

Diszkrét matematika II. gyakorlat

9. Gyakorlat

Szakács Nóra

Helyettesít: Bogya Norbert

Bolyai Intézet

2013. április 11.

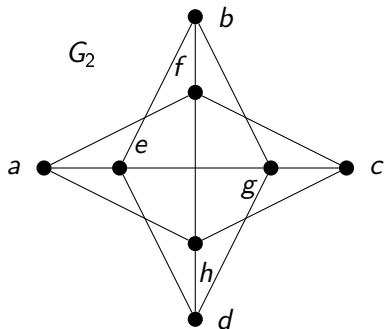
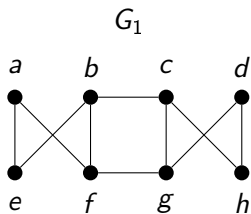
- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

Tartalom

- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

1. Feladat

Páros gráfok-e az alábbi gráfok?

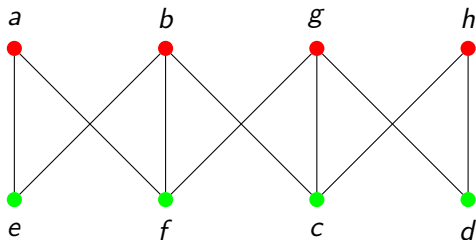
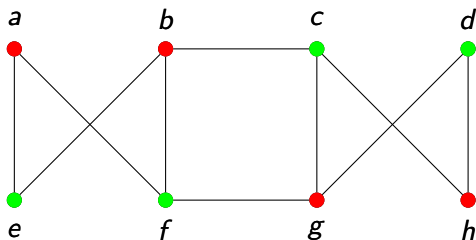


Tétel

A következők ekvivalensek:

- 1 G páros gráf.
- 2 G nem tartalmaz páratlan hosszú kört.
- 3 G 2-színezhető ($\chi(G) = 2$)

Módszer: mélységi bejárás && mohó színezés.



Tartalom

- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

Definíciók

Lefogó ponthalmaz

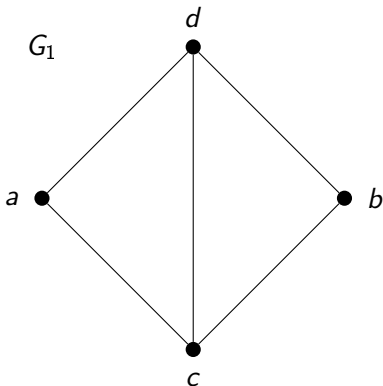
Csúcsoknak egy L halmaza lefogó ponthalmaz, ha minden élnek valamelyik végpontja az L -ben van.

Minimális lefogó ponthalmaz

Csúcsoknak egy L halmaza minimális lefogó ponthalmaz, ha nincs nála kisebb elemszámú lefogó ponthalmaz.

$\tau(G)$

$$\tau(G) = \min\{|L| : L \text{ lefogó ponthalmaz}\}$$



Lefogó ponthalmazok:

$$\{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}.$$

Min. lefog. ponthalm.: $\{c, d\}$.

$$\tau(G_1) = 2$$

Definíciók

Független élhalmaz = Párosítás

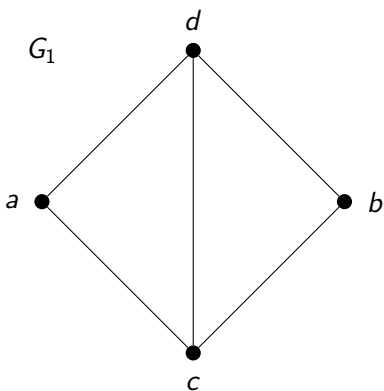
Éleknek egy M halmaza párosítás, ha nincs olyan pontja a gráfnak, ami két M -beli élnek is végpontja.

Maximális független élhalmaz = Maximális párosítás

Éleknek egy M halmaza maximális párosítás, ha nincs nála nagyobb elemszámú párosítás.

$\nu(G)$

$\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ párosítás}\}$



Párosítások: $\{ac\}$, $\{ad\}$, $\{bc\}$, $\{bd\}$, $\{cd\}$, $\{ac, bd\}$, $\{ad, bc\}$.

Max. párosítások: $\{ac, bd\}$, $\{ad, bc\}$.

$$\nu(G_1) = 2$$

Állítás

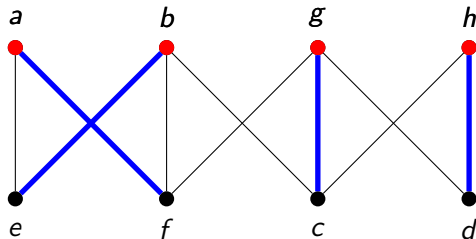
Bármely G gráf esetén

$$\nu(G) \leq \tau(G).$$

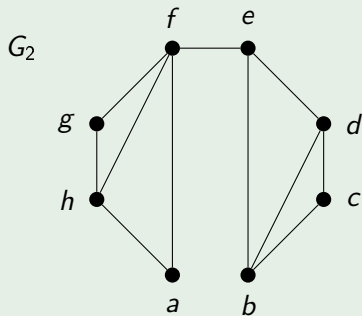
Kőnig-tétel

Bármely G páros gráfra

$$\nu(G) = \tau(G).$$



1. Feladat



- 1 Adjon meg a G_2 gráfban egy minimális lefogó ponthalmazt!
- 2 Adjon meg a G_2 gráfban egy maximális párosítást!
- 3 Adja meg a $\tau(G_2)$ és $\nu(G_2)$ értékét!

Megoldás:

- 1 Min. lefogó ponthalmaz: $\{f, h, b, d\}$.
- 2 Max. párosítás: $\{ah, gf, ed, cb\}$.
- 3 $\tau(G_2) = \nu(G_2) = 4$.

Tartalom

- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

Magyar-módszer (Hungarian method)

Javító alternáló út

Legyen M egy párosítás G -ben. Az $e_1, e_2, \dots, e_{2k}, e_{2k+1}$ élek által meghatározott (gráfelméleti) út alternáló javító út M -re nézve, ha

- $e_i \notin M$, ha i páratlan, és
- $e_i \in M$, ha i páros.

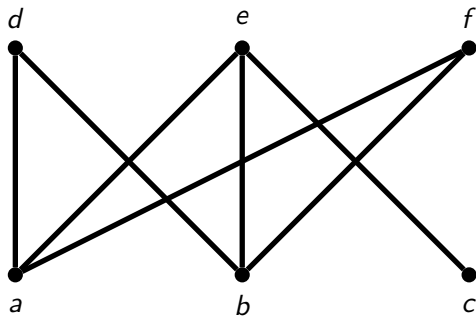
(Tehát a javító útban felváltva lépünk "nem M -beli" és " M -beli" éleken úgy, hogy "nem M -belivel" kezdünk, és ilyennel is fejezzük be.)

Algoritmus

```

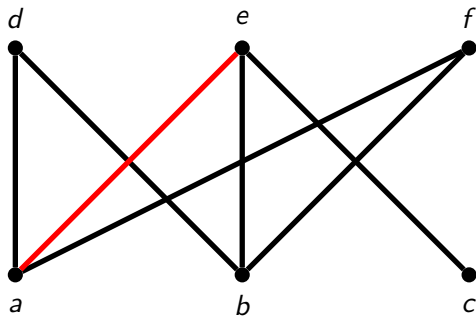
 $M \leftarrow$  tetszőleges párosítás  $G$ -ben
while létezik alternáló javító út  $M$ -re do
     $U \leftarrow$  javító út élhalmaza
     $M \leftarrow M \Delta U$ 
end while
return  $M$ 

```



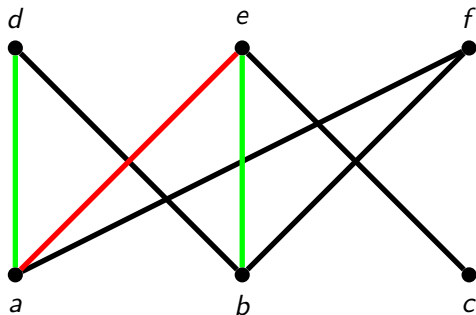
Párosítás: $M = \emptyset$

Javító út: $U = \emptyset$



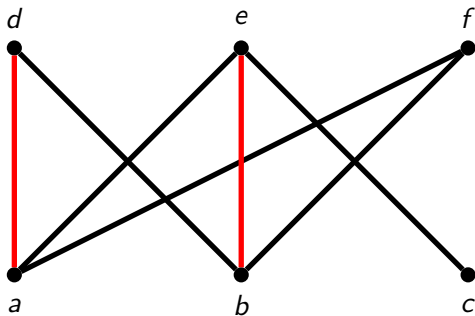
Párosítás: $M = \{ae\}$

Javító út: $U = \emptyset$



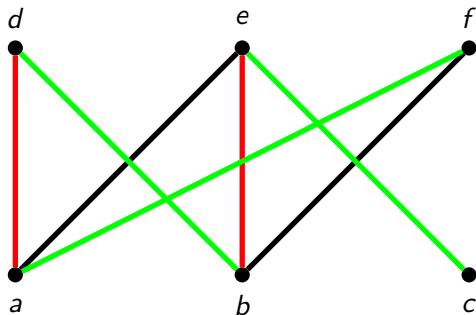
Párosítás: $M = \{ae\}$

Javító út: $U = \{da, ae, eb\}$



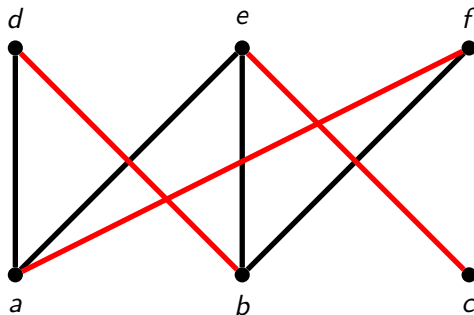
Párosítás: $M = \{da, eb\}$

Javító út: $U = \emptyset$



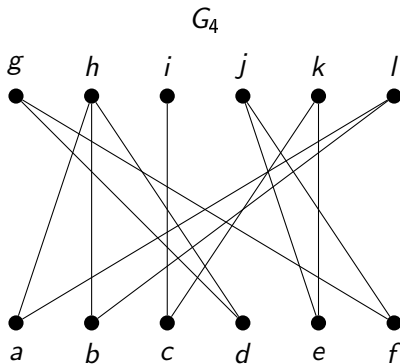
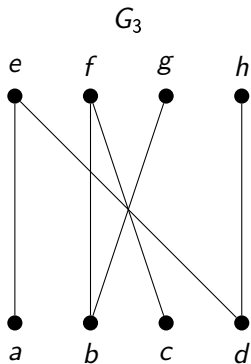
Párosítás: $M = \{da, eb\}$

Javító út: $U = \{fa, ad, db, be, ec\}$



Párosítás: $M = \{fa, db, ec\}$

Javító út: $U = \emptyset$



2. Feladat

Keressen maximális párosítást a fenti G_3 és G_4 gráfokban a magyar-módszer segítségével!

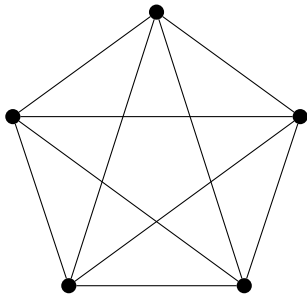
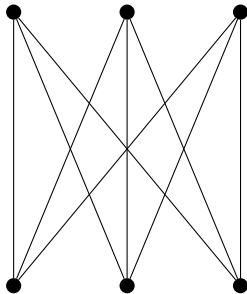
Tartalom

- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok**
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

Definíciók

Síkgráf

Egy G gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy, hogy az élei ne messék egymást (az élek belső pontjában).

 K_5  $K_{3,3}$ 

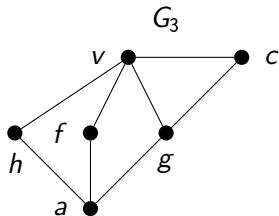
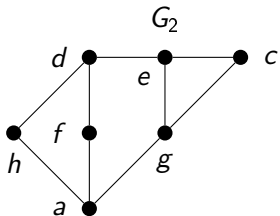
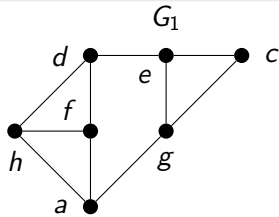
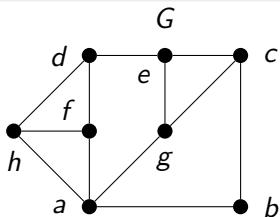
Tartalom

- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok**
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

Definíciók

Minor

A H gráf a G gráf minorja, ha H megkapható G -ből élek és csúcsok élhagyásával illetve élek összehúzásával.



Definíciók

Minor

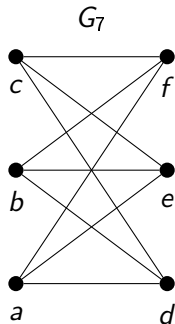
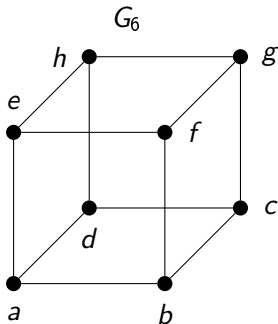
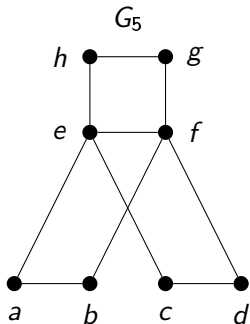
A H gráf a G gráf minorja, ha H megkapható G -ből élek és csúcsok élhagyásával illetve élek összehúzásával.

Wagner tétele

Egy G gráf pontosan akkor síkgráf, ha **nem tartalmaz** K_5 -öt vagy $K_{3,3}$ -at minorként.

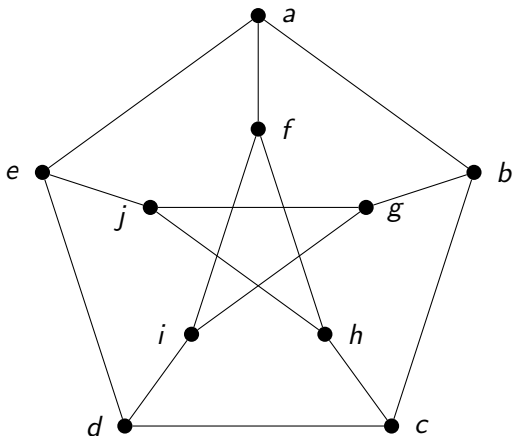
3. Feladat

Döntse el, hogy az alábbi három gráf síkgráf-e!



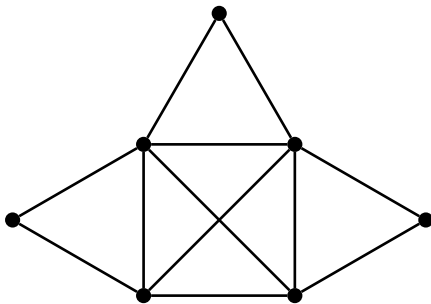
4. Feladat

Síkgráf-e a Petersen-gráf?



Tartalom

- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok**
 - Wagner tétele
 - Euler tétele**
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

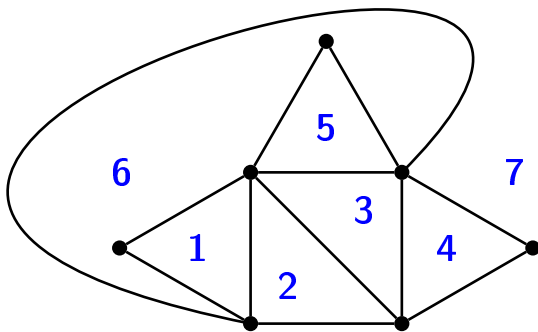


Euler tétele

Összefüggő síkra rajzolt gráfra érvényes a

$$T + V = E + 2, \quad (1)$$

összefüggés, ahol T a gráf tartományainak száma, E az éleinek száma és V a csúcsainak száma.



Euler tétele

Összefüggő síkra rajzolt gráfra érvényes a

$$T + V = E + 2, \quad (1)$$

összefüggés, ahol T a gráf tartományainak száma, E az éleinek száma és V a csúcsainak száma.

Tartalom

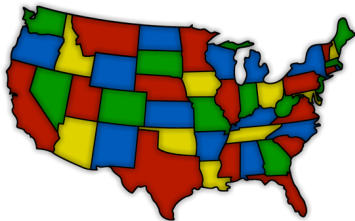
- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok**
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

Négy szín-tétel

Négy szín-probléma (sejtés) (Francis Guthrie - 1852)

Anglia megyéi kiszínezhetők 4 színnel a térképen.

Minden síkgráf 4-színezhető?



ábra : Tartományok színezése 4 színnel

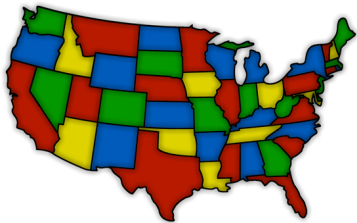
Ötszín-tétel (Heawood és Kempe - 1890)

Hurokél nélküli G gráfra $\chi(G) \leq 5$.

Négy szín-tétel

Négy szín-probléma (sejtés) (Francis Guthrie - 1852)

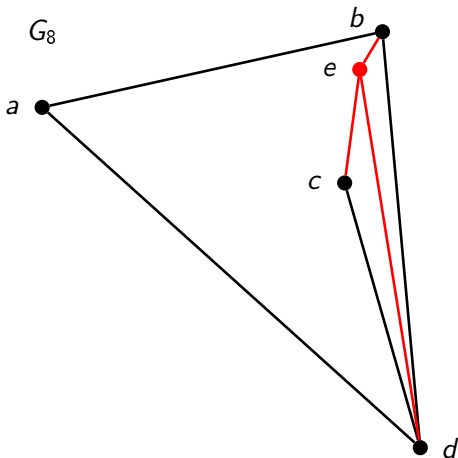
Anglia megyéi kiszínezhetők 4 színnel a térképen.
Minden síkgráf 4-színezhető?



ábra : Tartományok színezése 4 színnel

Négy szín-tétel (Appel és Haken - 1977)

Hurokél nélküli G gráfra $\chi(G) \leq 4$.



5. Feladat

Páros gráf-e? $\tau(G_8)$? $\nu(G_8)$? $\chi(G_8)$? Maximális párosítás?
Síkgráf-e? (Ha igen mennyi a tartományainak száma?)

Tartalom

- 1 Páros gráfok
- 2 Lefogó ponthalmaz, párosítás
- 3 Párosítás keresése páros gráfban
- 4 Síkgráfok
 - Wagner tétele
 - Euler tétele
 - Négyszín-tétel
- 5 Vizsgafeladatok

(6) Jelölje be a téglalapban azokat a tulajdonságokat, amelyek érvényesek az alábbi gráfra:



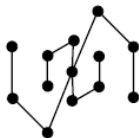
?	van Hamilton-köre <input type="checkbox"/>	páros gráf <input type="checkbox"/>	síkgráf <input type="checkbox"/>	egyik sem <input type="checkbox"/>	?
---	--	-------------------------------------	----------------------------------	------------------------------------	---

(6) Mely tulajdonságok érvényesek az alábbi gráfra, ha „EV”, illetve „zárt EV” a „van Euler-vonala”, illetve „van zárt Euler-vonala” rövidítése? (A gráfnak pontosan nyolc szögpontja van.)



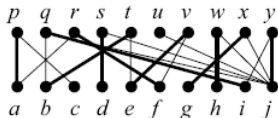
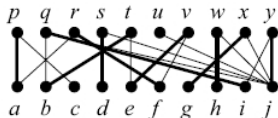
?	EV <input type="checkbox"/>	zárt EV <input type="checkbox"/>	páros gráf <input type="checkbox"/>	van Hamilton-köre <input type="checkbox"/>	fa <input type="checkbox"/>	egyik sem <input type="checkbox"/>	?
---	-----------------------------	----------------------------------	-------------------------------------	--	-----------------------------	------------------------------------	---

(6) Mely tulajdonságok érvényesek az alábbi gráfra, ha „EV”, illetve „zárt EV” a „van Euler-vonala”, illetve „van zárt Euler-vonala” rövidítése?



?	EV <input type="checkbox"/>	zárt EV <input type="checkbox"/>	páros gráf <input type="checkbox"/>	síkgráf <input type="checkbox"/>	van Hamilton-köre <input type="checkbox"/>	fa <input type="checkbox"/>	egyik sem <input type="checkbox"/>	?
---	-----------------------------	----------------------------------	-------------------------------------	----------------------------------	--	-----------------------------	------------------------------------	---

(6) Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) Az $\{ap, bt, ds, ev, fr, gx, hw, iq, jy\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	bq <input type="checkbox"/>	te <input type="checkbox"/>	jy <input type="checkbox"/>	ev <input type="checkbox"/>	hw <input type="checkbox"/>	egyik sem <input type="checkbox"/>	?
---	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	------------------------------------	---