Lineáris egyenletrendszerek

1. Alapfogalmak

1. Definíció. Egy m egyenletből álló, n-ismeretlenes **lineáris egyenletrendszer** általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Az egyenletrendszer felírható $A\underline{x} = \underline{b}$ formában is, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix az egyenletrendszer (együttható)mátrixa, az egyenletrendszer bővített mátrixa pedig

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

A következő definícióban a lineáris egyenletrendszer megoldásának definícióját adjuk meg.

2. Definíció. Az (1) egyenletrendszer **megoldás**ának nevezünk egy $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ szám n-est (azaz vektor), ha azt az (1)-be visszahelyettesítve minden egyenlőség teljesül.

3. Példa. Az

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $(11, 5)$ vektor megoldása.

Egy egyenletrendszer láttán több kérdés is felmerül (teljesen) jogosan. Megoldható-e? Ha igen, hány megoldása van? Ha esetleg végtelen sok megoldása van, akkor meg tudjuk adni az összeset. A következőkben ezeket a kérdéseket fogjuk megválaszolni lineáris egyenletrendszerekre.

2. Gauss-elimináció

A Gauss-elimináció egy algoritmus, mellyel tetszőleges lineáris egyenletrendszernek megkapható az összes megoldása. Az ereje abban rejlik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek az egyenletei módosíthatók úgy, hogy az új egyenletek ugyanazt az információt hordozzák, mint a régiek.

4. Definíció. Egyenletrendszer **elemi átalakítás**ai (bővített mátrix elemi átalakításai):

(1) Két egyenletet (sort) felcserélünk.
(2) Egy egyenletet (sort) megszorzunk egy tetszőleges nemnulla skalárral.
(3) Valamelyik egyenlethez (sort) hozzáadjuk egy másik egyenlet (sort) skalárszorosát.
(4) Ha az egyik egyenletben minden együttható és a jobb oldali konstans is nulla, akkor az egyenletet elhagyjuk. (A csupa nulla sort elhagyjuk.)

Az tény, hogy ezzel tudjuk módosítani az egyenletrendszer alakját, de valamilyen célra is szükségünk van, mert egyébként vég nélkül alkalmazhatnánk az elemi átalakításokat. A cél az, hogy az egyenletrendszer (mátrixa) lépcsős alakú legyen.

5. Definíció. Egy egyenletrendszer (mátrixa) **lépcsős alak**ú, ha a bővített mátrixának

1. nincs csupa nulla sora és
2. minden sorának első nemnulla eleme hátrább van, mint a fölötte álló sor első nemnulla eleme.

6. Tétel (Gauss-elimináció)**.** *Bármely nem azonosan nulla bővített mátrixú egyenletrendszer lépcsős alakra hozható elemi átalakításokkal, és ebből az egyenletrendszer megoldása könnyen kiolvasható.*

7. Példa. Az előző példa megoldása ezzel a módszerrel a következőképpen alakul:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\clubsuit} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$\clubsuit$: A 2. sorhoz hozzáadjuk az első sor (-2)-szeresét.

A megoldás visszafejtése:

- Alsó sor: $y = 5$.
- Első sor: $x - 2y = 1$. Ebbe behelyettesítjük az $y = 5$-öt, tehát $x = 11$.

8. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \end{array}\right)$$

(1) : 1. és 3. sor cseréje.
(2) : A 2. sorhoz hozzáadjuk az 1. sort.
(3) : A 3. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét.
(4) : A 2. sort megszorozzuk (-1)-gyel.
(5) : A 3. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-7)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-6)-szorosát.
(6) : A 4. sorból levonjuk a 3. sort.
(7) : Elhagyjuk a 4. sort.

Megoldás visszafejtése:

- $-11z = 18 \Longrightarrow z = -\frac{18}{11}$
- $y + z = -3 \Longrightarrow y - \frac{18}{11} = -3 \Longrightarrow y = -3 + \frac{18}{11} = -\frac{15}{11}$
- $x - 2y + z = 2 \Longrightarrow x - 2\left(-\frac{15}{11}\right) + \left(-\frac{18}{11}\right) = 2 \Longrightarrow x = 2 + \frac{18}{11} - \frac{30}{11} = \frac{10}{11}$

Megkaptuk az egyenletrendszer **egyetlen** megoldását: $\left(\frac{10}{11}, -\frac{15}{11}, -\frac{18}{11}\right)$.

Az előző mondatban az egyetlen szó ki van emelve. Ugyanis honnan tudjuk, hogy nincs több? Ha jól megnézzük, akkor három lehetséges módon érhet véget az algoritmusunk.

9. Tétel. *Ha az elemi átalakításokkal az $(A|\underline{b})$ egyenletrendszert $(B|\underline{d})$ lépcsős alakra hozzuk, akkor a következő valamelyike teljesül.*

(1) A $(B|\underline{d})$ mátrix tartalmaz ellentmondó sort, azaz olyan sort, melyben a vonaltól balra minden együttható nulla, a jobboldali elem pedig nemnulla.
(2) A $(B|\underline{d})$ mátrix nem tartalmaz ellentmondó sort, és B négyzetes.
(3) A $(B|\underline{d})$ mátrix nem tartalmaz ellentmondó sort, és B-nek több oszlopa van, mint sora.

10. Tétel. *Az előző tétel eredménye mellett a lineáris egyenletrendszernek a következő lehetséges megoldásai lehetnek.*

*(1) Az egyenletrendszernek **nincs megoldás**a.*
*(2) Az egyenletrendszernek pontosan **egy darab** megoldása van (melyet a lépcsős alakból visszafejtve kaphatunk meg.)*
*(3) Az egyenletrendszernek **végtelen sok** megoldása van (melyet a lépcsős alakból visszafejtve kaphatunk meg.)*

A végtelen sok megoldás esetében a lépcsős alakban van olyan változó (oszlop), mely nem tartalmazza egyik sornak sem az első nemnulla elemét. Ez lehetőséget teremt a változók osztályozására.

11. Definíció. Az (1) egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakjában a soronkénti első nem nulla elemek oszlopainak megfelelő változókat **kötött változó**knak nevezzük.

12. Definíció. Az (1) egyenletrendszer nem kötött változóit **szabad változó**knak nevezzük.

13. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & = & 8 \\ 9x & + & 10y & + & 11z & = & 12 \\ 13x & + & 14y & + & 15z & = & 16 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(1) : Az 1. sor (-5)-szörösét hozzáadom a 2. sorhoz. Az 1. sor (-9)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz. Az 1. sor (-13)-szorosát hozzáadom a 4. sorhoz.
(2) : A 2. sort elosztom (-4)-gyel. A 3. sort elosztom (-8)-cal. A 4. sort elosztom (-12)-vel.
(3) : A 3. sorból kivonom a 2. sort. A 4. sorból kivonom a 2. sort. Mivel csupa nulla sorokat kapunk, el is hagyjuk azokat.

Megoldás visszafejtése:

- A harmadik oszlopnak megfelelő z változó szabad változó, tehát $z \in \mathbb{R}$ tetszőleges értéket felvehet.

- $y + 2z = 3 \Longrightarrow y = 3 - 2z$
- $x + 2y + 3z = 4 \Longrightarrow x = 4 - 3z - 2y = 4 - 3z - 2(3 - 2z) = 4 - 3z - 6 + 4z = -2 + z$

Megkaptuk az egyenletrendszer **végtelen sok** megoldását. A képletbe behelyettesítve egy tetszőleges z értéket, megkapunk egy rögzített megoldást. Az általános megoldás felírható

$$(-2 + z, 3 - 2z, z)$$

alakban, ahol $z \in \mathbb{R}$.

14. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 7x & + & 7y & + & 8z & = & 10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) : Az 1. sor (-4)-szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz. Az 1. sor (-7)-szeresét hozzáadjuk a 3. sorhoz.
(2) : A második sort elosztom (-3)-mal.
(3) : A 3. sorhoz hozzáadom a 2. sor 6-szorosát.

Megoldás visszafejtése:

- Utolsó sor: $0 = 1 \Longrightarrow$ Ellentmondás.

Azt kaptuk, hogy az egyenletrendszernek **nincs megoldása**.

Tehát összefoglalva az eddigi eredményeinket:

15. Tétel. *Bármely lineáris egyenletrenszernek* ***0, 1 vagy végtelen sok*** *megoldása van.*

- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & c \end{array}\right), \text{ ahol } c \neq 0.$$

- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha van szabad változója.*
- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha a bővített mátrixának lépcsős alakjának ugyanannyi sora van, mint ahány ismeretlen, azaz nincs szabad változó.*

9. feladatsor – Vektorok

9.1. Feladat. Határozzuk meg a következő $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok belső (skaláris) szorzatát, illetve vektoriális szorzatát.

(a) $\underline{a} = (1, -2, 3)$, $\underline{b} = (2, -4, 1)$;
(b) $\underline{a} = (-1, 4, 2)$, $\underline{b} = (1, -5, 3)$;

9.2. Feladat. Döntsük el, hogy a következő vektorrendszerek lineáris függetlenek-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $\underline{a} = (-2, 4)$, $\underline{b} = (1, -2)$;
(b) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$;
(c) $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (4, 1, 0)$, $\underline{c} = (0, 0, 0)$;
(d) $\underline{a} = (1, -2, 4)$, $\underline{b} = (2, -3, 1)$, $\underline{c} = (-4, 5, 5)$;
(e) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$, $\underline{c} = (4, 3, -2)$, $\underline{d} = (-1, 4, -3)$;
(f) $\underline{a} = (1, 2, -1)$, $\underline{b} = (3, 1, 4)$, $\underline{c} = (2, 3, -1)$;
(g) $\underline{a} = (1, -2, 3, 4)$, $\underline{b} = (0, -3, 1, 2)$, $\underline{c} = (2, -4, 5, 9)$.

9.3. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

(a) $\underline{a} = (2, 3)$, $\underline{b} = (x, -6)$;
(b) $\underline{a} = (1, -4, 3, 2)$, $\underline{b} = (-1, 4, -2, -4)$, $\underline{c} = (3, -12, x, 10)$;
(c) $\underline{a} = (-1, -3, 2, 1, -1)$, $\underline{b} = (-2, -8, 7, 3, -1)$, $\underline{c} = (1, 9, -11, -4, x)$;
(d) $\underline{a} = (1, -1, 2)$, $\underline{b} = (2, -1, -1)$, $\underline{c} = (1, 0, a^2)$, $\underline{d} = (2, -1, a + 4)$.

9.4. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valamint adjuk meg a megoldástér egy bázisát.

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

9.5. Feladat. Döntsük el, hogy a következő halmazok alteret alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$-ben. Ha igen, akkor adjuk meg az altér dimenzióját.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - 2y = z, y + z = x\}$;
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y + 3z = 2\}$;
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;
(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

9.6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit, majd adjunk meg bázist a sajátértékekhez tartozó sajátalterekhez.

(a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

9. feladatsor – Vektorok

9.1. Feladat.

(a) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 13$, $\underline{a} \times \underline{b} = (10, 5, 0)$;
(b) $\underline{a} \cdot \underline{b} = -15$, $\underline{a} \times \underline{b} = (22, 5, 1)$;

9.2. Feladat.

(a) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(b) Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.
(c) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(d) Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(e) Lineárisan függő, generátorrendszer, nem bázis.
(f) Lineárisan független, generátorrendszer, bázis.
(g) Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

9.3. Feladat.

(a) Ha $x = -4$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(b) Ha $x = 7$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(c) Ha $x = -2$, akkor lineárisan függő, egyébként független.
(d) Bármely a esetén lineárisan független.

9.4. Feladat.

(a) 1-dimenziós, bázis: $\{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$.
(b) 2-dimenziós, bázis: $\{(-1, \frac{1}{2}, 0, 1), (0, -\frac{1}{2}1, 0)\}$.

9.5. Feladat.

(a) 1-dimenziós altér
(b) nem altér
(c) 0-dimenziós altér
(d) 3-dimenziós altér
(e) 2-dimenziós altér

9.6. Feladat.

(a) $\lambda_1 = -3$, bázis: $\{(2, 1)\}$; $\lambda_2 = 1$, bázis: $\{\frac{2}{3}, 1\}$
(b) $\lambda = -2$, bázis: $\{(-1, 1)\}$
(c) $\lambda_1 = -2$, bázis: $\{(-\frac{1}{3}, 1, 0)\}$; $\lambda_2 = 1$, bázis: $\{(1, 0, 0)\}$; $\lambda_3 = 3$, bázis: $\{(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 1)\}$
(d) $\lambda_1 = 2$, bázis: $\{(1, 0, 1)\}$; $\lambda_2 = -2$, bázis: $\{(0, 1, 1)\}$