Bevezetés az analízisbe

Előadás vázlat.
2009. ősz

1. előadás

Téma: A matematika „nyelvezetének” alapvető sajátosságai, logikai műveletek. Bizonyítási módszerek. A valós számok; axiómák. Topologikus és metrikus tulajdonságok. Függvények - középiskolai emlékek.

Állításokkal dolgozunk, melyekről egyértelműen eldönthetőek, hogy igazak-e avagy sem. Például: Ádám erős, Éva szép (nem állítás).
„Nem lesz gázáremelés”(állítás). Az állításokat logikai műveletekkel kapcsoljuk össze, melyek a következőek:

1. Negáció, vagyis a tagadás, ha A egy állítás, akkor a negáltját $\overline{A}$ jelöli. $\overline{A}$ pontosan akkor igaz, ha A hamis. Például: $A =$ „a gyerekek szeretik a csokit” állítás tagadása „a gyerekek nem szeretik a csokit”.

2. Konjukció, ha A, illetve B két állítás, akkor $A \wedge B$ jelöli a konjukciót, amlyet „A **és** B”-ként mondunk. $A \wedge B$ pontosan akkor igaz, ha mind az A, mind a B igazak. Például: $A =$ „Szép a tavasz”, $B =$ „szép a nyár is”, ekkor $A \wedge B =$ „Szép a tavasz és szép a nyár is”.

3. Diszjunkció, ha ha A, illetve B két állítás, akkor $A \vee B$ jelöli a diszjunkciót, amelyet „A **vagy** B”-ként mondunk. $A \vee B$ pontosan akkor hamis, ha A, B egyszerre hamis. Például: $A =$ „ezek páros pozitív számok”, $B =$ „ezek páratlan pozitív számok”, ekkor $A \vee B =$ „ezek pozitív számok”, hiszen a *páros vagy páratlan* közül egyik vagy másik, esetleg mindkettő igaz lehet, ami azt jelenti, hogy egyértelműen csak pozitivitásuk lehet igaz.

4. Implikáció, ha A, illetve B két állítás, akkor $A{:}B$ jelöli azt a tényt, hogy A maga után vonja a B-t. Ezt úgy is mondjuk, hogy az A állítás **elégséges föltétele** a B állításnak, avagy a B állítás **szükséges föltétele** az A állításnak. $A{:}B$ pontosan akkor hamis, ha A igaz, B hamis. Például: $A =$ „Kertész leszek”, $B =$ „fát nevelek”, valamint „Ha nagynénémnek kerekei volnának, akkor ő volna a miskolci gyors” igaz, bármilyen meglepő a hétköznapi magyar nyelv használójának. Az ilyen állításokat *üres* állításnak nevezzük.

5. Ekvivalencia, ha A, illetve B két állítás, akkor $A \Leftrightarrow B$ jelöli azt a tényt, hogy a két állítás egyenértékű (ekvi-valencia), tehát $A \Leftrightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha A és B egyszerre igazak vagy hamisak. Az ekvivalenciát szóban „B pontosan akkor, ha A", avagy „B akkor és csak is akkor, ha A".

Általános iskolából emlékezhetünk a *nyitott mondat* kifejezésre. Ezek olyan állítások, amelyek változókat tartalmaznak, és ezen változóktól függenek az állítások igazságértékei. $A(x)$ jelöl egy nyitot mondatot, melyben x jelöli a változót. Két módon építhetünk föl ebből rögzített igazságértékű állítást:

a. $A(x)$ igaz **minden** x-re, ami tehát azt jelenti, hogy az x összes lehetséges helyettesítési értékére $A(x)$ igaz. Ezt $(\forall x)$ $(A(x))$ jelöli, és a $\forall$ az úgynevezett *univerzális kvantorjel*;

b. van olyan x, hogy $A(x)$ igaz, tehát az x lehetséges helyettesítési értékei közül található - esetleg több is - olyan, melyre $A(x)$ igaz. Ezt $(\exists x)$ $(A(x))$ jelöli, ahol a $\exists$ az *egzisztenciális kvantorjel.*

Fontos, hogy szabályosan formalizált állításban minden változóhoz a legelső előforduláskor tartozik egy kvantorjel. Vegyük észre azt is, hogy egy állítás tagadása és annak cáfolata nem ugyanaz.

Példa.

a. $A =$ „a holló fekete". Ennek *egy* cáfolata: „a holló fehér", ugyanakkor tagadása: $\overline{A} =$ „a holló *nem* fekete".

b. $A =$ „minden holló fekete", ennek tagadása a „ nem minden holló nem fekete", ami sérti a fülünket, így szabatosan a következő az $\overline{A} =$ „létezik olyan holló, amelyik nem fekete".

c. „Minden gyerek szereti a csokit" állítás tagadása a „van olyan gyerek, aki nem szereti a csokit."

Egy állítás megalkotásakor a kvantorjelek használatára különösen ügyelni kell:

Példa. „Van olyan lány (Kati), aki minden fiúval táncol (könnyű táncba vinni). Ezt formalizálandó legyen L a lányok, F a fiúk halmaza és $t(L, F)$ jelölje azt a relációt, hogy egy L-beli elem egy F-belivel táncol. Ekkor az előbbi állítás:

$$(\exists l \in L)(\forall f \in F)(t(l, f)).$$

Kati tehát egy kivétel, mert *nem minden* lányt könnyű táncba vinni, ugyanakkor, ha megcseréljük a szereplők sorrendjét azt tapasztaljuk, hogy a vázolt mulatságban megtaláljuk Casanovát:

$$(\exists f \in F)(\forall l \in L)(t(l, f)).$$

Ha most az első állításban szereplő kvantorjelek sorrendjét cseréljük meg:

$$(\forall l \in L)(\exists f \in F)(t(l, f)),$$

akkor egy romantikus táncos mulatságra kell gondoljunk, ahol az összes leány megtalálja a magához való párt.

Megjegyzendő, hogy egy matematikai állítás megfogalmazásakor nem a tagadó, hanem az állító alakot preferáljuk.

Sok más mellett fontos szerepet kap az a bizonyítási módszer, amely a természetes számok halmazának azon tulajdonságán alapszik, miszerint van legkisebb természetes szám - tudniillik a nulla. Bizonyítás nélkül közöljük a következő állítást.

1. Tétel. *Ha* $S \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in S$, *továbbá* $\forall k \in S$ *maga után vonja, hogy* $k+1 \in S$, *akkor* $S = \mathbb{N}$.

Az említett módszer lényege, hogy belátjuk, hogy az A_1 állítás igaz, és föltételezve, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ számra az A_n igaz, ebből az A_{n+1} igazságára következtetünk.

Példaként tekintsük a következő állítást.

2. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség) Ha* $-1 \leq a$, *akkor* $\forall n \in \mathbb{N}^+$ *esetén*

$$1 + n \cdot a \leq (1 + a)^n.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fönn, ha $n = 1$ *vagy* $a = 0$.

Bizonyítás. n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n = 1$, akkor kész.

Tfh. (*indukciós föltevés*) az állítás igaz valamely $n \in \mathbb{N}^+$ számra. Mmh. ebből következik, hogy $n+1$-re is teljesül. Mivel $-1 \leq a$ $(0 \leq 1 + a)$, ezért

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1) \cdot a + na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Ezen egyenlőtlenségsor elejét a végével összehasonlítva azonnal adódik az állítás utolsó megjegyzése.

■

3. Definíció. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok számtani közepén az*

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

számot értjük.

4. Definíció. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív számok mértani közepén a*

$$G = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

számot értjük.

5. Definíció. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok harmonikus közepén a*

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

számot értjük.

6. Tétel. *Ha az $a_1, \ldots, a_n$ számok nemnegatívok, akkor $G \leq A$. Egyenlőség pontosan akkor van, amikor $a_i = a_j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. $n = 2$ esetén trivialitás.

$n = 3$ esetén

$$A_3 := \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{2\frac{a_1+a_2}{2} + a_3}{3} \geq \frac{2\sqrt{a_1a_2} + a_3}{3}.$$

Ha igaz, hogy $\frac{2\sqrt{a_1a_2}+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} =: G_3$, akkor $A_3 \geq G_3$ is teljesül. Tehát igazoljuk, hogy $\frac{2\sqrt{a_1a_2}+a_3}{3} - \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \geq 0$.

Ehhez bevezetjük a következő jelöléseket:$A^3 = \sqrt{a_1a_2}$, $B^3 = a_3$. Így a tekintett egyenlőtlenség: $\frac{2A^3+B^3}{3} - A^2B = \frac{1}{3}(2A^3 + B^3 - 3A^2B) = \frac{A-B}{3}(2A^2 - B(A + B)) = \frac{(A-B)^2}{3}(2A + B) \geq 0$.

Már csak az van hátra, hogy föltételezve az állítás igaz voltát valamely $n \in \mathbb{N}^+$ elemre, megmutassuk, hogy abból következik az $n + 1$-re is. Ez az imént leírt eljárás adaptálásával megtehető.

■

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbit.

7. Tétel. *Ha az $a_1, \ldots, a_n$ számok pozitívok, akkor $H \leq G$. Egyenlőség pontosan akkor van, amikor $a_i = a_j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$-re.*

A továbbiakban a valós szám fogalmával ismerkedünk meg. Azt mindenki tudja, hogy $1+1 = 2$ hiszen a mindennapi tapasztalataink ezt mutatják. Azt is tudjuk, hogy két fél egy egész, azaz $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Azt is mondhatjuk, hogy a (nemnegatív) racionális számokat ismerjük, azaz tudjuk, hogy van ilyen halmaz, és ismerjük az elemein bevezetett összeadás és szorzás műveletét. A kérdés az, hogy - föltéve, hogy létezik - $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ mennyivel egyenelő, illetve - és bizonyos szempontból ez talán érdekesebb is - hogyan kell ezt a műveletet (az?) elvégezni, értelmezni?

Megjegyezzük, hogy a valós számok fogalmának több bevezetése ismeretes, az egyik ilyen az ún. végtelen tizedes törtek segítségével történik. Tudjuk, hogy a racionáis számok tizedestört alakjai vagy végesek, vagy végtelen szakaszosak.

A másik, a mai modern matematikának megfelelő *axiómákon* alapszik. Mindenek előtt tekintünk egy $\mathbb{R}$-rel jelölt halmazt, amelyről föltesszük, hogy $0, 1 \in \mathbb{R}$ és, hogy értelmezve van rajta két művelet: az összeadás és a szorzás.

Testaxiómák

$a \star b = b \star a,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$ ($\star$ jelöli a két művelet valamelyikét, persze a két oldalon egyszerre ugyanazt),azaz kommutatívok a műveletek;

$(a \star b) \star c = a \star (b \star c),\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, azaz a műveletek asszociatívok;

$a + 0 = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$;

$a \cdot 1 = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$;

$(\forall a \in \mathbb{R})\ (\exists b \in \mathbb{R})\ (a + b = 0)$;

$(\forall 0 \neq a \in \mathbb{R})\ (\exists b \in \mathbb{R})\ (a \cdot b = 1)$;

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, vagyis a szorzás disztributív az összeadásra nézve,

Az algebrában egy olyan struktúrát, amely kielégíti a fönti föltételeket *testnek* neveznek, vagyis mi a valós (szám)testtel foglalkozunk.

A továbbiak miatt tisztázni kell, hogy az $A \times B$ halmaz részhalamzait relációknak hívjuk, így például az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-en a $<$, illetve az $=$ reláció.

Rendezési axiómák

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a < b, a = b, b < a$ relációk közül pontosan egy teljesül. (trichotómia);

$a < b$ és $b < c$:$a < c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. (tranzitivitás);

$a < b$:$a + c < b + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$;

$a < b$ és $0 < c \in \mathbb{R}$:$a \cdot c < b \cdot c, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

A rendezés segítségével kimondjuk az alábbiakat.

8. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq H \subseteq \mathbb{R}$. A K szám a H halmaz fölső korlátja, ha $\forall h \in H$ esetén $h \leq K$. Ebben az esetben H halmazt fölülről korlátosnak hívjuk.*

9. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq H \subseteq \mathbb{R}$*. A* k *szám a* H *halmaz alsó korlátja, ha* $\forall h \in H$ *esetén* $k \leq h$*. Ebben az esetben* H *halmazt alulról korlátosnak hívjuk.*

Föntiek fényében $\mathbb{R}$-et rendezett testnek nevezzük. Ám $\mathbb{Q}$ is az. Meg kellene találni, hogy mi a különbség e kettő között. Ehhez kelleni fog a következő

10. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$*.* H *legkisebb fölső korlátjának, szuprémumának nevezzük a* K *számot* ($\sup H = K$)*, ha*

a. $\forall h \in H$ *esetén* $h \leq K$*;*

b. $(\forall \hat{K} < K)$ $(\exists \hat{h} \in H)$ $(\hat{K} < \hat{h})$*.*

Van olyan, amikor nem létezik egy adott halmaz szuprémuma. Például:

$$H := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$$

ilyen halmaz. (Miért?)

Teljességi axióma

A valós számok bármely nemüres, fölülről korlátos részhalmazának van szuprémuma.

Azt mondhatjuk tehát, hogy $\mathbb{R}$ teljes rendezett test, és a valós szám ennek egy eleme. Például: ($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, de nem racionális, hiszen nem írható föl két egséz szám hányadosaként. Ezt a tételt a középiskolában bizonyítják.)

Korábban már utaltunk rá, és az általános iskolából ismeretes, hogy a racionális számok véges, vagy végtelen szakaszos tizedestörtek. A valós számok általában végtelen tizedestörtek, és azok, amelyek nem rendelkeznek az előbb említett két tulajdonság egyikével sem az ún. *irracionális* számok.

Mielőtt továbblépnénk bevezetünk még néhány fogalmat.

11. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$*.* H *legnagyobb alsó korlátjának, infimumának nevezzük a* k *számot* ($\inf H = k$)*, ha*

a. $\forall h \in H$ *esetén* $k \leq h$*;*

b. $(\forall \hat{k} > k)$ $(\exists \hat{h} \in H)$ $(\hat{h} < \hat{k})$*.*

12. Tétel. *A valós számok bármely nemüres, alulról korlátos halmazának van infimuma.*

Bizonyítás. A teljességi axióma segítségével könnyen bizonyatható. Legyen:

$$-H := \{-h : h \in H\},$$

ahol H alulról korlátos, nemüres és része a valósaknak. Így $-H$ fölülről korlátos, nemüres és része a valósaknak, vagyis $\exists \sup(-H)$. A $-\sup(-H) = \inf H$ a $-H$ értelmezése miatt.

■

Ha a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz nem korlátos fölülről, akkor $\sup H = \infty$. Az $\inf H = -\infty$ értelmezése analóg.

Az axiomatikus megalapozásnak másik útja is van. Térjünk vissza oda, hogy a test- és rendezi axiómáink vannak csak meg. Két másik állítást posztulálva a teljességi axióma *tételbe* „megy át”.

Arkhimédeszi axióma

Bármely valós számhoz található nála nagyobb természetes szám.

Eléggé egyszerű állítás, mégis két fontos következménye alapvető.

13. Következmény. $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(\frac{1}{n} < \varepsilon)$.

Ez trivialitás. A másik:

14. Következmény. *Bármely két valós szám között van racionális szám.*

Bizonyítás. Legyenek $0 \leq a < b \in \mathbb{R}$. Az arkhimédeszi axióma alapján

$\exists n \in \mathbb{N}^+$:

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Az is világos az axióma alapján, hogy $\exists m \in \mathbb{N}^+ : a < \frac{m}{n}$. Legyen k a legkisebb pozitív egész, amelyre $a < \frac{k}{n}$, ekkor:

$$\frac{k-1}{n} \leq a < \frac{k}{n},$$

így

$$0 < \frac{k}{n} - a \leq \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} < b - a.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$a < \frac{k}{n} < b,$$

vagyis találtunk a és b között racionális számot.

Ha $a < b \leq 0$, akkor végigszorozzuk -1-gyel és visszakapjuk az imént bizonyított helyzetet.

Ha $a < 0 < b$, akkor nyilvánvalóan készen vagyunk, hiszen $0 \in \mathbb{Q}$.

■

Könnyedén észrevehető, hogy az eddigi axiómákat a racionális számok is kielégítik, vagyis kell még valami, amelynek segítségévl már pontosan karakterizálhatjuk a valós számokat. Mielőtt az utolsó axiómát kimondanánk, bevezetünk néhány szükséges fogalmat.

15. Definíció. *Legyen $a < b \in \mathbb{R}$. Azon $x \in \mathbb{R}$ számok összességét, amelyekre:*

$$a \leq x \leq b$$

teljesül, zárt intervallumnak nevezzük, és $[a; b]$-vel jelöljük.

16. Definíció. *Legyen $a < b \in \mathbb{R}$. Azon $x \in \mathbb{R}$ számok összességét, amelyekre:*

$$a < x < b$$

teljesül, nyílt intervallumnak nevezzük, és $(a; b)$-vel jelöljük.

17. Definíció. *Minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz $I_n := [a_n; b_n]$ egy zárt intervallum tartozzék. Az $I_1, I_2, \dots$ intevallumokat egymásba skatulyázottnak nevezzük, ha $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$.*

Cantor-axióma

Minden egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozatnak létezik közös e-leme.

18. Lemma. *Ha az $I_1, I_2, \dots$ intervallumrendszernek egynél több közös e-leme van, akkor van olyan pozitív szám, amelynél minden $b_n - a_n$ nagyobb, ahol a_n, illetve b_n az I_n intervallum végpontjai.*

Bizonyítás. Legyen x és y közös elem úgy, hogy $x < y$. Ekkor $a_n \leq x < y \leq$

b_n, azaz $y - x \leq b_n - a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

■

Tehát a valós számokat axiómákon keresztül mint absztrakt fogalmat bevezettük. Ismételten megemlítjük, hogy a Teljességi axiómát elfogadva az arkhimédeszi és a Cantor-axióma tétellé válik et vica versa.

Az egymásba skatulyázott intervallumokról szóló állítás egy fontos alkalmazása, hogy segítségével megmutatható, hogy a $\sqrt{2}$ nem egy „légből kapott ötlet”, hanem valóban létezik.

19. Tétel. $0 \leq a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^+ : \exists! b \in \mathbb{R}, b \geq 0 : b^k = a$.

Bizonyítás. föltesszük, hogy $0 < a$ és a bizonyítást $k = 2$ esetre mutatjuk

meg. Legyenek a_1, b_1 olyan nemnegatív számok, amelyekre ${a_1}^2 \leq a \leq {b_1}^2$. (Léteznek ilyenek, pl. 0 és $a + 1$.)

Tfh. $1 \leq n \in \mathbb{N}$ és az a_n, b_n számokat már meghatároztuk úgy, hogy ${a_n}^2 \leq a \leq {b_n}^2$.

Két lehetőség adódik. Ha

$$\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 < a,$$

akkor legyen
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = b_n.$$

Ha
$$a \leq \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2,$$

akkor legyen
$$a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Mindkét esetben $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$, továbbá
$${a_{n+1}}^2 \leq a \leq {b_{n+1}}^2.$$

Tehát egymásba skatulyázott zárt intervallumok egy rendszerét készítettünk, amelyeknek a Cantor-axióma (tétel) alapján van közös pontjuk, legyen ez a b szám. Ekkor $a_n \leq b \leq b_n$, azaz
$${a_n}^2 \leq b^2 \leq {b_n}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kezdeti föltevésünk miatt a és b^2 mindketten közös elemek.

Kell:
$$b^2 = a.$$

Ehhez a fönt említett lemma kontraponáltját használjuk, vagyis belátjuk, hogy $(\forall \delta > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) : ({b_n}^2 - {a_n}^2 < \delta)$.

Az I_n intervallumok konstrukciójából világos (teljes indukció), hogy
$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utóbbiból kapjuk, hogy
$${b_n}^2 - {a_n}^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) \leq$$

$$\leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \cdot (b_1 + b_1) \leq \frac{2{b_1}^2}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{4{b_1}^2}{2^n} \leq \frac{4{b_1}^2}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

A valós számok végtelen tizedestörtekkel való előállítása már előrevetíti, hogy a *közel*, illetve *távol*, *végtelen közel*, *végtelen távol* kifejezéseket precizálnunk kell úgy, hogy a már megszokott és bevált(!) hosszúságmérést mint távolságmérést visszakapjuk. Mit is jelent pontosan az mondjuk, hogy az asztal 2 méter hosszú? Ahhoz, hogy a távolságot szabatosan meg tudjuk fogalmazni kell a következő

20. Definíció. *Legyenek $A \neq B \neq \emptyset$. Az $f : A \to B$ hozzárendelést függvénynek nevezzük, ha $(\forall a \in A) \ (\exists! b \in B): \ f(a) = b$.*

21. Definíció. *Legyen $H \neq \emptyset$. A $d : H \times H \to {\mathbb{R}_0}^+$ függvényt metrikának (távolságnak) hívjuk, ha*

- $0 \leq d(x;y)$, "=„$\Leftrightarrow x = y, \ \forall x, y \in H$;
- $d(x;y) = d(y;x), \ \forall x, y \in H$;
- $d(x;y) + d(y;z) \geq d(x;z), \ \forall x, y, z \in H$.

Példa. $\mathbb{R}$ halmazon a $d(x;y) = |x-y|$ távolság. Emlékezzünk csak. Általános iskolában - a szemléltetés kedvéért gyakran a középiskolában is - egy szám abszolútértékén annak 0-tól mért távolságát szokták érteni. Valójában a következő igaz.

22. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$|a| := \begin{cases} a, & ha \ 0 \leq a \\ -a, & ha \ a < 0 \end{cases}$$

A metrikus tér eléggé szigorú, sok esetben kevesebbet is elég tudnunk ahhoz, hogy a *közel, távol* viszonyokat ismerjük. Bár részleteivel mi nem foglalkozunk, ellenben elhagyhatatlan az alábbi

23. Definíció. *Legyen adott egy $H \neq \emptyset$ halmaz, és ennek részhalmazaiból álló τ rendszer. τ-t topológiának hívjuk, ha*

- $\emptyset, H \in \tau$;
- τ **véges sok** *elemének a metszete is eleme τ-nak;*
- τ **akárhány** *elemének az uniója is eleme τ-nak.*

A (H, τ) párt topologikus térnek hívjuk.

24. Definíció. *Egy topologikus teret Hausdorff-térnek hívunk, ha bármely két különböző ponthoz találhatóak olyan diszjunkt nyílt halmazok, amelyek mindegyike pontosan az egyik elemet tartalmazza.*

Az $\mathbb{R}$-en igen könnyedén látható, hogy a példaként adott metrika topológiát generál.

Visszatérünk a függvényekre, néhány tulajdonságukat fölelevenítünk.

A függvényt már definiáltuk. Fontos tudnunk azt, hogy egy függvény, másként leképezés változójának helyébe mely halmazból választhatunk elemeket, illetve, hogy milyen halmazból merítheti az értékeit.

25. Definíció. *Egy $f : A \to B$ leképezés esetén az A halmazt értelmezési tartománynak hívjuk, míg a B-t érkezési halmaznak.*

26. Definíció. *Az $\mathcal{R} \subseteq B$ halmazt, melyre*

$$\mathcal{R} := \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\}$$

értékkészletnek hívjuk.

27. Definíció. *Legyen $f : A \to B, g : B \to C$ két függvény. Ezen kettő $g(f)$ kompozícióján azt a $h : A \to C$ függvényt értjük, amelyre: $h(a) := g(f(a))$.*

Egy fontos kérdés az, hogy ha az f függvény az A halmaz elemeit „elviszi" a B halmazba, akkor vajon *létezik*-e olyan függvény, amely visszamozgatja azokat? Gondoljuk meg. Ha van ilyen függvény, akkor az csak olyan lehet, hogy az indulási elemből kiindulva a képelemen keresztül visszakerülünk ugyanahhoz az elemhez, azaz jelölve a keresett, ún. *inverz* függvényt f^{-1}-el, a következő kell, hogy teljesüljön:

$$f^{-1}(f(a)) = a, \ \forall a \in A.$$

Ez azt jelenti, hogy a kettő kompozíciója az A halmaz *identikus* leképezése önmagára.

Példa. $x \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük az $f(x) = |x|$ függvényt. Könnyen látható, hogy nem találunk inverz párt neki, hiszen az 1 képelemhez a -1 és az 1 indulási elemet is hozzá kellene rendeljük, ez viszont definíció alapján nem lehet függvény. Leszögezhetjük: nem minden fügvény invertálható. Mint egy falat kenyérre, annyira vágyunk egy föltételre, amely biztosítja azt, hogy egyértleműen meg tudjuk mondani, mely függvények invertálhatóak.

28. Definíció. *Az $f : A \to B$ leképezés injektív (kölcsönösen egyértelmű), ha $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$.*

Ezek után megfogalmazzuk, hogy mit is értünk inverz függvényen.

29. Definíció. *Legyen az $f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{R}_f$ függvény injektív (invertálható). Ekkor ennek f^{-1} inverz függvényén azt a függvényt értjük, amelyre:*

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$$

továbbá

$$\forall a \in \mathcal{D}_f : f^{-1}(f(a)) = a, \ \forall b \in \mathcal{R}_f : f(f^{-1}(b)) = b.$$

Vegyük észre, hogy f-el együtt f^{-1} is invertálható.

Példa. $f(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$ invertálható-e? (Nem. Miért?) Hogyan javítható, hiszen azt tudjuk, hogy létezik például a $\sqrt{2}$, vagyis a négyzetgyök vonás művelete „működik"?

Függvényműveletek. Pontonként értelmezzük az összeadást (kivonást), szorzást (megengedett esetben) a hányados-képzést. (Ld. N.Z. Hafo.)

Emlékeztetnénk arra, hogy ha $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a^n egy olyan n-tényezős szorzat, amelynek minden tényezője a. Középiskolában ezt kiterjesztik egész, majd racionális számokra. Kérdés, hogy lehet-e valós kitevős hatványról beszélni, illetve, hogyan kell azt értelmezni?

Bevezetünk még néhány elengedhetetlen fogalmat.

30. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvény fölülről korlátos, és fölső korlátja a $K \in B$ szám, ha $\forall a \in A$ esetén $f(a) \le K$. Alulról korlátos, és alsó korlátja a $k \in B$ szám, ha $\forall a \in A$ esetén $k \le f(a)$. Korlátos, ha alulról is és fölülről is korlátos.*

31. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvény monoton növő, ha $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 < a_2$ esetén $f(a_1) \le f(a_2)$, szigorúan növekedő, ha ugyanezen föltételek mellett $f(a_1) < f(a_2)$.*

A csökkenő, szigorúan csökkenő függvény definícióját az iménti triviális módosításával kapjuk.

32. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvény páros, illetve páratlan, ha $\forall a \in A$ esetén $-a \in A$ és $f(a) = f(-a)$, illetve $f(a) = -f(-a)$.*

33. Definíció. *Az f függvény periodikus, ha $\exists p \neq 0$ úgy, hogy $\forall x \in \mathcal{D}_f$ esetén $x + p \in \mathcal{D}_f, x - p \in \mathcal{D}_f$, továbbá $f(x + p) = f(x)$. Ebben az esetben p-t az f függvény periodusának hívjuk.*

34. Megjegyzés.

- *Ha p periódus, akkor $\forall k \in \mathbb{Z}$ számra $k \cdot p$ is periódus.*
- *Az eddig ismert függvények* - $\sin, \cos, \ldots$ - *esetén a legkisebb pozitív periódust hívjuk A periódusnak. Pl.* $\sin$ *esetén* 2π*.*

A következő definíció meglehetősen szemléletes, mitöbb egy függvény alább említett tulajdonságának vizsgálatához mélyebb eszközök kellenek, mégis szükségünk van rá.

35. Definíció. *Az f függvény alulról nézve konvex/konkáv valamely I intervallumon, ha a függvény grafikonjának bármely pontjába húzott érintő a grafikon alatt/fölött halad.*

Itt fölmerül egy kérdés: mit értünk egy függvény gafikonján?

36. Definíció. *Az f függvény grafikonján az $\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in \mathcal{R}_f\}$ halmazt értjük.*

Már csak annak tisztázása van hátra, hogy mit értünk érintőn.

37. Definíció. *A γ görbe érintője az e egyenes, ha $\exists! P \in \gamma : \gamma \cap e = \{P\}$, továbbá $\forall \varepsilon > 0$ esetén az e egyenes a γ görbe ugyanazon oldalán halad a $(P - \varepsilon; P + \varepsilon)$ környezetben.*

A föntihez típusú, egy adott pont kicsiny környezetében igaz állításokat lokálisnak szokás hívni. Egy ilyen lokális tulajdonásága a függvényeknek a következő.

38. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvénynek az $a_0 \in A$ helyen minimuma van, ha $\forall a \in A$-ra $f(a_0) \leq f(a)$, szigorú minimuma, ha $f(a_0) < f(a)$, föltéve, hogy $a_0 \neq a$.*

A maximális *szélsőérték* definíciója a fönti értelemszerű átfogalmazása.