Predikátumkalkulus

Predikátumkalkulus alapfogalmai, formalizálás,
tagadás, logikailag igaz formulák.

1. Bevezető

Vizsgáljuk meg a következő két kijelentést.

- Minden almához tartozik egy fa, amiről leesett.
- Bármely két racionális szám között van irracionális szám.

Az eddig tanult ítéletkalkulusbeli lehetőségek szerint ezek prímítéletek lennének, de érezzük rajtuk, hogy több információt hordoznak. Ezen probléma kiküszöbölése miatt ismerkedjünk meg a predikátumkalkulussal. A predikátumkalkulust az ítéletkalkulus kiegészítésének is tekinthetjük. A predikátumkalkulus eszközeivel az állítások precízebben formalizálhatók, logikailag jobban vizsgálhatók.

2. Predikátumkalkulus, formalizálás

1. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus szimbólumai**:

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$ és a „vessző”;
- $\exists$, azaz **egzisztenciális kvantor**: „létezik”, „van olyan”, „található”, „néhány”, „bizonyos”, „valamely”, ...;
- $\forall$, azaz **univerzális kvantor**: „bármely”, „minden”, „tetszőleges”, „az összes”, ...;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**, ezekre mint vizsgálandó objektumegyedekre kell gondolni, ezen individuumváltozók halmaza az individuumtartomány;
- **predikátumjelek** nemüres halmaza: a predikátum olyan függvény, amely individuumváltozókból logikai állítást készít;
- **függvényjelek** (esetleg üres) halmaza: olyan függvényekre kell gondolni, amely több objektumból egy új objektumot készít, azaz ezek szolgálnak a műveletek kifejezésére.

2. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus kifejezései** az alábbi rekurzió szabályai szerint megadható jelsorozatok.

- Az x_i individuumváltozók és individuumkonstansok önmagukban kifejezések;
- ha $k_1, \ldots, k_n$ kifejezések, akkor bármely f függvényjelre $f(k_1, \ldots, k_n)$ is kifejezés, ha az f függvény n-változós;

- az elsőrendű predikátumkalkulus minden kifejezése előáll az előző két szabály véges sokszori alkalmazásával.

3. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus atomi formulái** a $P(k_1, \dots, k_n)$ alakú jelsorozatok, ahol P egy n-változós predikátumjel, $k_1, \dots, k_n$ pedig kifejezések.

4. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus formulái**

- az atomi formulák;
- ha F és G formulák, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(F \to G)$, $(\neg F)$ is formulák;
- ha F formula és x_i individuumváltozó, akkor $(\forall x_i)\, F$ és $(\exists x_i)\, F$ is formula;
- az elsőrendű predikátumkalkulus minden formulája előáll az előző három szabály véges sokszori alkalmazásával.

FONTOS: a kvantor mindig az utána álló legrövidebb részformulára vonatkozik!
Most már megvannak a formalizáláshoz szükséges eszközeink és szabályaink. Lássunk néhány példát.

5. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden strucc madár."

- Legyen $U = \{\text{állatok}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjelek: $S(x)$: „x strucc", $M(x)$: „x madár".
- Formalizált állítás: $(\forall x)\, (S(x) \to M(x))$.

Mint a fenti példában is látható, egy predikátumjel egy adott objektumból állítást készít.

6. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden strucc madár."

- Legyen $U = \{\text{struccok}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $M(x)$: „x madár".
- Formalizált állítás: $(\forall x)\, (M(x))$.

Az előző két példa rávilágít arra, hogy fontos hogyan választjuk meg az individuumtartományt. Az első könnyebben bővíthető, például új predikátum jelek bevezetésével könnyen formalizálható a „Minden hal vízben él." mondat, míg a második individuumtartomány nem engedi meg az állítás formalizálását. Konkrét feladatoknál általában az individuumtartomány és a predikátumjelek előre adottak, ha nem, akkor szabadon megválaszthatóak. A valós életben ez mindig modellfüggő.

7. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden szentnek maga felé hajlik a keze."

- Legyen $U = \{\text{emberek}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $Sz(x)$: „x szent", $H(x, y)$: „x-nek y felé hajlik a keze".
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(Sz(x) \to H(x, x))$.

8. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Ha egy gyerek kék szemű, akkor az édesapja is kék szemű."

- Legyen $U = \{\text{emberek}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $G(x)$: „x gyerek", $K(x)$: „x kék szemű".
- Függvényjel: $a(x)$: „x édesapja".
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(G(x) \to (K(x) \to K(a(x))))$.

3. Tagadás

Gyakran van szükségünk arra, hogy pontosan megfogalmazzuk egy állítás tagadását. Állítások tagadására van szükség például kontrapozíciós, indirekt bizonyítások és elemi logikai átgondolások során is. Ha ismerjük egy állítás tagadásának logikai értékét, akkor az eredeti állításét is tudjuk, és néha könnyebb vizsgálni egy állítás tagadását. Vizsgáljuk meg, hogy miként tudjuk egy predikátumkalkulusbeli állítás tagadását felírni pusztán az állítás formulájából. Ezt két tétel alkalmazásával végezhetjük el.

9. Tétel. *Predikátumkalkulusban teljesül az alábbi két logikai ekvivalencia:*

$$\begin{aligned} \neg\,((\forall x)\,F) &\equiv (\exists x)\,(\neg F)\,, \\ \neg\,((\exists x)\,F) &\equiv (\forall x)\,(\neg F)\,. \end{aligned}$$

10. Tétel. *Tetszőleges A és B formula esetén teljesülnek az alábbi ekvivalenciák:*

- $\neg\,(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$
- $\neg\,(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
- $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$
- $\neg\,(A \to B) \equiv A \wedge (\neg B)$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

Az előző két tétel egy szabályt ad a tagadásra. Mindig részformulánként kell tagadni, és ha a negációjel egy kvantorral találkozik, akkor a kvantor megváltozik, és a tagadás a részformulában beljebb csúszik.

11. Példa. Formalizáljuk az alábbi állítás tagadását: „Minden strucc madár.”

- Az állítást már formalizáltuk egy korábbi példában: $(\forall x)\,(S(x) \to M(x))$.
- Tagadjuk a formulát:

$$\neg\,(\forall x)\,(S(x) \to M(x)) \equiv (\exists x)\,(\neg\,(S(x) \to M(x))) \equiv (\exists x)\,(S(x) \land (\neg M(x)))\,.$$

- Ha jelentéstartalmilag tagadjuk az állítást, akkor azt kell formalizálni, hogy „Létezik olyan strucc, ami nem madár.” Ez pontosan az előbb kapott negált formulával formalizálható.

Az előbbi példa rámutat arra, hogy egy állítást kétféleképpen is lehet tagadni. Megalkothatjuk a tagadásnak megfelelő állítást, és azt formalizálhatjuk, vagy az eredeti állítást formalizáljuk, és azt tagadjuk a szabályok szerint. Logikailag ekvivalens formulákat kell kapnunk.

12. Példa. Adjuk meg a következő formula negáltját.

$$(\forall x)\,((\neg P(x)) \land (\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y)))$$

$$\begin{aligned}
\neg\,(\forall x)\,((\neg P(x)) \land (\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y))) \quad &\equiv \quad (\exists x)\,(\neg\,((\neg P(x)) \land (\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y))))\\
&\equiv \quad (\exists x)\,(\neg\,(\neg P(x)) \lor (\neg\,(\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y))))\\
&\equiv \quad (\exists x)\,(P(x) \lor ((\forall y)\,(\neg\,(Q(x,y) \to R(y)))))\\
&\equiv \quad (\exists x)\,(P(x) \lor ((\forall y)\,(Q(x,y) \land (\neg R(y)))))
\end{aligned}$$

4. Logikailag igaz formulák (tautológiák)

Az ítéletkalkulusbeli formuláktól eltérően nincs általános algoritmus arra, hogy egy predikátumkalkulusbeli formuláról eldöntsük azt, hogy tautológia-e. Sőt, már a tautológia fogalma sem definiálható olyan könnyen, mint az ítéletkalkulus esetén.

13. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus interpretációjá**hoz a következő lépéseket kell véghezvinni.

(1) Választunk egy nemüres A halmazt, ez lesz az interpretációs tartomány.
(2) Minden P predikátumjelhez hozzárendelünk egy A-n értelmezett ugyanannyi változós predikátumot.
(3) Minden f függvényjelhez hozzárendelünk egy A-n értelmezett ugyanannyi változós függvényt.

Az előző definíció tulajdonképpen arról szól, hogy egy adott formulának értelmet adunk, azaz egy karaktersorozat helyett már egy konkrét állítás formalizálásaként tekintünk rá. Technikailag bármely $a = (a_1, a_2, \ldots), a_1, a_2, \ldots \in A$ sorozat esetén az a_i-t a formulában x_i helyére beírva el tudjuk dönteni, hogy a formula igaz-e vagy sem, az adott interpretáció esetén.

14. Definíció. Egy predikátumkalkulusbeli formula **tautológia**, azaz logikailag igaz formula, ha bármely interpretációja esetén tetszőleges $a = (a_1, a_2, \ldots), a_1, a_2, \ldots \in A$ sorozatra az x_i-k helyére a_i-ket írva logikailag igaz értéket kapunk.

Még egyszer fontos kihangsúlyozni, hogy predikátumkalkulus esetén nincs algoritmus, amivel el tudnánk dönteni egy formuláról, hogy tautológia-e, eltérően az ítéletkalkulustól. Függetlenül ettől néhány egyszerű feladatot azért mi is meg tudunk oldani.

15. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\exists x)(P(x)) \to (\forall x)(P(x))$$

Megoldás: nem. Ha intuíció alapján akarjuk indokolni a dolgot, akkor csak annyi az egész, hogy ha létezik olyan objektum, amire valami teljesül, az nem jelenti azt, hogy minden objektumra teljesül. Nagyon egyszerűen meg tudjuk adni a formális választ is: legyen az interpretációs tartomány a természetes számok halmaza, és $P(x)$ jelentse azt, hogy x prím. Ekkor egy $i \to h$ implikációt kapunk, melynek értéke hamis. Találtunk egy interpretációt, mely esetén a formula hamis, ezért nem tautológia.

16. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\neg (\exists x)(\forall x)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$$

Megoldás: a formula tautológia, mert az $\leftrightarrow$ jel bal és jobb oldalán álló formula egymással ekvivalens, a jobb oldali adja meg mi lesz akkor, ha a bal oldaliban a negációjelet beljebb visszük a formulában. Ha az $\leftrightarrow$ két oldalán ekvivalens formulák állnak, akkor az tautológia, mint ahogy ezt már ítéletkalkulusból tanultuk.

17. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\exists x)(B(x,y) \to x = y) \leftrightarrow (\forall x)(\neg (B(x,y) \to x = y))$$

Megoldás: megsejtjük, hogy a formula nem tautológia, ezért keresünk olyan interpretációt, melynél van olyan kiértékelés, amelynél hamis értéket kapunk. (Megsejthetjük például úgy, hogy észrevesszük, hogy az ekvivalenciajel jobb oldalán álló formula pontosan a bal oldali tagadása.) Legyen A egy tetszőleges legalább kételemű interpretációs tartomány, B pedig az azonosan hamis predikátum. Ekkor a bal oldal azt mondja, hogy létezik egy olyan objektum, amely ha B-kapcsolatban áll y-nal, akkor $x = y$. Viszont B azonosan hamis, ezért az implikáció mindig igaz, így a bal oldal annyit mond, hogy létezik olyan objektum, melyre igaz.

Szándékosan ért véget az előző mondat. Hasonlóan látható, hogy a jobb oldal azt mondja, hogy bármely objektum esetén hamis. Ha létezik egy objektum, amelyre igaz, akkor ebből nem következhet az, hogy minden objektumra hamis. Így ezen interpretáció esetén bármely „kiértékelés” esetén hamis értéket kapunk.

Előfordulhatnak olyan feladatok, melyekben a következő egyszerű ekvivalenciák ismerete is segíthet.

18. Tétel. *Tetszőleges F és G formula esetén*

- $(\forall x)\,(\forall y)\,F \equiv (\forall y)\,(\forall x)\,F$,
- $(\exists x)\,(\exists y)\,F \equiv (\exists y)\,(\exists x)\,F$,
- $(\forall x)\,F \equiv \neg\,(\exists x)\,(\neg F)$,
- $(\exists x)\,F \equiv \neg\,(\forall x)\,(\neg F)$,
- $(\forall x)\,(F \wedge G) \equiv (\forall x)\,F \wedge (\forall x)\,G$,
- $(\exists x)\,(F \vee G) \equiv (\exists x)\,F \vee (\exists x)\,G$.

5. Informatikai vonatkozások

- Bonyolultságelmélet kurzus: polinomiális hierarchia, földrajzi játék, kvantifikált Boole-formula, $\mathcal{PSPACE}$ problémák.
- Logika és informatikai alkalmazásai kurzus:
  - Az ítéletlogika és predikátumlogika kiterjesztése másodrendű logikára.
  - Logikai programozás és PROLOG nyelv (levezetések).
  - Helyesség, teljesség, eldönthetőség (lásd Bonyolultságelmélet kurzus).
- Bizonyítás elmélet.
- Modell elmélet.
- Rezolúciós kalkulus, automatikus tételbizonyítás.
- Mesterséges intelligencia.
- Számítógépes nyelvészet, például beszédfelismerés.

2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat. Jelölje $M(x)$ az „*x négyzetszám*”, $P(x)$ az „*x páros szám*”, $O(x,y)$ az „*x osztója y-nak*”, $N(x)$ az „*x negatív szám*” predikátumokat, individuumtartomány az egész számok halmaza. Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

(a) $P(7)$
(b) $M(4) \wedge \neg N(9+3)$
(c) $(\forall x)(O(2, 4\cdot x))$
(d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x,6))$
(e) $(\forall x)(O(4,x) \rightarrow P(x))$
(f) $(\forall x)\Big(M(x) \rightarrow (\exists y)\big(P(y) \wedge O(x,y)\big)\Big)$
(g) $(\exists x)\Bigg(P(x) \wedge (\forall y)\Big(\big(P(y) \wedge N(y)\big) \rightarrow \big(\neg O(y,x)\big)\Big)\Bigg)$

2.2. Feladat. Legyen Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\forall x)P\big(f(x,a),x\big) \rightarrow (\exists y)\Big(P\big(f(y,x),y\big) \wedge Q(x)\Big).$$

2.3. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „*x hallgató*”,	$V(x)$: „*x felkészült a vizsgára*”,
$B(x,y)$: „*x az y barátja*”,	$C(x,y)$: „*x csoporttársa y-nak*”,
$T(x,y)$: „*x házatársa y-nak*”,	$F(x)$: „*x férfi*”,
$A(x)$: „*x anya*”,	p: „*Péter*”,
$a(x)$: „*x anyja*”,	$S(x)$: „*x szeret főzni*”.

(a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
(b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
(c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
(d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
(e) *Vannak nőtlen férfiak.*
(f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
(g) *Péter összes barátja hallgató.*
(h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
(i) *Péter anyja szeret főzni.*

2.4. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

(a) *Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.*
(b) *Minden egész számnál létezik kisebb.*
(c) *Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.*

(d) *Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.*
(e) *Minden szám pozitív vagy negatív.*

2.5. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

(a) *Minden informatikus éhes.*
(b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
(c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*
(d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
(e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
(f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
(g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*

2.6. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e az alábbi formulák az $(A; N, K, P)$ interpretációnál, ahol $A = \mathbb{Z}$, N a négyzetszámok, K a köbszámok, P pedig a prímszámok halmaza.

(a) $\big((\exists x)N(x) \wedge (\exists x)K(x)\big) \to (\exists x)(N(x) \wedge K(x))$
(b) $(\exists x)(N(x) \vee P(x)) \to \big((\exists x)N(x) \vee (\exists x)P(x)\big)$

2.7. Feladat. Döntsük el, hogy tautológiák-e a következő formulák.

(a) $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \to (\forall x)A(x, x)$
(b) $\big((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)\big) \to (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$
(c) $\big((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)\big) \to (\exists x)(A(x) \vee B(x))$
(d) $\neg(\exists x)(\forall y)\big((\neg A(x)) \vee (\neg B(y))\big) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$

2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat megoldása.

- **(a)** A 7 páros szám.
- **(b)** A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
- **(c)** Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
- **(d)** A 6-nak létezik páros osztója.
- **(e)** Minden 4-gyel osztható szám páros.
- **(f)** Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
- **(g)** Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

2.2. Feladat megoldása.
Részkifejezések: x, a, y, $f(x,a)$, $f(y,x)$.
Részformulák: $P(f(x,a),x)$, $(\forall x)P(f(x,a),x)$, $Q(x)$, $P(f(y,x),y)$, $P(f(y,x),y)$, $P(f(y,x),y) \wedge Q(x)$, $(\exists y)(P(f(y,x),y) \wedge Q(x))$, $(\forall x)P(f(x,a),x) \to (\exists y)(P(f(y,x),y) \wedge Q(x))$.
Pirossal jelölve a kötött előfordulás, zölddel a szabad előfordulás:

$$(\forall x)\, P\left(f\left({\color{red}x},a\right),{\color{red}x}\right) \to (\exists y)\left(P\left(f\left({\color{red}y},{\color{green}x}\right),{\color{red}y}\right) \wedge Q\left({\color{green}x}\right)\right).$$

Tehát y kötött változó, mert minden előfordulása kötött; x vegyes változó, mert van szabad és kötött előfordulása is.

2.3. Feladat megoldása.

- **(a)** $(\exists x)(H(x) \wedge \neg V(x))$
- **(b)** $(\forall x)(H(x) \to V(x))$
- **(c)** $(\exists x)(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y,x))$
- **(d)** $(\exists x)(H(x) \wedge (\forall y)(T(y,x) \to C(y,x)))$
- **(e)** $(\exists x)(F(x) \wedge \neg(\exists y)(\neg F(y) \wedge T(y,x)))$
- **(f)** $(\forall x)\left(A\left(x\right) \to \neg F\left(x\right)\right) \wedge (\exists x)\left(\neg F\left(x\right) \wedge \neg A\left(x\right)\right)$
- **(g)** $(\forall x)\left(B\left(x,p\right) \to H\left(x\right)\right)$
- **(h)** $(\exists x)\left(H\left(x\right) \wedge \left(\neg S\left(a\left(x\right)\right)\right)\right)$
- **(i)** $S\left(a\left(p\right)\right)$

2.4. Feladat megoldása.
Predikátumok: $O(x,y)$: „x osztja y-t", $N(x)$: „x nullára végződik", $P(x)$: „x pozitív", $K(x,y)$: „x kisebb y-nál".
Függvények: $f(x)$: „x négyzete".

- **(a)** $(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))$
  $\neg\left[(\forall x)(O(1,x) \wedge O(x,x))\right] \equiv (\exists x)(\neg O(1,x) \vee \neg O(x,x))$
- **(b)** $(\forall x)(\exists y)K(y,x)$
  $\neg\left[(\forall x)(\exists y)K(y,x)\right] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y,x)$
- **(c)** $(\forall x)(O(10,x) \to N(x))$
  $\neg\left[(\forall x)(O(10,x) \to N(x))\right] \equiv (\exists x)(O(10,x) \wedge \neg N(x))$
- **(d)** $(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))$
  $\neg\left[(\exists x)(K(x,0) \wedge P(f(x)))\right] \equiv (\forall x)(\neg K(x,0) \vee \neg P(f(x)))$

(e) $(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))$
$\neg\left[(\forall x)(P(x) \vee K(x,0))\right] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x,0))$

2.5. Feladat megoldása.
Individuumkonstansok: m: „Mézga Géza”.
Predikátumok: $I(x)$: „x informatikus”; $E(x)$: „x éhes”; $S(x)$: „x szakács”; $K(x,y)$: „x kedveli y-t”; $F(x,y)$: „x főz y-nak”; $Sz(x)$: „x szerencsés”; $G(x,y)$: „x gyermeke y-nak”.
Függvények: $g(x)$: „x gyereke”.

(a) $(\forall x)(I(x) \to E(x))$
Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*
(b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \to F(x,x))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x,x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*
(c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \to (\forall y)(S(y) \to K(x,y)))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x,y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*
(d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x,y) \to I(y)))$,
Tagadása: $(\forall x)(S(x) \to (\exists y)(F(x,y) \wedge \neg I(x)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*
(e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y)) \to K(x,y))$,
Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y,x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x,y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*
(f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x,m) \to Sz(x))$,
Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x,m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*
(g) $(S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x)) \to (\forall x)Sz(x)$,
Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x) \wedge (\exists x)\neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*

2.6. Feladat megoldása.

(a) Igen.
(b) Igen.

2.7. Feladat megoldása.

(a) Igen.
(b) Nem.
(c) Igen.
(d) Igen.

9. GYAKORLAT

Predikátumkalkulus.
Determinánsok.

1. Feladat. Formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli ítéleteket a megadott individuumtartomány és predikátumjelek segítségével!

1. „Van olyan torony, ami nem függőleges.”
   $U = \{\text{épületek}\}$, $T(x)$: „x torony”, $F(x)$: „x függőleges”
2. „Nem mind arany, ami fénylik.”
   $U = \{\text{tárgyak}\}$, $A(x)$: „x arany”, $F(x)$: „x fénylik”
3. „Minden anya nő, de nem minden nő anya.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $A(x)$: „x anya”, $N(x)$: „x nő”
4. „Ki korán kel, aranyat lel.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $A(x)$: „x aranyat lel”, $K(x)$: „x korán kel”
5. „Aki a kicsit nem becsüli, a nagyot nem érdemli.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $K(x)$: „x megbecsüli a kicsit”, $M(x)$: „x megérdemli a nagyot”
6. „Nincsen rózsa tövis nélkül.”
   $U = \{\text{rózsák}\}$, $T(x)$: „x-nek van tövise”
   $U = \{\text{növények}\}$, $T(x)$: „x-nek van tövise”, $R(x)$: „x rózsa”
7. „Néhány hallgatónak nincs barátja.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, $H(x)$: „x hallgató”, $B(x, y)$: „x az y barátja”
8. „Ha nem csak János becsületes, akkor mindenki becsületes.”
   $U = \{\text{emberek}\}$, j : „János”, $E(x, y)$: „x és y ugyanaz a személy”, $B(x)$: „x becsületes”

2. Feladat. Formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli ítéleteket úgy, hogy az individuumtartományt és a predikátumjeleket is adja meg!

1. „Mindenkinek két szülője van.”
2. „Ha egy szakács éhes, akkor főz magának.”
3. „Van olyan ember, aki főz, de nem szakács.”
4. „Vannak szerencsés milliomosok.”
5. „Néhány hallgató megbukik Kalkulusból.”
6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

3. Feladat. Határozza meg a következő formulák tagadásának azt az alakját, amelyben legfeljebb predikátumot tagadunk! („Vigyük a $\neg$ jelet annyira hátra, amennyire csak lehet.”)

1. $(\forall x)\,(B(x) \to J(x))$
2. $(\exists x)\,(J(x) \wedge K(x))$
3. $(\exists x)\,(B(x) \wedge (\exists y)\,(T(x, y)))$
4. $(\forall x)\,((B(x) \wedge (\exists y)\,T(x, y)) \to B(y))$
5. $(\exists x)\,(T(x) \wedge \neg Z(x))$
6. $(\forall x)\,(\exists y)\,(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$
7. $(\exists x)\,(\exists y)\,(D(x, y) \to (x = y))$

4. Feladat. Tautológiák-e az alábbi formulák?

1. $\neg(\forall x)(\exists y)\, B(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(x,y))$
2. $(\forall x)(\exists y)\, B(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(B(y,x))$
3. $((\exists x)\, B(x) \wedge (\exists y)\, C(y)) \rightarrow (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$

Megoldás:

1. Igen, mivel a jobb oldal logikailag ekvivalens a bal oldallal, csak a formális tagadás miatt más alakban vannak felírva.
2. A kvantorok után álló individuumváltozók a $\leftrightarrow$ jel két oldalán megfordíthatók, mert mindegyik kvantor szerepköre csak a $\leftrightarrow$ adott oldalára terjed ki. Így a $\leftrightarrow$ két oldalán megint két ekvivalens formula áll, tehát ez is tautológia.
3. Nem, mert abból, hogy van a csoportban egy szőke és egy tőle esetleg különböző kék szemű hallgató, még nem következik van szőke kék szemű hallgató is. (Ha a két oldal fordítva lenne, akkor tautológia lenne.)

5. Feladat. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét!

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ -7 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

6. Feladat. Oldja meg a következő egyenleteket!

1. $\begin{vmatrix} 3 & x \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
2. $\begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = 3$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & x \\ -3 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 14$
4. $\begin{vmatrix} x & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 1 \\ 4 & x & -2 \end{vmatrix} = 0$
5. $\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 6-x & -2 \end{vmatrix} = 0$

7. Feladat. Számolja ki az alábbi helyvektorok által kifeszített paralelogrammák és paralelepipedonok területét és térfogatát!

1. $v_1 = (4;6)\,,\ v_2 = (-5;9)$
2. $v_1 = (-3;0)\,,\ v_2 = (11;4)$
3. $v_1 = (2;0;-4)\,,\ v_2 = (1;6;-9)\ v_3 = (3;-7;-2)$
4. $v_1 = (-6;2;3)\,,\ v_2 = (0;-8;-2)\ v_3 = (1;1;7)$