

## 1. Véletlen módszer

Egy egyszerű esetet vizsgálunk: Adott  $G$  egyszerű, páros gráf,  $|A| = |F| = n$ . Van-e  $G$ -ben teljes párosítás? (Az egyszerűség és a két színosztály azonos mérete természetes módon, az általánosság megszorítása nélkül feltehető.)

Módszerünk általános gráfok vizsgálatát is megengedi, de a technikai nehézségekbe nem mélyedünk el.

**Definíció.** Legyen  $G$  egy  $A \cup F$  színosztályokkal rendelkező egyszerű páros gráf.  $G$  páros szomszédsági mátrixa  $B_G$ , az a mátrix, amely sorai  $A$ -val, oszlopai  $F$ -fel vannak azonosítva, továbbá egy  $a \in A$ -nak megfelelő sor és egy  $f \in F$ -nek megfelelő oszlop találkozásában 1 szerepl, ha szomszédosak, 0 különben.

**Megjegyzés.**  $G$  (teljes)  $A_G$  szomszédsági mátrixában a sorok és oszlopok is a  $V(G)$  csúcshalmazzal azonosított. Ha a sorok/oszlopok felsorolásában  $A$  elemei megelőzik  $F$  elemeit, akkor az  $A$ - $A$ , illetve  $F$ - $F$  élek hiánya miatt a mátrix bal felső és jobb alsó sarkában 0-k egy nagy blokkja található, míg a jobb felső sarokban  $B_G$  szerepel, a bal alsó sarokban pedig  $B_G^T$ , a páros szomszédsági mátrix transzponáltja.

$$\begin{pmatrix} 0 & B_G \\ B_G^T & 0 \end{pmatrix}$$

Azaz a páros szomszédsági mátrix csak a szokásos szomszédsági mátrix tömörítése.

A mátrix leírja a  $G$  páros gráfot. A  $G$  páros gráfra vonatkozó fogalmak átfogalmazhatóak a mátrixok nyelvére. Az alábbiakban egy „szótárat” ismertetünk.

$$B_G \text{ pozíciói} \equiv A \times F$$

$$B_G \text{ 1-esei} \equiv E(G)$$

$$|A| = |F| \equiv B_G \text{ négyzetes mátrix}$$

$$M \text{ párosítás} \equiv \text{minden sorban és oszlopban max egy db 1-es van}$$

$$M \text{ teljes párosítás} \equiv \text{minden sorban és oszlopban pontosan egy db 1-es van}$$

$$\equiv a \text{ megfelelő 1-esek egy kifejtési tag tényezői}$$

A fentiek alapján, ha  $G$ -ben van teljes párosítás, akkor  $\det B_G$  kifejtésében létezik egy nem 0 tag. Ezt az egyszerű észrevételt a következő állítás foglalja össze.

**1. Következmény.**  $\det B_G \neq 0$  esetén  $\det B_G$  kifejtésében létezik nem 0 tag, ami ekvivalens azzal, hogy létezik teljes párosítás  $G$ -ben.

A fordított irány nem igaz. Ehhez vegyünk egyolyan páros gráfot, amelyben két alsó pontnak ugyanaz a szomszédsága és ezzel együtt van teljes párosítás a gráfban (például egy teljes páros gráf,  $K_{n,n}$  megfelel). Ekkor  $B_G$ -ben lesz két azonos sor, azaz a determináns értéke 0.

**Definíció.** Az  $M$  *permanense*

$$\text{per } M_{n \times n} = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n M_{i\pi(i)}$$

**Észrevétel.** (i)  $\text{per } B_G \neq 0$  esetén  $G$ -ben létezik teljes párosítás.

(ii)  $\text{per } B_G$  a teljes párosítások száma  $G$ -ben.

Sajnos ez az észrevétel nem segít algoritmikus problémánk megoldásában:  $\text{per } B_G$  kiszámítása  $\#P$ -nehéz.

**Definíció.**  $X_G \in \mathbb{R}[x_e : e \in E(G)]^{n \times n} : \forall e \in E(G)$  esetén  $B_G$   $e$ -nek megfelelő 1-esét  $x_e$ -vel helyettesítjük.

**2. Tétel.**  $\det(X_G)$  nem az azonosan 0 polinom akkor és csak akkor, ha létezik  $G$ -ben teljes párosítás.

**Észrevétel.** (i)  $G$ -beli teljes párosítások száma megegyezik a  $\det(X_G)$ -ben szereplő különböző monomok számával.

(ii)  $\det(X_G)$ -nek túl hosszú lehet a standard leírása, de hatékonyan kiértékelhető, ha  $x_e = \alpha_e$ , ahol  $\alpha_e \in \mathbb{R}$ , (lásd numerikus analízis vagy algebra előadás).

Az előző észrevételen alapul az alábbi algoritmus.

**Véletlen algoritmus.**

**Véletlen helyettesítés:** Minden  $e$  élre vegyünk egy  $r_e \in \{1, \dots, N\}$ -t, ahol  $r_e$  uniform eloszlású valószínűségi változó.

**DET számolás:** Számítsuk ki  $\det(X_G)|_{x_e=r_e}$ -t.

**Kiértékelés:**

Ha ez nem 0, akkor az output legyen „Létezik teljes párosítás”.

Ha ez 0, akkor az output legyen „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”.

## 1.1. Az algoritmus analízise

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

- „Létezik teljes párosítás”: biztosan jó a válasz.
- „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”:
  - ha  $\det(X_G)$  az azonosan 0 polinom, akkor jó a válasz;
  - ha  $\det(X_G)$  nem az azonosan 0 polinom, akkor szerencsétlen  $r_e$ -ket választottunk, épp  $\det(X_G)$  gyökeit: az algoritmus téved.

Célunk, hogy a hibázás lehetőségét minél kisebbé tegyük. Érezhető, hogy minél nagyobb az  $N$ , annál kisebb a hibázás valószínűsége. Az alábbi lemmára van szükségünk, hogy ezt az érzésünket matematikailag is pontosá tegyük.

**3. Tétel (Schwartz-lemma).** *Legyen  $p(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_k]$  egy nem azonos 0 polinom, és legyenek  $r_i \in \{1, \dots, N\}$ -k uniform eloszlású független valószínűségi változók, ( $1 \leq i \leq k$ ). Ekkor*

$$\mathbb{P}(p(r_1, \dots, r_k) = 0) \leq \frac{\deg p}{N}$$

**Bizonyítás.**  $k$ -ra vonatkozó teljes inducióval bizonyítunk.

$k = 1$  esetén  $p \in \mathbb{R}[x]$ . Ekkor  $|\{r \in \mathbb{R} : p(r) = 0\}| \leq \deg p$ , így annak a valószínűsége, hogy egy adott  $r \in \{1, \dots, N\}$  épp gyöke a  $p$ -nek felülről becsülhető  $\frac{\deg p}{N}$ -nel ( $r$  uniform eloszlású).

Tegyük fel, hogy  $k-1$  határozatlan esetén teljesül az állítás. Írjuk fel a  $k$ -változós  $p$  polinomot a következő alakban:

$$p(x_1, \dots, x_k) = p_\alpha(x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot x_k^\alpha + p_{\alpha-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot x_k^{\alpha-1} + \dots + p_0(x_1, \dots, x_{k-1}),$$

ahol  $p_\alpha(x_1, \dots, x_{k-1})$  egy nem azonosan 0 polinom. A felírásból következik, hogy  $\deg p \geq \deg p_\alpha + \alpha$ .

Legyen  $R_k = \{(r_1, \dots, r_k) : p(r_1, \dots, r_k) = 0\}$ ,  $R_{k-1} = \{(r_1, \dots, r_k) : p_\alpha(r_1, \dots, r_{k-1}) = 0\}$  és  $Q = \{(r_1, \dots, r_k) : (r_1, \dots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, \text{ de } (r_1, \dots, r_k) \in R_k\}$ . Könnyen látható, hogy  $R_k \subseteq R_{k-1} \cup Q$ . Az indukciós feltevésből  $R_{k-1}$  valószínűsége becsülhető. Az egy határozatlanú polinomok esete alapján  $Q$  valószínűsége becsülhető. Összegezve kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(R_k) \leq \mathbb{P}(R_{k-1}) + \mathbb{P}(Q) \leq \frac{\deg p_\alpha}{N} + \frac{\alpha}{N} \leq \frac{\deg p}{N}.$$

Ezzel beláttuk a tétel állítását. ■

A lemmát alkalmazva a véletlen algoritmusra ( $p = \det(X_G)$ ,  $\deg p = n(= |A| = |F|)$ ) kapjuk, hogy az  $N = 2n$  választással élve a hibázás valószínűsége legfeljebb  $\frac{1}{2}$ . A hibázás valószínűsége tovább csökkenthető  $N$  értékének növelésével, vagy a fenti paraméterválasztáson alapuló változat többszöri, független ismétlésével.

## 2. Poliéderes/lineáris programozási módszer +

A következő párosítási problémát vizsgáljuk: Legyen  $G$  páros gráf,  $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Keressük a  $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$  maximumát, ahol  $M \subset E(G)$  a  $G$  párosításain fut keresztül.

Az  $M \subseteq E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$  párosításhoz tartozó karakterisztikus függvény  $\underline{\chi}_M = (v_i) \in \mathbb{R}^m$ , ahol  $v_i = 1$ , ha  $e_i \in M$ , különben 0. A karakterisztikus vektor komponensei a gráf éleivel vannak azonosítva.  $m = |E(G)|$  miatt  $\mathbb{R}^{E(G)}$  és  $\mathbb{R}^m$  azonosítható. Ezt használjuk:  $v_i$  a karakterisztikus vektor  $i$ -edik komponense, de egyben az  $e_i \in E(G)$  élnek megfelelő komponens is.

**Észrevétel.**  $c(M) = \langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle$ , ahol  $\underline{c} \in \mathbb{R}^{E(G)}$ . Így a feladat:

$$\begin{aligned} \max\{\langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle : M \text{ párosítás}\} &= \max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in \{\underline{\chi}_M : M \text{ párosítás}\}\} \\ &= \max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in \text{conv}\{\underline{\chi}_M : M \text{ párosítás}\}\} \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésben szereplő geometriai fogalmakat itt is ismertetjük.

**Definíció.** Legyen  $P \subseteq \mathbb{R}^m$  ponthalmaz. Ekkor  $P$  konvex burka,

$$\text{conv}P = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{p}_i : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, \underline{p}_i \in P \right\}$$

a legszűkebb konvex halmaz, amely  $P$ -t tartalmazza.

A konvex burokból összegyűjtött vektorokat a  $P$  ponthalmaz elemei konvex kombinációinak nevezzük.

**Jelölés.** A  $\text{conv}\{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}$  halmazt jelöljük  $MP(G)$ -vel.

$MP(G)$  tehát a  $\{\chi_M : M \text{ párosítás}\}$  halmazt bővíti ki a konvex kombinációkkal. Általában a lehetséges megoldások halmazának bővítése kihat a maximalizálási feladatra is. Ebben az esetben ez nem így van.  $MP(G)$  konvex, korlátos, zárt halmaz. Egy lineáris függvény  $MP(G)$ -beli optimumát egy  $\underline{\chi}_M$  pontban veszi fel, hiszen

$$\langle \underline{c}, \sum \lambda_i \underline{p}_i \rangle = \sum \lambda_i \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle \leq \max \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle.$$

Ezzel az észrevételünket igazoltuk.

A  $\max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$  optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat. Ennek simplex módszerrel történő megoldásához szükséges  $MP(G)$  lineáris egyenlőtlenségekkel való leírása. Az alábbiakban néhány olyan egyenlőtlenséget gyűjtünk össze, amelyek  $\{\chi_M : M\text{párosítás}\}$  elemeire (így  $MP(G)$  pontjaira is) teljesülnek.

**Definíció.** Tekintsük  $\underline{x} = (x_e : e \in E(G)) \in \mathbb{R}^{E(G)}$  vektort.

Legyen  $\widehat{MP}(G) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{E(G)} : x_e \geq 0 \forall e \in E(G), \text{ és } \sum_{e:ve} x_e \leq 1 \forall v \in V(G)\}$

**Megjegyzés.** A definiált két politóp között egy irányú kapcsolat van:

-  $MP(G) \subseteq \widehat{MP}(G)$ .

- Általában a tartalmazás valódi. Erre példa a  $G = C_{2k+1}$  gráf, ugyanis például  $\underline{x}$  minden koordinátáját  $\frac{1}{2}$ -nek véve, a kapott vektor eleme  $\widehat{MP}(G)$ -nek, viszont nem eleme  $MP(G)$ -nek ( $\sum_{e \in E(G)} x_e = 2,2$  hipersík elvágja ezt a vektort  $MP(G)$ -től).

Célunk belátni, hogy ha  $G$  páros, akkor  $MP(G) = \widehat{MP}(G)$ . Ehhez elég megmutatni, hogy  $\widehat{MP}(G)$  csúcsai egészek. Ugyanis  $\widehat{MP}(G)$  egész koordinátájú pontjai pontosan  $\{\chi_M : M\text{párosítás}\}$  elemei.  $\widehat{MP}(G)$  viszont csúcsai konvex burka, így a másik irányú tartalmazás is adódik.  $\widehat{MP}(G)$  minden csúcsát megkapjuk úgy, hogy a politópot leíró egyenlőtlenségek közül kiválasztunk néhányat, amelyek egyenlőségjellel egy egyértelműen megoldható rendszert alkotnak. Az egyértelmű megoldás a tetszőlegesen kiválasztott csúcs. Az egyértelmű megoldás Cramer-szabállyal is felírható. Ekkor a koordináták két determináns hányadosaként adódnak. A determinánsokban egészek vannak, a nevező értéke pedig nem-nulla. A hányados biztos egész lesz, ha a nevezőben szereplő mátrix determinánsa  $\pm 1$ . Könnyű látni, hogy bárhogy is döntünk az egyértelműen megoldható egyenletrendszer mátrixa a gráf pont-él-illeszkedési mátrixának részmatrixa lesz. Így célunkat elérjük, ha belátjuk a következő lemmát.

**4. Lemma.** Legyen  $B_G$  egy  $G$  páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor  $B_G$  minden négyzetes  $R$  részmátrixának determinánsa a  $\{-1, 0, 1\}$  egy eleme.

**Bizonyítás.** Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű részmátrix.  $k$ -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.  $k = 1$  esetén nyilvánvaló az állítás.

$B_G$  sorai (és így  $R$  sorai is) az  $A$  és  $F$  kategóriák közt oszlanak meg.

**1. eset:**  $R$  valamelyik oszlopában nulla avgy egy 1-es szerepel. Ekkor ezen oszlop szerint fejtsük ki a determinánst. Vagy biztos 0-t kapunk ( $R$ -ben csupa 0 oszlop szerepel), vagy az indukciós lépés alapján leszünk készen.

**2. eset:**  $R$  minden oszlopában két 1-es van, ekkor szükségszerűen egy  $A$ -beli és egy  $F$ -beli. Ekkor az  $A$ -beli sorok összege egyenlő az  $F$ -beli sorok összegével. A determináns értéke emiatt 0. ■

A lemmában szereplő tulajdonsággal már korábban is találkoztunk más mátrixok esetén.

**Definíció.** Egy  $M$  mátrix *totálisan unimoduláris*, ha minden négyzetes aldetermiánusa 0 vagy  $\pm 1$ .

Végül összefoglaljuk az eredményünket.

**5. Következmény.** Ha  $G$  páros, akkor

a)  $B_G$  totálisan unimoduláris,

b)  $MP(G) = \widehat{MP}(G)$ .

Ez a következmény vezet el a következő algoritmushoz:

**Lineáris programozáson alapuló algoritmus:**

1) Írjuk fel az  $\widehat{MP}(G)$ -t leíró LP feladatot.

2) Oldjuk meg szimplex módszerrel.

// A megoldás garantáltan egész koordinátájú lesz, így egy párosítást  
// ír le.

3) A megoldásból kiolvassunk egy párosítást. Ez az algoritmus outputja.