Halmazok

Halmazelméleti alapfogalmak, hatványhalmaz,
halmazműveletek, halmazműveletek azonosságai.

1. Alapfogalmak

A *halmaz* és az *eleme* fogalmakat alapfogalmaknak tekintjük, nem definiáljuk őket. Jelölés: $x \in H$, azaz x eleme a H halmaznak. Itt x egy tetszőleges valami, mivel a H elemei is tetszőleges dolgok lehetnek. Egy halmaz elemeit megadhatjuk felsorolással, képlettel, körülírással; a lényeg, hogy egyértelműen kiderüljön, hogy mik tartoznak a halmazba, és mik nem. Egy halmaz *véges*, ha véges sok eleme van. Ezt a véges számot a halmaz *elemszám*ának nevezzük. Egy H halmaz elemszámát $|H|$-val jelöljük.

1. Definíció. Az **üres halmaz** olyan halmaz, melynek nincs eleme. Jele: $\emptyset$. Másképpen fogalmazva: minden x-re teljesül az, hogy $x \notin \emptyset$.

2. *Megjegyzés.* Csak egyetlen üres halmaz van, viszont sok különböző módon felírható. Például

$$\emptyset = \{\text{10-nél nagyobb páros prímszámok}\} = \{\text{4 fejű piros kutyák}\}.$$

3. Definíció. Két **halmaz egyenlő**, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $A = B$.

4. *Megjegyzés.* Az előző definíció értelmében egy halmazban minden elemet egyszeres multiplicitással számolunk. Például $\{0, 1, 2\} = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2\}$, mert a két oldal elemei ugyanazok. Ugyanígy értelmetlen a halmazban az elemek sorrendjét megkülönböztetni.

5. Példa. [1] $\{2, 4, 6, 8\} = \{8, 4, 2, 6\} = \{x \in \mathbb{N} : x < 10 \text{ és } \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 2y\} =$ „egyjegyű páros számok halmaza”

6. Példa. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
A bal oldali halmaz az üres halmaz, neki nincs eleme, elemszáma nulla. A jobb oldali egy olyan halmaz, mely 1 darab elemet tartalmaz, mégpedig az üres halmazt. Ennek az elemszáma 1. Ez a kettő olyan, mint egy üres könyv, illetve az üres könyvet tartalmazó polc. A könyv üres, de a polc nem. A két halmaz természetesen nem egyenlő.

[1] $\forall x$ jelentése „bármely x”, „minden x”; $\exists x$ jelentése „létezik x”, „van olyan x”

2. Részhalmaz, hatványhalmaz

7. Definíció. Az A halmaz a B halmaznak **részhalmaz**a, ha minden A-beli elem egyben B-nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$.

8. Példa. $\{1, 5, 8\} \subseteq \{1, 4, 5, 6, 8\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

9. *Megjegyzés.* Minden H halmaznak van két triviális részhalmaza:

- $H \subseteq H$, azaz minden halmaz részhalmaza saját magának, illetve
- $\emptyset \subseteq H$, azaz az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Tulajdonképpen ez a kettő az üreshalmaz esetén egybeesik.

10. Definíció. Az A halmaz a B halmaznak **valódi részhalmaz**a, ha részhalmaza, de nem egyenlő vele. Jelölése: $A \subset B$.

11. Példa. A 8. Példában szereplő részhalmazjelek tulajdonképpen valódi részhalmazt jelentenek.

A részhalmaz fogalmára érvényesek olyan nyilvánvaló tulajdonságok, mint valós számok körében a „kisebb vagy egyenlő” relációra.

12. Tétel. *Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor*

- *ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;*
- *ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.*

13. *Megjegyzés.* Az előző tételben szereplő tulajdonságoknak neve is van, ami a későbbiekben még sokszor elő fog fordulni. Az első tulajdonság azt fejezi ki, hogy a részhalmaz reláció *tranzitív*, a második pedig azt, hogy *antiszimmetrikus*. Az pedig, hogy minden halmaz részhalmaza saját magának azt mutatja, hogy a részhalmaz reláció *reflexív*.

14. Definíció. Egy H halmaz **hatványhalmaz**ának nevezzük azt a halmazt, mely a H halmaz összes részhalmazát tartalmazza elemként. Tehát ez egy olyan halmaz, melynek elemei halmazok. Jelölése: $\mathcal{P}(H)$.

15. Példa. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Általában egy rögzített, jól definiált halmaz elemeivel foglalkozunk, ugyanis nem túl sok értelme van a $H = \{0, 1, 2, 3, \text{Shakespeare összes művei}, p, q, r\}$ halmaznak. Ez is egy korrekten definiált halmaz, de gyakorlati haszna nem túl sok van. Ezért meg szoktunk állapítani egy alaphalmazt, és csak ezen alaphalmaz elemeit vizsgáljuk, az ezen kívüli elemekkel nem foglalkozunk. Például a prímszámok halmazának vizsgálatakor az alaphalmazt tekinthetjük például az egész számok halmazának, mert úgy sem akarjuk azt vizsgálni, hogy egy ceruza eleme-e a prímszámok halmazának. Mivel a ceruza nincs az alaphalmazban, így nem is merül fel ilyen kérdés.

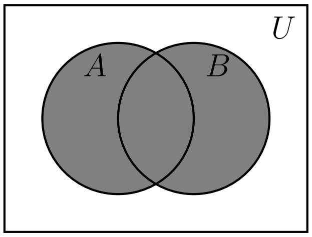
Ha már azonos típusú elemekből álló halmazokat vizsgálunk, akkor bevezethetünk a halmazaink között műveleteket.

3. Halmazműveletek

16. Definíció. Legyen A és B két tetszőleges halmaz, U legyen a rögzített alaphalmaz, $A, B \subseteq U$. (A formális definíciók mellett a műveleteket Venn-diagramokon is szemléltetjük.)

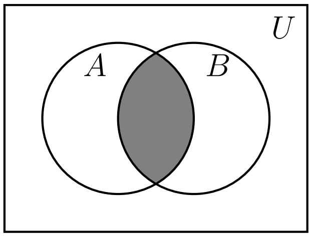
(a) Az A és B halmazok **unió**jának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van valamelyik halmazban.
Jelölés: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ VAGY } x \in B\}$$



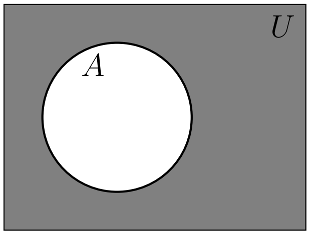
(b) Az A és B halmazok **metszet**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van mindkét halmazban.
Jelölés: $A \cap B$.

$$A \cap B = \left\{x : \ x \in A \text{ ÉS } x \in B\right\}$$



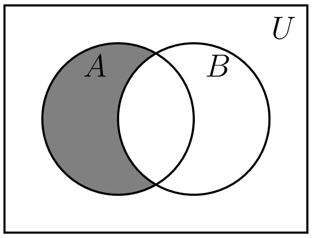
(c) Az A halmaz **komplementer**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van U-ban (az alaphalmazban), de nincs benne A-ben.
Jelölés: $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \left\{x : \ x \in U \text{ ÉS } x \notin A\right\}$$



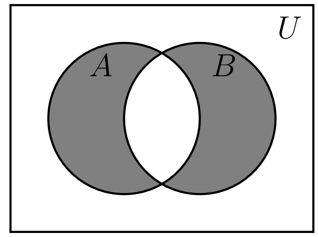
(d) Az A és B halmazok **különbség**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van A-ban, de nincs benne B-ben.
Jelölés: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \left\{x : \ x \in A \text{ ÉS } x \notin B\right\} = A \cap \overline{B}$$



(e) Az A és B halmazok **szimmetrikus differenciá**jának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme az A és a B halmazok közül pontosan az egyikben van benne. Jelölés: $A \triangle B$.

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



4. Halmazműveleti azonosságok

Ebben a részben a halmazműveletek néhány fontosabb tulajdonságát vizsgáljuk meg. Tételként fogunk rájuk hivatkozni, de az állítások legnagyobb része az előbbi definíciók alapján könnyen és gyorsan igazolható.

17. Tétel. *Tetszőleges A, B, C halmazokra*

$$\begin{array}{lcr} A \cap A = A, & A \cup A = A, & \textit{(idempotencia)} \\ A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & \textit{(kommutativitás)} \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,, & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,, & \textit{(asszociativitás)} \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \textit{(abszorptivitás)} \\ (A \cup B) \cap C = & (A \cap B) \cup C = & \textit{(disztributivitás)} \\ (A \cap C) \cup (B \cap C)\,, & (A \cup C) \cap (B \cup C)\,. & \end{array}$$

18. Tétel. *Tetszőleges $A, B\,(\subseteq U)$ halmazokra*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \textit{(de Morgan azonosságok)}$$

$$\overline{\overline{A}} = A,$$

$$\begin{array}{cc} A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, \\ A \cap U = A, & A \cup U = U, \\ A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cup \emptyset = A. \end{array}$$

A következő tétel már szerepelt a halmazműveletek definíciójánál, azonban fontosságuk miatt tételként is leírjuk újra. A halmazműveletek definícióinál az igazi definíciók a szöveges definíciók, azokból lehet levezetni a következő egyenlőségeket a nyelvtani kötőszavakat megfelelően variálva.

19. Tétel. *Tetszőleges $A, B\,(\subseteq U)$ halmazokra*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

és

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Az előző két tétel segíthet abban, hogy a különböző halmazműveleteket átírjuk más halmazműveleti jelek segítségével.

20. *Megjegyzés.* A fenti halmazműveletek mindegyike kifejezhető unió, metszet, és komplementer műveletek segítségével. (Sőt, a metszet és az unió közül elég az egyik a de Morgan szabály miatt.)

21. Példa.

$$
\begin{aligned}
A \setminus (B \triangle \overline{C}) &= A \cap \overline{(B \triangle \overline{C})} && (1)\\
&= A \cap \overline{((B \cup \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}))} && (2)\\
&= A \cap \overline{((B \cup \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})})} && (3)\\
&= A \cap (\overline{(B \cup \overline{C})} \cup \overline{\overline{(B \cap \overline{C})}}) && (4)\\
&= A \cap \big((\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C})\big) && (5)
\end{aligned}
$$

(1): Különbség átírása a 19. Tétel szerint.
(2): Szimmetrikus differencia átírása a 19. Tétel szerint.
(3): Különbség átírása a 19. Tétel szerint.
(4): De Morgan azonosság alkalmazása a 18. Tétel szerint.
(5): De Morgan azonosság alkalmazása a 18. Tétel szerint, illetve alkalmazzuk ezen tétel második állítását is.

5. Alkalmazások

- Halmaz, mint absztrakt adattípus. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus.
- Java programozási nyelv: például Set interfész; AbstractSet, HashSet osztály.
  Programozó cégeknél szoktak ilyen kérdéseket feltenni, mint például a következő. Van egy tömb, melynek elemei tetszőlegesen nagy egész számok. Listázza azon számokat, melyek a tömbben páratlan sokszor szerepelnek. Mindenki elgondolkozhat, hogy ő hogyan csinálná. Több megoldás is van, a megoldás ötletességét szokták értékelni.
- Formális nyelvek és számítástudomány:
  - ábécé: előre rögzített, meghatározott jelek általában véges halmaza, például $\Sigma = \{$magyar nyelv által használt betűk és karakterek$\}$;
  - az ábécé elemei a karakterek, a karakterekből álló sorozatok a szavak, például Shakespeare minden műve egy-egy szó;
  - Σ^* az összes szavak halmaza;
  - Σ^* részhalmazai a nyelvek, például Shakespeare összes műve egy nyelv.
  - LÁSD: Bonyolultságelmélet kurzus.

A Turing-gép talán a számítógép működésének egyik legjobb matematikai modellje. Gondoljunk bele abba, hogy olyan programot kell írnunk, ami egy tetszőleges szóról eldönti, hogy palindrom-e. Nyilván ezt nagyon könnyen meg tudja mindenki csinálni. Azonban ha ezt valaki C-ben megírja, könnyen, még nem feltétlen olyan könnyű ezt elméletben megcsinálni. Például mit hol kell tárolni az algoritmus során, mekkora memóriahelyre lesz szükség, és mennyi ideig fog futni a program. Ilyen kérdéseket vizsgál a bonyolultságelmélet.

- Reguláris kifejezések: olyan string, amivel meghatározható stringek egy halmaza. *Például az „a*" kifejezés jelöli az „a" betűvel kezdődő szavak halmazát. Alapszintű programozásban gyakran van szükség hasonló kifejezésekre, például Linux alatt az egy mappában lévő összes pdf fájl kinyomtatása megtörténhet így:* `lpr *.pdf`*. Nem kell előtte összefésülni, hogy aztán egy darabban ki lehessen nyomtatni, vagy egyesével nyomtatgatni.*
- Fontos kiterjesztés: fuzzy-halmazok. Alkalmazásai: irányítástechnika, mesterséges intelligencia, elektronika. LÁSD: Mesterséges intelligencia kurzus. *Matematikailag egy objektum mindig vagy eleme a halmaznak vagy nem. Azonban ez túlságosan leegyszerűsítheti a kategorizálást. Gondoljunk bele, hogy egy arcfelismerő robotot akarunk programozni, melynek az a feladata, hogy megmondja egy emberről* (x)*, hogy szép-e* ($x \in H$)*. Azonban nem feltétlen szeretnénk azt, hogy mindenki vagy szép, vagy nem szép legyen, ennél sokkal jobb minden emberhez egy számot hozzárendelni* ($\mu(x)$)*, hogy mennyire szép. És ezzel már nem azt mérjük, hogy* x *eleme-e* H*-nak, hanem azt, hogy mennyire. Például, ha* $\mu(x) = 0.95$*, akkor ez közel van az* 1*-hez, tehát „nagyon benne van a halmazban".*
- Mandelbrot-halmaz és egyéb fraktálok. *Szegedi fejlesztésű szoftver a Xaos, mely segítségével érdekes és szép geometriai alakzatokkal találkozhatunk. Ezeknek neve fraktálok. Például van olyan alakzat, melynek végtelen a kerülete, de véges a területe. (Kicsit furcsa lehet, de igaz, nem gépeltem félre.)*
- Számelméleti halmazok: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Biológia: rendszertani kategorizálás. *Lehet, bele se gondoltunk eddig, de akárki akármivel foglalkozik, halmazokban gondolkozik. A boltban nem összevissza vannak az áruk pakolva, hanem értelmes részhalmazokra bontva (élelmiszer, tisztítószer, autóalkatrész,...). A programnyelvek objektumorientáltak, vagy nem. Az iskolai érdemjegy egy 5 elemű halmazból kerül ki. (Érdekes, senki sem akar egy vizsgán 7-est kapni, pedig az is olyan szám, mint a többi. Mindenki tudja, hogy az alaphalmaz {1,2,3,4,5}.)*
- Minden területen, mindenféle kategóriába sorolás halmazelméleti feladat. Ujjlenyomat keresése adatbázisban, telefonszám keresése telefonkönyvben, ... - ez mind olyan probléma, mely arra vezethető vissza, hogy egy adott objektum eleme-e egy halmaznak. Gyakorlatban a halmazokon már értelmezve van valami sorrendiségi reláció, így már

nem pusztán matematikai halmazokról beszélhetünk, ahol a halmaz elemeinek sorrendje nem számít. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus - Keresési és rendezési algoritmusok.
Például el lehet gondolkozni a következő feladaton. Van egy egész számokat tároló rendezett tömb, azaz a tömb elemei nagyság szerint sorba vannak rendezve. Eleme-e ennek a tömbnek egy megadott szám? Menjünk végig és keressük meg? Vagy ennél hatékonyabb eljárás is van? A probléma reális, ugyanaz, mintha egy szót keresnénk a szótárban. Aki csinált ilyet, szerintem az optimálisabb módszert is használta, csak fel se tűnt neki.

3. feladatsor – Halmazok

3.1. Feladat. Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

(a) $\emptyset \in A$
(b) $\emptyset \subseteq A$
(c) $\{\emptyset\} \in A$
(d) $\{\emptyset\} \subseteq A$
(e) $\{\{\emptyset\}\} \in A$
(f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$
(g) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$
(h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

3.2. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$ és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{B}, \quad A \setminus B, \quad A \triangle B, \quad (A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B}, \quad \mathcal{P}(B).$$

3.3. Feladat. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B.$$

3.4. Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

3.5. Feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$
(d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$
(e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$
(f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$

3.6. Feladat. Adjunk meg az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazon egy olyan osztályozást, melynek

(a) legalább 3 osztálya van;
(b) pontosan 3 osztálya van;
(c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű;
(d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

3.7. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$
(c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$
(g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

3.8. Feladat. Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

3.9. Feladat. Van-e olyan A, B, C halmaz, melyre $A \subseteq B \in C$ és $A \in B \subseteq C$ is teljesül?

3.10. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$.

(a) $A \subseteq B$ **(b)** $A = B$ **(c)** $B \setminus A = \emptyset$

3.11. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül, hogy

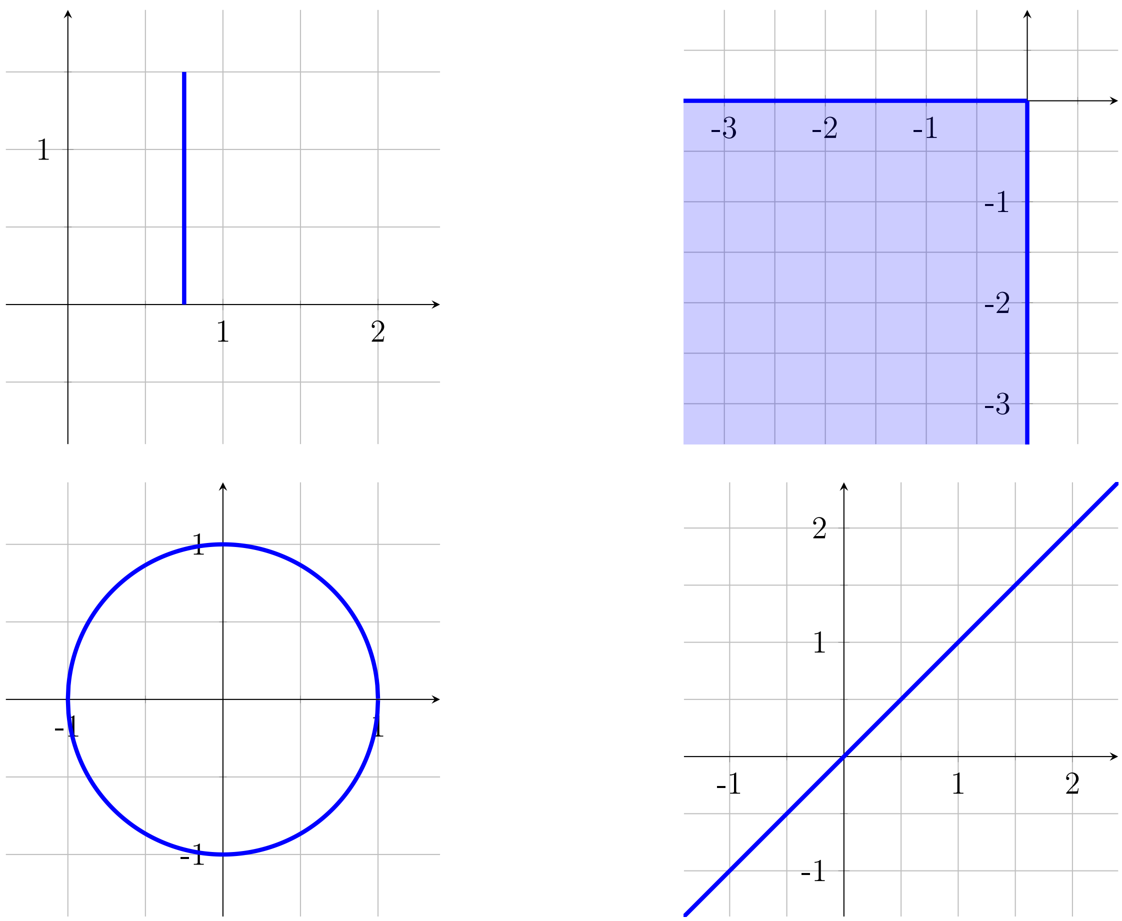
(a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$;
(b) $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq (A \cap C \cap D)$.

3.12. Feladat. Vezessünk be egy új műveletet a halmazok körében: legyen A és B az U univerzum részhalmaza, és legyen $A \sqcap B := \overline{A \cap B}$. Igazoljuk, hogy $\overline{A} = A \sqcap A$ és $A \cap B = (A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap B)$. Hogyan fejezhető ki az egyesítés a $\sqcap$ művelet segítségével?

3.13. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A és B halmazok esetén $A \times B$-t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

(a) $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$
(b) $A = \{1, 3\}$, $B = [1; 3)$
(c) $A = (-1; 2]$, $B = [1; 3)$

3.14. Feladat. Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?



3. feladatsor – Halmazok

3.1. Feladat megoldása.

(a) Igaz
(b) Igaz
(c) Igaz
(d) Igaz
(e) Hamis
(f) Igaz
(g) Igaz
(h) Igaz

3.2. Feladat megoldása.

- $A \cup B = \{a, b, c, d, e\} = U$;
- $A \cap B = \{d\}$;
- $\overline{B} = \{a, b, c\}$;
- $A \setminus B = \{a, b, c\}$;
- $A \triangle B = \{a, b, c, e\}$;
- $\left(A \triangle \overline{C}\right) \setminus \overline{B} = \emptyset$;
- $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}\}$.

3.3. Feladat megoldása.

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad B = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

- $A \cup B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$
- $A \cap B = \{\emptyset, \{b\}\}$
- $A \setminus B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- $B \setminus A = \{\{c\}, \{b, c\}\}$
- $A \triangle B = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

3.4. Feladat megoldása. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

3.5. Feladat megoldása.

(a) Igen
(b) Igen
(c) Nem
(d) Nem
(e) Nem
(f) Nem

3.6. Feladat megoldása.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}\}$
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}\}$
(d) Nincs ilyen osztályozás.

3.7. Feladat megoldása.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$
(c) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$
(d) $A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$
(g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

3.8. Feladat megoldása. $\overline{A \cup (B \cap (C \cup D))} = \overline{A} \cap \left(\overline{B} \cup \left(\overline{C} \cap \overline{D}\right)\right)$

3.9. Feladat megoldása. Van: $A=\emptyset$, $B=\{\emptyset\}$, $C=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

3.10. Feladat megoldása. $A\subseteq B$ teljesül, $A=B$ és $B\setminus A=\emptyset$ nem teljesül.

3.11. Feladat megoldása.

(a)

$$\begin{aligned}
x\in(A\cap C)\cup(B\cap D) &\longleftrightarrow x\in(A\cup(B\cap D))\cap(C\cup(B\cap D))\\
&\longleftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)\cap(C\cup B)\cap(C\cup D)\\
&\longrightarrow x\in(A\cup B)\cap(C\cup D)
\end{aligned}$$

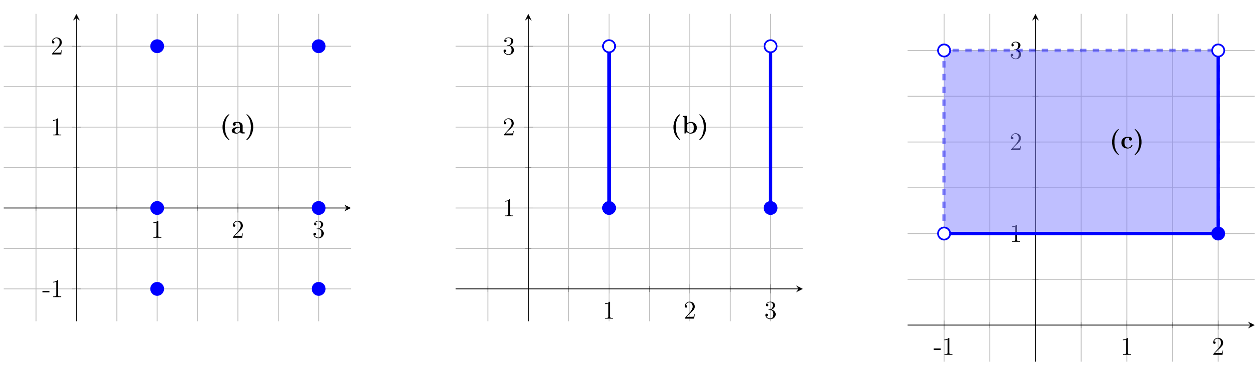
(b)

$$\begin{array}{lll}
 & & x\in C\cup D\longrightarrow x\notin B\cap\overline{(C\cup D)}=B\setminus(C\cup D)\\
 & \nearrow & \\
x\in A\cap C\cap D & & \\
 & \searrow & \\
 & & x\in A\cap C\\
 & \longrightarrow\ x\in & (A\cap C)\setminus(B\setminus(C\cup D))
\end{array}$$

3.12. Feladat megoldása.

- $A\sqcap A=\overline{A\cap A}=\overline{A}$
- $(A\sqcap B)\sqcap(A\sqcap B)=\overline{A\sqcap B}=\overline{\overline{A\cap B}}=A\cap B$
- $A\cup B=(A\sqcap A)\sqcap(B\sqcap B)$

3.13. Feladat megoldása.



3.14. Feladat megoldása.

Igen	Igen
Nem	Nem