

LEKÉPEZÉSEK

Leképezések tulajdonságai. Számosságok.

1. Leképezések tulajdonságai

A továbbiakban legyen A és B két tetszőleges halmaz. Idézzünk fel néhány definíciót.

1. Definíció (Emlékeztető). **Relációknak** nevezzük az $A \times A$ részhalmazait, azaz σ reláció, ha $\sigma \subseteq A \times A (= A^2)$. Egy A -ból B -be menő **megfeleltetés** az $A \times B$ részhalmaza, azaz σ egy $A \rightarrow B$ megfeleltetés, ha $\sigma \subseteq A \times B$.

Tehát a reláció egy adott halmazon belüli elemek között állít fel kapcsolatot, míg a megfeleltetés két különböző halmazt kapcsolhat össze. Egy jól ismert fogalmat fogunk most bevezetni, ami egy speciális megfeleltetés.

2. Definíció. Az $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést **leképezésnek** nevezzük, ha bármely $a \in A$ -hoz létezik *pontosan egy* olyan $b \in B$, amelyre $(a, b) \in f$. A b elemet az a elem **képének** nevezzük, az a -t pedig a b **őse**nek.

Ezt a fogalmat eddig talán mindenki függvény néven ismerte. Minden értelmezési tartományhoz tartozó x -hez tartozott egy $f(x)$ érték. Tehát az $(x, f(x))$ párok alkották a leképezést. Ugye, hogy senki sem gondolt eddig a függvényre úgy, mint rendezett számpárok halmaza? Na akkor épp itt az ideje elkezdni.

A továbbiakban tekintsük át a leképezések legfontosabb tulajdonságait.

3. Definíció. Az $f : A \rightarrow B$ leképezés **injektív**, ha bármely $a_1, a_2 \in A$ -ra teljesül, hogy ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$. Más szóval, különböző elemek képe különböző.

Az előző definícióban szereplő $a_1 f$ kifejezés azt jelenti, hogy az a_1 képe az f leképezés mellett. Szándékosan nem a függvényeknél megszokott $f(a_1)$ jelölést használjuk, de azzal egyenértékű. De még egyszer szeretnénk hangsúlyozni, hogy az f leképezés egy elempárokból álló halmaz, tehát az $a f = b$ jelölést ekvivalens az $f(a) = b$ és $(a, b) \in f$ jelölésekkel.

4. Definíció. Az $f : A \rightarrow B$ leképezés **szürjektív**, ha bármely $b \in B$ -hez létezik olyan $a \in A$, amelyre $f(a) = b$. Más szóval, minden B -beli elemnek van őse A -ban.

5. Definíció. Az $f : A \rightarrow B$ leképezés **bijektív**, ha injektív és szürjektív.

6. Példa. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $xf = x^2$ leképezés nem injektív, mert $(-2)f = 2f = 4$. A $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $xg = \log x$ leképezés injektív, mert a logaritmus egy szigorúan monoton növekvő függvény, ezért különböző elemek képe is különböző.

Továbbá az f leképezés nyilvánvalóan nem szürjektív. Van olyan szám, melynek a leképezés melletti képe -5 ? Nincs, tehát nem szürjektív. (Ha a $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $xf = x^2$ leképezést tekintenénk, akkor már szürjektív lenne.) A g leképezés szürjektív. Tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ elem őse az e^y , mert $e^y \mapsto y$.

7. Példa. Vizsgáljuk meg a $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto |n - 3| + 1$ leképezés tulajdonságait.

Injektivitás: Tegyük fel, hogy $|n - 3| + 1 = |m - 3| + 1$. Ez ekvivalens azzal, hogy $|n - 3| = |m - 3|$, vagyis $n - 3 = \pm(m - 3)$. Két eset van: $n - 3 = m - 3$, vagy $n - 3 = 3 - m$. Az első esetben azt kapjuk, hogy $n = m$, és ezt kell kapnunk, ahhoz hogy injektív legyen, de meg kell vizsgálni a másik esetet is. A második eset azzal ekvivalens, hogy $n + m = 6$, azaz $m = 6 - n$. Ez azt jelenti, hogy $ng = (6 - n)g$, természetesen csak akkor, ha $6 - n \in \mathbb{N}$. De van olyan (elég) kicsi $n \in \mathbb{N}$, amelyre még $6 - n \in \mathbb{N}$, például $n = 5$. Ekkor azt kaptuk, hogy $5g = 1g$, viszont $5 \neq 1$, tehát a g leképezés NEM injektív. A kapott ellenpélda ránézésre is megmondható, nem fontos végig levezetni.

8. *Megjegyzés.* Ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor kész vagyunk, egyetlen ellenpélda is bizonyítja, hogy a tulajdonság nem áll fenn.

9. *Megjegyzés.* A tulajdonság vizsgálatában segíthet az ábrázolás és a vízszintes vonal teszt.

Szürjektivitás: Rögzítünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{N}$ számot, és keresünk hozzá egy megfelelő $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $ng = y$. Keressük az n számot a következő egyenlet megoldásaként: $|n - 3| + 1 = y$. Ez azzal ekvivalens, hogy $|n - 3| = y - 1$. Nekünk nem az összes olyan szám kell, aminek a képe y , elég csak egyet találnunk, ezért elhagyhatjuk az abszolútérték jelet. Ekkor azt kapjuk, hogy $n - 3 = y - 1$, azaz $n = y + 2$. Mit kaptunk? Azt hogy bármely $y \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $(y + 2)g = y$. Tehát minden y -hoz található ős, ezért a leképezés szürjektív.

10. *Megjegyzés.* A tulajdonság vizsgálatában segíthet az ábrázolás és a vízszintes vonal teszt.

Bijektivitás: A fenti g leképezés nyilván NEM bijektív, mivel nem injektív.

2. Számosságok

Ebben a fejezetben egy olyan fogalomkört veszünk górcső alá, ami a mindennapi alkalmazások során elég kevéssé jelenik meg. Ezek a végtelen halmazok. (Vegyük észre, hogy a fizikusok jelenlegi álláspontja alapján véges sok atom van a világegyetemben. A számítógép véges sok adat tárolására képes. Ettől függetlenül a végtelen halmazok vizsgálata elméleti szinten kikerülhetetlen, és egyébként meg érdekes is.) Végtelen halmazok esetén az elemszám helyett a számosság fogalmát használjuk. Minden halmaznak van számossága, ami véges halmaz esetén természetesen megegyezik a jól ismert elemszám fogalommal.

11. Példa. Az $A = \{0, a\}$ halmaz véges, elemszáma kettő, azaz $|A| = 2$.

Találkoztunk már végtelen számosságú halmazokkal. Ilyen volt például az egész számok halmaza, vagy éppen a valós számok halmaza. Eddig nem nagyon gondolkodtunk azon, hogy tulajdonképpen sehol nem tudjuk az egész halmazt realizálni. (Ezt ne is tegyük, mert gyakorlatban lehetetlen.) Ami fontosabb kérdés, hogy mindkettőre azt mondjuk végtelen a számossága. De ugyanannyi, vagy nem? Esetleg van „kisebb” és „nagyobb” végtelen? Van. Először azonban lendüljünk túl azon a problémán, hogy két halmaz számosságát mikor tekintjük azonosnak.

Véges halmazok elemszáma pontosan akkor egyenlő, ha mindegyiknek ugyanannyi eleme van. Ez végtelen halmazok esetén is így lesz, csak nem mondhatjuk, hogy két halmaz számossága pontosan akkor egyenlő, ha számosságuk végtelen. A halmazok számosságát bijekciók segítségével tudjuk összehasonlítani, ugyanis egy bijekció tulajdonképpen párba állítja két halmaz elemeit.

12. Definíció. Az A és B halmazok **számossága egyenlő**, ha létezik $A \rightarrow B$ bijektív leképezés.

Most már van értelme bizonyos számosságokat elnevezni, mert meg tudjuk mondani, hogy egy halmaz számossága mikor egyezik meg ezzel.

13. Definíció. Az \mathbb{N} halmaz számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük, és \aleph_0 -al jelöljük, azaz $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

14. Definíció. Az \mathbb{R} halmaz számosságát **kontinuum számosságnak** nevezzük, és c -vel jelöljük, azaz $|\mathbb{R}| = c$.

15. Példa. A $B = \{\text{pozitív páros számok}\}$ halmaz végtelen számossága $|B| = \aleph_0$. Az $f : \mathbb{N} \rightarrow B$, $xf = 2x$ leképezés bijekció az \mathbb{N} és B halmazok között, így számosságuk megegyezik.

Első olvasásra kicsit meglepő lehetett az előző példa. Pontosán „fele annyi” páros szám van, mint pozitív egész szám. Mégis megegyezik a számosságuk? (Ugye, milyen érdekes?)

Vizsgáljuk meg akkor, hogy vannak-e különböző végtelenek? (Eddig csak két elnevezésünk van: \aleph_0 és c . Azt még nem tudjuk, hogy különbözőek.) Be kell vezetni egy relációt, ami két számosságot megkülönböztet nagyság szerint.

16. Definíció. Az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a B halmaz számossága, azaz $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \rightarrow B$ injektív leképezés.

Bármennyire is absztraktnak tűnik, ez van véges esetben is. Ha $|A| \leq |B|$, akkor megpróbálunk minden A -beli elemhez hozzárendelni egy B -beli elemet. És azt tapasztaljuk, hogy B -ben van még párosítatlan elem ($|A| < |B|$) vagy nincs ($|A| = |B|$).

17. Tétel. Ha A egy tetszőleges halmaz akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. (Ez végtelen A halmazokra is igaz, azonban ennek megértéséhez már magasabb fokú halmazelméleti ismeretekre lenne szükség, ami nem tartozik a tantárgy keretei közé.)

18. Példa. Mivel $|\emptyset| = 0$, így $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$ és $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))| = 8$.

Amiért felemlítettük a hatványhalmazt, az a következő állítás.

19. Tétel. *Tetszőleges A halmaz esetén $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, sőt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

20. Tétel. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Tehát vannak kisebb-nagyobb számosságok. Legnagyobb nincs, mert ha lenne, akkor a hatványhalmaza nagyobb számosságú lenne. A legkisebb számosságú halmaz az üres halmaz.

21. Állítás. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{T}| = c$.

22. Tétel. *Az \aleph_0 a legkisebb végtelen számosság.*

Mint említettük a bevezetett \leq egy reláció. Tehát vizsgálhatjuk a tulajdonságait, mint reláció.

23. Tétel.

- (1) *(Dichotomia) Tetszőleges A és B halmazok esetén $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$.*
- (2) *(Antiszimmetria) Tetszőleges A és B halmazok esetén ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.*

A gyakorlaton főleg az alábbi fontos tételt fogjuk masszívan használni.

24. Tétel (Számosságáritmetika alaptétele). *Ha az A és B halmazok közül valamelyik végtelen számosságú, akkor*

$$|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|).$$

25. Példa.

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

3. Alkalmazások

- Egy programnyelvben a beépített véletlenszám-generátor a $[0; 1]$ intervallumból ad vissza értéket (egyenletes eloszlással). Nekünk a dobókocka imitálására van szükségünk. A feladat egy leképezéssel könnyen megoldható, ahol a $[0; 1]$ intervallum számait kell leképezni az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számhalmazra. (A leképezés itt egy programozástechnikai függvény.)

- Digitalizálás: egy analóg jel digitalizálásakor végtelen sok különböző állapotról kell leképeznünk véges állapothalmazra, mivel a számítógép diszkrét működésű. Például a szemmel érzékelhető színeket (természetesen annak csak egy sokkal „kisebb” méretű részhalmozát) RGB-kóddal jeleníthetjük meg a számítógépen. (A $(\pi, \sqrt{2}, e)$ színt meg tudjuk jeleníteni? Miért igen, vagy nem? Milyen tulajdonságú akkor az „RGB-leképezés”?)
- Kódolás (titkosítás): olyan leképezés, mellyel egy üzenet képe csak a leképezés inverzével együtt olvasható, azaz a kódoló és dekódoló leképezés szorzata az identikus leképezés. Nem kell a leképezésnek bijektívnek lennie, de az injektivitást meg kell követelni.
- Programozás: szintaktikai és szemantikai szabályok szerint leképezzük a végrehajtandó feladatot egy adott programnyelvre. (A compiler természetes még ezt is tovább képezi alacsonyabb szintű programokra.) Itt a leképezés inkább csak köznyelvileg értendő, ugyanis a leképezést a programozó végzi, miközben a programot írja. Ez nem matematikai leképezés, de bizonyos szinten ugyanarról van szó.
- Maga a nyelv is leképezés, a gondolatainkat képezzük le különböző nyelvi eszközökre. Ez a leképezés nem injektív, például a „fog” szó bizonyítja ezt. Nyilván nem is szürjektív. Van bármi jelentése a „jksfdgúhkl” szónak?

5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik leképezés?

(a) $\alpha = \{(x, y) : y = |x|\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(b) $\beta = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(c) $\gamma = \{(x, y) : x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

5.2. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

(a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3x + 1$

(b) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3^{x-1}$

(c) $\alpha: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^2, x \mapsto (x, x-1)$

5.3. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban \mathbb{H} jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és \mathbb{E} jelöli az emberek halmazát.)

(a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2$

(b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, x\beta = x^2$

(c) $\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$

(d) $\delta = \{(x, y) : \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$

(e) $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x\varepsilon = \frac{4}{x}$

(f) $\zeta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x\zeta = |n-3| + 1$

(g) $\eta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n \text{ pozitív osztóinak száma}$

(h) $\theta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$

(i) $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x-1, 1)$

(j) $\kappa: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x-1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

5.4. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

(a) nem szürjektív,

(b) szürjektív, de nem bijektív,

(c) injektív, de nem bijektív,

(d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat.

5.5. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

(a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 3x - 1$

(b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = (x+2)^2 - 4$

5.6. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között.

(a) $(1, 6)$ és $(4, 7)$

(b) \mathbb{R} és \mathbb{R}^+

(c) $(0, 1)$ és \mathbb{R}

5.7. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \rightarrow B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

(a) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$

(f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, B = \mathbb{R}$

(b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}$

(g) $A = \mathbb{N}^3, B = \mathbb{Z}$

(c) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R}$

(h) $A = \mathbb{Q}^4, B = \mathbb{N}^2$

(d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$

(i) $A = \mathbb{R}^2, B = \mathbb{Z}^8$

(e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Z}$

5.8. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

- (a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- (b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
- (c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat megoldása.

- (a) ÉT: $x \in \mathbb{R}$, ÉK: $y \geq 0$, leképezés.
- (b) ÉT: $x \geq 0$, ÉK: $y \in \mathbb{R}$, nem leképezés.
- (c) ÉT: $x > 0$, ÉK: $y \in \mathbb{R}$, leképezés.

5.2. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 1$
- (b) $\alpha\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3^{2^x - 2}$
- (c) $\alpha\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} - 1\right)$

5.3. Feladat megoldása.

- (a) Nem injektív, nem szürjektív.
- (b) Nem injektív, szürjektív.
- (c) Nem injektív, nem szürjektív.
- (d) Nem injektív, nem szürjektív.
- (e) Injektív, nem szürjektív.
- (f) Nem injektív, szürjektív.
- (g) Nem injektív, szürjektív.
- (h) Nem injektív, szürjektív.
- (i) Injektív, nem szürjektív.
- (j) Nem injektív, szürjektív.

5.4. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = x^2$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x\gamma = x^2$
- (d) $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\delta = x^2$

Az α leképezés nem szürjektív, mert a -9 nem áll elő egyetlen valós szám négyzeteként sem.

A β leképezés szürjektív, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y} \mapsto y$. Viszont nem bijektív, mert $(-4)\beta = 4\beta$.

A γ leképezés injektív, mert különböző pozitív valós számoknak a négyzete is különböző. Viszont nem szürjektív, mert a -9 nem áll elő egyetlen pozitív valós szám négyzeteként sem.

A δ leképezés bijektív. Injektív: tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ és $a^2 = b^2$. Ekkor $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, sőt $a = b$, mivel a leképezés indulási halmaza most \mathbb{R} . Szürjektív: tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ szám esetén $\sqrt{y} \mapsto y$.

5.5. Feladat megoldása.

- (a) Tegyük fel, hogy $x\alpha = y\alpha$. Ekkor

$$\begin{aligned}x\alpha &= y\alpha \\3x - 1 &= 3y - 1 \\3x &= 3y \\x &= y.\end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén $\frac{y+1}{3} \in \mathbb{R}$ és $\frac{y+1}{3} \mapsto y$.
Tehát a leképezésnek létezik inverze:

$$\alpha^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{3}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $x\beta = y\beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} x\beta &= y\beta \\ (x+2)^2 - 4 &= (y+2)^2 - 4 \\ (x+2)^2 &= (y+2)^2 \\ |x+2| &= |y+2| \\ x+2 &= y+2 \\ x &= y. \end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y+4} - 2 \in \mathbb{R}^+$ és $\sqrt{y+4} - 2 \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze:

$$\beta^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{x+4} - 2.$$

5.6. Feladat megoldása.

- (a) $\alpha: (1, 6) \rightarrow (4, 7), x\alpha = \frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 2^x$
- (c) $\gamma: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x\gamma = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$

5.7. Feladat megoldása.

- | | |
|----------|----------|
| (a) Igen | (f) Nem |
| (b) Igen | (g) Igen |
| (c) Nem | (h) Igen |
| (d) Igen | (i) Nem |
| (e) Nem | |

5.8. Feladat megoldása.

- (a) Mindenkit átküld az 1-gyel nagyobb számú szobába, és az új vendéget berakja az 1-es szobába, mert az üres lett.
- (b) Mindenkit át kell küldeni a 999999-cel nagyobb szobába, így az első 999999 számú szobák üresen maradnak. Oda elfér a 999999 új vendég.
- (c) Mindenki menjen át a kétszer akkora számú szobába, mint amiben most van. Ekkor a páratlan számú szobák üresen maradnak, tehát megszámlálhatóan végtelen sok szoba üres marad, oda mehetnek az új vendégek.