# Determinánsok

Determináns kiszámítási módjai,
tulajdonságai és alkalmazásai.

## 1. Determináns

A determináns fogalmának kiépítése többféleképpen is megtörténhet. Van, aki a determináns egy külön objektumnak tekinti. Mi jobban szeretjük a determinánst úgy interpretálni, hogy ez egy leképezés, ami négyzetes mátrixokhoz rendel számot. Azt hogy hogy, a következő alfejezetekben fogjuk definiálni.

### 1.1. Sarrus-szabály

Egy 1 darab számból álló mátrix determinánsa maga a mátrixot alkotó szám. Egy $(2 \times 2)$-es determináns kiszámítására maga a Sarrus-szabály a definíció:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= (\text{főátló elemeinek szorzata}) - (\text{mellékátló elemeinek szorzata}) \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

**Felhívjuk a <u>következő</u> rész veszélyére a figyelmet. A Sarrus-szabály csak $(3\times3)$-as méretig működik, nagyobb mátrixra NEM használható.**

A $(3 \times 3)$-as mátrix determinánsa hasonlóan számítható. Itt nem csak a főátlóval, és a mellékátlóval kell számolni, hanem a velük párhuzamos „átlókkal” is. Segítségképpen a determináns után odaírhatjuk az első két oszlopát, hogy jobban lássuk a párhuzamosságot.

$$\left|\begin{array}{ccccc|cccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array}\right. , \qquad \left|\begin{array}{ccccc|cccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array}\right.$$

A determináns a következőképp áll össze. A főátlóban és a vele párhuzamos átlókban lévő elemek szorzatát adjuk össze, és ebből vonjuk ki a mellékátlóban, és a vele párhuzamos átlóban lévő elemek szorzatát. Tehát a következőt kell csinálni:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Nézzük meg ezt egy konkrét példán keresztül.

**Példa.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3\cdot(-5)\cdot 1) + (2\cdot 1\cdot(-8)) + ((-4)\cdot(-2)\cdot 2)$$

$$- ((-4)\cdot(-5)\cdot(-8)) - (2\cdot(-2)\cdot 1) - (3\cdot 1\cdot 2)$$

$$= -15 - 16 + 16 + 160 + 4 - 6 = 143$$

1. *Megjegyzés.* Maga a számolási algoritmus nem bonyolult, de ennél a módszernél viszonylag nagy az elszámolás veszélye.

**Felhívjuk az előző rész veszélyére a figyelmet. A Sarrus-szabály csak $(3\times3)$-as méretig működik, nagyobb mátrixra NEM használható.**

## 1.2. Sor/oszlop szerinti kifejtés (Kifejtési tétel)

Most mutatunk egy olyan módszert, amivel tetszőleges méretű mátrix determinánsa kiszámolható. (Vigyázzunk, nagy méretű mátrixok esetén nagyon megnő a módszer számolásigénye.)

Sor, illetve oszlop szerinti kifejtésnél gondolnunk kell a mátrixhoz tartozó „sakktáblára”, ami előjeleket tartalmaz felváltva, a bal felső sarok mindig „+”, és onnantól váltakozik az előjel jobbra és lefelé, mint egy sakktábla színei:

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | − | + | ... |
| − | + | − | ... |
| + | − | + | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ |

Kiválasztjuk a determináns tetszőleges sorát vagy oszlopát, ami szerint a kifejtést el akarjuk végezni. Legyen ez először például az **első oszlop**. A determináns értéke a következőképpen adódik. A kiválasztott sor, vagy oszlop elemeit egyesével megszorozzuk a sakktáblában neki megfelelő előjellel, majd megszorozzuk annak a maradék determinánsnak az értékével, amit úgy kapunk, hogy az eredeti determinánsból töröljük az elem sorát és oszlopát. Az így kapott értékeket összeadva kapjuk meg a determináns értékét. A példán talán jobban látszik, hogy hogyan kell csinálni.

**Példa.** A determinánsban a piros előjelek a sakktábla megfelelő elemeit jelölik.

$$\begin{vmatrix} 3^{+} & 2 & -4 \\ -2^{-} & -5 & 1 \\ -8^{+} & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-8)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

A módszer lényege, hogy egy $(n \times n)$ méretű determinánst vissza tudunk vezetni $(n-1) \times (n-1)$-es determinánsokra. Folytassuk az (1) egyenlőséget, mivel a $(2 \times 2)$-es determinánsok értéke már könnyen számolható:

$$\begin{aligned}
(1) &= 3 \cdot ((-5) \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 8 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-5)) \\
&= 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 10 - 8 \cdot (-18) = -21 + 20 + 144 = 143.
\end{aligned}$$

Ellenőrzésképpen végezzük el a determináns kifejtését a **második sora** szerint is:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2^{-} & -5^{+} & 1^{-} \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 5 \cdot (3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-8)) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-8)) \\
&= 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-29) - 1 \cdot 22 = 20 + 145 - 22 = 143.
\end{aligned}$$

2\. *Megjegyzés.* Ez a módszer tetszőleges méretű determinánsokra is működik, szemben a Sarrus-szabállyal, ami csak $(2 \times 2)$-es és $(3 \times 3)$-as determinánsokra alkalmazható.

3\. *Megjegyzés.* Ha van a mátrix elemei között nulla, akkor érdemes lehet olyan sort, vagy oszlopot választani a kifejtéshez, amiben hemzsegnek a nullák. Ugyanis a kifejtésnél a nullához tartozó kisebb determináns 0-val szorzódna, így fel sem fontos tüntetni.

**Példa.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 10 & 6 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)(-1)(4-3) = 3$$

A fenti determinánst a harmadik oszlopa szerinti kifejtéssel határoztuk meg. Így egy $3 \times 3$-as determinánst kaptunk, amit pedig az első oszlopa szerinti kifejtéssel kaptunk meg.

4\. *Megjegyzés.* Dolgozatokban érdemes a kifejtéses módszert alkalmazni, mert elszámolási hiba esetén még esetleg lehet részpontot adni, míg a Sarrus-szabálynál ez nehezebben oldható meg.

## 1.3. Elemi átalakítások (Gauss-elimináció)

Ez a módszer ugyanúgy alkalmazható tetszőleges méretű mátrixokra, és sokkal gyorsabb is, viszont nem olyan egyszerű algoritmus szerint működik, mint az előző kettő. Egyébként nagyon fontos algoritmus elméleti és gyakorlati szempontból is. A kurzuson is elő fog még kerülni több kontextusban.

**5. Tétel** (Determinánsokra vonatkozó alapvető tulajdonságok.)**.**

1. *Egy determináns előjelet vált, ha két sorát megcseréljük.*
2. *Ha egy determináns valamelyik sora nulla, akkor a determináns értéke nulla.*
3. *Egy determináns értéke nulla, ha van két azonos sora.*
4. *Ha a determináns egy sorában minden elemet ugyanazzal a nemnulla konstanssal megszorzunk, vagy elosztunk, akkor a determináns értéke is ezzel a konstanssal szorzódik, vagy osztódik.*
5. *Egy determináns értéke nulla, ha az egyik sora egy másik sor valamely konstans-szorosa.*
6. ***A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát.***
7. *Dualitási elv: az* $1-6$. *állításokban a „sor” szó kicserélhető az „oszlop” szóra.*

A félkövérrel kiemelt tulajdonság ismételt használatával gyorsan ki tudjuk számítani a determinánst, mert meg tudjuk növelni a determinánsban szereplő nullák számát. A felsorolás többi eleme is hasznos lehet, de az alkalmazásuk nem szükségszerű.

**Példa.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -29 & 10 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -29 & 10 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (-7)\cdot(-29) - 6\cdot 10 = 143.$$

- (1): A 2. sorhoz hozzáadtam a 3. sor $(-1)$-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (2): Az 1. sorhoz hozzáadtam a 3. sor 4-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (3): Kifejtettem a determináns a 3. oszlopa szerint. (A sok nulla miatt valójában csak egy kisebb determinánst kell kiszámolni.)
- (4): Sarrus-szabállyal megkaptam a végső eredményt.

## 1.4. Érdekesség

Mindkét említett általános algoritmus könnyen programozható, és egy $100 \times 100$-as mátrix determináns kiszámítását nyilván nem kézzel fogjuk kiszámítani. Azonban számítógép használata esetén minden számítási algoritmusnál meg kell vizsgálni az alábbi két tulajdonságot.

1. Milyen gyors az algoritmus?
2. Mennyire pontos az algoritmus?

Az utóbbit itt most nem boncolgatjuk, viszont az első kérdésre a fenti algoritmusok tekintetében meglepő eredmények adhatók.

Egy $(n \times n)$-es mátrix determinánsának kiszámítása a kifejtéses módszerrel $\mathcal{O}(n!)$ időigénnyel tehető meg. Ha Gauss-eliminációt használunk, akkor bizonyítható, hogy az időigény csak $\mathcal{O}(n^3)$. Röviden rávilágítanánk arra, hogy mennyivel jelent ez nagyobb gyorsaságot. Tegyük fel, hogy egy 5 GHz-es processzorú számítógéppel számolunk, ami azt jelenti, hogy 5 milliárd műveletet tud elvégezni másodpercenként. A könnyítés kedvéért a továbbiakban csak az ordo utáni függvényekkel számolunk. (A kapott eredményeket valami konstanssal meg kellene szorozni, a nagyságrendeken ez nem változtatna.)

Ha $n = 3$, akkor a mátrix determinánsának kiszámítása kifejtéses módszerrel $0,12 \cdot 10^{-8}$ másodpercig tart, míg Gauss-eliminációval $0,54 \cdot 10^{-8}$ másodpercig. Itt még a kifejtéses módszer a gyorsabb. Ha $n = 10$, akkor az első módszerrel a számítás $0,00072576$ másodpercig tart, Gauss-eliminációval $0,0000002$ másodpercig tart. Itt az első módszer már több mint 3000-szer lassabb, de gyakorlatilag ez még elhanyagolható, mert a végső idő itt is kicsi.

Nézzük az $n = 15$ esetet. Gauss-eliminációval az időigény $0,000000675$ másodperc, míg kifejtéses módszerrel $4,358914560$ perc. Ez már eléggé érzékelhető és zavaró különbség. Ha $n = 20$, akkor a Gauss-eliminációnak még mindig jóval másodperc alatti idő szükséges, $0,0000016$ másodperc, míg a kifejtéses módszernek $15,64366003$ évre lenne szüksége. Nem lenne túl hatékony ezt kivárni, és még nagyon messze vagyunk a $(100 \times 100)$-as mérettől.

Végül ugorjunk egy „hatalmasat”, legyen $n = 50$. A Gauss-elimináció még mindig hatékony, időigénye $0,000025$ másodperc. A kifejtéses módszerrel már komoly problémába ütköznénk, ugyanis $0.1955638709 \cdot 10^{48}$ évre lenne szüksége. A Nap várható hátralévő élettartamát 5-10 milliárd évre becsülik, tehát a Nap már nem élné meg az eredményt. Ha jól tudjuk, akkor ez a számolási időigény már a világegyetem várható életkoránál is nagyobb szám. Ha valaki kíváncsi rá, hogy a Gauss-elimináció mekkora $n$ esetén megy 1 másodperc fölé, az könnyen kiszámolhatja egy egyszerű egyenletmegoldással. A fenti adatokat foglalja össze az alábbi táblázat.

| Méret | Gauss-elimináció | Rekurzív kifejtés |
|---|---|---|
| $3 \times 3$ | $0,54 \cdot 10^{-8}$ mp | $0,12 \cdot 10^{-8}$ mp |
| $10 \times 10$ | $0,0000002$ mp | $0,00072576$ mp |
| $15 \times 15$ | $0,000000675$ mp | $4,358914560$ perc |
| $20 \times 20$ | $0,0000016$ mp | $15,64366003$ év |
| $50 \times 50$ | $0,000025$ mp | $0.1955638709 \cdot 10^{48}$ év |

Más kérdés, hogy melyik módszer mennyire stabil numerikusan, ebbe most nem megyünk bele, de ez is érdekes kérdés.

A vázolt probléma egyáltalán nem csak elméleti, mert bizonyos területeken valóban több százszor több százas méretű mátrixokkal kell számolni, és ráadásul ezek a mátrixok több tíz tizedesjegy pontosságú tizedes törteket tartalmaznak. Hasonló kérdésekkel találkozhattok a Közelítő és szimbolikus számítások kurzuson.

## 1.5. Alkalmazások

- Kalkulus: Jacobi-determináns
- Paralelogramma területének, paralelepipedon térfogatának kiszámítása.

- Egyenletrendszerek megoldása Cramer-szabállyal.
- Adott pontokon átmenő sík, egyenes, kör egyenlete is felírható determinánssal.
- Adott egy gráf. Van-e benne kör? Mennyi a feszítőfáinak száma? A kérdések a megfelelő mátrixok determinánsa alapján megoldható. (Informatikai párhuzam: van-e holtpont az erőforrások között? A választ lásd az Operációs rendszerek című kurzuson.)
- Adott egy páros gráf, van-e benne teljes párosítás? Egy speciális determinánssal ez is könnyen eldönthető.

## 1.6. Kiegészítés

- Wolfram Alpha / Wolfram Mathematica: `Det[3,2,-4,-2,-5,1,-8,2,1]`
- Maple: `LinearAlgebra[Determinant](Matrix([[3,2,-4],[-2,-5,1],[-8,2,1]))`
- Matlab: `det([3 2 -4;-2 -5 1;-8 2 1])`
- Matek.hu

# Mátrixok

Mátrixok. Mátrixműveletek és tulajdonságaik. Sajátérték, sajátvektor.

Ebben a részben a matematika olyan részét tárgyaljuk, melynek először nem látszik, hogy mi haszna lehet. Elég számolásigényes, de legalább könnyen algoritmizálhatóak ezek a számolások. A kurzus kereteibe sajnos nem fér bele, hogy ezek a matematikai objektumok hogyan segítenek (főleg egy informatikusnak) problémákat modellezni, de próbáljuk meg elfogadni, hogy a sok számolás mögött értelem és alkalmazás is van.

## 1. Mátrixok

**1. Definíció.** Az $M$-mel jelölt $m \times n$-es **mátrix** egy $T$ test elemeiből (a mi esetünkben ez valós számokat jelent) álló táblázat, $m$ darab sorral és $n$ darab oszloppal. Az ilyen paraméterekkel rendelkező mátrixot $M_{m\times n}$-nel jelöljük. Az $M$ mátrix $i$-edik sorának $j$-edik elemét $m_{ij}$-vel jelöljük.

Talán ezt a fogalmat úgy ismeri mindenki a programozás kurzusról, hogy kétdimenziós tömb. Ugyanarról van szó.

**2. Példa.** Legyen $M$ az alábbi mátrix:

$$M_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0.75 \\ \pi & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 6 & -7.2 & 9\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor például $m_{13} = \sqrt{2}$.

Van két speciális mátrix, melyet mérettől függetlenül mindig ugyanúgy nevezünk.

**3. Definíció.** Az $(n \times n)$-es **egységmátrix** olyan mátrix, amelynek a főátlója 1-eket tartalmaz, a többi eleme, pedig nulla:

$$I_n = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $(n \times n)$-es **nullmátrix** olyan mátrix, amely csak nulla elemeket tartalmaz:

$$Z_n = O_n = \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2. Mátrixműveletek

Már többször találkoztunk azzal a jelenséggel, hogy új objektumot definiáltunk. Most is ez történt, tehát azt is definiálni kell, hogyan tudunk velük dolgozni.

**4. Definíció** (**Mátrixok összeadása és skalárral szorzása**). Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{m\times n}$ két $T$ számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \text{ és } cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Az előző definíció virágnyelven azt jelenti, hogy csak két azonos méretű mátrixot tudunk összeadni, és ez az összeadás pozíciónkénti összeadást jelent.

5. *Megjegyzés.* Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni, különböző méretűeket sosem.

**6. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \qquad (-2)\cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

**7. Definíció** (**Mátrixok szorzása**). Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{n\times k}$ két $T$ számtest feletti mátrix. Ekkor

$$AB = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right)_{m\times k}.$$

A fenti szummás képletet szövegesen is elmagyarázzuk. Egy $(m\times n)$-es és egy $(n\times k)$-s mátrix szorzata $(m \times k)$-s méretű. Továbbá a szorzat $i$-edik sorának $j$-edig eleme $\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$, azaz az $A$ mátrix $i$-edik sorának és a $B$ mátrix $j$-edik oszlopának skaláris szorzata.

8. *Megjegyzés.* Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával.

9. *Megjegyzés.* Az $AB$ szorzat általában nem egyezik meg a $BA$ szorzattal, sőt még lehet, hogy a méretük miatt valamelyik nincs is értelmezve.

**10. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $AB$ mátrix $(2 \times 2)$-es méretű lesz. A számolást végezzük úgy hogy az $A$ megfelelő sorvektorait szorozzuk össze skalárisan $B$ megfelelő oszlopvektorával. A skaláris szorzás a következőt jelenti:

$$\langle (a, b, c, d), (e, f, g, h)\rangle = ae + bf + cg + dh.$$

Tehát $AB$ megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle(2,-3,5),(6,2,-3)\rangle & \langle(2,-3,5),(-1,-2,0)\rangle \\ \langle(1,0,8),(6,2,-3)\rangle & \langle(1,0,8),(-1,-2,0)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12-6-15 & -2+6+0 \\ 6+0-24 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**11. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle(5,4,-2),(-1,0,-5)\rangle & \langle(5,4,-2),(-2,8,7)\rangle & \langle(5,4,-2),(3,3,9)\rangle \\ \langle(-9,4,6),(-1,0,-5)\rangle & \langle(-9,4,6),(-2,8,7)\rangle & \langle(-9,4,6),(3,3,9)\rangle \\ \langle(3,1,-2),(-1,0,-5)\rangle & \langle(3,1,-2),(-2,8,7)\rangle & \langle(3,1,-2),(3,3,9)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+0+10 & -10+32-14 & 15+12-18 \\ 9+0-30 & 18+32+42 & -27+12+54 \\ -3+0+10 & -6+8-14 & 9+3-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**12. Definíció** (**Transzponálás**)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ egy $T$ számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor $A^T$ egy $(n \times m)$-es mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, vagy másképpen fogalmazva tükrözzük a mátrixot a „főátlóra”. (Igazi főátlóról csak négyzetes mátrixok esetében szoktunk beszélni.)

**13. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \; B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \; C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Ugyanúgy, mint számoknál, a mátrixoknál is vannak a műveleteknek bizonyos tulajdonságai. Némelyik öröklődik a számoknál lévőkből, némelyeket a definíció alapján kell igazolni.

**14. Tétel** (Műveletek tulajdonságai.)**.** *Legyenek $A, B, C$ egy tetszőleges $T$ test feletti mátrixok, és $c, d \in T$ skalárok. Ekkor*

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $c(AB) = (cA)B$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c\left(A^T\right)$

*ha a megfelelő műveletek elvégezhetőek. (Ha az egyenlőség valamelyik oldalát nem lehet elvégezni, akkor semmi értelme egyenlőségről beszélni.)*

# 3. Sajátérték

**15. Definíció.** Legyen $A$ egy $(n \times n)$-es mátrix. Ha $xA = \lambda x$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{1\times n}$ sorvektorra, akkor $\lambda$-t az $A$ mátrix **sajátérték**ének, az $x$ vektort pedig az $A$ mátrix $\lambda$-hoz tartozó **baloldali sajátvektor**nak nevezzük.

**16. Definíció.** Legyen $A$ egy $(n \times n)$-es mátrix. Ha $Ax = \lambda x$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{n\times 1}$ oszlopvektorra, akkor $\lambda$-t az $A$ mátrix **sajátérték**ének, az $x$ vektort pedig az $A$ mátrix $\lambda$-hoz tartozó **jobboldali sajátvektor**nak nevezzük.

**17. Definíció.** Legyen $A$ egy $(n \times n)$-es mátrix, és $\lambda$ egy sajátértéke $A$-nak. Ekkor a $\lambda$-hoz tartozó bal- és jobboldali sajátvektorok halmazát a nullvektorral kiegészítve **bal-** illetve **jobboldali sajátaltér**nek nevezzük.

**18. Definíció.** Legyen $A$ egy $T$ számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. A

$$\chi_A(x) = (-1)^n \cdot \det\left(A - x \cdot E_n\right)$$

polinomot az $A$ mátrix **karakterisztikus polinom**jának nevezzük.

**19. Tétel.** *Legyen $A$ egy $T$ számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. Ekkor az $A$ mátrix sajátértékei pontosan a $\chi_A(x)$ karakterisztikus polinom gyökei.*

**20. Példa.** Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 9-x & 4 \\ 3 & 5-x \end{vmatrix} = (9-x)(5-x)-12 = x^2-14x+33,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyökei: } x_1 = 3,\ x_2 = 11.$$

Így a mátrixnak két különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 11$.

**21. Példa.** Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = (1-x)(5-x)+4 = x^2-6x+9,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x = 3.$$

Így a mátrixnak egy darab valós sajátértéke van: $\lambda = 3$.

**22. Példa.** Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (1-x)(3-x)+2 = x^2-4x+5,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2-i,\ x_2 = 2+i.$$

Így a mátrixnak nincs sajátértéke, ha a valós számok teste fölött dolgozunk, viszont a komplex számok teste esetén két gyök van, így az $A$ mátrixnak két különböző komplex sajátértéke van: $\lambda_1 = 2-i$ és $\lambda_2 = 2+i$.

**23. Példa.** Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) \quad = \quad \begin{vmatrix} 8-x & 5 & 9 \\ 0 & -9-x & -1 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (8-x)(-9-x)(5-x)$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 8,\ x_2 = -9,\ x_3 = 5.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -9$ és $\lambda_3 = 5$.

**24. Példa.** Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-(1-x)^2 & 1+(1-x) \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 2-x \\ 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 1 \\ 2x-3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)(-1-1+2x-x^2-2x+3) = (x-2)(1-x^2)
\end{aligned}$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = -1$.

# 4. Inverz

**25. Definíció.** Egy $A$ négyzetes mátrix **inverz**ének nevezzük azt az $A^{-1}$-gyel jelölt mátrixot, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, ahol $I$ a megfelelő méretű egységmátrix. (A definíció alapján egyértelmű, hogy az inverz mérete megegyezik az eredeti mátrix méretével.)

A definíció azonban semmit nem mond arról, hogy milyen mátrixoknak van inverze, és ha van, akkor hogyan számolhatjuk ki. A következőkben két kiszámítási módot fogunk ismertetni.

## 4.1. Tétel szerinti kiszámítás

**26. Definíció.** Egy $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix $a_{ij}$ eleméhez tartozó **adjungált aldeterminánst** $A_{ij}$-vel jelöljük és az

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

képlettel számítjuk ki, ahol $D_{ij}$ az $a_{ij}$ elemhez tartozó **aldetermináns**, vagyis annak a mátrixnak a determinánsa, melyet úgy kapunk, hogy az $A$ mátrixból elhagyjuk az $i$-edik sorát és $j$-edik oszlopát.

**27. Tétel.** *Tetszőleges $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\det(A) \neq 0$. Ha van inverze, akkor pontosan egy van, és erre érvényes az alábbi képlet:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A_{ji})_{n\times n}.$$

**28. Példa.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\det(A) = 3 + 4 - 2 - 4 = 1$$

$$A_{11}=(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=4-6=-2,\quad A_{12}=(-1)^{(1+2)}\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=-(4-3)=-1,$$
$$A_{13}=(-1)^{(1+3)}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1,\quad A_{21}=(-1)^{(2+1)}\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=-(4-4)=0,$$
$$A_{22}=(-1)^{(2+2)}\begin{vmatrix}0&2\\1&4\end{vmatrix}=0-2=-2,\quad A_{23}=(-1)^{(2+3)}\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=-(0-1)=1,$$
$$A_{31}=(-1)^{(3+1)}\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=3-2=1,\quad A_{32}=(-1)^{(3+2)}\begin{vmatrix}0&2\\1&3\end{vmatrix}=-(0-2)=2,$$
$$A_{33}=(-1)^{(3+3)}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=0-1=-1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

## 4.2. Gauss–Jordan-elemináció

**29. Definíció.** Egy adott $M$ mátrix esetén a **sorvektorrendszer elemi átalakításai**n az alábbiakat értjük:

- két sor cseréje,
- egy sor megszorzása egy nemnulla konstanssal,
- egyik sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

**30. Tétel.** *Ha $A$ egy $n\times n$-es négyzetes mátrix, $I$ pedig az $n\times n$-es egységmátrix, akkor tekintsük a $B=(A\mid I)$ mátrixot. Az $A$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a sorvektorrendszer elemi átalakításainak sorozatával a $B$ mátrix $(I\mid C)$ alakra hozható. Ekkor $A^{-1}=C$.*

**31. Példa.** $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&3\\1&2&4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&3&0&1&0\\1&2&4&0&0&1\end{array}\right]\overset{(1)}{\rightsquigarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\1&2&4&0&0&1\end{array}\right]\overset{(2)}{\rightsquigarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\end{array}\right]\overset{(3)}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\end{array}\right]\overset{(4)}{\rightsquigarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]\overset{(5)}{\rightsquigarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]$$

$$\overset{(6)}{\rightsquigarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]\overset{(7)}{\rightsquigarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&-1&-2&2\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

(1) 1. és 2. sor cseréje.
(2) 3. sorból kivonom az 1.-t.
(3) 1. sorból kivonom a 2.-at.
(4) 3. sorból kivonom az 2.-at.
(5) 3. sor megszorzása $(-1)$-gyel.
(6) 1. sorból kivonom a 3.-at.
(7) 2. sorhoz hozzáadom a 3. sor $(-2)$-szeresét.

**32. Megjegyzés.** *Hasonlóan a determináns kiszámításához nagyobb méretű mátrixok esetén itt is a Gauss–Jordan-elimináció sokkal gyorsabb, mint a tétel szerinti aldeterminánsos módszer.*

# 5. Informatikai alkalmazások

- A különböző geometriai transzformációk tulajdonképpen lineáris leképezésnek tekinthetők, és kifejezhetők egy alkalmas mátrixszal történő szorzás segítségével. Például tükrözzük az $(a;\, b)$ pontot az $y$ tengelyre. Ekkor a kapott vektor $(-a,\, b)$. Ha jól megnézzük, könnyen megtaláljuk az $y$ tengelyre való tükrözés mátrixát:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mert } (-a;\, b) = (a;\, b) \cdot A.$$

  Ilyen mátrixok megadhatók tükrözésekre, forgatásokra, vetítésekre, akár több dimenzióban is. LÁSD: Diszkrét matematika III. és Számítógépes grafika tantárgyakból.
- A gráfok egyértelműen kódolhatók szomszédsági és pont-él illeszkedési mátrixukkal. Mivel a mátrix szinte minden programnyelvben jól kezelhető egy 2-dimenziós tömbként, így ennek a kódolásnak is vannak előnyei. A gráfok az informatika több területén is előkerülnek, akár programozási algoritmus, akár hardverszinten, például beszélhetünk erőforrásgráfról, vagy a számítógép-hálózat is felfogható egy (irányított) gráfként.
- Képzeljünk el egy épületet, ahol különböző helyiségekbe különböző embereknek van belépési jogosultságuk. Ez nagyon jól kódolható egy mátrixszal: sorok=emberek, oszlopok=ajtók, és a megfelelő pozícióban 1-es van, ha az adott embernek van belépési jogosultsága, 0, ha nincs.
- Lineáris egyenletrendszer esetén elég az egyenletrendszer bővített mátrixával dolgozni. Sokszor kell megoldani lineáris egyenletrendszert, és érdekes kérdések merülnek fel a numerikus precizitás és a számolás időigénye kapcsán, LÁSD: Közelítő és szimbolikus számítások.
- Kódoláselméletben bizonyos kódok esetében a kódolás és a dekódolás is egy-egy mátrixszorzással kivitelezhető. Ide kapcsolódik a generátormátrix és a paritás-ellenőrző mátrix fogalma is, LÁSD: Diszkrét matematika III.

# 7. feladatsor – Determinánsok, mátrixok

**7.1. Feladat.** Határozzuk meg a következő determinánsokat:

$$\textbf{(a)} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(d)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{(e)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**7.2. Feladat.** Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

**7.3. Feladat.** Adjuk meg az $x$ értékét úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$$

**7.4. Feladat.** Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A + B, 3A, B^T, BC, CA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

**7.5. Feladat.** Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ és $A^T \cdot A$ szorzatmátrixok determinánsát.

**7.6. Feladat.** Határozza meg a következő mátrixhatványokat ($n$ nemnegatív egész szám).

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1111} \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n}$$

**7.7. Feladat.** Adjuk meg a következő mátrixok inverzét:

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**7.8. Feladat.** Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $A, B$ $n \times n$-es mátrixok esetén?

**(a)** $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

**(b)** $(AB)^T = A^T B^T$

**(c)** $A^n A^m = A^{nm}$

**(d)** $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

# 7. feladatsor – Determinánsok, mátrixok

**7.1. Feladat megoldása.** **(a)** 14; **(b)** -70; **(c)** 10; **(d)** -21; **(e)** -7.

**7.2. Feladat megoldása.** $V = 14$.

**7.3. Feladat megoldása.** $x = 2$.

**7.4. Feladat megoldása.**

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -8 \\ -8 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

**7.5. Feladat megoldása.**

$$AA^T = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}, \quad |AA^T| = 11; \qquad A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad |A^TA| = 0.$$

**7.6. Feladat megoldása.**

**(a)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**(b)** $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ha $n = 0$ és $\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$, ha $n > 0$, ahol $F_n$ az $n$-edik Fibonacci-szám ($F_0 = 0, F_1 = 1$).

**7.7. Feladat megoldása.**

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} -17 & 16 & -9 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} -15 & 5 & 8 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7.8. Feladat megoldása.**

**(a)** Nem. **(b)** Nem. **(c)** Nem. **(d)** Igen.