Bevezetés az analízisbe

Előadás vázlat.
2009. ősz

4. előadás

Téma: Numerikus, hatvány- és függvénysorok. Függvénysorozatok. Konvergencia és más tulajdonságok.

Rejtény. Ha egy tégla egy kiló és egy fél tégla, akkor milyen nehéz egy tégla?

Válasz. Vonjunk ki mindkét oldalból fél kilót, és készen is vagyunk: egy tégla kettő kilós.

Másképp is lehet. Egy tégla az egy kiló meg egy fél, így fél tégla fél kiló meg egy negyed tégla,... kapjuk tehát a következőt:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2.$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges és tekintsük a következő összeget:

$$1 + x + x^2 + \dots$$

Ha föltesszük, hogy az előbbi végtelen összeadásnak van véges összege és az A, akkor a következőket írhatjuk:

$$A = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + \dots) = 1 + x \cdot A,$$

ami, ha $x \neq 1$, akkor

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Írjuk be most az x helyére az $\frac{1}{2}$ értéket, visszakapjuk a „téglás feladat” eredményét.

Írjuk be az $x = 2$ értéket. Ekkor

$$1 + 2 + 4 + \cdots = -1.$$

Írjuk be az $x = -1$ értéket. Ekkor

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2},$$

ugyanakkor, ha a bal oldali kifejezést páronként zárójelezzük, akkor

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

míg, ha másként zárójelezzük, akkor például

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1.$$

Bizonyára máris érezzük, hogy míg véges sok számot minden gond nélkül össze tudunk adni és az eredményt is ki tudjuk számítani, addig végtelen sok elem összeadásának értelmezése már nem ilyen egyszerű.

1. Definíció. *Legyen a_n egy sorozat, és $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ az úgynevezett n-edik részletösszeg. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen soron az (a_n, s_n) rendezett párt értjük.*

Kérdés, hogy miként társítsuk a végtelen összeadáshoz annak végeredményét. Ezt a következőképpen tesszük.

2. Definíció. *Ha $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = A$, akkor amh, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens és összege A. Ha s_n divergens, akkor a sor is divergens. Ha $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty(-\infty)$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty(-\infty)$.*

3. Tétel. *(A konvergencia szükséges föltétele.)*

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bizonyítás. Legyen a sorösszeg A. Ekkor $s_{n-1} \to A$, így $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$.

$\blacksquare$

4. Állítás. *A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens.*

Bizonyítás. Tekintsük a sor n-edik részletösszegét:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Erről a sorozatról pedig már beláttuk (a sorozatokról szóló gyakorlaton), hogy divergens (és összege ∞), így készen is vagyunk.

5. Állítás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}, \ \textit{ha } |q| < 1, \textit{különben a mértani sor divergens}$$

Bizonyítás.

Legyen $q \neq 1$, ekkor az n-edik részletösszeg:

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha $|q| < 1$, akkor $s_n \to \frac{1}{1-q}$, különben divergens.

6. Állítás. *Egy nemnegítív tagú sor pontosan akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos, továbbá, ha egy nemnegatív tagú sor divergens, akkor összege* ∞*.*

Bizonyítás. Trivialitás, az olvasóra hagyjuk.

7. Állítás. *Legyen* $1 < \alpha$*. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty.$$

Ha $\alpha \leq 1$*, akkor a sor divergens.*

Bizonyítás.

Az $1 < \alpha$ esetén a sor konvergenciáját már beláttuk az október 10-iki gyakorlaton, tudniillik az n-edik részletösszeg-sorozatot vizsgáltuk.

Ha $\alpha < 1$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

ha $2 \leq k$. A jobb oldali részletösszeg sorozat nem korlátos, így a bal oldali sem lehet az, vagy a tekintett sor ez esetben divergens.

■

8. Tétel. *(Cauchy-kritérium)*

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor pontosan akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu : \forall n, m \geq \nu : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A részletösszeg-sorozatot nézve a következőt írhatjuk:

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m.$$

Erre a különbség-sorozatra alkalmazva a Cauchy-féle belső konvergencia kritériumot készen vagyunk.

■

Fölmerül az a probléma, hogy két (vagy több) konvergens sort össze lehet-e adni? Íme.

9. Tétel. *(Linearitás)*

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *két konvergens sor, illetve* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

$$\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) < \infty.$$

Bizonyítás. A sorozatok limeszképzése linearitására vonatkozó tétel alapján

nyilvánvaló.

■

10. Tétel. *(Zárójelezhetőség)*

Legyen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *egy konvergens sor,* (n_k) *egy olyan indexsorozat, amelyre* $n_1 = 1$*, továbbá*

$$b_k := \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j.$$

Ekkor $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *is konvergens és összegeik megegyeznek, azaz*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

11. Megjegyzés. *Gondoljuk meg ezeknél a tételeknél, hogy ha a föltételekből elhagyunk, például a sor konvergenciáját, akkor mit állíthatunk.*

Bizonyítás. A $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ sor n-edik részletösszeg sorozata konvergens, így a

zárójelezett sor részletösszeg sorozata ennek egy részsorozata, tehát konvergens.

■

12. Tétel. *Egy konvergens sor tagjai közül véges sokat elhagyva vagy véges sok új tagot hozzávéve a sor konvergens marad - az összege viszont változhat.*

Bizonyítás. Trivialitás, az olvasóra hagyjuk.

■

Korábban láttuk, hogy csupán a zárójelezéssel megváltozhat egy sor összege. Most rátérünk ennek vizsgálatára.

13. Definíció. *A* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor abszolút konvergens, ha* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergens. Egy konvergens, de nem abszolút konvergens sort feltételesen konvergensnek hívjuk.*

Vegyük észre, hogy $\exists \lim |a_n| \not\Rightarrow \exists \lim a_n$. Vajon hogy alakul ez a sorok esetén?

14. Tétel. *Minden abszolút konvergens sor, konvergens is.*

Bizonyítás.

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens. Ekkor a Cauchy-kritérium alapján $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu : |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq \nu$ esetén. A háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is kielégíti a Cauchy-kritériumot, azaz konvergens.

$\blacksquare$

Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy egy abszolút konvergens sor bármely átrendezettje is konvergens marad, és összege ugyanaz, mit az eredeti soré.

A feltételesen konvergens sorok viszont lehetőséget adnak arra, hogy például a széles publikumot elbűvöljük.

15. Tétel. *(Riemann)*

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor feltételesen konvergens, akkor átrendezhető úgy, hogy az összege* ∞, $-\infty$ *legyen, továbbá* $\forall A \in \mathbb{R}$ *esetén átrendezhető úgy is, hogy az összege az* A *legyen, illetve olyan is van, amelyik divergens, és nincsen összege.*

Mielőtt a bizonyításra rátérnénk bevezetünk két fogalmat.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor x pozitív részén az

$$x^+ := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

számot értjük, míg negatív részén az

$$x^- := \begin{cases} -x, & \text{ha } x \le 0 \\ 0, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

számot. Vegyük észre, hogy mindkettő nemnegatív.

Bizonyítás.

Csak azt a részt bizonyítjuk, amikor is véges összeghez konvergáló sort kapunk.

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ feltételesen konvergens, továbbá ennek pozitív részét jelölje a_n^+, negatív részét pedig a_n^-. A föltételes konvergenicából következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty,$$

különben például, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n^+ - a_n$ is konvergens volna. Legyen A egy tetszőleges valós szám - amelyet a sor összegévé kívánunk tenni. Vegyünk annyi pozitív tagot az eredeti sorrendben, hogy az összeg éppen meghaladja A-t. Ezután annyi negatív tagot, hogy a részletösszeg éppen A alá kerüljön. Ezt követően vegyük úgy a pozitív tagokat, hogy a sorösszeg most megint éppencsak meghaladja az A-t,...és ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. A részletösszegek az A-tól nem távolodnak el jobban, mint az aktuális utolsóként hozzávett a_k. Mivel $a_k \to 0$, így biztosak lehetünk abban, hogy a sorösszeg valóban A lesz.

■

Hogyan döntsük el egy sorról, hogy az konvergens-e (abszolút konvergens-e) vagy sem?A Cauchy-kritérium ugyan segít ebben, ám használata gyakran nehézkes. A következőket állíthatjuk.

16. Tétel. *(Majoráns kritérium)*

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sorok tagjaira minden, elég nagy* n*-re teljesül, hogy* $|a_n| \le b_n$*. Ekkor, ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sor konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *abszolút konvergens.*

Bizonyítás.

Tfh. $|a_n| \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. (Ezt megtehetjük, hiszen véges sok tag megváltozatása nem befolyásolja a sorok konvergenciáját.) Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ részletösszegei nem nagyobbak a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ megfelelő részletösszegeinél, melyek fölülről korlátosak (hiszen a sor konvergens), ez viszont azt jelenti, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ részletösszegei is korlátosak, vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens.

■

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ konvergens, hiszen $|\frac{\sin n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ minden n-re, és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens.

17. Tétel. *(Gyökkritérium)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Másképpen fogalmazva: ha $\exists q < 1$ szám, melyre $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ teljesül minden elegendően nagy n-re, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, vagyis abszolút konvergens.

Bizonyítás.

Utóbbit bizonyítjuk, abból ugyanis könnyen kijön az első forma.

A föltétel szerint $|a_n| < q^n$ minden elegendően nagy n-re. MIvel $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergens, így a majoráns kritérium alapján készen vagyunk.

Ha most q-t úgy választjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$, akkor alkalmazzuk az előbb bizonyított állítást.

■

Vegyük észre, hogy a föltételek csupán elegendőek, közel sem szükségesek ahhoz, hogy egy sor konvergens legyen.

18. Tétel. *(Hányadoskritérium)*

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Másképpen fogalmazva: ha $\exists q < 1$ szám, melyre $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$ teljesül minden elegendően nagy n-re, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, vagyis abszolút konvergens.

Bizonyítás.

Ismét utóbbit látjuk be, mert abból következik az elsőként megfogalmazott állítás.

A föltételből világos, hogy valamely n_0 esetén $|a_n| \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$ $\forall n > n_0$ esetén. Legyen $c := q^{-n_0}|a_{n_0}| \in \mathbb{R}$. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^n$ konvergens, ezért a majoráns kritériumot fölhasználva készen vagyunk.

Az előző tétel bizonyításásának analógiájára válsztva a q-t, akkor nyerjük a ezen tételünk másik formájának bizonyítását.

■

Például $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ abszolút konvergens, ha $|x| < 1$, ugyanis $\frac{|(n+1) \cdot x^{n+1}|}{|n \cdot x^n|} = |x| \cdot \frac{(n+1)}{n} \to |x| < 1$, ha $n \to \infty$.

A következő tételek bizonyos speciális alakú sorok konvergenciájára adnak elégséges föltételt.

19. Tétel. *(Leibniz-kritérium váltakozó előjelű sorokra)*

Ha az a_n sorozat monoton csökkenve tart nullához, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot a_n$ sor konvergens.

Bizonyítás.

Az n-edik részletösszeget, azaz s_n-t tekintve a föltételből következik, hogy $\forall n$-re:

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-3} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

Tehát az s_2n részsorozat monoton növő és fölülről korlátos, míg az s_{2n-1} részsorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, azaz mindkettő konvergens. Mivel $s_2n - s_{2n-1} = a_{2n} \to 0$, ezért a két részsorozat ugyanoda konvergál, amiből következik, hogy fésűs egyesítésük s_n is konvergens.

■

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ sor feltételesen konvergens az előbbi tétel alapján.

20. Tétel. *(Dirichlet-kritérium)*

Tfh. az a_n sorozat monoton csökkenve tart a zéróhoz, illetve, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor részletösszegei sorozata korlátos. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergens.

21. Megjegyzés. *Ha $b_n = (-1)^{n-1}$, akkor visszakapjuk a Leibniz-kritériumot.*

A bizonyítást mellőzzük.

Konvergens sorok összegéről már esett szó. Mit lehet mondani szorzatukról? Szem előtt tartva a későbbieket, és a témára szánható időt, itt csak egyetlen dologról beszélünk. Figyeljük meg, hogy az indexelés nullával indul.

22. Definíció. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok Cauchy-szorzata a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right)$$

végtelen sor.

23. Tétel. *Tfh. a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok abszolút konvergensek, és összegük A, illetve B. Ekkor e sorok Cauchy-szorzata is abszolút konvergens és összege $A \cdot B$.*

A bizonyítást itt is mellőzzük.

24. Definíció. *Legyenek az $f_1, f_2, \ldots$ ugyanazon H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Amh. az f_n fügvvénysorozat pontonként konvergál az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \; \forall x \in H.$$

Jelölése: $f_n \to f$.

Például, ha $H = [0;1]$, $f_n(x) = x^n$ konvergens a H-n, és határfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases} .$$

Legyen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Ez a függvénysorozat konvergens, sőt akárhogy is adunk meg előre $0 < \varepsilon$-t, létezik hozzá úgy ν, hogy $\forall x$ esetén ez a küszöbindex megfelelő, azaz található közös küszöb.

25. Definíció. *Legyenek az $f_1, f_2, \dots$ ugyanazon H halmazon értelmezett valós értékű függények. Amh. az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in H$, $\forall n \ge \nu$ esetén.

Jelölése $f_n \rightrightarrows f$.

Igen érthető Szász Pál jegyzete e fogalom kialakításakor is. A következőt mondja. Tekintsük az (f_n) függvénysorozatot a H halmazon és tfh. $f(x) = \lim f_n(x)$ $\forall x \in H$ esetén létezik és véges. Rögzítve az x-et, legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Írhatjuk, hogy

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

elegendően nagy n-re. Mármost legyen $m(x)$ az a legkisebb index, amelytől kezdve már az előző egyenlőtlenség igaz. Ekkor a következő esetek valamelyike fordulhat elő:

1. $\forall \varepsilon$ esetén az $m(x)$ korlátos H-n;
2. $\exists \varepsilon$ úgy, hogy a megfelelő $m(x)$ nem korlátos a H-n.

Az első esetben, ha a ε-hoz tartozó $m(x)$ egy fölső korlátja K, akkor $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ fönnáll $\forall x \in H$ esetén, vagyis a konvergencia egyenletes.

Gondoljuk meg, hogy a második eset mit jelent. (Pontonkénti konvergenciát.)

26. Tétel. *(Cauchy-tétele egyenletes konvergenciára)*

$$f_n \rightrightarrows f \;\; H\text{-}n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu : \forall x \in H, \forall n, m \geq \nu : \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás.

Tfh. f_n egyenletesen konvergál az f függvényhez a H halmazon. Adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszunk olyan ν-t, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in H$ és $\forall n \geq \nu$ esetén. Ekkor nyilvánvalóan teljesül

$$\forall x \in H, \forall n, m \geq \nu : \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

is.

Fordított irányban: tfh. f_n kielégíti a

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

feltételt. Ekkor bármely rögzített $x \in H$ esetén az $f_n(x)$ Cauchy-sorozat, vagyis konvergens. Legyen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \; \forall x \in H$$

esetén. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és válasszuk ν-t , hogy teljesüljön:

$$\forall x \in H, \forall n, m \geq \nu : \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Ha $\nu \leq n$ rögzített, akkor ebből a föltevésből

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

minden $x \in H$-ra.

■

27. Tétel. *(Folytonos függvények egyenletes limesze)*

Tfh. $(f_n) \rightrightarrows f$ *a* $H \subset \mathbb{R}$ *halmazon. Ha az* f_n *függvények folytonosak az* $a \in H$ *pontban, akkor* f *is folytonos az* $a \in H$*-ban.*

Bizonyítás.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Az egyenletes konvergencia miatt $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz található olyan ν, hogy az a környezetében

$$|f(x) - f_\nu(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel $f_\nu \in C_a$, ezért $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz $\exists \delta > 0$ úgy, hogy

$$|f_\nu(x) - f_\nu(a)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ ha } |x - a| < \delta.$$

Tehát

$$|f(x)-f(a)| = |f(x)-f_\nu(x)+f_\nu(x)-f_\nu(a)+f_\nu(a)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ ha } |x-a| < \delta.$$

■

Másképpen is bizonyíthattuk volna az előző állítást. Ugyanis, ha $a \in H$ nem torlódási pontja H-nak, akkor nyilvánvaló, hogy ott a határfüggvény is folytonos. Amennyiben a torlódási pontja H-nak, akkor minden n-re

$$f_n(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in H}} f_n(x).$$

Egy kérdés van csak, hogy tudniillik igaz-e:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ x \in H}} f_n(a) = f(a)?$$

Vagyis az a kérdés, hogy az $x \to a$ és $n \to \infty$ határértékképzések sorrendje fölcserélhető-e? Erre ad választ a következő, általunk itt nem bizonyított tétel.

28. Tétel. *Legyen $a \in H$ torlódási pontja a H halmaznak. Ekkor*

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in H}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in H}} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

29. Megjegyzés.

1. *Folytonos függvények nem egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye nem biztos, hogy folytonos.*
2. *Az egyenletes konvergencia a folytonosságnak nem szükséges föltétele, azaz folytonos függvények pontonként is konvergálhatnak folytonos függvényhez.*

Bizonyítás nélkül közlünk egy olyan tételt, amely a későbbi félévek szempontjából különösen fontos.

30. Tétel. *(Weierstrass I. approximációs tétele)*

Bármely $f \in C_{[a;b]}$ függvényhez és $\forall \varepsilon > 0$ létezik olyan $p(x)$ polinomfüggvény, hogy

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

31. Definíció. *Legyenek az $f_1, f_2, \dots$ függvények ugyanazon a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Amh. a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor pontonként konvergens és összege az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény, ha $\forall x \in H$-ra a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$. H-t konvergenciatartománynak hívjuk. Jele: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$.*

Tisztázzuk tehát, hogy az utóbbi sor már numerikus sor.

Lényegében a számsorozatokról tudottakat igyekszünk átvinni most is erre az új fogalomra úgy, hogy az esetleges különbözőségeket - lehetőségeinkhez képest - megemlítjük.

32. Állítás. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \Leftrightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ *függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez a H-n.*

Bizonyítás. Trivialitás.

∎

33. Definíció. *Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ a H-n. Amh. a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál H-n, ha az $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez a H-n.*

Például $\forall a \in (0;1)$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenletesen konvergens a $[-a;a]$ intervallumban. Ugyanez a sor nem egyenletesen konvergál a $(-1;1)$-en.

34. Definíció. *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor abszolút konvergens a H-n, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konvergens a H-n.*

Az előbbi példában említett sor abszolút konvergens a $(-1;1)$-en.

35. Tétel. *(Cauchy-kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára)*

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor pontosan akkor konvergál egyenletesen a H halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu$:

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} f_i \right| < \varepsilon$$

$\forall x \in H,\ \forall n, m :\ \nu \leq n < m.$

Bizonyítás.

Használjuk föl a függvénysor egyenletes konvergenciája definícióját, és a 26. tételünket.

■

Már tapasztalatból tudjuk, hogy szép-szép Cauchy belső konvergencia kritériuma, de vajmi kevés hasznát tudjuk venni. Köszönjük meg Weierstrassnak a következő tételt.

36. Tétel. *Tfh. vannak olyan $a_n \in \mathbb{R}$ számok és van olyan n_0 index, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, és $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x \in H$ és $\forall n \geq n_0$ esetén. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens a H-n.*

Bizonyítás.

A numerikus sorra fölírva a Cuchy-kritériumot, majd fölhasználva a majoráló tulajdonságát kész.

■

37. Definíció. *Legyen* (c_n) *egy számsorozat és* $a \in \mathbb{R}$. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

függvénysort c_n *együtthatójú,* a *középpontú hatványsornak nevezzük.*

Gondoljuk meg, hogy igen könnyű „behúzni” a nullába a sor közepét: $u := x - a$ transzformáció ezt ugyanis megteszi. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u^n$ alakú a sor.

38. Tétel. *Legyen a* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *hatványsor az* x_0 *helyen konvergens. Ekkor* $\forall x: \ |x| < |x_0|$ *helyeken is abszolút konvergens és így konvergens.*

Bizonyítás.

Rögzítsük az $|x| < |x_0|$ értéket. Ekkor

$$|c_n x^n| \le |c_n {x_0}^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0}^n \right|.$$

Az x_0-beli konvergencia miatt $c_n {x_0}^n \to 0$, tehát

$$|c_n x^n| \le M \cdot q^n, \text{ ahol } q := \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

(Honnan jön az M?) Így kaptunk egy numerikus majoránst, azaz a hatványsor abszolút konvergens.

∎

39. Tétel. *(Cauchy-Hadamard)*

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *hatványsort és legyen*

$$R := \begin{cases} 0 & , \text{ ha } \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \infty; \\ \infty & , \text{ ha } \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0; \\ (\limsup \sqrt[n]{|c_n|})^{-1}, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor a hatványsor minden $x: \ |x| < R$ *helyen abszolút konvergens, és minden* $x: \ |x| > R$ *helyen divergens.*

A tételbeli R-et konvergenciasugárnak nevezzük.

Bizonyítás.

A gyökkritérium egy élesebb formáját használjuk, amely azt állítja, hogy ha $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{c_n} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ sor konvergens.

$$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \overline{\lim}\,\sqrt[n]{|c_n|} < 1$$

esetén a hatványsor konvergens.

Ha $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|c_n|} = 0$, akkor minden x-re teljesül ez.

Ha $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, akkor nem létezik $x \neq 0$, melyre igaz volna.

Ha $0 < \overline{\lim}\,\sqrt[n]{|c_n|}$ valós, akkor az

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

értékekre igaz.

A divergencia eseteit hasonlóan kapjuk.

$\blacksquare$

Gondoljuk meg, hogy mi a helyzet az $|x| = R$ esetekben.

Például tekintve a $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ sort azt kapjuk, hogy $R = 1$.

40. Tétel. *Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ sor konvergenciasugara $R \neq 0$, továbbá $0 < R_0 < R$ ($R = \infty$ esetén R_O tetszőleges). Ekkor a hatványsor a $[-R_0; R_0]$ intervallumon abszolút és egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás.

A föltételekbők azonnal adódik, hogy a hatványsor R_0-ban abszolút konvergens. Mivel bármely $x: \ |x| \leq R_0$ esetén

$$|c_n x^n| \leq |c_n| {R_0}^n,$$

ezért a jobb oldalon álló kifejezésből sort alkotva kapunk egy numerikus majoránst. Fölhasználva Wierstrass tételét, készen vagyunk.

■

Bizonyítás nélkül említjük meg a következő tételt.

41. Tétel. *Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a teljes konvergenciatartományon.*

Ennél sokkal több is igaz, de az eszközpark a következő félévben kerül fölépítésre.

Végezetül egy fontos példát mutatunk önálló állításként bevezetve.

42. Állítás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Bizonyítás.

Legyen $0 \leq x$ rögzített valós szám.

Tekintsük a következő sorozatokat:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \ t_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Utóbbi sorozatról tudjuk, hogy konvergens és határértéke e^x. A binomiális tételből:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))x^k}{k!\, n^k} =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq s_n.$$

Fölhasználva, hogy $x \geq 0$ az utolsó egyenlőtlenség fölírásánál, így tehát

$$e^x = \limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n.$$

Itt kénytelenek vagyunk a limsupokat használni, mert még nem tudjuk, hogy s_n konvergens-e.

Tekintsük most a másik irányt. Fölhasználva t_n előállítását, ha $2 \leq m \leq n$ kapjuk, hogy

$$1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{x^m}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \leq t_n.$$

Rögzítsük m-et, és n-et tartassuk a végtelenbe. Ekkor

$$s_m = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} \leq \liminf_{n\to\infty} t_n$$

Most tekintsük az utóbbi egyenlőtlenséget, és tartassuk m-et a végtelenbe, és helyettesítsük be ezt a másik egyenlőtlenségbe. Kapjuk:

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n \leq e^x \leq \liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n,$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} s_n = e^x.$$

■