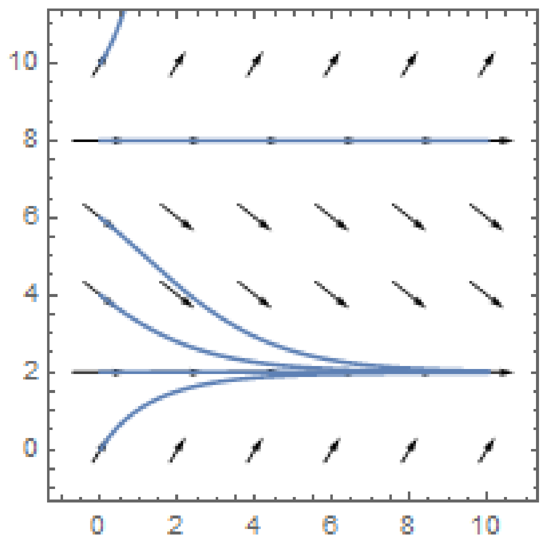
b. A $4p(1-p) - a = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ahol p az ismeretlenben. Az egyenlet bal oldalán a zárójelet felbontva: $-4p^2 - 4p - a = 0$. A megoldóképlet segítségével a következő eseteket kapjuk:



- $a < 1$ esetén két különböző egyensúlyi helyzetet kapunk: $p_1 = (1 - \sqrt{1-a})/2$ és $p_1 = (1 + \sqrt{1-a})/2$. Most a p_1 instabil, a p_2 stabil egyensúlyi helyzet. A populáció $p(0) > p_1$ esetén nem pusztul ki.
- Az $a = 1$ esetet már tisztáztuk az a. pontban. A populáció $p(0) \geq 1/2$ esetén nem hal ki.
- Az $a > 1$ esetben nincsen egyensúlyi helyzet, a populáció tetszőleges $p(0)$ mellett kihal.

5.4. Egyensúlyi helyzetek: $m = 2$, stabil; $m = 8$, instabil.

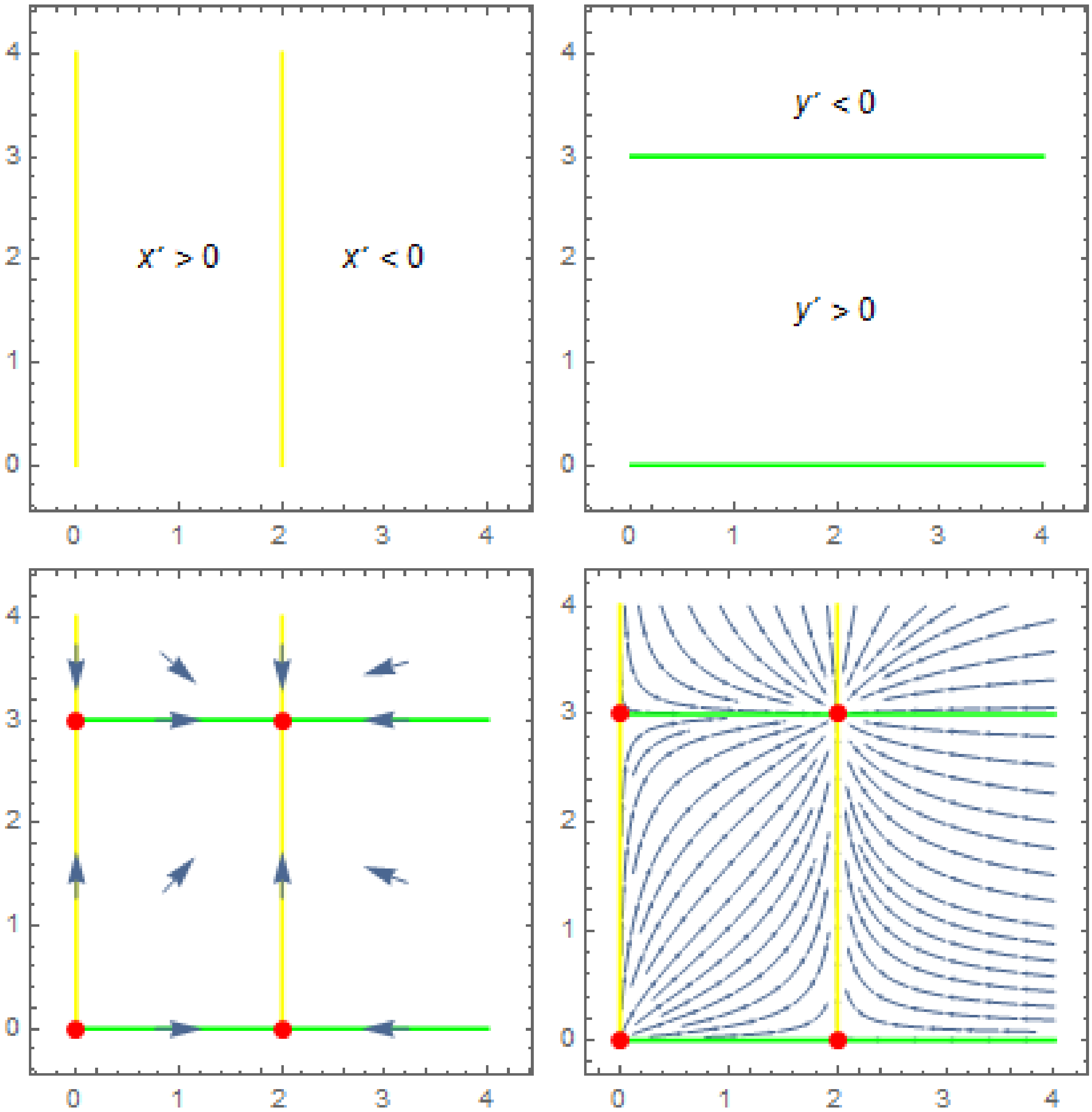




6.1. **a.** Az interakció mindkét faj számára közömbös.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $x = 2$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = 3$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(2,3)$, az első három instabil, az utolsó stabil.

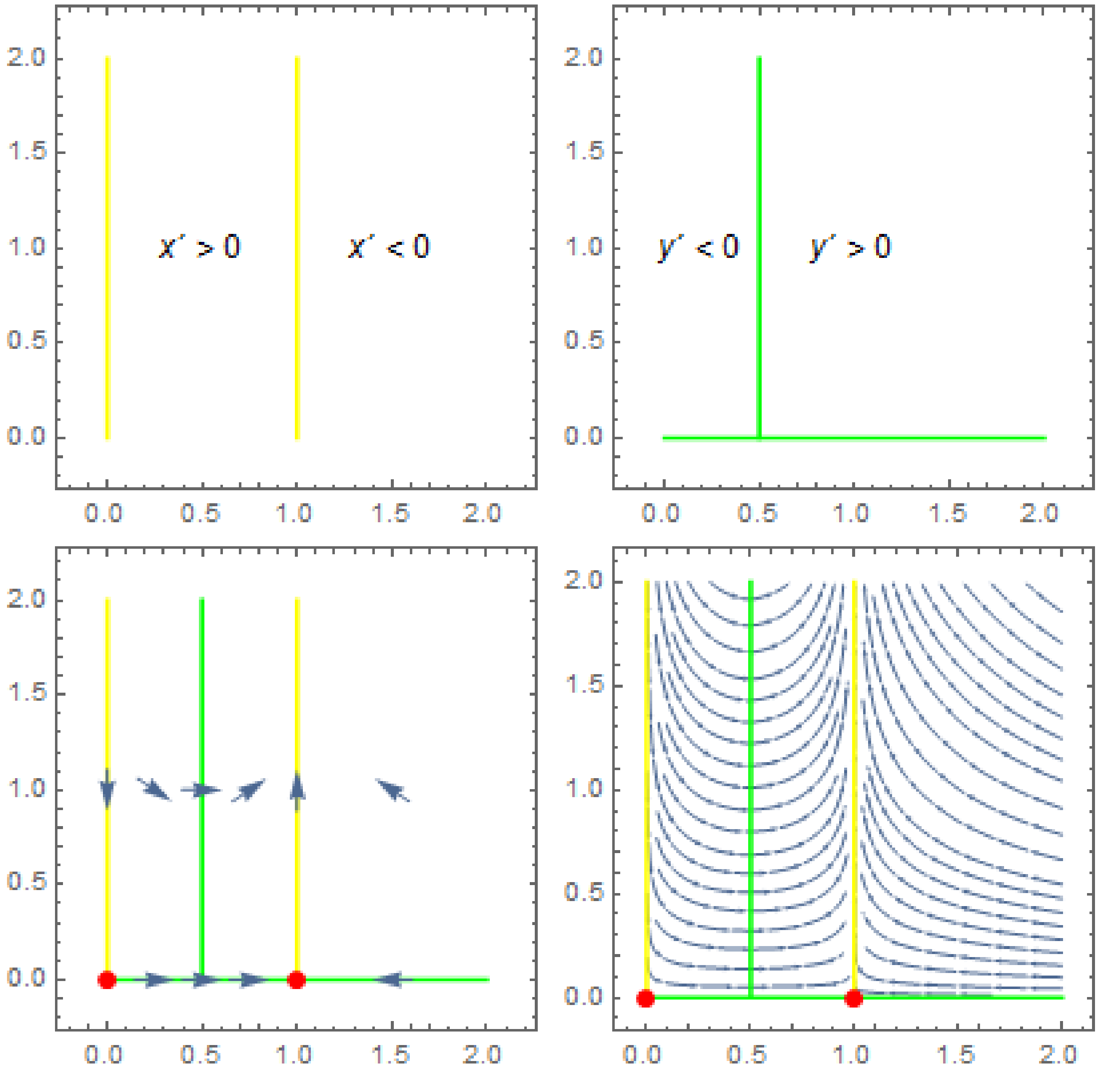
Ha a rendszer valamelyik egyensúlyi helyzetből indul, akkor örökké ott marad. Ha kezdetben $x = 0$, akkor a rendszer a $(0,3)$ ponthoz, ha kezdetben $y = 0$, akkor pedig a $(2,0)$ ponthoz konvergál. Minden más esetben a rendszer konvergál a stabil egyensúlyi helyzethez.



6.2. **a.** Az interakció az x faj számára közömbös, az y faj számára előnyös. Ezt a jelenséget kommenzalizmusnak, asztalközösségnek nevezzük. Példa: verebek a gólyák fészkében.

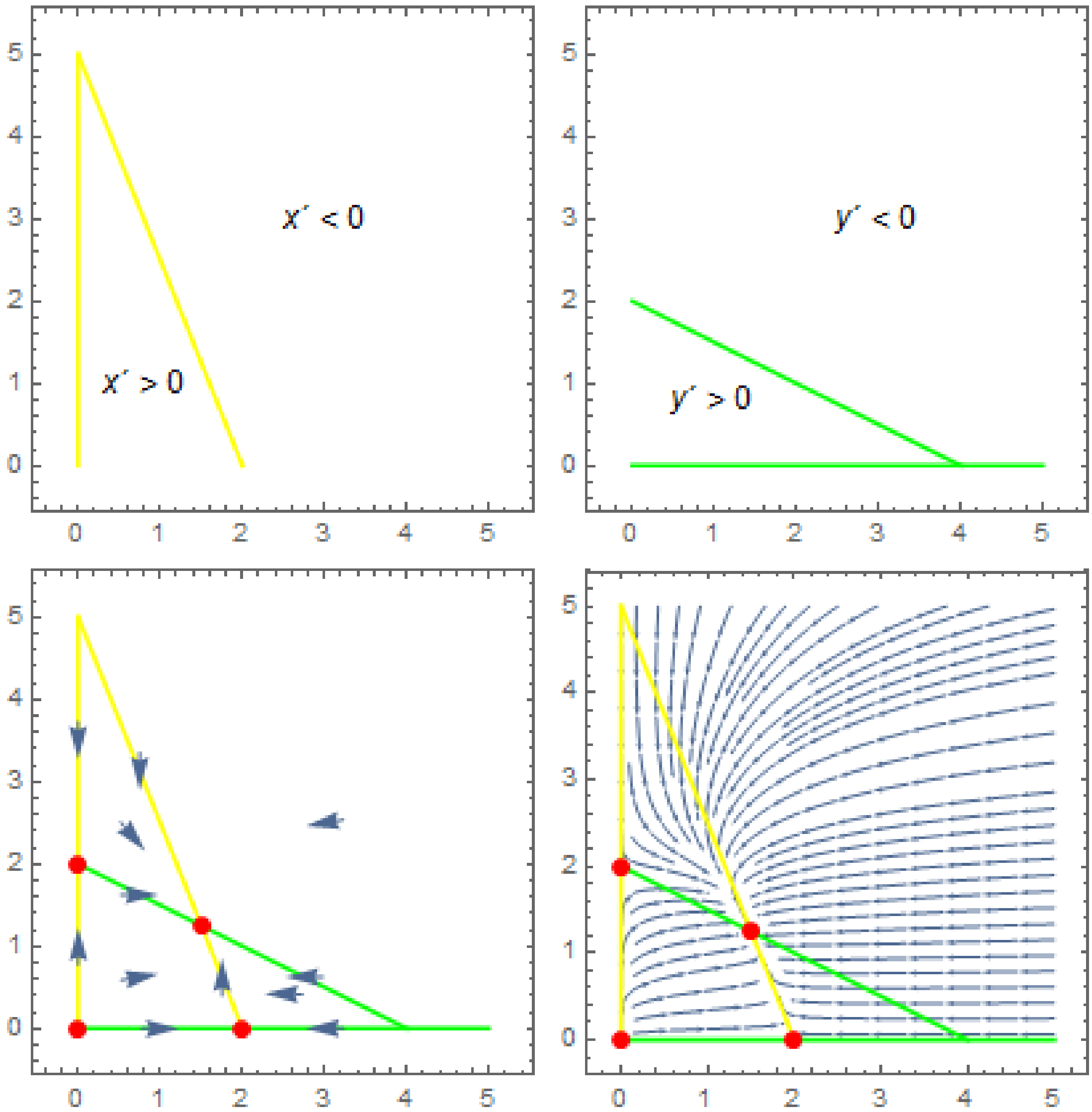
b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $x = 1$ (sárga); $y' = 0$, amiből $x = 1/2$ vagy $y = 0$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0, 0)$ és $(1, 0)$, mindkettő instabil.

Ha a rendszer valamelyik egyensúlyi helyzetből indul, akkor örökké ott marad. Ha kezdetben $x = 0$, akkor a rendszer konvergál a $(0, 0)$ ponthoz, ha kezdetben $y = 0$, akkor pedig az $(1, 0)$ ponthoz. Minden más esetben az x populáció mérete konvergál 1-hez, az y populáció mérete pedig elmegy a végtelenbe.



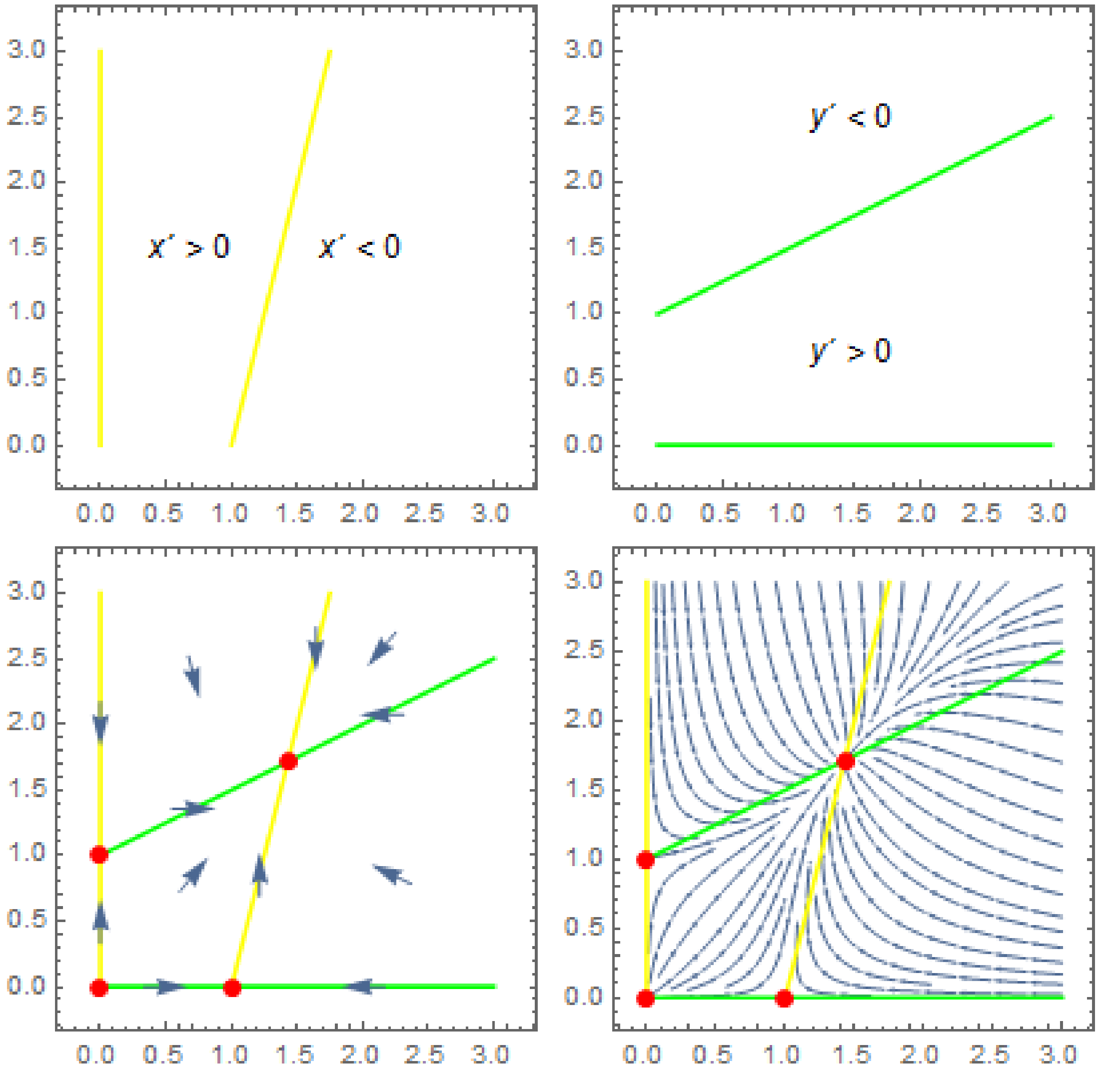
6.3. **a.** Az interakció mindkét faj számára hátrányos, ezt a jelenséget versengésnek nevezzük. Példa: azonos táplálékforrásért harcoló fajok.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $y = 5 - 2.5x$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = 2 - x/2$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ és $(1.5, 1.25)$, az első három instabil, az utolsó stabil.



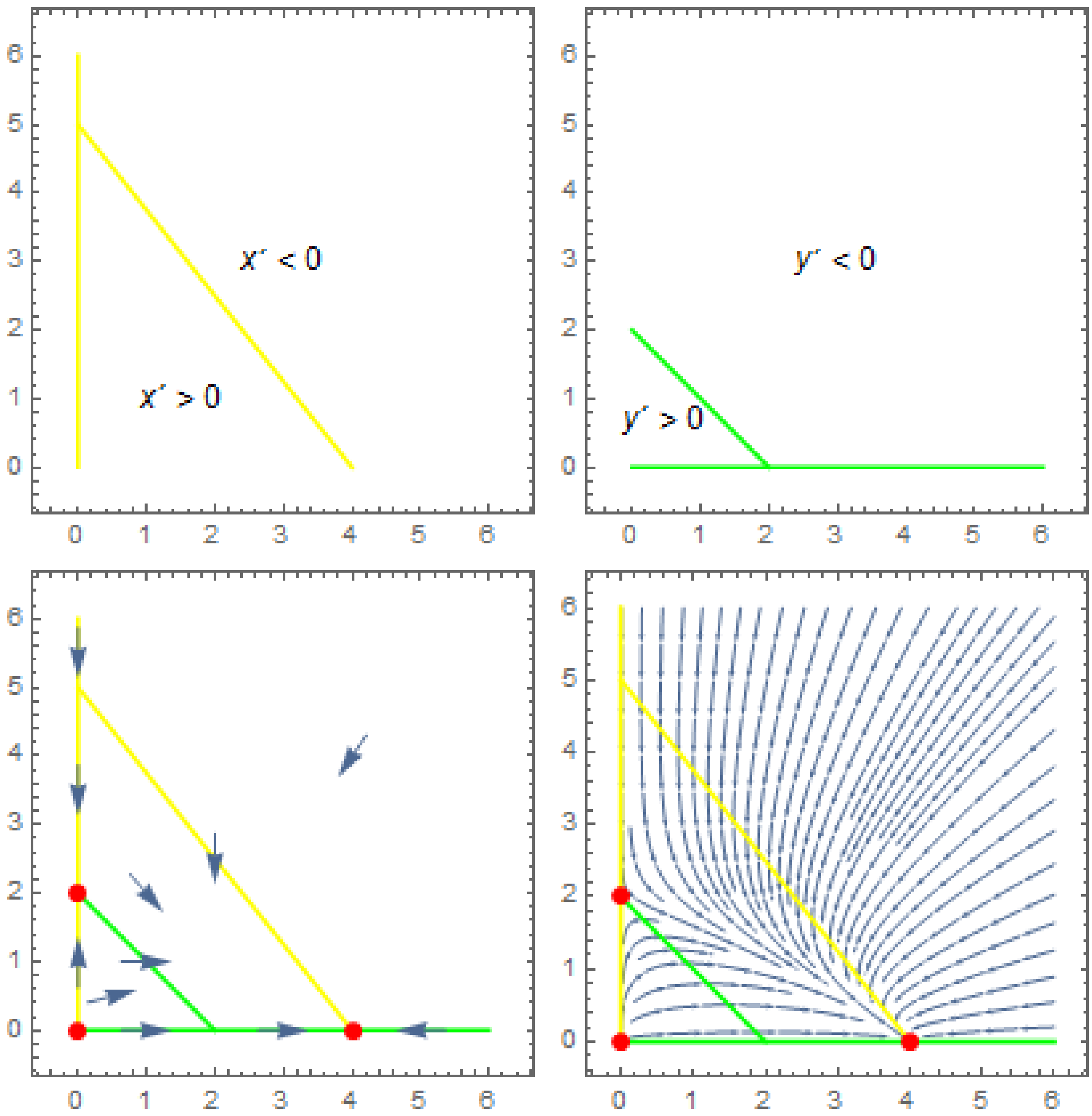
6.4. **a.** Az interakció mindkét faj számára közömbös. Ezt a jelenséget mutualizmusnak, speciális esetekben szimbiózisnak nevezzük. Példa: lucerna és nitrogénkötő baktériumok.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $y = 4x - 4$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = x/2 + 1$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(10/7, 12/7)$, az első három instabil, az utolsó stabil.



6.5. **a.** Az interakció mindkét faj számára hátrányos, ezt a jelenséget versengésnek nevezzük. Példa: azonos táplálékforrásért harcoló fajok.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $y = 5 - 1.25x$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = 2 - x$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(0,2)$, és $(4,1)$, az első kettő instabil, az utolsó stabil.



6.6. A feladat megoldása nem igényel plusz ötleteket ahhoz viszonyítva, amit eddig csináltunk, de szét kell majd választanunk több esetet, és emiatt elég hosszú lesz a levezetés. Kezdjük a nullklínákkal:

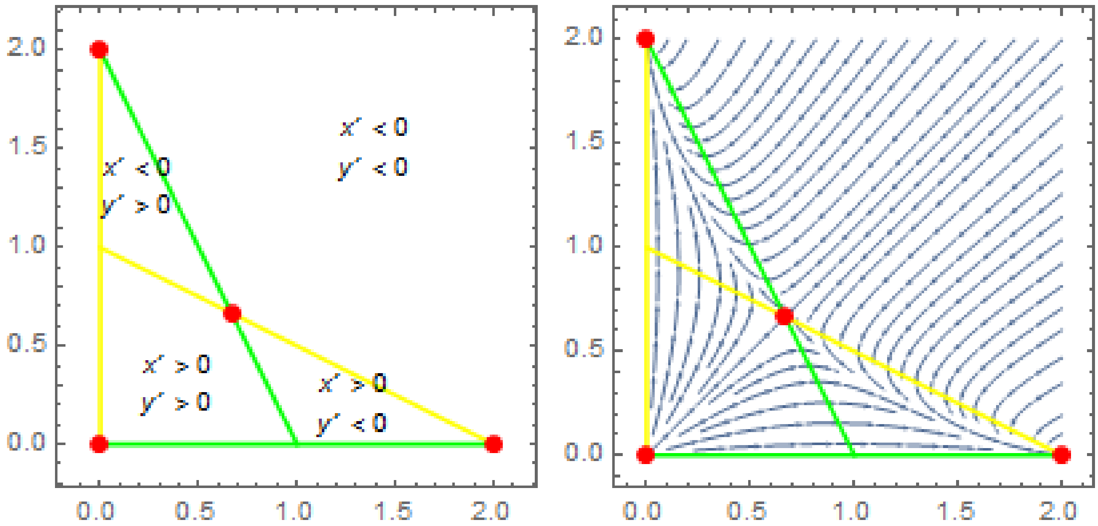
- $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $1 - ax - y = 0$.
- $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $1 - x - by = 0$.

Lássuk az egyensúlyi helyzeteket, amik a nullklínák metszéspontjai:

- $x = 0$ és $y = 0$ metszéspontja: $p_1 = (0, 0)$.
- $x = 0$ és $1 - x - by = 0$ metszéspontja: $p_2 = (0, 1/b)$.
- $1 - ax - y = 0$ és $y = 0$ metszéspontja: $p_3 = (1/a, 0)$.
- $1-ax-y = 0$ és $1-x-by = 0$ metszéspontja (csak az $ab \neq 1$ esetet vizsgáljuk):
$$p_4 = \left(\frac{1-b}{1-ab}, \frac{1-a}{1-ab}\right).$$

Az első három egyensúlyi helyzet mindig létezik és értelmezhető populációdinamikai szempontból. Látni fogjuk, hogy a problémát a negyedik egyensúlyi helyzet fogja majd okozni. Ebből a szempontból kell megkülönböztetnünk több esetet aszerint, hogy az a és b kisebbek vagy nagyobbak, mint 1.

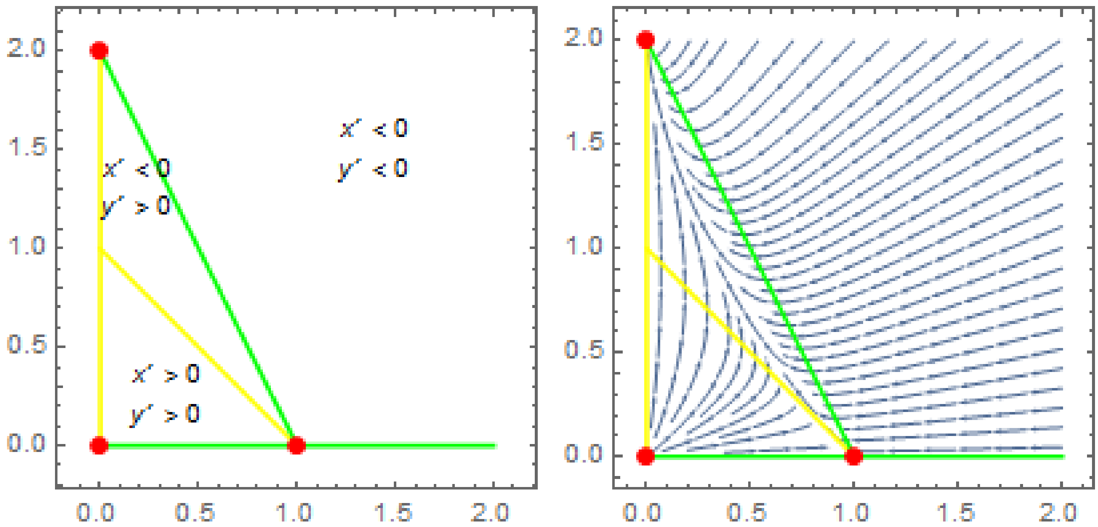
- $a < 1$ és $b < 1$: Ekkor a negyedik egyensúlyi helyzet mindkét koordinátája pozitív, tehát ez populációdinamikai szempontból értelmezhető. Vegyünk most egy olyan (x, y) próbapontot, mely ezen egyensúlyi helyzettől „északkeletre" található, tehát $x > (1 - b)/(1 - ab)$ és $y > (1 - a)/(1 - ab)$. Ekkor ezen pontban $x > 0$ és
$$1 - ax - y < 1 - a\frac{1-b}{1-ab} - \frac{1-a}{1-ab} = 0.$$
Ebből következik, hogy ebben a pontban $x' = k_1 x(1 - ax - y) < 0$, és hasonló módon megmutató, hogy $y' < 0$. További próbapontok segítségével elkészíthető az alábbi ábra. (Az ábrán a példa kedvéért $a = b = 0.5$.) Látható, hogy p_0 és p_4 instabil, míg p_2 és p_3 stabil egyensúlyi helyzet. Ez azt jelenti, hogy valamelyik populáció ki fog majd halni, de hogy melyik, az függ a kezdeti értékektől, tehát attól, hogy a $t = 0$ időpontban mekkorák a populációméretek.



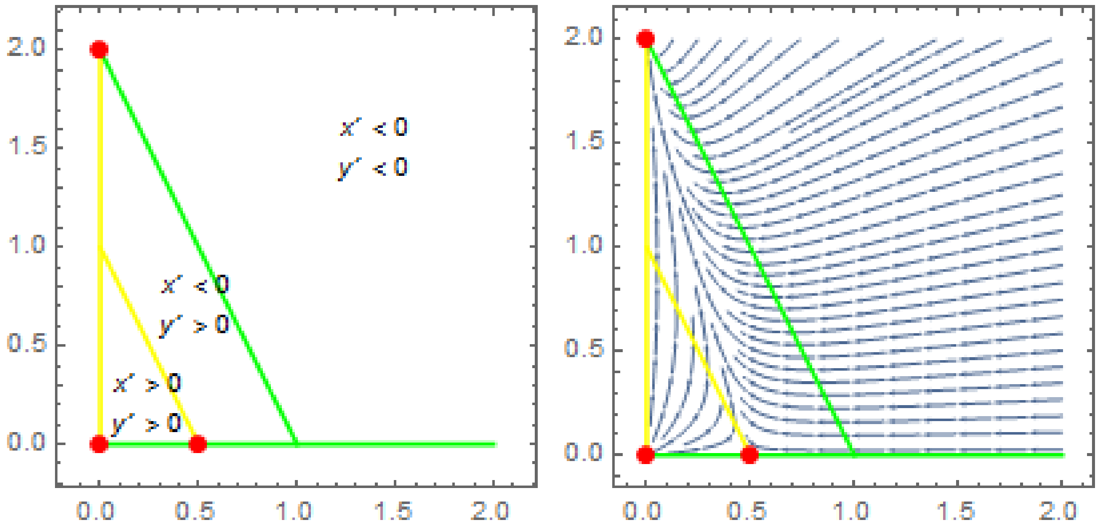
- $a = 1$ és $b < 1$: Az a paraméter azt szabályozza, hogy a sárga színű ferde nullklína hol metszi el az x tengelyt: a $p_3 = (1/a, 0)$ pontban. Ha az előző ábrához viszonyítva a elkezd nőni, akkor $1/a$ csökken, tehát a p_3 pont az origo felé mozog. Ezzel párhuzamosan a p_4 pont „lecsúszik” a sárga ferde nullklínán. Speciálisan $a = 1$ esetén ez a két egyensúlyi helyzet éppen összeolvad:

$$p_4 = \left(\frac{1-b}{1-ab}, \frac{1-a}{1-ab}\right) = \left(\frac{1-b}{1-b}, \frac{0}{1-b}\right) = (1,0) = (1/a, 0) = p_3.$$

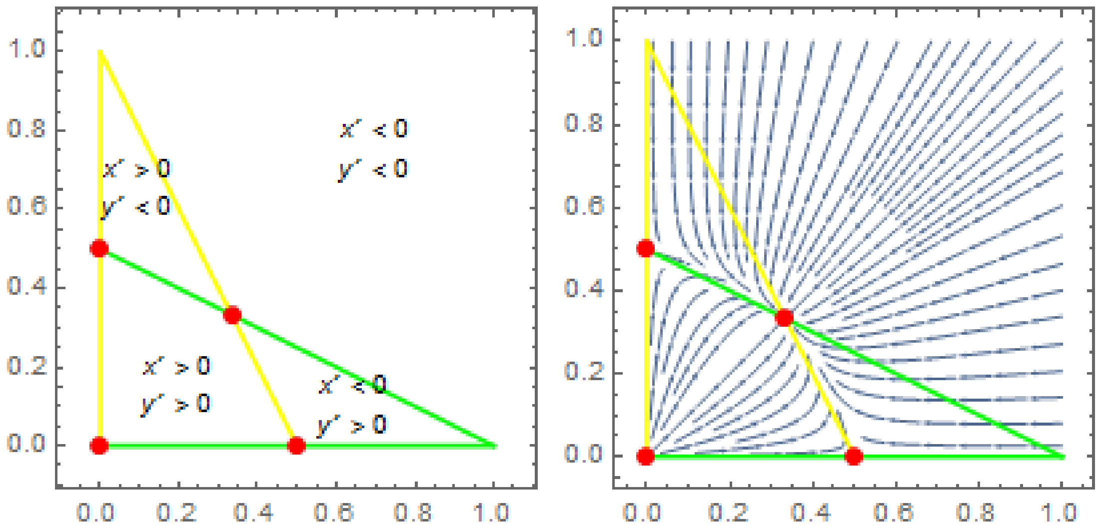
Tehát csak három egyensúlyi helyzet lesz, ezek közül $p_1 = (0,0)$ és $p_3 = (1,0)$ instabil, míg $p_2 = (0, 1/b)$ stabil. Ez azt jelenti, hogy az x populáció kihal.



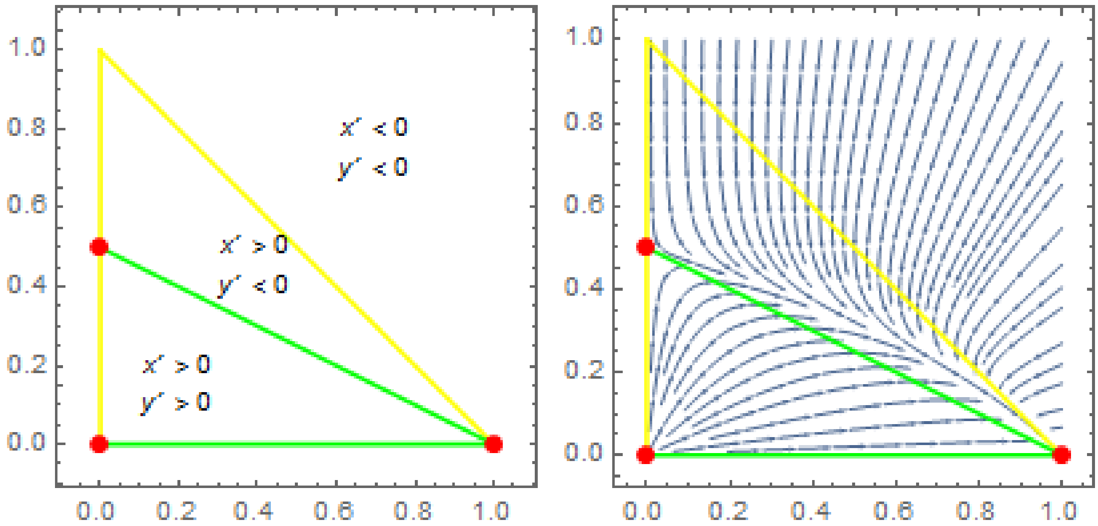
- $a > 1$ és $b < 1$: Ha az a értéket tovább növeljük, akkor a p_4 pont második koordinátája negatív lesz, tehát ez az egyensúlyi helyzet nem értelmezhető biológiai szempontból. Három egyensúlyi helyzet marad: $p_1 = (0,0)$ és $p_3 = (1/a, 0)$ instabil, $p_2 = (0, 1/b)$ stabil. Az x populáció ismét kihal.



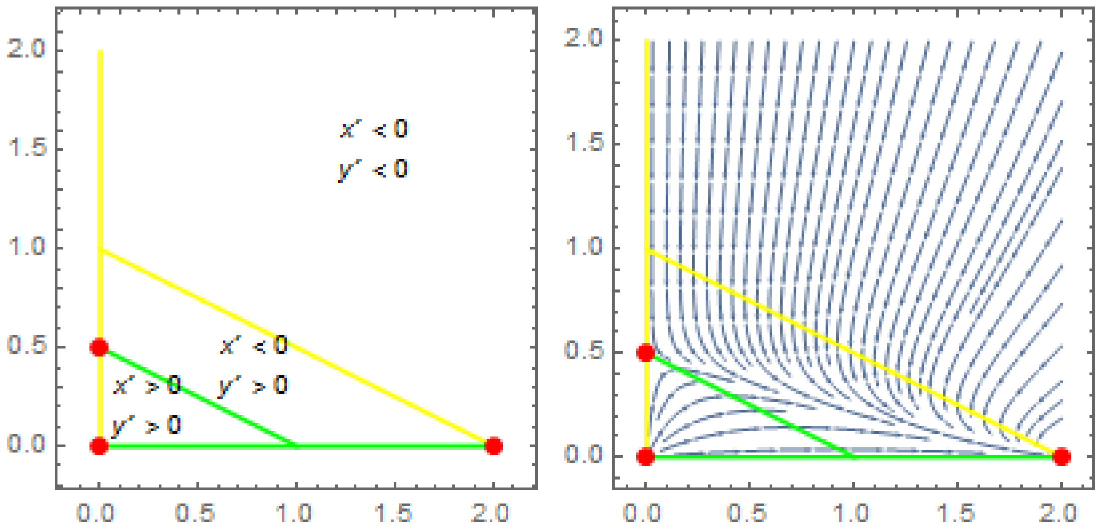
- $a > 1$ és $b > 1$: Ebben az esetben a legelső esethez hasonlóan megmutatható, hogy p_4 egy értelmes egyensúlyi helyzet. Az egyensúlyi helyzetek közül egyedül p_4 a stabil, a többi instabil. Tehát ebben az esetben megvalósul a két faj egymás mellett élése. (Az alábbi ábrán $a = b = 2$.)



- $a = 1$ és $b > 1$: Ha az előző esetből kiindulva elkezdjük az a értéket csükkenteni, akkor a $p_3 = (1/a, 0)$ egynsúlyi helyzet az x-tengely mentén elmozdul jobbra, míg a p_4 egyensúlyi helyzet lecsúszik a ferde nullklínák mentén. $a = 1$ esetén ez a két egyensúlyi helyzet összeolvad, tehát csak három egyensúlyi helyzetünk lesz. Ezek közül $p_3 = (1, 0)$ stabil, míg p_1 és p_2 instabil egyensúlyi helyzet. Tehát ebben ez esetben az y populáció hal ki.

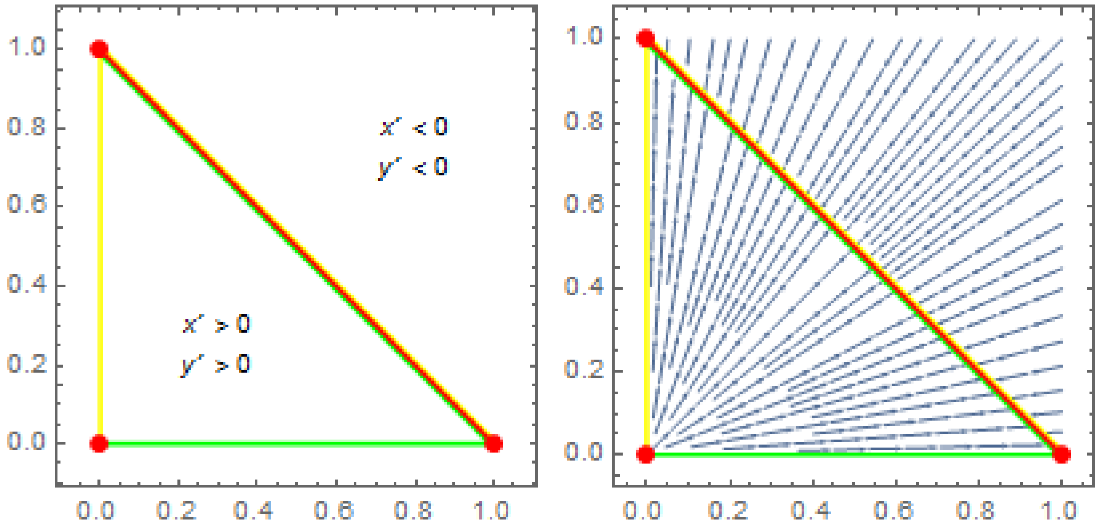


- $a < 1$ és $b < 1$: Ha az a értéket tovább csükkentjük, akkor a p_4 pont második koordinátája ismét negatív lesz, tehát ez az egyensúlyi helyzet megint nem értelmezhető biológiai szempontból. Három egyensúlyi helyzet lesz: $p_1 = (0, 0)$ és $p_2 = (0, 1/b)$ instabil, $p_3 = (1/a, 0)$ stabil. Az y populáció ismét kihal.



- $a < 1$ és $b = 1$: Ez ugyanaz, mint az $a = 1$ és $b < 1$ eset, csak a szereposztás felcserélésével.
- $a > 1$ és $b = 1$: Ez ugyanaz, mint az $a = 1$ és $b > 1$ eset, csak a szereposztás felcserélésével.
- $a = 1$ és $b = 1$: Messze ez a legérdekesebb eset. Ekkor a két ferde nullklína egyenlete azonos: $1 - x - y = 0$. Tehát a sárga és a zöld színű ferde nullklína egybeesik. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok metszéspont, és emiatt végtelen sok egyensúlyi helyzet lesz. Viszont ezek mindegyike instabil: ha kilökjük a rendszert az $1 - x - y = 0$ egyenesről, akkor a rendszer vissza fog majd térni az egyeneshez, viszont nem feltétlenül a kiinduló ponthoz. Az, hogy a rendszer

melyik ponthoz tér vissza, attól függ, hogy merre löktük ki.



7.1. Legyen: A = a kiválasztott hallgató felvette a „Sárkányok élettanát”, $P(A) = 60\%$, B = a kiválasztott hallgató felvette a „Micimackó anatómiáját”, $P(B) = 40\%$, $P(\text{mindkét kurzus}) = P(A \text{ és } B) = 24\%$

a. $P(A \text{ igen, de } B \text{ nem}) = 36\%$, $P(\text{nem } A \text{ és nem } B) = 24\%$

	B igen	B nem	össz.
A igen	24%	36%	60%
A nem	16%	24%	40%
össz.	40%	60%	100%

b. $P(A \mid B) = 0{,}6 = 60\%$, $P(A \mid \text{nem } B) = 0{,}6 = 60\%$

A és B független események: $P(A \mid B) = P(A)$.

7.2. **a.** $P(\text{szőke haj és kék szem}) = 15\%$, $P(\text{barna haj és barna szem}) = 30\%$

	fekete haj	barna haj	szőke haj	összesen
barna szem	25%	30%	5%	60%
kék szem	5%	20%	15%	40%
összesen	30%	50%	20%	100%

b. $P(\text{fekete haj} \mid \text{barna szem}) = 41{,}7\%$, $P(\text{fekete haj} \mid \text{kék szem}) = 12{,}5\%$, a barna szem elősegíti, a kék szem akadályozza a fekete haj megjelenését.

$P(\text{barna haj} \mid \text{barna szem}) = 50\%$, $P(\text{barna haj} \mid \text{kék szem}) = 50\%$, a barna haj megjelenése független a szem színétől.

$P(\text{szőke haj} \mid \text{barna szem}) = 8{,}3\%$, $P(\text{szőke haj} \mid \text{kék szem}) = 37{,}5\%$, a barna szem akadályozza, a kék szem elősegíti a szőke haj megjelenését.

A haj és a szem színe úgy általában nem független egymástól.

c. Függetlenség esetén:

	fekete haj	barna haj	szőke haj	összesen
barna szem	18%	30%	12%	60%
kék szem	12%	20%	8%	40%
összesen	30%	50%	20%	100%

7.3. **a.** A függetlenség miatt:

sárga maghéj aránya a piros virág között = $P($ sárga maghéj | piros virág $)=60\%$

zöld maghéj aránya a piros virág között = $P($ zöld maghéj | piros virág $)=40\%$

piros virág aránya a sárga maghéj között = $P($ piros virág | sárga maghéj $)=70\%$

fehér virág aránya a sárga maghéj között = $P($ fehér virág | sárga maghéj $)=30\%$

b.

	piros virág	fehér virág	össz.
sárga maghéj	42%	18%	60%
zöld maghéj	28%	12%	40%
össz.	70%	30%	100%

7.4. $R_\xi = \{1000, 2000, 3000, 5000\}$

k	1000	2000	3000	5000
$P(\xi = k)$	0,5	0,3	0,15	0,05

$E(\xi) = 1800$, $D(\xi) = 1030$, igazságos ár: 1800.

7.5. $R_\xi = \{1, 3, 7, 12\}$

k	1	3	7	12
$P(\xi = k)$	0,1	0,4	0,3	0,2

$E(\xi) = 5{,}8$, $D(\xi) = 3{,}7$.

8.1. $R_\xi = [-15, +5]$, $P(-10 \le \xi \le -2) = 0{,}4$, $E(\xi) = -5$, $D(\xi) = 5{,}77$,

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < -15, \\ (t+15)/20, & -15 \le t \le 5, \\ 1, & t > 5, \end{cases}$$

$q_\alpha = 20\alpha - 15$, $q_{25\%} = -10$, $q_{50\%} = -5$, $q_{75\%} = 0$.

8.2. $R_\xi = [0, 1]$, $P(0{,}5 \le \xi \le 1{,}5) \approx 0{,}65$, $E(\xi) = 3/5$, $D(\xi) \approx 0{,}26$,

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^{3/2}, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases}$$

$q_\alpha = \alpha^{2/3}$, $q_{80\%} \approx 0{,}86$.

8.3. $R_\xi = [0,2]$, $P(\xi > 1{,}5) \approx 0{,}44$, $P(-1 \le \xi \le 1) = 0{,}25$, $E(\xi) = 4/3$, $D(\xi) \approx 0{,}47$,

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^2/4, & 0 \le t \le 2, \\ 1, & t > 2, \end{cases}$$

$q_\alpha = 2\sqrt{\alpha}$, $q_{40\%} \approx 1{,}265$.

8.4. **a.** f_3; **b.** f_4; **c.** f_2. Az f_1 sűrűségfüggvény paraméterei: $\mu = -3$, $\sigma = 0{,}5$.

8.5. **a.** 66%; 2%; $[70{,}6, 129{,}4]$.

8.6. 41%; 9%; $[5{,}77, 8{,}23]$.

8.7. 15,6%; 66,8%; $[87, 163]$.

10.1. **a.** $E(\text{SYS1}) \approx 160.1$, $D(\text{SYS1}) \approx 6.4$, $\text{SE} = 0.95$. A becslés átlagos hibája 0,95. A hisztogramm alapján úgy tűnik, hogy a minta nem normális eloszlásból származik.

b. $H_0 : E(\text{SYS1}) = 165$, egymintás t-próba: p-érték=0.00, a nullhipotézist elvetjük. Konfidencia intervallum: $[158.14, 161.99]$.

c. Nincs látványos eltérés.

d. $H_0 : D(\text{SYS1}|\text{kiserleti1}) = D(\text{SYS1}|\text{kiserleti2})$. F-próba: p-érték=0.9, a nullhipotézist elfogadjuk, nincs szignifikáns eltérés a szórások között.
$H_0 : E(\text{SYS1}|\text{kiserleti1}) = E(\text{SYS1}|\text{kiserleti2})$, kétmintás t-próba: p-érték=0.93, a nullhipotézist elfogadjuk, nincs szignifikáns különbség a várható értékek között. Konfidencia intervallum: $[-3.8, 4.2]$.

e. A kiserleti1 betegcsoportban: $E(\text{SYS1}) = E(\text{SYS2})$, páros t-próba, p-érték=0.003, a nullhipotézist elvetjük, szignifikáns különség van a kezelés előtti és utáni átlagos vérnyomás között. Konfidencia intervallum a vérnyomáscsökkenés átlagos értékére: $[3.4, 14.1]$.

f. A kiserleti2 betegcsoportban: $E(\text{SYS1}) = E(\text{SYS2})$, páros t-próba, p-érték=0.25, a nullhipotézist elfogajuk. Nincs szignifikáns különség a kezelés előtti és utáni átlagos vérnyomás között, nincs statisztikai bizonyíték arra, hogy ez a készítmény hat. Konfidencia intervallum a vérnyomáscsökkenés átlagos értékére: $[-7.5, 2.2]$.

10.2. **a.** Legalább 2, de talán 3 módusz is van. Ennek az az oka, hogy az adatsor több különböző fajról tartalmaz adatokat. Érdemesebb az elemzéseket nem a teljes adatsoron, hanem inkább fajonként végezni.

b.

	setosa	versicolor	virginica
mintaátlag	0.246	1.326	2.026
szórás	0.105	0.198	0.275

Csoportonkénti várható érték: fajonkénti populációátlag; csoportonkénti elméleti szórás: fajonkénti szórás a teljes populációban.

c. A virginica fajnál: $H_0 : E(\text{sziromszel}) = 2$, egymintás t-próba, p-érték=0.506. Elfogadjuk a nullhipotézist, a populációátlag nem tér el szignifikáns módon 2-től. Konfidencia intervallum: $[1.95, 2.10]$.

d. A virginica fajnál: $H_0 : E(\text{cseszehossz}) = E(\text{sziromhossz})$, páros t-próba, p-érték=0. A nullhipotézist elvetjük, szignifikáns eltérés van a két várható érték között. (A szórásokat nem kell tesztelni!) Konfidencia intervallum: $[0.95, 1.13]$.

e. $H_0 : D(\text{cseszeszel}|\text{versicolor}) = D(\text{cseszeszel}|\text{virginica})$, F-próba, p-érték=0.849, a nullhipotézist elfogadjuk. A szórások között nincs szignifikáns különbség.
$H_0 : E(\text{cseszeszel}|\text{versicolor}) = E(\text{cseszeszel}|\text{virginica})$, kétmintás t-próba, p-érték=0.002, a nullhipotézist elvetjük. Szignifikáns eltérés van a fajonkénti átlagok között. Konfidencia intervallum: $[-0.31, -0.01]$.

10.3. **a.** $E(\text{MPG}) \approx 33.78$, $D(\text{MPG}) \approx 10$, SE $= 1.1$. Az várható értékre adott becslés átlagos hibája 1.1. A hisztogramm alapján az eloszlás hasonlít a normálishoz, de kicsit dőlt.

b. $H_0 : E(\text{MPG}) = 35$, egymintás t-próba, p-érték=0.27, a nullhipotézist elfogadjuk. Konfidencia intervallum: $[31.9, 35.6]$.

c.

	Europe	Japan	U.S.
mintaátlag	23.13	36.87	33.36
szórás	9.7	7.1	10.9

$H_0 : D(\text{MPG}|\text{U.S.}) = D(\text{MPG}|\text{Japan})$, F-próba, p-érték=0.01, a nullhipotézist elvetjük. A szórások között szignifikáns különbség van.
$H_0 : E(\text{MPG}|\text{U.S.}) = E(\text{MPG}|\text{Japan})$, Welch-próba, p-érték=0.12, a nullhipotézist elfogadjuk. Nincs szignifikáns eltérés. Konfidencia intervallum: $[-0.2, 7.2]$.

11.1. **a.** $H_0 : D(\text{SYS1}|\text{kontroll}) = D(\text{SYS1}|\text{kiserleti1}) = D(\text{SYS1}|\text{kiserleti2})$, Levene-test, p-érték=0.793, a nullhipotézist elfogadjuk, nincs szignifikáns különbség.
$H_0 : E(\text{SYS1}|\text{kontroll}) = E(\text{SYS1}|\text{kiserleti1}) = E(\text{SYS1}|\text{kiserleti2})$, ANOVA, p-érték=0.907, a nullhipotézist elfogadjuk, nincs szignifikáns különbség.
A három csoport homogén a SYS1 változó szempontjából.

b. $H_0 : D(\text{SYS2}|\text{kontroll}) = D(\text{SYS2}|\text{kiserleti1}) = D(\text{SYS2}|\text{kiserleti2})$, Levene-test, p-érték=0.352, a nullhipotézist elfogadjuk.
$H_0 : E(\text{SYS2}|\text{kontroll}) = E(\text{SYS2}|\text{kiserleti1}) = E(\text{SYS2}|\text{kiserleti2})$, ANOVA, p-érték=0.000, a nullhipotézist elvetjük.
A három csoport nem homogén a SYS2 változó szempontjából, eltérő az átlagos vérnyomás a három gyógyszer hatására.

c. $\text{corr}_n(\text{SYS1,SYS2}) = 0.143$, H_0 : a két változó független, korrelációs teszt, p-érték=0.61, a nullhipotézist elvetjük. Nincs statisztikailag kimutatható kapcsolat. 95% megbízhatóságú konfidencia intervallum: $[-0.398, 0.611]$

d. $\hat{a} = 0.12$, $\hat{b} = 130.55$, regressziós modell: $\text{SYS2} = 0.12\text{SYS1} + 130.55 + \text{hibatag}$, R-squared=0.020, pocsék az illeszkedés.

e. MPG $\approx$ 2374/HP+9.73. Ez egy szabályos regresszió: MPG = 2374/HP+9.73+ε. Jó az illeszkedés: $R^2 = 0.84$.

f. MPG $\approx \exp(-0.0046\text{HP} + 4.01)$. Nem szabályos regresszió: MPG $= \exp(-0.0046\text{HP} + 4.01)\exp(\varepsilon)$.

11.2. **a.** $H_0 : D(\text{HP}|\text{Europe}) = D(\text{HP}|\text{Japan}) = D(\text{HP}|\text{U.S.})$, Levene-test, p-érték=0.000, a nullhipotézist elvetjük.
$H_0 : E(\text{HP}|\text{Europe}) = E(\text{HP}|\text{Japan}) = E(\text{HP}|\text{U.S.})$, Welch-féle ANOVA, p-érték=0.005, a nullhipotézist elvetjük.

b. Például: HP és SP: pozitív irányú kapcsolat, HP és MPG: negatív irányú kapcsolat.

c. $\text{corr}_n(\text{HP,SP}) = 0.97$, korrelációs teszt, p-érték=0.000, elvetjük a függetlenséget, konfidenciai intervallum: $[0.95, 0.98]$.
Lineáris regresszió: SP = 0.23HP + 84.45 + hibatag, R-squared=0.93, nagyon jó az illeszkedés. Ha HP=80, akkor SP $\approx 0.23 \cdot 80 + 84.45 = 102.85$.

d. $\text{corr}_n(\text{HP,VOL}) = 0.076$, korrelációs teszt, p-érték=0.49, elfogadjuk a függetlenséget, konfidenciai intervallum: $[-0.14, 0.29]$.
Lineáris regresszió: VOL = 0.03HP + 95.31 + hibatag, R-squared=0.006, nagyon rossz az illeszkedés. Ha HP=80, akkor VOL $\approx 0.03 \cdot 80 + 95.31 = 97.71$, de ez a becslés a rossz illeszkedés miatt nagyon pontatlan is lehet.

12.1. **a.** $P(\text{férfi}) \approx 58.4\%$. t-próba: p-érték=0, elvetjük, konf. int.: $[0.55, 0.61]$.

b. $P(\text{dohányzik}|\text{férfi}) \approx 21\%$, $P(\text{dohányzik}|\text{nő}) \approx 17\%$.
Welch-próba: p-érték=0.12, elfogadjuk, nincs szignifikáns különbség az arányok között.
Konf. int.: $[-0.087, 0.011] = [8.7\%, -1.1\%]$.

c. $P(\text{Cats} = 1) \approx 18\%$, $P(\text{Dogs} = 1) \approx 22.4\%$.
Páros t-próba: p-érték=0.02, elvetjük. Konf. int.: $[-0.081, -0.007] = [-8.1\%, -0.7\%]$.

d. Welch-féle ANOVA: p-érték=0.1. Elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés az arányok között.

e.

CatsDogs	both	cats	dogs	none	összes
Gyakoriság	24	156	200	620	1000
Becslés	2.4%	15.6%	20.0%	62.0%	100%
Hipotetikus arány	5%	20%	20%	55%	100%
Várt gyakoriság	50	200	200	550	1000
Statisztika	13.52	9.68	0	8.91	32.11

χ^2-próba: p-érték=0, elvetjük. Az első csoport arányát rontottuk el a legjobban.