Komplex számok

Komplex számok és alakjaik,
számolás komplex számokkal.

1. Komplex számok

A komplex számokra a valós számok kiterjesztéseként van szükség. Ugyanis már középiskolában előkerülnek olyan másodfokú egyenletek, melyeknek a valós számok között nincs megoldása. Felmerülhet tehát a kérdés, hogyan kell a valós számokat kiterjeszteni úgy, hogy a másodfokú egyenleteknek mindig legyen megoldása, de a valós számoknak az eddig megismert tulajdonságai az új számok között is érvényesek maradjanak. A komplex számok használata többek között ezt a problémát oldja meg.

1. Definíció. A **komplex számok** halmazát $\mathbb{C}$-vel jelöljük, és $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

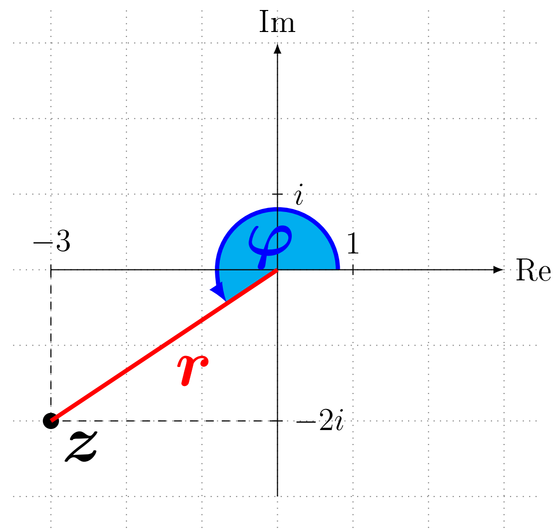
2. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám. Ekkor a z **kanonikus alak**ja

$$z = a + b \cdot i.$$

A z komplex szám **trigonometrikus alak**ja

$$z = r\left(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\right),$$

ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \arg(z)$ az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül úgy, hogy átmenjen a z-nek megfelelő ponton.

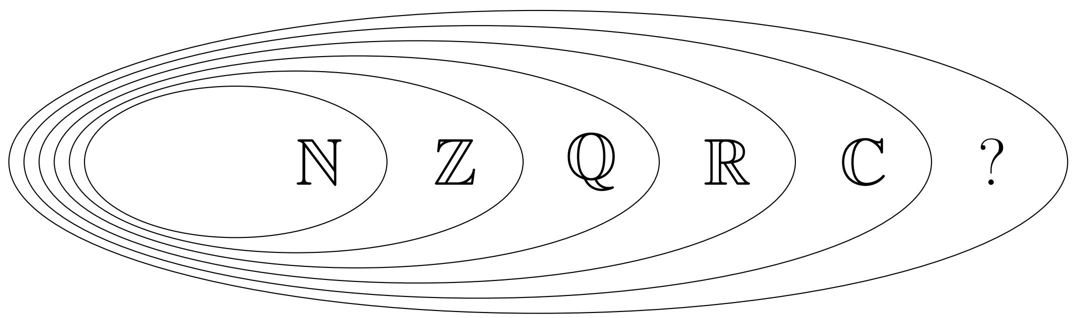


3. Példa. $(2, 2) = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4})$

A kanonikus alakban szereplő i egy kitüntetett komplex szám.

4. Definíció. A $z = (a, b)$ komplex szám $z = a + bi$ kanonikus alakjában szereplő a valós számot z **valós rész**ének, b valós számot z **képzetes rész**ének nevezzük. Más jelöléssel $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$. Az i a **képzetes egység**. Az i olyan komplex szám, amelynek a négyzete -1, azaz $i^2 = -1$.

Az előbbi definíciókból látható, hogy ez az új számfogalom valóban a valós számok kiterjesztéseként értelmezhető. Ugyanis minden r valós szám egy $(r, 0)$ alakú komplex számnak felel meg, azaz olyan komplex számnak, melynek a képzetes része nulla. Az ismert számhalmazok viszonyát a következő Venn-diagram mutatja. A kurzus keretében nem tárgyaljuk, hogy miként bővíthetők a komplex számok, ha egyáltalán lehetséges ilyen bővítés.



1. ábra.

Ha már számoknak nevezzük a komplex számokat, akkor jogosan elvárt a részünkről, hogy számolni is tudjunk velük. A következőben definiáljuk, hogyan végezhetjük el a komplex számok között a jól ismert műveleteket. (Természetesen ezt valahogy úgy kell megtenni, hogy a valós számokon ugyanaz legyen a művelete eredménye.)

5. Definíció. Legyenek z_1 és z_2 a következő kanonikus alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di.$$

Ekkor definiálhatjuk a következő **műveletek**et.

- *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- *Ellentett:* $-z_1 = -a - bi$.
- *Kivonás:* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i$.
- *Szorzás:* $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- *Konjugált:* $\overline{z_1} = a - bi$.
- *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- *Osztás:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

A definícióban látható, hogy komplex számok kanonikus alakjával pontosan úgy számolunk, mint az algebrai kifejezésekkel. Tehát a képzetes egységre gondolhatunk úgy, mint egy változó, de fontos, hogy ki kell használnunk az i azon tulajdonságát, mely szerint $i^2 = -1$.

Tehát ha a képzetes egységnek egy magasabb hatványával találkozunk, akkor fel kell használnunk az előbb említett tulajdonságot, mert egy kanonikus alakban nem szerepelhet i-nek magasabb hatványa. A képzetes egység minden magasabb hatványa átírható az $1, -1, i, -i$ komplex számok valamelyikére.

6. Példa.

- $i^{221} = i^{220} \cdot i = \left(i^2\right)^{110} \cdot i = (-1)^{110} \cdot i = 1 \cdot i = i.$
- $i^{43} = i^{42} \cdot i = \left(i^2\right)^{21} \cdot i = (-1)^{21} \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$
- $i^{1262} = \left(i^2\right)^{631} = (-1)^{631} = -1.$

A következő példában bemutatjuk, hogyan történik a fent definiált műveletek elvégzése adott komplex számok esetén.

7. Példa. $z_1 = (1, -1)\,,\; z_2 = (-4, 5)$

- **Kanonikus alak:** $z_1 = 1 - i,\; z_2 = -4 + 5i.$
- **Trigonometrikus alak:** $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$. (A z_2 trigonometrikus alakja nem szép, ugyanis nem látjuk a nevezetes szöget.)
- **Műveletek:**
  - *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (1 - 4) + (-1 + 5)i = -3 + 4i.$
  - *Ellentett:* $-z_2 = 4 - 5i.$
  - *Kivonás:* $z_2 - z_1 = (-4 - 1) + (5 - (-1))i = -5 + 6i.$
  - *Szorzás:* $z_1 z_2 = (1 - i)(-4 + 5i) = -4 + 5i + 4i + 5 = 1 + 9i.$
  - *Konjugált:* $\overline{z_1} = 1 + i.$
  - *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$
  - *Osztás:*

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 + 5i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{-4 - 4i + 5i - 5}{1^2 - i^2} = \frac{-9 + i}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}i.$$

8. *Megjegyzés.* Fontos, hogy a végeredményt valamelyik ismert alakban adjuk meg. A $\frac{3}{i}$ hiába rövid, nem kanonikus (vagy trigonometrikus) alakban van. El kell végezni ezt az osztást, és a végeredmény $-3i$.

9. Tétel. *Ha $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ két komplex szám, akkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.*

A komplex számok trigonometrikus alakja megengedi, hogy geometriai szempontból vizsgáljuk a komplex számokat. A következő tételben összefoglaljuk, hogyan történik a fentebb már definiált műveletek elvégzése trigonometrikus alak esetén.

10. Tétel. *Legyenek z_1 és z_2 a következő trigonometrikus alakú komplex számok:*

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),\; w = s\left(\cos\psi + i\sin\psi\right).$$

Ekkor

- $z \cdot w = rs\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right);$
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\left(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\right);$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right);$
- $\overline{z} = r\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right);$
- *tetszőleges* $n \in \mathbb{N}_0$ *számra* $z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right);$
- *ha* $z \neq 0$, *akkor tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *számra* $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1,$ *azaz minden nemnulla komplex számnak pontosan* n *darab* n*-edik gyöke van.*

A tételben szereplő állítások geometriai jelentőséggel bírnak. Minden komplex számnak a Gauss-féle számsíkon megfelel egy pont. Például egy komplex szám konjugáltjának megfelelő pont, az eredetinek a valós tengelyre vett tükörképe. Egy komplex szám n-edik gyökei, pedig egy meghatározott sugarú körvonalon vannak és egy szabályos n-szöget határoznak meg.

11. Példa. Legyen $z = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ és $w = (1, -1)$ két komplex szám.

- $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $w = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right);$
- $zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right);$
- $\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{19\pi}{12}\right)\right);$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$
- $\overline{w} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right);$
- $w^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i;$
- $\sqrt[3]{z} = x: \; x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}/3\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right),$
  $x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right),$
  $x_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right).$

2. Alkalmazások

- Komplex számok fizikai alkalmazásai: váltóáramú körök leírása, rezgések és hullámok leírása, komplex idő- és amplitúdófüggvény, kvantummechanikai számítások.
- Vegyük a következő rekurzív sorozatot: $z_0 = 0$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Azon c komplex számok, melyek esetén a sorozat korlátos a Mandelbrot-halmaz elemei, ami talán a legismertebb fraktálalakzat.
- Hogy rajzoljunk egy szabályos n-szöget a képernyőre? Rögzítsünk egy pontot, és a megadott képlettel számoljuk ki a rögzített pont által reprezentált komplex szám n-edik gyökeit (illetve csak azok közelítő értékeit). Így megkapjuk az n-szög összes csúcsát.
- Komplex számokkal működő Fourier-transzformációt használnak a képfeldolgozás különböző területein, például az arcfelismerésben, vagy a tömörítésben.
- A Wolfram Alpha ingyenes, internetes szoftverrel a komplex számokkal történő elemi számítások könnyen elvégezhető. A http://www.wolframalpha.com/ honlapon, vagy a

Wolfram Mathematica nevű offline programban `(10+4i)/((2-3i)*(-9-i))` formában lehet megadni komplex számokat és műveleteket. Szinte mindegyik komputeralgebrai szoftver képes a komplex számokat kezelni, például a Maple és a MatLab is.

6. feladatsor – Komplex számok, polinomok

6.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva határozzuk meg az alábbi műveletek végeredményét:
(a) i^{2011}; i^{-22}; **(b)** $(3+5i)(2-7i)$; **(c)** $(\overline{-6+9i}+4-8i)\cdot i$; **(d)** $\dfrac{-7-i}{1+4i}$; **(e)** $\overline{\dfrac{1+3i}{3+2i}}$;
(f) $\dfrac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$; **(g)** $\dfrac{\operatorname{Re}(3+5i)-(4-2i)}{(3-2i)+\operatorname{Im}(6+i)}$.

6.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $(1-3i)z=2+5i$;
(b) $(3+4i)z+(1+2i)=14+11i$;
(c) $z^2+4\overline{z}=|z|^2+6$;
(d) $i\overline{z}=z^2$.

6.3. Feladat. Az alábbi kanonikus alakban adott komplex számokat írjuk át trigonometrikus és exponenciális alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) 3; **(c)** i; **(e)** $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; **(g)** $2-2\sqrt{3}i$;
(b) -5; **(d)** $-8i$; **(f)** $1-i$; **(h)** $-\sqrt{3}-i$.

6.4. Feladat. Az alábbi trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadott komplex számokat írjuk át kanonikus alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) $2(\cos 0+i\sin 0)$; **(c)** $2e^{\frac{\pi}{4}i}$; **(e)** $\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$;
(b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$; **(d)** $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$; **(f)** $e^{\frac{5\pi}{6}i}$;
(g) $2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$.

6.5. Feladat. Trigonometrikus alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét:

(a) $(\sqrt{3}-i)(2+2\sqrt{3}i)$;
(b) $\dfrac{1-i}{1+i}$;
(c) $\dfrac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)}$;
(d) i^{14};
(e) $(\sqrt{3}-i)^{67}$;
(f) $(1+i)^{1222}$;
(g) $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526}$.

6.6. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

(a) $\sqrt{-4}$; **(c)** $\sqrt[4]{i}$; **(e)** $\sqrt[3]{-8i}$;
(b) $\sqrt[3]{-8}$; **(d)** $\sqrt[6]{64}$; **(f)** $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$.

6.7. Feladat. Számoljuk ki és ábrázoljuk Gauss-féle számsíkon a

(a) harmadik **(b)** negyedik **(c)** hatodik **(d)** nyolcadik

egységgyököket, és állapítsuk meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök.

6.8. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezős felbontásukat is.

(a) $x^2 + 6x + 10$
(b) $2x^3 + 16i$
(c) $x^3 + 8$
(d) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$

6.9. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

(a) $A(-1,1),\ B(2,4),\ C(3,9)$;
(b) $A(1,3),\ B(2,8),\ C(4,12)$;
(c) $A(-1,2),\ B(0,0),\ C(1,4),\ D(4,0)$.

6. feladatsor – Komplex számok, polinomok

6.1. Feladat megoldása.

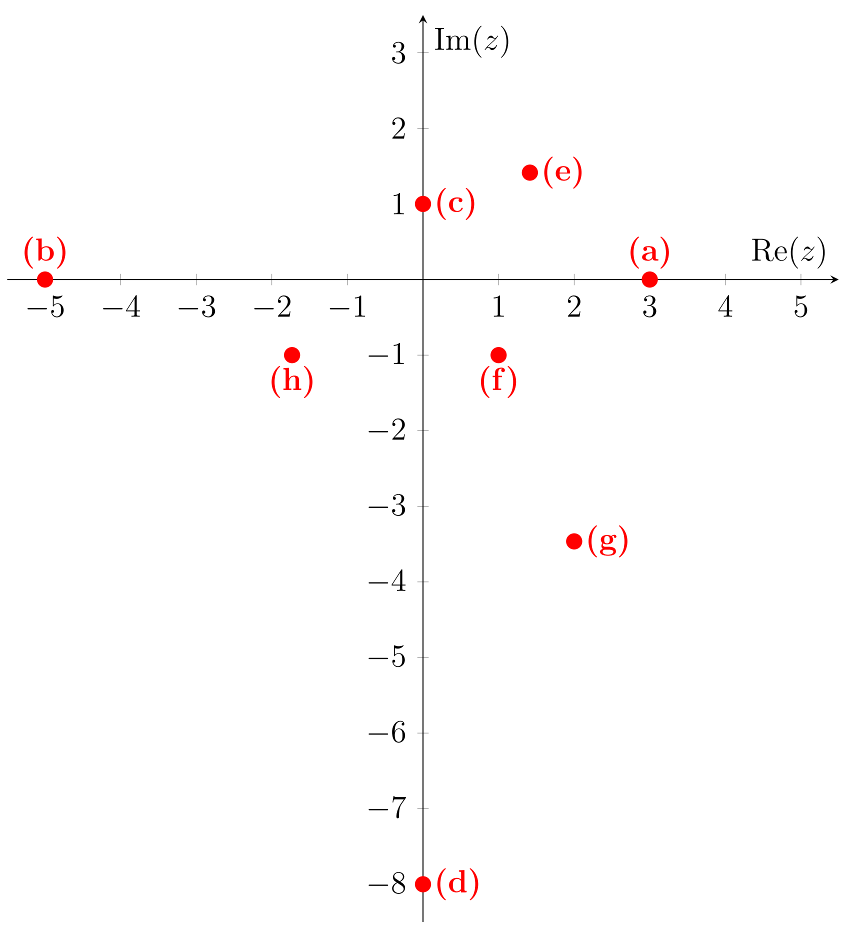
(a) $-i$; -1; **(b)** $41-11i$; **(c)** $17-2i$; **(d)** $-\frac{11}{17}+\frac{27}{17}i$; **(e)** $-\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$; **(f)** $\frac{11}{10}-\frac{23}{10}i$; **(g)** $-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}i$.

6.2. Feladat megoldása.

(a) $z=-\frac{13}{10}+\frac{11}{10}i$
(b) $z=3-i$
(c) $z_1=2+i,\ z_2=2-i,\ z_3=\frac{3}{2}$
(d) $z_1=0,\ z_2=-i,\ z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$

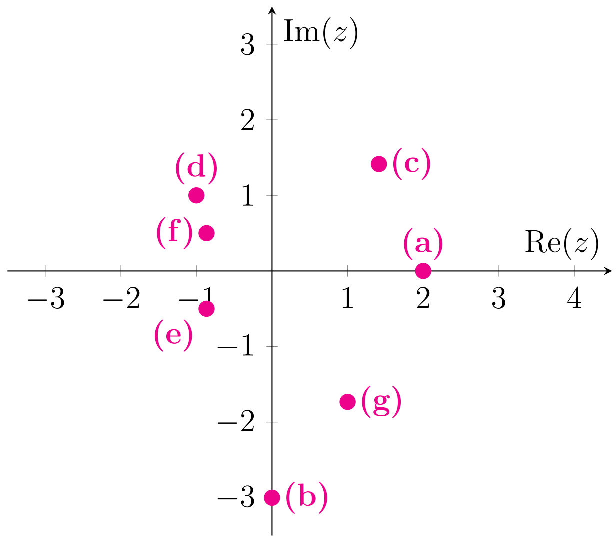
6.3. Feladat megoldása.

(a) $3=3\cdot(\cos 0+i\cdot\sin 0)=3e^0$;
(b) $-5=5\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)=5e^{\pi i}$;
(c) $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$;
(d) $-8i=8(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2})=8e^{\frac{3\pi}{2}i}$;
(e) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})=2e^{\frac{\pi}{4}i}$;
(f) $1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$;
(g) $2-2\sqrt{3}i=4(\cos\frac{5\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{5\pi}{3})=4e^{\frac{5\pi}{3}i}$;
(h) $-\sqrt{3}-i=2(\cos\frac{7\pi}{6}-i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.



6.4. Feladat megoldása.

(a) $2(\cos 0 + i \sin 0) = 2;$
(b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i} = -3i;$
(c) $2e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i;$
(d) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = -1 + i;$
(e) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$
(f) $e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$
(g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i.$



6.5. Feladat megoldása.

(a) $8(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}) = 4\sqrt{3} + 4i;$
(b) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -i;$
(c) $\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$
(d) $\cos \pi + i \cdot \sin \pi = -1;$
(e) $2^{67}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6});$
(f) $2^{611}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2});$
(g) $6^{1526}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}).$

6.6. Feladat megoldása.

(a) $2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$
$-2i = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$

(b) $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$
$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$
$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$

(c) $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8},$
$\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8},$
$\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8},$
$\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}.$

(d) $2 = 2\left(\cos 0 + i \sin 0\right),$
$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right),$
$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right),$
$-2 = 2\left(\cos \pi + i \sin \pi\right),$
$-1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right),$
$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right).$

(e) $2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right),$
$-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right),$
$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right).$

(f) $\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right),$
$\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right),$
$\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right),$
$\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right).$

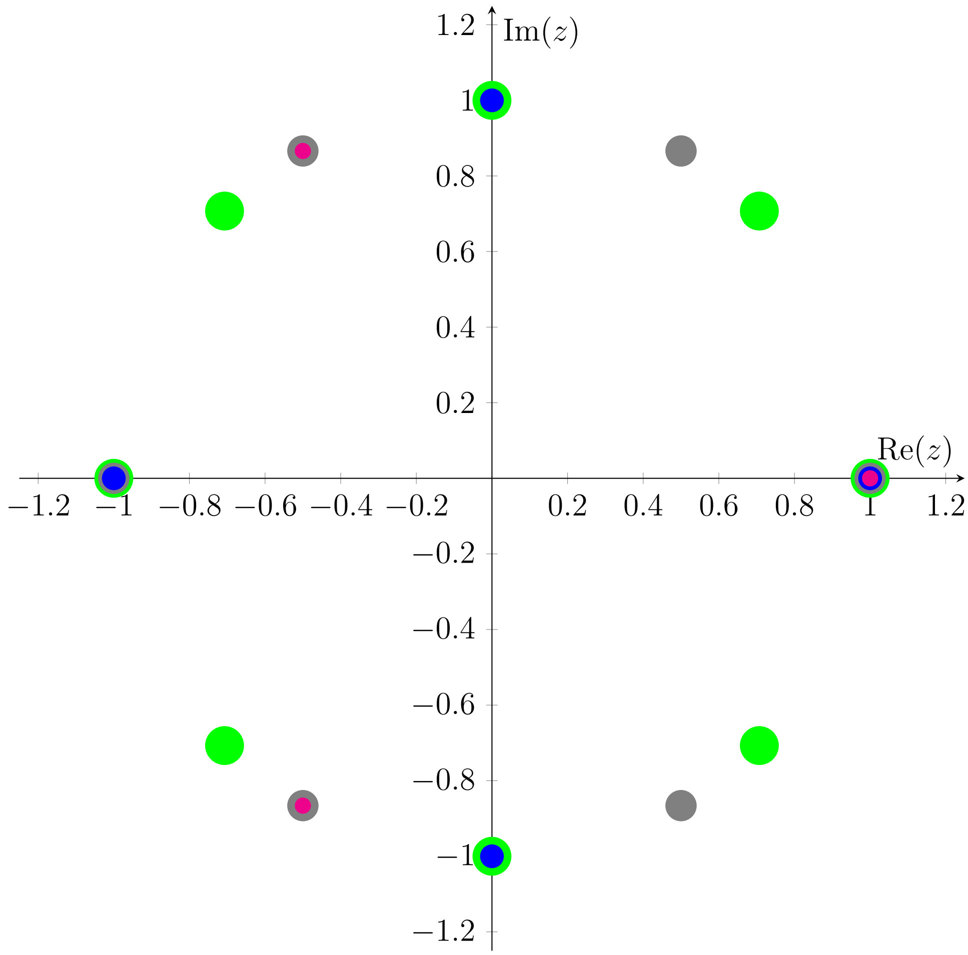
6.7. Feladat megoldása.

(a) Harmadik egységgyökök: $1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
Primitív harmadik egységgyökök: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

(b) Negyedik egységgyökök: 1, i, -1, $-i$.
Primitív negyedik egységgyökök: i, $-i$.

(c) Hatodik egységgyökök: 1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Primitív hatodik egységgyökök: $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(d) Nyolcadik egységgyökök: 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, i, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.
Primitív nyolcadik egységgyökök: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.



6.8. Feladat megoldása.

(a) $x_1=-3-i$, $x_2=-3+i$
$x^2+6x+10=(x+3+i)(x+3-i)$

(b) $x_1=2i$, $x_2=-\sqrt{3}-i$, $x_3=\sqrt{3}-i$
$2x^3+16i=(x-2i)(x+\sqrt{3}+i)(x-\sqrt{3}+i)$

(c) $x_1=-2$, $x_2=1+\sqrt{3}i$, $x_3=1-\sqrt{3}i$
$x^3+8=(x+2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

(d) $x_1=\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$

$x_2=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$

$x_3=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$

$x_4 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$
$x^4 + 1 + \sqrt{3}i = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

6.9. Feladat megoldása.

(a) x^2 **(b)** $-x^2 + 8x - 4$ **(c)** $-\frac{13}{15}x^3 + 3x^2 + \frac{28}{15}x$