

ÍTÉLETKALKULUS

Logikai alapfogalmak, műveletek, formalizálás,
logikai ekvivalencia, teljes diszjunktív normálforma, tautológia.

1. Bevezető

A matematikai logikában az állításoknak nem a tényleges jelentésével, hanem a szerkezetével, igazságértékével és gondolatmenetének helyességével foglalkozunk. Mi ezen kurzus keretei között csak kétértékű logikával foglalkozunk (igaz-hamis), de többértékű logika is értelmezhető. Például vessünk egy pillantást a következő kijelentésekre.

- (1) Ez a mondat hamis.
- (2) Minden 2-nél nagyobb páros egész szám felírható két prímszám összegeként.
- (3) Minden kétfejű ló piros.

Az első kijelentés ellentmondás, tehát nem lehet sem igaz, sem hamis, gondoljunk bele. A második egy híres sejtés, erről pedig egyszerűen nem tudjuk megmondani, hogy igaz-e, vagy hamis. A harmadik kijelentés pedig azért érdekes, mert a kétértékű logika szerint igaznak kellene lennie, mert a tagadása hamis (van olyan kétfejű ló, ami nem piros?), de ezt is úgy szoktuk elintézni, hogy logikai értéke eldönthetetlen. Többek között az informatikában alkalmazzák a szintén többértékű Fuzzy-logikát, amely nem csak a szokásos 0-1 értékeket veheti fel, hanem köztes értékeket is. Ezáltal az objektumok több csoportba sorolhatók, és a gépek jobban irányíthatók. Mi ilyenekkel nem foglalkozunk, helyette a matematikai logika legalapvetőbb részét nézzük át.

2. Ítéletkalkulus

1. Definíció. Az **ítélet** olyan állítás, amelynek igazságértéke van (igaz vagy hamis). Jelölésük: A, B, C, \dots

Nem ítéletek a következők: felkiáltások, felszólítások, kérdő mondatok, ...

Hasonlóan, mint a hétköznapi nyelvben is, az ítéletek bizonyos módon összekapcsolhatók, és így új összetett ítéleteket kaphatunk. Nézzük meg milyen kapcsolatban állhatnak egymással az ítéletek, illetve pontosabban milyen művelettel kapcsolhatók össze az ítéletek?

2. Definíció. Ha A és B két ítélet, akkor értelmezzük az alábbi műveleteket.

- **Negáció:** $\neg A$
„nem A ” - Így fejezzük ki a logikai kapcsolatot szavakkal.
C-ben, Java-ban: !
- **Konjunkció:** $A \wedge B$
„ A és B ”: Nem minden „és” konjunkció, gondoljunk például a felsorolásra. Viszont „és” helyett állhat a „DE” szó, például „Szeretem a dimatot, de utálok a Kalkulust.”
C-ben, Java-ban: &&
- **Diszjunkció:** $A \vee B$
„ A vagy B ”: vagy A , vagy B , vagy mindkettő.
C-ben, Java-ban: ||
Fontos: NEM kizáró vagy! Ezen a kurzuson nincs kizáró vagy.
- **Implikáció:** $A \rightarrow B$
„Ha A , akkor B .” „Csak akkor A , ha B .” „ A -ból következik B .” „ B -nek elegendő feltétele A .” „ A -nak szükséges feltétele B .”
- **Ekvivalencia:** $A \leftrightarrow B$
„Akkor és csak akkor A , ha B .” „Pontosan akkor A , ha B .” „ A -nak szükséges és elégséges feltétele B .” „ A ekvivalens B -vel.”

Ha két állítást valamilyen művelettel összefűzünk, akkor a művelet igazságtartalma természetesen függ az eredetileg összekapcsolt ítéletekétől. A következő táblázatban megtalálhatjuk, hogyan.

2.1. Igazságtáblázatok

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
i	h	i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	h	i	h	h
h	i	h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	h	h	i	i

3. Példa. Vegyük a következő két állítást.

- „Ha $2 + 2 = 5$, akkor a Hold sajtból van.”
- „Ha $2 + 2 = 5$, akkor Franciaország fővárosa Párizs.”

Mindkét állítás igaz. Azért, mert implikációval vannak összekapcsolva, és az implikáció bal oldala hamis. Ekkor maga az állítás igaz. Természetesen az nem igaz, hogy sajtból van a Hold. De ezt nem állította a mondat.

2.2. Formalizálás

A formalizálás során az állításokból matematikai jelekből álló jelsorozatokat képzünk, a fenti műveleti jelek segítségével. Az állításokat a lehető legkisebb alapegységekre kell bontani, ezek a primitívek.

4. Definíció. A **prímítélet** olyan ítélet, amely nem tartalmaz logikai kötőszavakat.

Formalizálásnál fontos, hogy csakis **kizárólag prímítéletek helyett vezessünk be ítéletváltozókat**. **FONTOS: A PRÍMÍTÉLET NEM TARTALMAZHAT TAGADÁST!**

5. Definíció (Formula). Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek A_1, \dots, A_n ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

- (1) Az ítéletváltozók mindegyike formula.
- (2) Ha F és G formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.
- (3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható a fenti 1. és 2. szabályok VÉGES sokszori alkalmazásával.

Ha jól megnézzük, akkor ez egy rekurzív definíció, ahol a rekurzió a prímítéleteknél áll meg. Informálisan a fenti definíció azt jelenti, hogy logikai műveletek segítségével, ítéletváltozókból és zárójelekből szintaktikailag helyes jelsorozatokat képzünk.

A logikai műveletek között is van precedenciasorrend: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Ezt zárójelezéssel ki lehet kerülni, és a kurzuson nem is fogjuk használni.

Nézzük meg, hogy működik a formalizálás egy konkrét példán keresztül.

6. Példa. „Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.” Formalizálás:

Prímítéletek: A – esik az eső; B – rossz kedvem van; C – elmegyek dimat gyakorlatra; D – zh-t írunk.

Formalizálva: $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$. Precedenciákat alkalmazva: $A \wedge \neg B \rightarrow (C \leftrightarrow D)$.

Valamilyen szinten a formalizálás ellentéte a részformulákra bontás. Azaz megnézzük, hogy egy formula milyen kisebb formulákból áll elő.

7. Definíció. Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F -nek, ha G fellép F -nek a rekurzív definíció szerinti előállításán során.

8. Példa. Az előző példa összes részformulái a következők: A , B , $(\neg B)$, $(A \wedge (\neg B))$, C , D , $(C \leftrightarrow D)$, $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$.

2.3. Kiértékelés, logikai ekvivalencia

Ebben a fejezetben már el is felejthetjük, hogy egy adott formula akár jelenthet is valamit. A matematikai logikának az a lényege, hogy a formulák a jelentésük nélkül is vizsgálhatóak legyenek. Így például függetlenül mit jelent egy formulában az A változó, az biztos, hogy vagy igaz, vagy hamis.

9. Definíció. A **kiértékelés** az a művelet, amikor a változók helyére igaz vagy hamis értéket helyettesítünk. A kiértékelés végeredménye egy igazságérték.

10. Példa. Legyen adott a következő formula: $A \rightarrow ((\neg B) \vee C)$. Számoljuk ki a formula azon kiértékelését, melyben A és C igaz, B pedig hamis.

A	B	C	$(\neg B)$	$((\neg B) \vee C)$	$A \rightarrow ((\neg B) \vee C)$
i	h	i	$\neg h = i$	$(i \vee i) = i$	$i \rightarrow i = i$

Elképzelhető, hogy ugyanazt a jelentéstartalmat két különböző formulával is le tudjuk írni. Ezek a logikailag ekvivalens formulák.

11. Definíció. Az ítéletkalkulus F és G formulája **logikailag ekvivalens**, ha értékük bármely kiértékelésnél megegyezik. Jelölésben: $F \equiv G$.

Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy mindkét formulára felírjuk az igazságtáblázatot, és összenézzük a két formula összes kiértékelését, és ha mindegyik megegyezik, akkor ekvivalensek. Lehetséges, hogy egy nagyon hosszú logikai formulához található egy sokkal rövidebb formula, mellyel logikailag ekvivalens. Ekkor minden további nélkül áttérhetünk a rövidebb formula vizsgálatára.

12. Tétel. *Bármely A és B formulák esetén*

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad \text{és} \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Az előző tételnek köszönhető, hogy az \leftrightarrow és \rightarrow jelek átírhatók a \wedge, \vee, \neg jelek segítségével. Jogosan merül fel a kérdés, hogy akkor miért használjuk őket? (A C-ben és a JAVA-ban sincsenek beépítve.)

13. Példa. Ekvivalens-e a következő két formula: $F = \neg(A \rightarrow B)$, $G = A \wedge (\neg B)$.

A	B	$(A \rightarrow B)$	$F = \neg(A \rightarrow B)$	$(\neg B)$	$G = A \wedge (\neg B)$
i	i	i	h	h	$i \wedge h = h$
i	h	h	i	i	$i \wedge i = i$
h	i	i	h	h	$h \wedge h = h$
h	h	i	h	i	$h \wedge i = h$

Mivel az F oszlopa és G oszlopa minden sorban megegyező értéket vesz fel, ezért logikailag ekvivalensek.

14. Példa. Az utolsó oldalon összegyűjtöttük a legfontosabb ekvivalenciákat, amelyek mindegyike bizonyítható az előző példában mutatott módon. Nem kell mindegyiket fejből tudni, de mindegyikről elvárt az igazolása.

2.4. Diszjunktív normálforma

A 12. Tétel használatával bármely formulából ki tudjuk küszöbölni az ekvivalencia és implikáció jeleket. Ebben a fejezetben egy olyan speciális formulatípusról lesz szó, mely mind matematikailag, mind informatikailag könnyen vizsgálható. (A számítógép nem rendelkezik beépített ekvivalencia és implikáció jelekkel, így hasznos lenne algoritmus, mellyel ezek kiküszöbölhetők egy formulából.)

15. Definíció. Egy formula **diszjunktív normálforma**, ha $P_1 \vee \dots \vee P_k$ alakú, ahol minden P_i ítéletváltozók és negáltjaik konjunkciója oly módon, hogy mindegyik változó minden P_i -ben legfeljebb 1-szer szerepel.

16. Definíció. Ha egy n -változós diszjunktív normálforma minden P_i -jében mind az n darab változó szerepel, akkor **teljes diszjunktív normálformáról** beszélünk.

A definícióknál sokkal érthetőbben be lehet mutatni példán keresztül.

17. Példa. A következő formulák diszjunktív normálformák:

- $(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ – ha az ítéletváltozók A_1, A_2, A_3 akkor ez még teljes is ($k = 2, n \geq 3$).
- $A_1 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ – ez nyilván nem teljes ($k = 2, n \geq 2$).
- $A_1 \vee A_2$ – ez sem teljes ($k = 2, n \geq 2$).
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$ – ha az ítéletváltozók A_1, A_2, A_3 akkor ez még teljes is ($k = 1, n \geq 3$).

18. Tétel. *Tetszőleges F formulához létezik olyan teljes diszjunktív normálforma, amely F -fel logikailag ekvivalens.*

Ez egy nagyon fontos tétel, azonban semmit nem mond arról, hogyan keressük meg ezt a teljes diszjunktív normálformát. A módszer a következő.

- (1) Felírjuk F igazságtáblázatát.
- (2) A definícióban szereplő P_i -k azon sorokat reprezentálják, ahol F logikai értéke igaz.
- (3) Minden sorhoz a megfelelő P_i -t úgy kapjuk, hogy azon változókat negáljuk, ahol hamis érték szerepel, és vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.

19. Példa. Írjuk fel az $(A \vee B) \rightarrow (\neg A)$ formula teljes diszjunktív normálformáját.

A	B	$(A \vee B)$	$(\neg A)$	$(A \vee B) \rightarrow (\neg A)$	
i	i	i	h	$i \rightarrow h = h$	
i	h	i	h	$i \rightarrow h = h$	
h	i	i	i	$i \rightarrow i = i$	\Leftarrow
h	h	h	i	$h \rightarrow i = i$	\Leftarrow

$$(A \vee B) \rightarrow (\neg A) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Természetesen az is egy módszer, hogy a \rightarrow és \leftrightarrow jeleket egyesével átírjuk, azután az így kapott formulát megpróbáljuk a megfelelő formára pofozni az ismert ekvivalenciák segítségével. Ez szebb az előbb említett módszernél, viszont az előző talán algoritmikusabb.

2.5. Tautológia

Ebben a fejezetben egy speciális formuláról lesz szó. Alapvetően egy formula bonyolultságát nem feltétlen a hosszával tudjuk mérni, mert előfordulhat, hogy egy sokkal rövidebbel ekvivalens. Sőt az is előfordulhat, hogy minden kiértékelésre egyforma.

20. Definíció. Egy formula **tautológia**, ha minden kiértékelésre igaz.

A definíció szerint könnyen ellenőrizhető, hogy egy formula tautológia-e, csak fel kell írni az igazságtáblázatát, és megnézni, hogy a végén mindenhol igaz érték jön-e ki.

21. Példa. Nézzük meg, hogy az $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ formula tautológia-e.

A	B	$(A \rightarrow B)$	$(A \wedge (A \rightarrow B))$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
i	i	i	$i \wedge i = i$	$i \rightarrow i = i$
i	h	h	$i \wedge h = h$	$h \rightarrow h = i$
h	i	i	$h \wedge i = h$	$h \rightarrow i = i$
h	h	i	$h \wedge i = h$	$h \rightarrow h = i$

Minden kiértékelésre igaz a formula, tehát $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ tautológia.

Tautológiagyűjtemény

(I) $\rightarrow, \leftrightarrow$ kifejezése a többi művelettel:

- (1) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A),$
 (2) $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B.$

(II) \wedge, \vee alaptulajdonságai:

- (3) $A \wedge A \equiv A,$ (idempotencia)
 (4) $A \wedge B \equiv B \wedge A,$ (kommutativitás)
 (5) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C),$ (asszociativitás)
 (6) $(A \vee B) \wedge A \equiv A,$ (abszorptivitás)
 (7) $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C),$ (disztributivitás)

(III) \wedge, \vee, \neg közötti összefüggések:

- (8) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B),$ $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B),$ (De Morgan szabályok)
 (9) $\neg(\neg A) \equiv A,$
 (10) $A \wedge (\neg A) \equiv B \wedge (\neg B),$ $A \vee (\neg A) \equiv B \vee (\neg B),$
 (11) $A \wedge (B \vee (\neg B)) \equiv A,$ $A \vee (B \wedge (\neg B)) \equiv B \vee (\neg B),$
 (12) $A \wedge (B \wedge (\neg B)) \equiv B \wedge (\neg B),$ $A \vee (B \wedge (\neg B)) \equiv A.$

(IV) \rightarrow -t és \leftrightarrow -t tartalmazó logikai ekvivalenciák:

- (13) $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$ (kommutativitás)
 (14) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$ (asszociativitás)
 (15) $A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A),$
 (16) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C,$
 (17) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \equiv A \rightarrow (B \wedge C),$
 (18) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C,$
 (19) $A \rightarrow (B \wedge (\neg B)) \equiv \neg A.$

(V) Tautológiák:

- (20) $A \rightarrow A (\equiv A \vee (\neg A)),$
 (21) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B,$
 (22) $((\neg B) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A),$
 (23) $((\neg A) \wedge (A \vee B)) \rightarrow B,$
 (24) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)),$
 (25) $(A \wedge B) \rightarrow A,$
 (26) $A \rightarrow (A \vee B),$
 (27) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C),$
 (28) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)),$
 (29) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)),$
 (30) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)),$
 (31) $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (A \leftrightarrow C),$

továbbá

- (32) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A * C) \leftrightarrow (B * C)),$
 (33) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((C * A) \leftrightarrow (C * B)),$

ahol $*$ a $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ logikai műveletek bármelyike lehet.

Az (V) tautológiák, valamint az egyes $F \equiv G$ alapvető logikai ekvivalenciákból származtatott $F \leftrightarrow G, F \rightarrow G$ és $G \rightarrow F$ alakú tautológiák összességét nevezzük tautológiagyűjteménynek.

1. feladatsor – Ítéletkalkulus elemei

1.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi állításokat a megadott prímítételek felhasználásával:

A : „Süt a nap.” B : „Kimegyek az uszodába.” C : „Hamburgert ebédelek.”

- (a) Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.
- (b) Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.
- (c) Nem süt a nap.
- (d) Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.
- (e) Pontosán akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

1.2. Feladat. Adjuk meg az alábbi formula összes részformuláját.

$$(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \rightarrow B)$$

1.3. Feladat. Döntsük el, hogy az

$$\begin{array}{ll} (a) & (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C) \\ (b) & (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C) \\ (c) & A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)) \\ (d) & A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)) \end{array}$$

formulák közül — a prímítételek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgépet, vagy ha nem bírja el a repülőgépet, de indul hajó Afrikába.

1.4. Feladat. A prímítételek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket.

- (a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
- (b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
- (c) *Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
- (d) *Pontosán akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
- (e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
- (f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.*
- (g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*
- (h) *Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.*
- (i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*
- (j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*
- (k) *Ha még egy *** mondatot formalizálnom kell, akkor kitépem a hajamat, vagy megőrülök és utána tépem ki a hajamat.*

1.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a primítételek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A primítételek mindig pozitívak legyenek, azaz ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük A, B, C, \dots betűkkel.)

- (a) *Ha nem fáj a lábam és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön. $A : h, B : h, C : i, D : h$.*
- (b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára. $A : i, B : h, C : i, D : h, E : i$.*
- (c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot. $A : i, B : i, C : i, D : h, E : h$.*

1.6. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket. Mit mondhatunk a (2) ítéletek igazságértékéről, ha igaznak fogadjuk el az (1) ítéleteket?

- (a) (1) *Esik az eső, de nem fázom meg.*
(2) *Ha hideg van, vagy esik az eső, akkor megfázom.*
- (b) (1) *Piroska szereti a Farkast, de ha Nagyfi nem evett epret, akkor a Farkas megeszi a Nagyit. Ha a Farkas megeszi a Nagyit, akkor Piroska nem szereti a Farkast. A Vadász lelőtte a Farkast.*
(2) *Ha a Vadász lelőtte a Farkast, akkor a Nagyfi pontosan akkor evett epret, ha nem igaz az, hogy Piroska szereti a Farkast vagy a Farkas megeszi a Nagyit.*
- (c) (1) *Hófehérke pontosan akkor eszi meg a mérgezett almát, ha egyedül marad otthon. Ha Hófehérke megeszi a mérgezett almát, akkor nem főz ebédet és nem takarít. Hófehérke egyedül marad otthon.*
(2) *Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor pontosan abban az esetben főz ebédet, ha nem takarít. Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor megeszi a mérgezett almát, ha viszont nem marad egyedül otthon, akkor nem főz ebédet és nem takarít.*

1.7. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy logikailag ekvivalensek-e.

- (a) (1) *Ha nem tanulsz vagy puskázol, akkor megbuksz.*
(2) *Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.*
- (b) (1) *A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.*
(2) *Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.*
- (c) (1) *Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mézga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.*
(2) *Kriszta megbukik vagy Aladár nem kezd el szivarozni vagy Mézga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mézga Géza nem lesz dühös.*

1.8. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

- (a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$;

- (b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$;
- (c) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C$;
- (d) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)) \equiv A \rightarrow (A \vee B)$;
- (e) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \rightarrow A$;
- (f) $((A \wedge B) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A))$.

1.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem:

- (a) $(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow (\neg A)))$;
- (b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$;
- (c) $A \rightarrow (A \wedge B)$;
- (d) $A \vee (B \rightarrow (\neg A))$;
- (e) $(A \vee B) \rightarrow ((A \vee (\neg B)) \rightarrow A)$;
- (f) $(B \vee (\neg A)) \rightarrow (B \vee (\neg A))$;
- (g) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \leftrightarrow ((A \leftrightarrow C) \wedge A)$.

1.10. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy kielégíthetőek-e a következő formula- és ítélethalmazok.

- (a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- (b) $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D), (D \vee E) \rightarrow G, A \vee (\neg G)$
- (c) A szerződést akkor és csak akkor teljesítik, ha a házat februárban befejezik. Ha a házat februárban befejezik, akkor március 1-én beköltözhetünk. Ha március 1-jén nem költözünk be, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Ha a szerződést nem teljesítik, akkor márciusra lakbért kell fizetnünk. Nem kell márciusra lakbért fizetnünk.

1.11. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$$F_1 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B)), \quad F_2 = (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C),$$

$$F_3 = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)), \quad F_4 = (\neg A) \wedge B \wedge C.$$

1.12. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját:

- (a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C)$;
- (b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C$;
- (c) $(A \vee B) \rightarrow (\neg(C \rightarrow B))$;
- (d) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B)$;
- (e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \vee (A \wedge B))$;
- (f) $(\neg(A \rightarrow B)) \wedge (((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B)$.

1. feladatsor – Ítéletkalkulus elemei

1.1. Feladat megoldása.

- (a) $B \vee C$
- (b) $B \wedge (\neg C)$
- (c) $\neg A$
- (d) $B \rightarrow C$
- (e) $B \leftrightarrow A$

1.2. Feladat megoldása.

8 darab részformula van: $A, B, C, \neg B, \neg C, (\neg C) \rightarrow B, A \vee (\neg B), ((\neg C) \rightarrow B) \rightarrow (A \vee (\neg B))$

1.3. Feladat megoldása. (c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

1.4. Feladat megoldása.

- (a) $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
- (b) $A \rightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
- (c) $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$
- (d) $A \leftrightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
- (e) $A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D))$
- (f) $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$
- (g) $A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$
- (h) $A \rightarrow (\neg B \wedge (\neg C \rightarrow \neg D))$
- (i) $A \vee (B \wedge C)$
- (j) $A \wedge (B \rightarrow \neg C)$
- (k) $A \rightarrow (B \vee (C \wedge B))$

1.5. Feladat megoldása.

- (a) $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (C \leftrightarrow D) = h$
- (b) $(A \wedge B) \rightarrow (C \leftrightarrow (\neg D \vee E)) = i$
- (c) $(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow (D \vee E)) = h$

1.6. Feladat megoldása.

- (a) A : „Esik az eső.”, B : „Megfázom.”, C : „Hideg van.”
 - (1) $A \wedge \neg B$
 - (2) $(C \vee A) \rightarrow B$Ha (1) igaz, akkor $A = i, B = h$. Ebben az esetben (2) mindig hamis.
- (b) A : „Piroska szereti a Farkast.”, B : „Nagyi epret evett.”, C : „A Farkas megeszi a Nagyt.”, D : „A Vadász lelőtte a Farkast.”
 - (1) $A \wedge (\neg B \rightarrow C), C \rightarrow \neg A, D$
 - (2) $D \rightarrow (B \leftrightarrow (\neg(A \vee C)))$Ha az (1) állítások egyszerre igazak, akkor a változók egyértelműen determináltak: $A = B = D = i, C = h$. Ennél a kiértékelésnél a (2) állítás hamis.

(c) A : „Hófehérke megeszi a mérgezett almát.”, B : „Hófehérke egyedül marad otthon.”, C : „Hófehérke főz.”, D : „Hófehérke takarít.”

(1) $A \leftrightarrow B, A \rightarrow (\neg C \wedge \neg D), B$

(2) $B \rightarrow (C \leftrightarrow \neg D), (B \rightarrow A) \wedge (\neg B \rightarrow (\neg C \wedge \neg D))$

Ha az (1) állítások egyszerre igazak, akkor a változók egyértelműen determináltak: $A = B = i, C = D = h$. Ennél a kiértékelésnél a (2) állítások közül az első hamis, a második igaz.

1.7. Feladat megoldása.

(a) (1): $(\neg A \vee B) \rightarrow C$

(2): $(\neg A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

(1) \equiv (2)

(b) (1): $A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$

(2): $(B \vee C \vee A) \wedge ((\neg B \vee \neg C) \rightarrow \neg A)$

(1) $\not\equiv$ (2)

(c) (1): $\neg A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$

(2): $(A \vee \neg C \vee B) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$

(1) \equiv (2)

1.8. Feladat megoldása. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

(a)

$(A$	\wedge	$B)$	\rightarrow	C	\equiv	A	\rightarrow	$(B$	\rightarrow	$C)$
i	i	i	\mathbf{i}	i		i	\mathbf{i}	i	i	i
i	i	i	\mathbf{h}	h		i	\mathbf{h}	i	h	h
i	h	h	\mathbf{i}	i		i	\mathbf{i}	h	i	i
i	h	h	\mathbf{i}	h		i	\mathbf{i}	h	i	h
h	h	i	\mathbf{i}	i		h	\mathbf{i}	i	i	i
h	h	i	\mathbf{i}	h		h	\mathbf{i}	i	h	h
h	h	h	\mathbf{i}	i		h	\mathbf{i}	h	i	i
h	h	h	\mathbf{i}	h		h	\mathbf{i}	h	i	h

A többi feladatot is hasonlóan lehet ellenőrizni: fel kell írni az ekvivalenciajel két oldalán lévő formulák igazságtáblázatát, és ellenőrizni kell, hogy minden kiértékelésnél ugyanaz a logikai érték jön-e ki.

1.9. Feladat megoldása.

(a) Nem tautológia

(e) Tautológia

(b) Tautológia

(f) Tautológia

(c) Nem tautológia

(g) Tautológia

(d) Tautológia

1.10. Feladat megoldása.

(a) Kielégíthető, sőt tautológia.

(b) Kielégíthető, pl. $A = B = C = D = E = G = h$.

(c) Kielégíthető, pl. $A = B = C = i, D = h$.

1.11. Feladat megoldása.

F_1 : (nem teljes) diszjunktív normálforma
 F_3 : teljes diszjunktív normálforma

F_2 : nem diszjunktív normálforma
 F_4 : teljes diszjunktív normálforma

1.12. Feladat megoldása.

- (a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C) \equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$;
(c) $(A \vee B) \rightarrow (\neg(C \rightarrow B)) \equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(d) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$;
(e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \vee (A \wedge B)) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$;
(f) $(\neg(A \rightarrow B)) \wedge ((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B \equiv (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$.