

Valós függvénytan

Elektronikus tananyag

Valós függvénytan: Elektronikus tananyag

TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1 MSc Tananyagfejlesztés

Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz

Tartalom

Előszó	vii
1. Függvénysorozatok, függvénysorok	1
1. Függvénysorozatok	1
1.1. Feladatok	18
1.2. Megoldások	19
2. Függvénysorok	38
2.1. Feladatok	41
2.2. Megoldások	43
2. Lebesgue-integrál	53
1. Nullamértékű halmazok	53
2. Borel-féle befedési Tétel.	55
3. Lépcsős függvények	57
4. A_{C_1} függvényosztály	57
4.1. Műveleti tulajdonságok C_1 -ben	63
5. A_{C_2} függvényosztály	66
5.1. Műveleti tulajdonságok C_2 -ben	67
6. Beppo Levi Tétel.	70
7. Lebesgue Tétele	78
8. A Riemann-integrál beépítése a Lebesgue-integrál elméletébe	81
9. Mértető halmazok, mérhető függvények	87
9.1. Mértető függvények	87
9.2. Mértető halmazok	89
9.3. Mértető halmazok és mérhető függvények közötti összefüggés	92
10. Feladatok	92
11. Megoldások	92
3. Euklideszi terek	95
1. Metrikus tér, lineáris tér, normált tér	95
1.1. Metrikus tér	95
1.2. Lineáris tér	95
1.3. Euklideszi tér	96
1.4. Normált tér	97
1.5. Feladatok	99
1.6. Megoldások	100
2. Ortogonalitás	105
2.1. Ortogonális függvényrendszerek	105
2.2. Parseval-formula és Riesz-Fischer Tétel. ortogonális sorokra	108
2.3. Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció	111
4. Integrálható függvények terei	113
1. Az L^2 függvénytér	113
1.1. Az L^2 tér Hilbert-tér	113
1.2. Teljes ortogonális rendszer létezése az L^2 térben	117
1.3. Fourier-sorok	120
1.4. Ortogonális függvényrendszerek az L^2 térben	121
1.4.1. A trigonometrikus rendszer	121
1.4.2. A trigonometrikus rendszer komplex alakja	127
1.4.3. Ortogonális polinomok	129
1.4.4. Rademacher-rendszer	135
1.4.5. Haar-rendszer	137
1.5. Feladatok	145
1.6. Megoldások	146
2. Az L^p függvénytér	151
5. Trigonometrikus Fourier-sorok konvergenciája	157
1. Történeti előzmények, motiváció	157

2. Riemann-Lebesgue-féle lemma	160
3. Dirichlet-formula	162
4. Dini-féle és Lipschitz-féle konvergencia-kritériumok	164
5. Dirichlet-Jordan-féle Tétel.	171
6. Feladatok	173
7. Megoldások	175
6. Szummációs eljárások	197
1. Végtelen sorok szummációja	197
1.1. Cesàro-összeg	197
1.2. Abel-összeg	199
1.3. Kapcsolat a két szummációs eljárás között	200
2. Fourier-sorok összegzése	203
2.1. Fejér Tétele	204
2.1.1. Fejér-féle magfüggvény	204
2.1.2. Fejér-Tétele	205
2.2. Fourier-sorok Abel-összegzése	208
7. Fourier-transzformált	209
1. Formális határátmenet Fourier-sorból	209
2. Integrálható függvények Fourier-transzformációja	211
3. Inverziós formula	217
8. Diszkrét Fourier-analízis	219
1. Diszkrét Fourier-transzformált	219
1.1. A diszkrét komplex trigonometrikus rendszer	221
1.2. Diszkrét Fourier-transzformált értelmezése	223
1.3. A diszkrét Fourier-transzformált tulajdonságai	225
9. Haar Wavelet analízis	233
1. Waveletek	233
2. A Haar skálázási függvény és tulajdonságai	233
3. A Haar wavelet és tulajdonságai	236
4. Haar dekompozíció és rekonstrukció	239
4.1. Haar dekompozíció	239
4.2. Haar rekonstrukció	240
10. Függelék	247
1. Folytonos függvények	247
2. Monoton függvények	247
3. Korlátos változású függvények	249
3.1. Folytonos függvények differenciálhatósága	251
4. Monoton folytonos függvények differenciálhatósága	254
5. Monoton függvények differenciálhatósága	258
6. Többváltozós függvények	259
11. Irodalomjegyzék	262

Az ábrák listája

1.1. Az $(x^n, n \in \mathbb{N})$ ($x \in (0, 1]$) függvénysorozat első hat eleme és a határfüggvény	2
1.2. Az $(\sqrt[n]{x^n + 2^n}, n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in [0, \infty)$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	4
1.3. Az $(\frac{x^n}{1+x^n}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	5
1.4. Az $(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénysorozat első négy eleme és a határfüggvény	6
1.5. A $(\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(\pi \cdot x \cdot n!), n \in \mathbb{N})$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénysorozat első öt eleme	8
1.6. Háztető függvények	10
1.7. Egyenletes konvergencia	12
1.8. Az $(x^n - x^{n+1}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in [0, 1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	20
1.9. Az $(\frac{1}{x+n}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in (0, \infty)$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	21
1.10. Az $(\frac{nx}{1+n+x}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in [0, 1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	22
1.11. Az $(x^n - x^{2n}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in [0, 1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	24
1.12. Az $(\frac{2nx}{1+n^2x^2}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in [0, 1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	25
1.13. Az $(\frac{2nx}{1+n^4x^2}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in [0, 1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	27
1.14. Az $(e^{-(x-n)^2}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	28
1.15. Az $(n \cdot (\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}), n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in \mathbb{R}^+$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény ..	29
1.16. Az $(\frac{1}{n} \cdot \sin(nx), n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	30
1.17. Az $(\sin \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	31
1.18. Az $(\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in \mathbb{R}^+$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	33
1.19. Az $(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	35
1.20. Az $(n \cdot (\sqrt[n]{x} - 1), n \in \mathbb{N}^*)$ ($x \in \mathbb{R}^+$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény	36
2.1. Lefedő intervallumok "levágása"	59
2.2. Felső burkoló	63
2.3. $\mathcal{Q}_2$ és f grafikonja	65
2.4. A $(\Phi_k, k \in \mathbb{N})$, a $(G_k, k \in \mathbb{N})$ és a $(\Phi_{km}, m \in \mathbb{N})$ függvénysorozatok	73
2.5. Az f függvény grafikonja	86
3.1. $\mathbb{R}^3$ -beli vektor $\mathbb{R}^2$ -re vett merőleges vetülete	107
4.1. A T segédfüggvény grafikonja	123
4.2. Az f függvény grafikonja	125
4.3. Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja	126
4.4. Az első 4 1-főegyütthatós Legendre-polinom grafikonja	131
4.5. Az első 4 klasszikus Legendre-polinom grafikonja	132

4.6. A Rademacher-rendszer első három eleme	135
4.7. A Haar-rendszer első néhány eleme	138
4.8. Az f függvény Haar-Fourier-sorának $S_{31}f$ részletösszegének grafikonja	144
4.9. Az első 4 1-főegyütthatós elsőfajú Csebisev-polinom grafikonja	150
4.10. Az első 4 klasszikus elsőfajú Csebisev-polinom grafikonja	151
5.1. Az f függvény grafikonja	166
5.2. Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja	167
5.3. Az f függvény grafikonja	170
5.4. Az f függvény grafikonja	175
5.5. Az f függvény és Fourier-sorának S_5f részletösszegének grafikonja	176
5.6. Az f függvény grafikonja	177
5.7. Az f függvény és Fourier-sorának $S_{11}f$ részletösszegének grafikonja	178
5.8. Az f függvény grafikonja	179
5.9. Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja	181
5.10. Az f függvény grafikonja	181
5.11. Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja	182
5.12. Az f függvény grafikonja	183
5.13. Az f függvény és Fourier-sorának S_6f részletösszegének grafikonja	184
5.14. Az f függvény grafikonja	185
5.15. Az f függvény és Fourier-sorának S_5f részletösszegének grafikonja	186
5.16. Az f függvény grafikonja	186
5.17. Az f függvény és Fourier-sorának S_5f részletösszegének grafikonja	188
5.18. Az f függvény grafikonja	188
5.19. Az f függvény grafikonja	189
5.20. Az f függvény és Fourier-sorának S_5f részletösszegének grafikonja	190
5.21. Az f függvény grafikonja	193
5.22. Az f függvény grafikonja	194
5.23. Az f függvény grafikonja	195
7.1. A $\chi_{[-\pi, \pi]}$ függvény grafikonja	212
7.2. Az $\hat{f}$ függvény grafikonja	213
7.3. A $\hat{B}$ függvény grafikonja	213
7.4. Az $\hat{B}$ függvény grafikonja	214
7.5. Az f függvény grafikonja	217
7.6. Az $\hat{f}$ függvény grafikonja	218
8.1. A trapéz-formula során használt trapézok	219
8.2. n -edik egységgyökök	221
8.3. A feladatban szereplő függvények diszkrét Fourier-együtthatóinak abszolút értéke	229
8.4. Az f függvény grafikonja	230
8.5. Az f függvény diszkrét Fourier-együtthatóinak abszolút értéke	231
8.6. A szűrt (piros) és a szűretlen (kék) jel grafikonja	232
9.1. A Haar skálázási függvény grafikonja	234
9.2. A Haar wavelet grafikonja	237
9.3. A Haar wavelet grafikonja	243
9.4. A Haar wavelet dekompozíció számolási sémája	245
10.1. B. L. van der Waerden példájában összegzett függvények $n=0$ és $n=1$ esetén	252
10.2. B. L. van der Waerden példa-függvényének 3. részletösszege	252

Előszó

A jelen digitális tananyag a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0025 számú, "Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz" című projekt részeként készült el.

A projekt általános célja a XXI. század igényeinek megfelelő természettudományos felsőoktatás alapjainak a megteremtése. A projekt konkrét célja a természettudományi mesterképzés kompetenciaalapú és módszertani megújítása, mely folyamatosan képes kezelni a társadalmi-gazdasági változásokat, a legújabb tudományos eredményeket, és az info-kommunikációs technológia (IKT) eszköztárát használja.



Jelen jegyzet a *TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1 MSc Tananyagfejlesztés* című pályázat keretében készült első sorban a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karának Alkalmazott Matematikus MSc és Matematika Tanár MA szakok Analízis alapjai, Alkalmazott analízis, illetve Valós és komplex függvénytan alkalmazásokkal című tárgyaihoz. A jegyzet részleteiben használható a PMMIK Mérnök Informatikus képzésének Alkalmazott analízis kurzusának oktatása során is.

A jegyzet feltételezi a Matematika BSc szakon hallgatott analízis tárgyak anyagának ismeretét, de néhány általunk fontosnak vélt fogalom a jegyzetben ismételésre került.

A jegyzet alapvetően lineáris felépítésű, de néhány fejezet a feldolgozás folyamán kihagyható. Minden fejezet elején szerepel, hogy mely fogalmak ismerete szükséges a témakör megértéséhez, illetve, hogy mely fogalmak kerülnek az adott fejezetben bevezetésre. Az új fogalmak hiperkinkjeinek segítségével közvetlenül a definícióra ugorhatunk.

A jegyzet elméleti fejezeteiben található kidolgozott példák mellett az egyéni feldolgozásra szánt feladatok külön fejezetben kaptak helyet, a feladatok megoldásaihoz hiperlinkek segítségével navigálhatunk.

Bizonyos ábrák esetén a szemléletesebb megjelenítés kedvéért GeoGebra animációkat is készítettünk. Összesen 12 interaktív animációt és 20 nem-inreaktív animációt készítettünk.

A jegyzet két formátumban készült. Az elektronikus publikálásra alkalmas xml formátum mellett elérhető egy hiperlinkekkel ellátott böngészhető pdf formátum is, melyet nyomtatásra alkalmasabb, átláthatóbb, a hagyományos könyvformátumokhoz jobban illeszkedő tagolással készítettünk. Ebből a formátumból természetesen az animációkat kihagytuk.

Ezúton mondunk köszönetet dr. Gát György egyetemi tanárnak, aki lelkiismeretes munkájával, hasznos tanácsaival segítette a végső forma kialakítását.

1. fejezet - Függvénysorozatok, függvénysorok

Ebben a fejezetben a függvénysorozatok és sorok konvergencia-kérdéseivel foglalkozunk. A pontonkénti konvergencia mellett az egyenletes konvergencia fogalmát is bevezetjük, megvizsgáljuk, hogy az egyes konvergenciák örökítenek-e bizonyos függvény-tulajdonságokat, mint például folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: függvénysorozat, pontonkénti konvergencia, egyenletes konvergencia, határfüggvény, függvénysor, összegfüggvény.

Szükséges előismeret: Számsorozatok, végtelen sorok, valós változós valós értékű függvények határértéke, folytonossága, differenciálhatósága, integrálszámítás.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 4 tanóra + 6 óra önálló munka.

1. Függvénysorozatok

A természetes számok halmazán értelmezett függvényeket *sorozatoknak* nevezzük. Attól függően, hogy a természetes számokhoz milyen halmazból rendelünk elemeket, beszélünk számsorozatról, vektorsorozatról, intervallumsorozatról, stb.

Ebben a fejezetben olyan sorozatokat vizsgálunk, melyek a természetes számokhoz függvényeket rendelnek:

1.1.1. Definíció. Legyen $f_n: H \rightarrow \mathbb{R}, (H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot *függvénysorozatnak* nevezzük.

A számsorozatokhoz hasonlóan a függvénysorozatok is jellemezhetjük monotonitással, korlátossággal és konvergencia szempontjából. Mindhárom fogalom természetes kiterjesztése a számsorozatokra vonatkozó fogalmaknak.

Monotonitás:

1.1.2. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ $(f_n: H \rightarrow \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$ függvénysorozat

i) *monoton nő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in H$ esetén $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$,

ii) *szigorúan monoton nő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in H$ esetén $f_n(x) < f_{n+1}(x)$,

iii) *monoton csökken*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in H$ esetén $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$,

iv) *szigorúan monoton csökken*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in H$ esetén $f_n(x) > f_{n+1}(x)$,

v) *nem monoton*, ha i)-iv) egyike sem teljesül.

Korlátosság:

1.1.3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ $(f_n: H \rightarrow \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$ függvénysorozat korlátos, ha minden $x \in H$ számhoz létezik egy $M > 0$ szám, melyre $|f_n(x)| \leq M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Az $(\sqrt[n]{x^n + 2^n}, n \in \mathbb{N}^*)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ függvénysorozat korlátos, mert minden $x \in \mathbb{R}^+$ szám esetén az $M = 2x$ teljesíti a definíció feltételeit.

Az $(x^n, n \in \mathbb{N})$ $(x \in (0, 1))$ sorozat is korlátos, hiszen minden $x \in (0, 1)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|x^n| < 1$.

Ugyanakkor az $\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{|x^n| > M} (1, \infty)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ nem korlátos, mert minden $x > 1$ és minden $M > 0$ számhoz létezik n , melyre $|x^n| > M$. (Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$, ezért ilyen n valóban létezik.)

A példákból is látszik, hogy korlátos sorozatok esetén a definícióban szereplő M szám néha függ néha pedig nem függ x -től. Érdemes megkülönböztetni azokat a sorozatokat, melyekhez x -től független M konstans is létezik:

1.1.4. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ $(f_n : H \rightarrow \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$ függvényesorozat egyenletesen korlátos, ha létezik egy $M > 0$ szám, melyre minden $x \in H$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f_n(x)| \leq M$.

Konvergencia:

1.1.5. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvényesorozat (pontonként) konvergens H -n, ha minden $x \in H$ pont esetén az $(f_n(x), n \in \mathbb{N})$ számsorozat konvergens. Ekkor az

$$f : H \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

hozzárendelési utasítással értelmezett függvényt az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvényesorozat határfüggvényének nevezzük.

A számsorozatokra vonatkozó konvergencia-definíció szerint a pontonkénti konvergencia definíciója logikai jelekkel azt jelenti, hogy

$$\forall x \in H \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \text{ ha } n > N, \text{ akkor } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (1.1.1)$$

1.1.1. Példa Adjuk meg az $f_n(x) = x^n$ ($x \in H = (-1, 1]$) függvényesorozat határfüggvényét, ha létezik.

Megoldás. A mértani sorozat konvergenciája miatt:

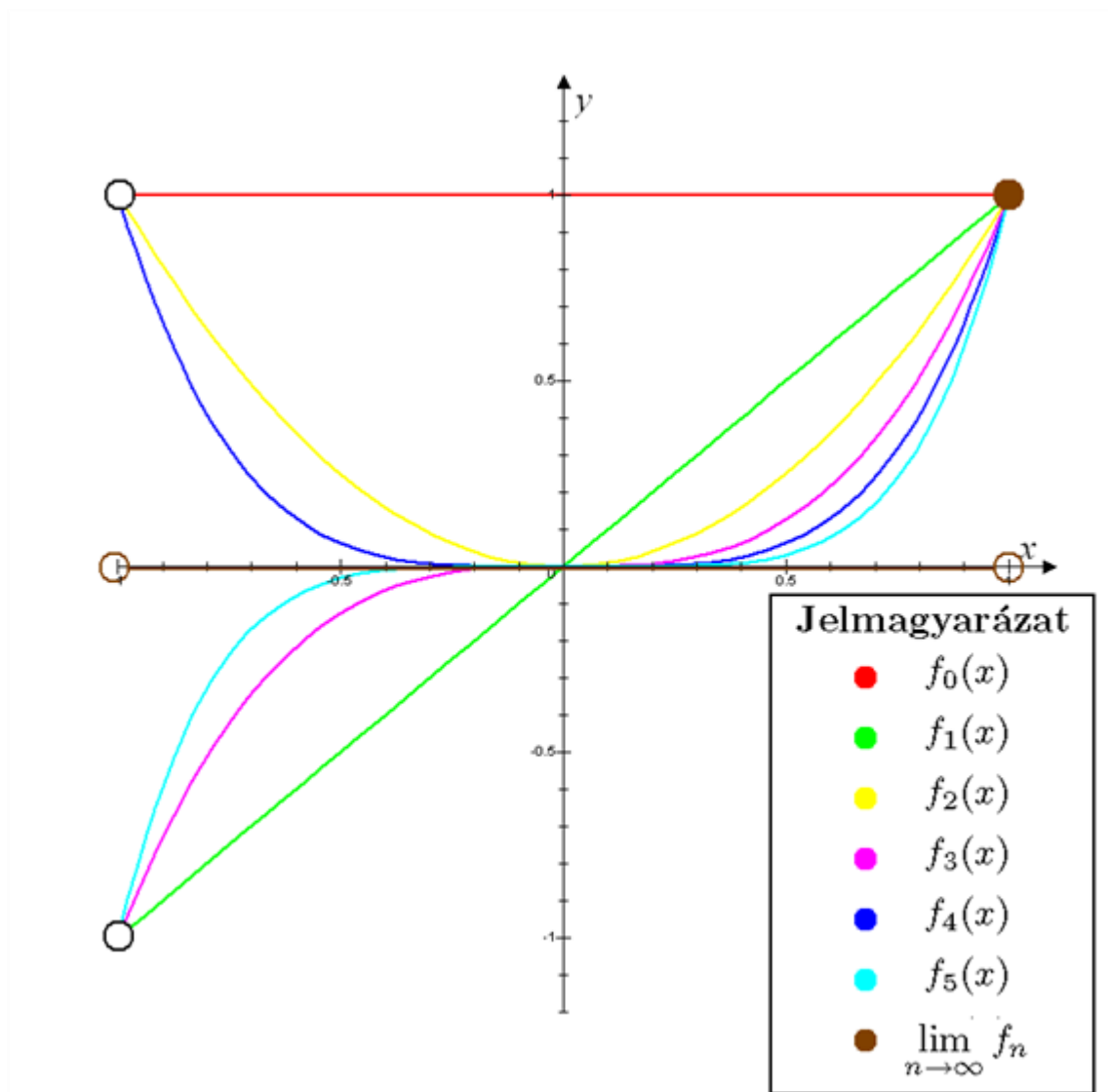
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Így $(f_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens H -n és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1. \end{cases}$$

A függvényesorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.1. ábra.

1.1. ábra - Az $(x^n, n \in \mathbb{N})$ ($x \in (0, 1]$) függvényesorozat első hat eleme és a határfüggvény



Animáció

□

1.1.2. Példa Adjuk meg az $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 2^n}$, $(x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozat határfüggvényét, ha létezik.

Megoldás. A határfüggvény meghatározásához három részre bontjuk az értelmezési tartományt.

• Ha $x > 2$, akkor

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 2^n} = \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n} = x \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n\right) = 1$, ezért¹ a fent vizsgált függvénysorozat határfüggvénye az $f(x) = x$, ha $x > 2$.

• Ha $x = 2$, akkor

¹Tétel: Ha $a_n \rightarrow A > 0$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$.

$$f_n(2) = \sqrt[n]{2^n + 2^n} = 2\sqrt[n]{2} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

• Ha $0 \leq x < 2$, akkor

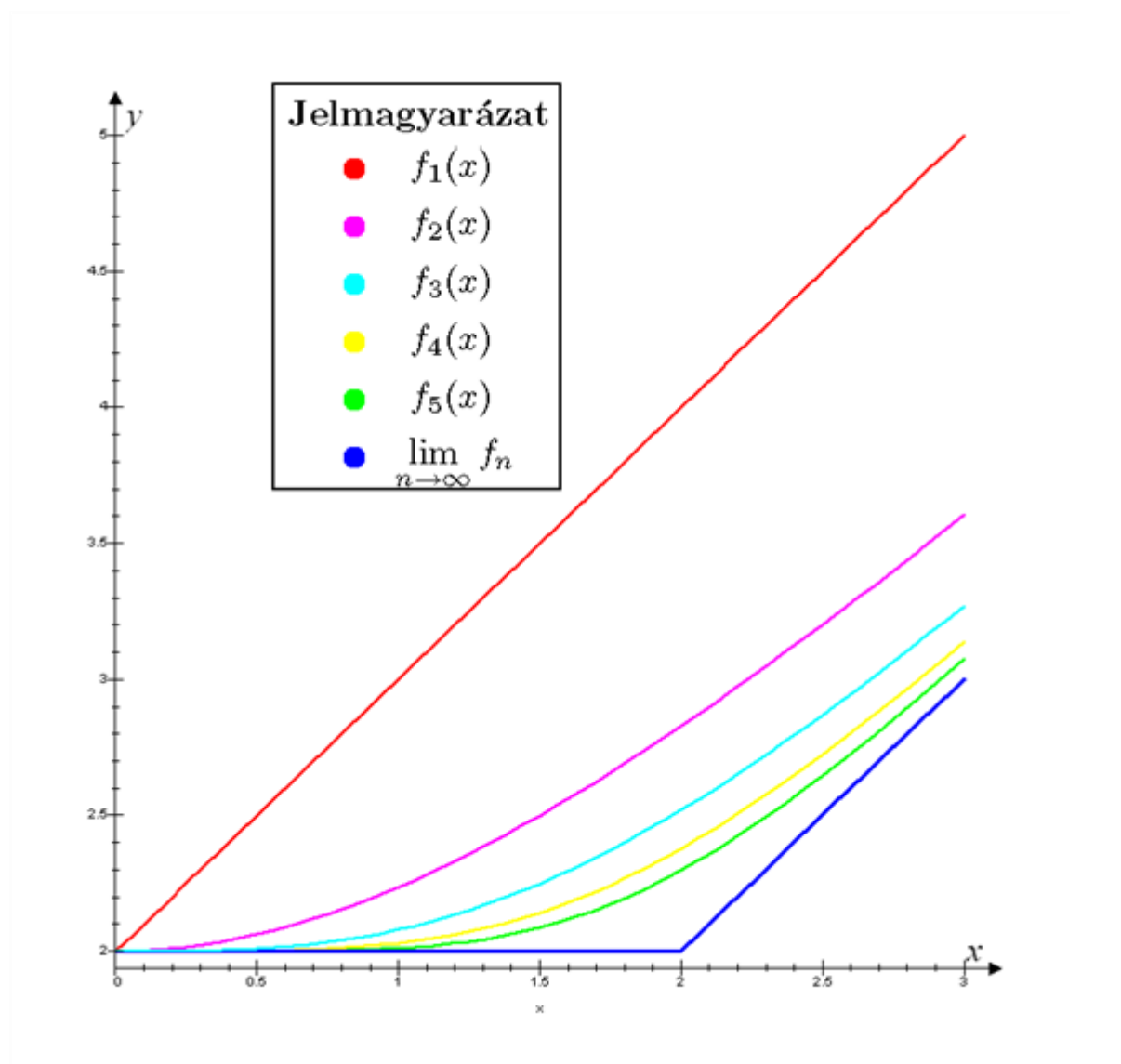
$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 2^n} = \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Összefoglalva: A $H = [0, \infty)$ halmazon $(f_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens és a határfüggvény:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 2 \\ 2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.2. ábra.

1.2. ábra - Az $(\sqrt[n]{x^n + 2^n}, n \in \mathbb{N}^*)$ $(x \in [0, \infty))$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



Animáció



1.1.3. Példa Adjuk meg az $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat határfüggvényét, ha létezik.

Megoldás. A határfüggvény meghatározásához négy részre bontjuk az értelmezési tartományt.

• Ha $x = 1$, akkor

$$f_n(1) = \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

• Ha $-1 < x < 1$, akkor $x^n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, így

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

• Ha $x < -1$, vagy $1 < x$, akkor $|x|^n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), így a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határérték vizsgálatához az alábbi szokásos átrendezést hajtjuk végre:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

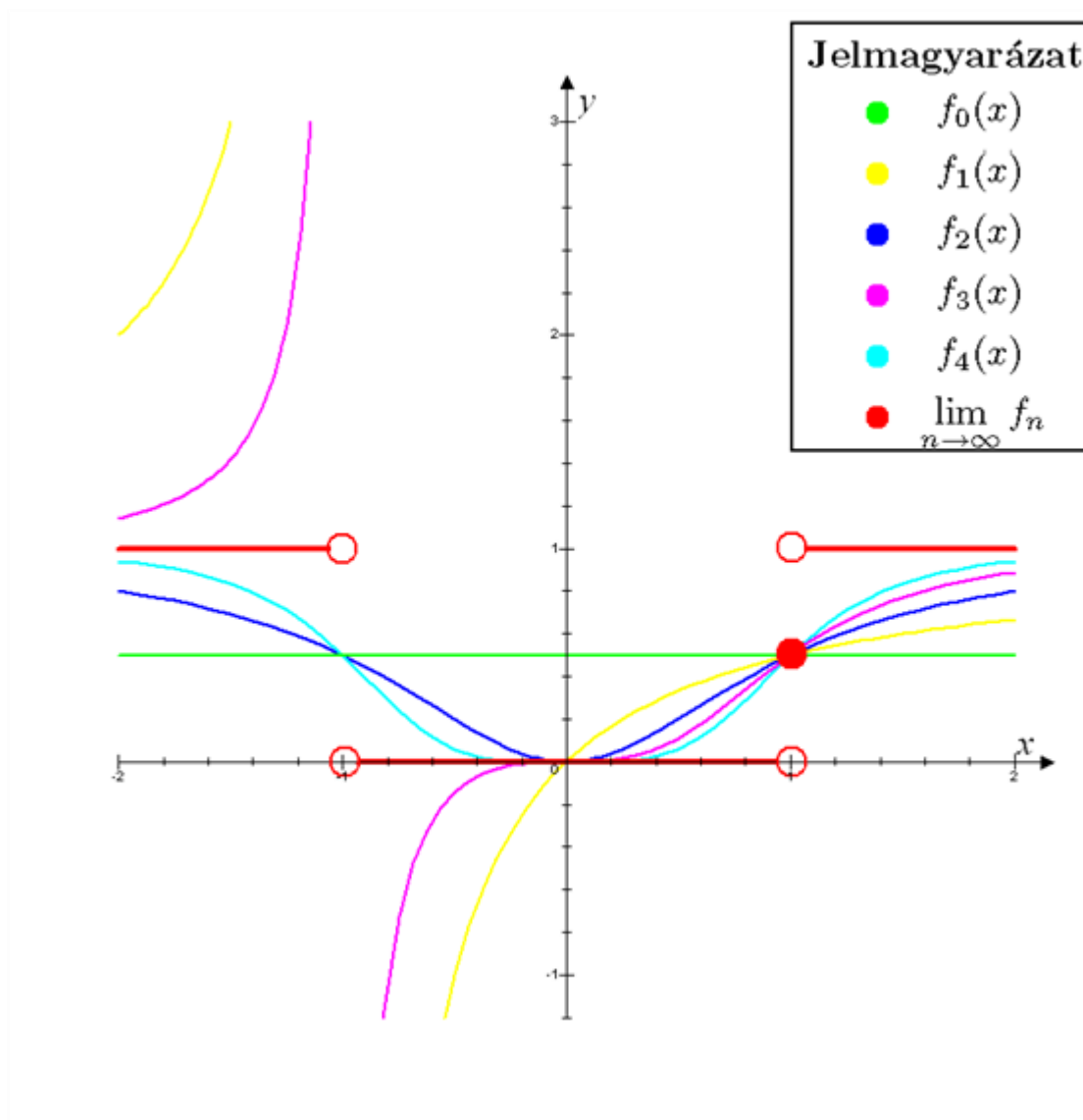
Összefoglalva: A $H = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ halmazon $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat konvergens és a határfüggvény:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x < -1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 1, \\ 1, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.3. ábra.

□

1.3. ábra - Az $(\frac{x^n}{1+x^n}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény

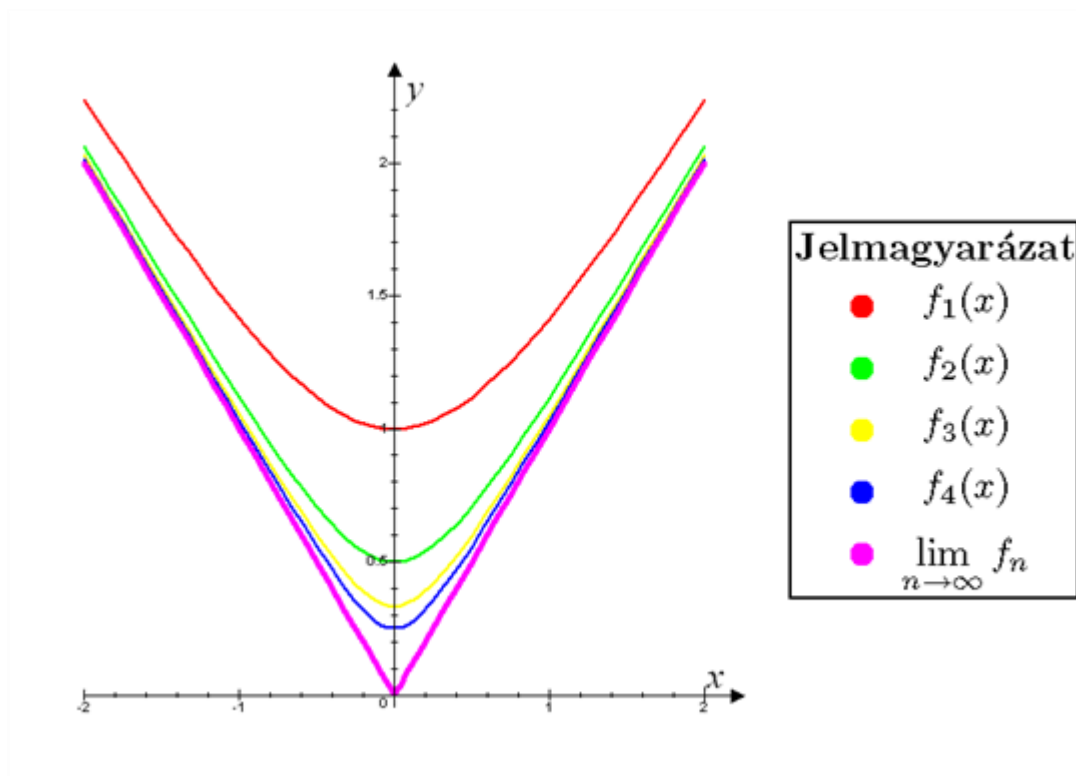


Animáció

1.1.4. Példa Adjuk meg az $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozat határfüggvényét, ha létezik.

Megoldás. Mivel $x^2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow x^2$ ($n \rightarrow \infty$), ezért a gyökfüggvény folytonossága miatt $(f_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens a $H = \mathbb{R}$ halmazon és a határfüggvény: $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$).

1.4. ábra - Az $(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, n \in \mathbb{N}^*)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénysorozat első négy eleme és a határfüggvény



Animáció

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.4. ábra.

□

1.1.5. Példa Adjuk meg az $f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(\pi \cdot x \cdot n!)$, $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat határfüggvényét, ha létezik.

Megoldás. Vizsgáljuk a fenti függvénysorozat elemeit:

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(\pi \cdot x \cdot n!) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos^2(\pi \cdot x \cdot n!))^m = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq \cos^2(\pi \cdot x \cdot n!) < 1, \\ 1, & \text{ha } \cos^2(\pi \cdot x \cdot n!) = 1 \end{cases}$$

Mivel a $\cos^2(\pi \cdot x \cdot n!) = 1$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\cos(\pi \cdot x \cdot n!) = 1$ vagy $\cos(\pi \cdot x \cdot n!) = -1$, ezért ezen két trigonometrikus egyenlet megoldás-halmazát kell vizsgálnunk:

$$\begin{aligned} \cos(\pi \cdot x \cdot n!) = 1, & \Leftrightarrow \pi \cdot x \cdot n! = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2k}{n!} \\ \cos(\pi \cdot x \cdot n!) = -1, & \Leftrightarrow \pi \cdot x \cdot n! = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{n!} \end{aligned}$$

Így a függvénysorozat elemeire:

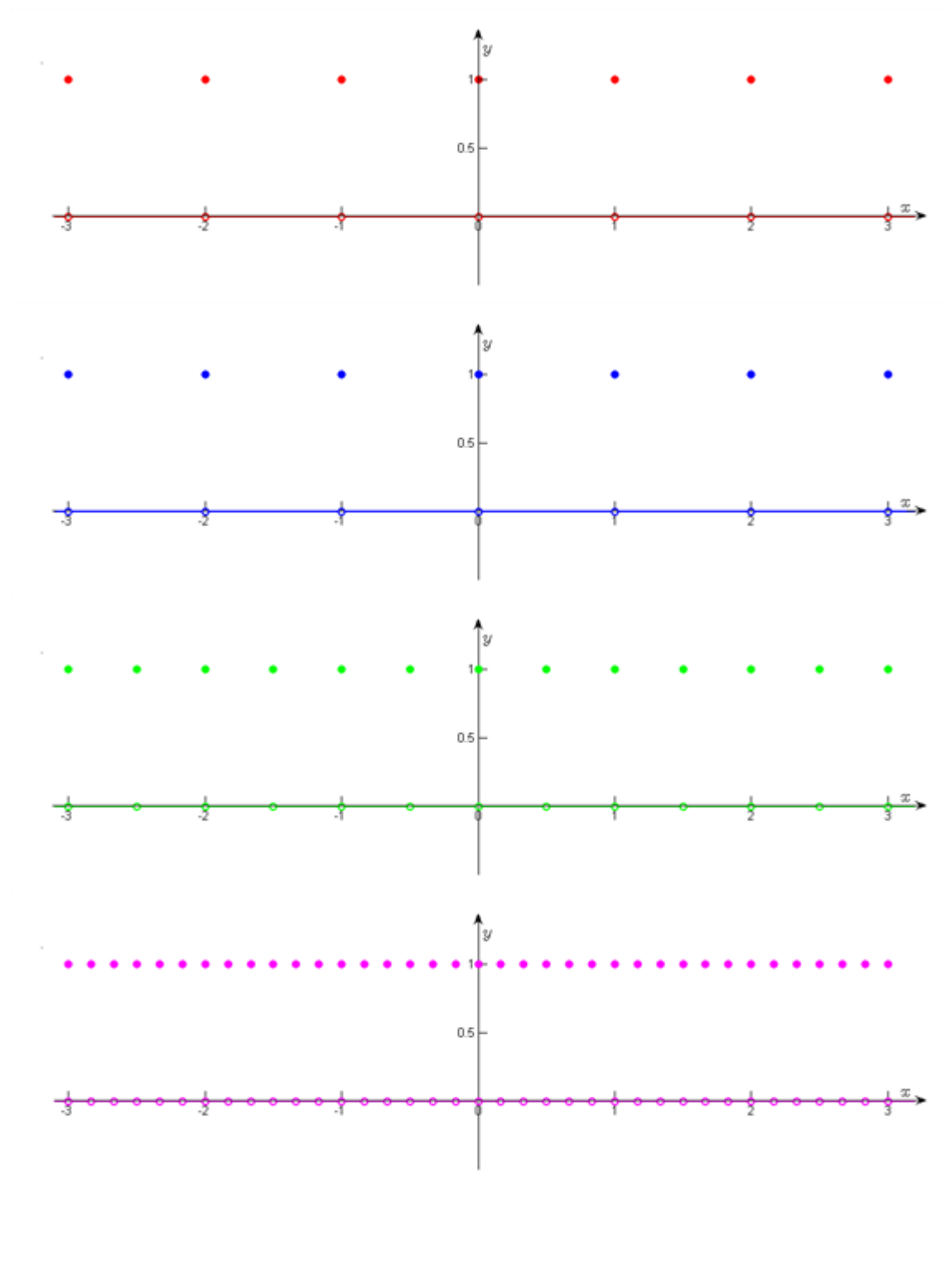
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{\ell}{n!} \ (\ell \in \mathbb{Z}) \\ 0, & \text{2kölönben.} \end{cases}$$

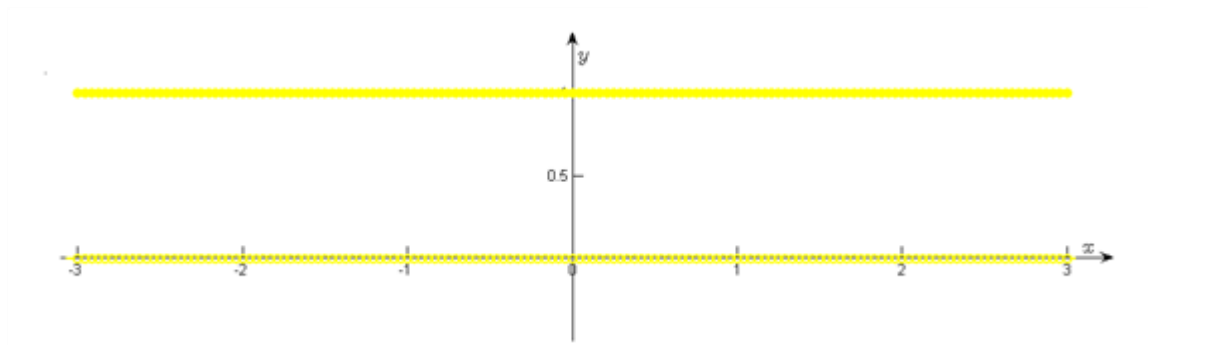
Írjuk fel a sorozat első néhány elemét:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{\ell}{0!} = \ell \quad (\ell \in \mathbb{Z}), \\ 0, & \text{2lkülönben.} \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{\ell}{1!} = \ell \quad (\ell \in \mathbb{Z}), \\ 0, & \text{2lkülönben.} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{\ell}{2!} = \frac{\ell}{2} \quad (\ell \in \mathbb{Z}), \\ 0, & \text{2lkülönben.} \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{\ell}{3!} = \frac{\ell}{6} \quad (\ell \in \mathbb{Z}), \\ 0, & \text{2lkülönben.} \end{cases}$$

1.5. ábra - A $(\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(\pi \cdot x \cdot n!), n \in \mathbb{N}) (x \in \mathbb{R})$ függvénysorozat első öt eleme





Animáció

A függvénysorozat néhány tagját szemlélteti a 1.5. ábra. A határfüggvény meghatározásához az értelmezési tartományt három részre bontjuk:

- Mivel minden $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ helyen minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén $f_n(x) = 0$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1$ nyilvánvalóan teljesül.
- Legyen $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Ekkor egyértelműen létezik $p \in \mathbb{Z}$ és $q \in \mathbb{N}^*$, hogy $x = \frac{p}{q}$, ahol p és q relatív prímek. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$x = \frac{p}{q} = \frac{p \cdot (q-1)!}{q \cdot (q-1)!} = \frac{p \cdot (q-1)!}{q!},$$

azaz $N = q$ esetén létezik $\ell \in \mathbb{Z}$ (még hozzá $\ell = p \cdot (q-1)!$), amellyel $x = \frac{\ell}{N!}$, és ezért $f_n(x) = 1$ minden $n \geq N$ esetén. Így $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$, ha $x \in \mathbb{Q}$.

Összefoglalva: A $H = \mathbb{R}$ halmazon $(f_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens és a határfüggvény:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{különbön} \end{cases}$$

az ún. Dirichlet-függvény.

□

Felmerül a kérdés, hogy függvénysorozatok esetén a pontonkénti határérték képzés örökíti-e valamilyen függvénytulajdonságot (folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság)?

Ha az előző példáinkat megnézzük, akkor észrevehetjük, hogy a tulajdonságok egy része biztosan nem öröklődik. Lássunk egy-egy ellenpéldát!

Folytonosság

Az $f_n(x) = x^n$ ($x \in [-1, 1]$) függvény minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén folytonos az értelmezési tartományán, de a határfüggvény,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1 \end{cases}$$

nem folytonos $x_0 = 1$ -ben (1.1.1. példa).

Az $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) függvények folytonosak az értelmezési tartományuk minden pontjában, de a határfüggvény nem folytonos az $x_0 = 1$ pontban (1.1.3. példa).

Differenciálhatóság

Az $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 2^n}$ ($x \in (0, \infty)$) függvények differenciálhatók a $(0, \infty)$ intervallum minden pontjában, de a határfüggvény

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 2, \\ 2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

nem differenciálható az $x_0 = 2$ pontban (1.1.2. példa).

Az $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$) függvények differenciálhatók az értelmezési tartományon, de a határfüggvény $x_0 = 0$ -ban nem differenciálható (1.1.4. példa).

Integrálhatóság

i) Megmutatjuk, hogy Riemann-integrálható függvények esetén a határátmenet és az integrálás sorrendje nem cserélhető fel, azaz létezik olyan Riemann-integrálható $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ -hez konvergáló, Riemann-integrálható $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

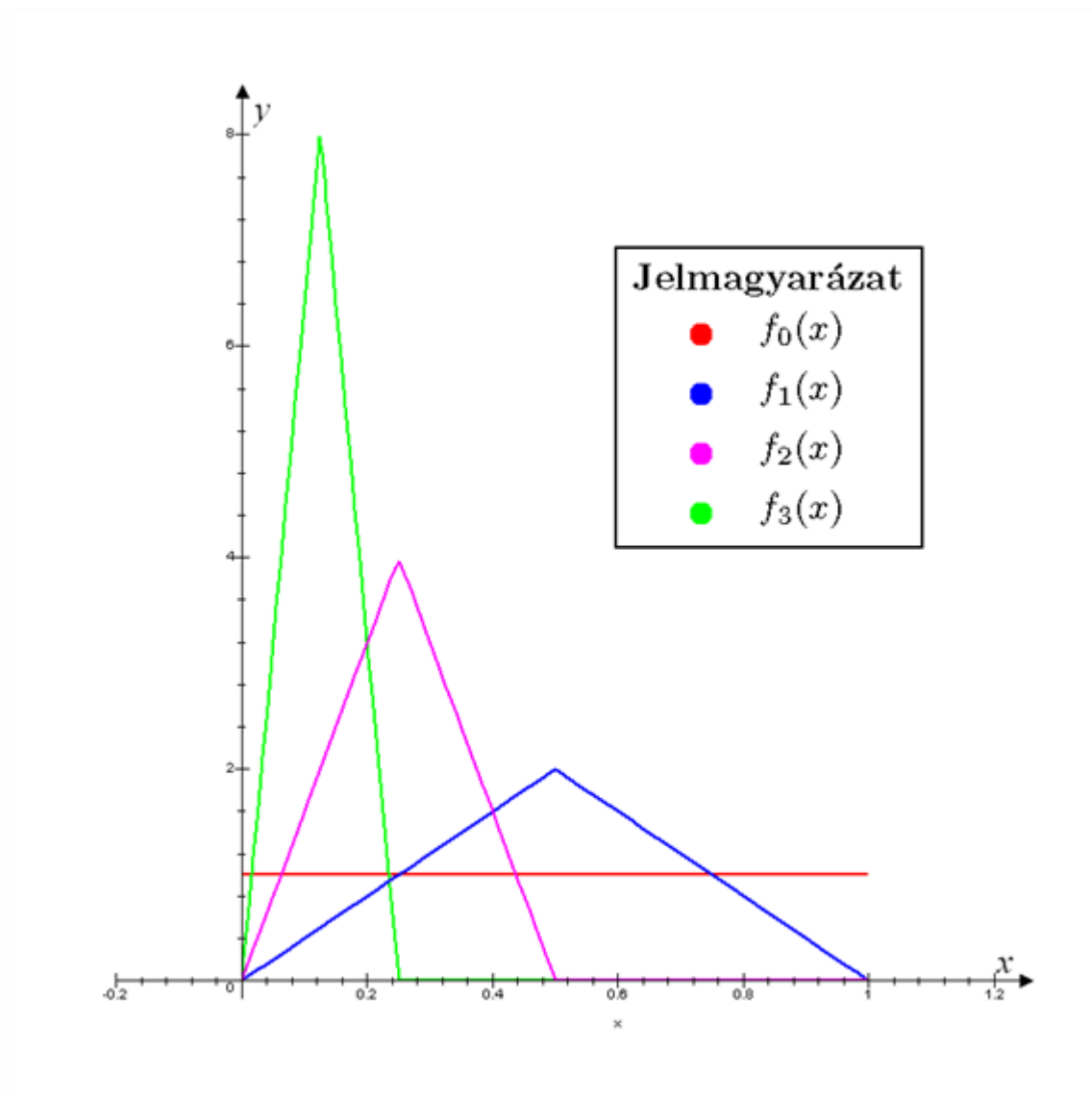
Legyen $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és $f_0 := 1$, továbbá $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f_n(x) := \begin{cases} 2^{2n} \cdot x, & \text{ha } 0 \leq x < 2^{-n}, \\ -2^{2n} \cdot x + 2^{n+1}, & \text{ha } 2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}, \\ 0, & \text{különbön.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy a fenti függvények f_0 kivételével mind úgynevezett háztető függvények, melyeknek tartója² a $(0, 2^{1-n})$ intervallum. Nyilvánvaló az is, hogy a függvények $[0, 1]$ intervallumra vett Riemann-integrálja, amely megegyezik a háromszögek területével, minden függvény esetében éppen 1.

1.6. ábra - Háztető függvények

²Egy $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvény tartója alatt azt a $H_1 \subseteq H$ halmazt értjük, melyre az teljesül, hogy $f(x) \neq 0$, ha $x \in H_1$ és $f(x) = 0$, ha $x \in H \setminus H_1$. Jelölés: $\text{supp} f = H_1$.



Animáció

A határfüggvény meghatározásához vizsgáljuk a következő eseteket:

- $0 < x \leq 1$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $\frac{1}{2^{n_0-1}} < x$. Ekkor $f_{n_0}(x) = 0$ és minden $n > n_0$ esetén $f_n(x) = 0$ is teljesül. Így $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, ha $x \in (0, 1)$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$, mert a függvénysorozat mindegyikének az $x = 0$ helyen vett helyettesítési értéke 0 , ha $n \in \mathbb{N}^*$.

Így a fent definiált függvénysorozat határfüggvénye a $H = [0, 1]$ intervallumon $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv 0$.

Mivel $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$. Viszont

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0, \text{ azaz } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

ii) A következő ellenpélda azt mutatja, hogy a Riemann-integrálhatóság sem öröklődik a határátmenettel.

Mivel $\mathbb{Q}$ megszámlálhatóan végtelen halmaz, ezért a racionális $\mathbb{Q} = \{r_n, n \in \mathbb{N}\}$ észíthető egy $(r_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat, amely minden racionális értéket pontosan egyszer vesz fel, azaz

Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = r_0, r_1, \dots, r_n, \\ 0, & \text{különbön.} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

A fenti $(f_n(x), n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat határfüggvénye:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

hiszen ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, melyre $r = r_{n_0}$. Ekkor $f_{n_0}(r) = 1$ és $f_n(r) = 1$ minden $n > n_0$ index esetén, így $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(r) = 1$. Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n(x) = 0$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Mivel az $f_n (n \in \mathbb{N})$ függvények szakaszonként folytonosak³, ezért Riemann-integrálhatók, de a határfüggvény (Dirichlet-függvény) nem integrálható a $[0,1]$ -en.

□

A konvergencia definíciót erősítve kiderül, hogy a határátmenettel néhány függvénytulajdonság öröklődik.

1.1.6. Definíció. Legyen $f_n: H \rightarrow \mathbb{R} (H \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez H -n, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ ha } n > N, \text{ akkor } \forall x \in H \text{ esetén } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (1.1.3)$$

Jelölés: $f_n \rightrightarrows f (n \rightarrow \infty)$.

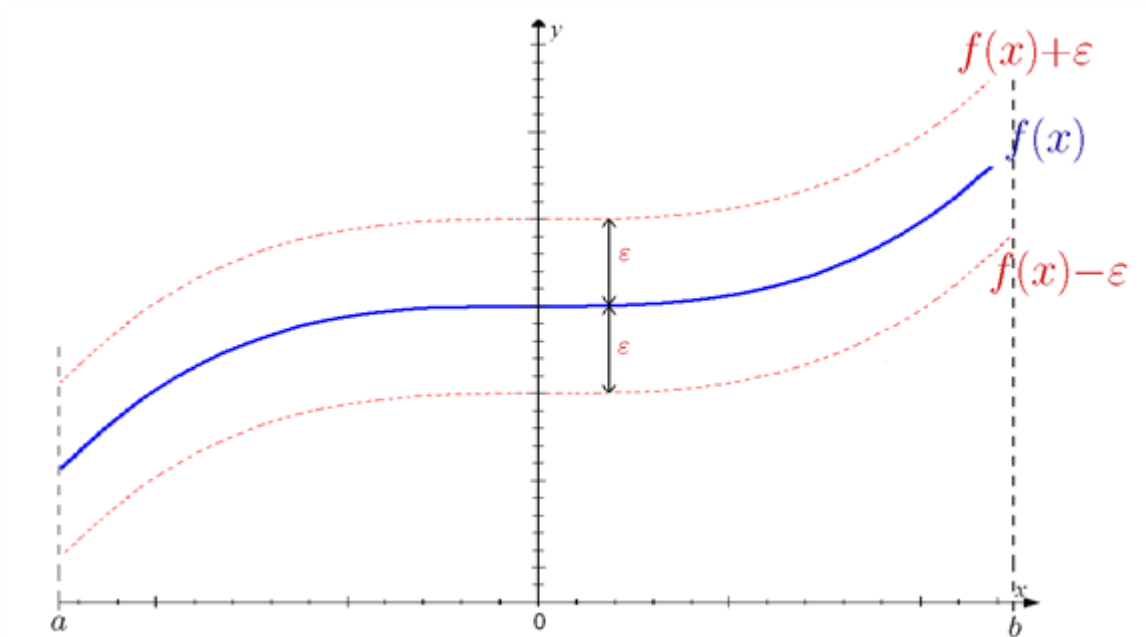
Megjegyzés.

1) Minden egyenletesen konvergens függvénysorozat nyilván pontonként is konvergens. Az állítás megfordítása viszont nem teljesül. (Lásd 1.1.6. Példa).

2) Az egyenletes konvergencia geometria jelentését 1.7. ábrán szemléltetjük. Bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N küszöbindex, melytől kezdve az f_n -ek nem lépnek ki bejelölt sávból az adott halmazon.

1.7. ábra - Egyenletes konvergencia

³A definíció és a legfontosabb tulajdonságok megtalálhatók a 194. Függelékben.



Az egyenletes konvergencia fogalmára nyilvánvalóan érvényes a Cauchy-féle konvergenciakritérium:

1.1.7. Tétel. Az $(f_n : H \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ ($H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset$) függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens H -n, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ ha } n, m > N, \text{ akkor } \forall x \in H \text{ esetén } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (1.1.4)$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(f_n, n \in \mathbb{N})$ egyenletesen konvergál f -hez H -n. Ekkor (1.1.3) alapján bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik N küszöbszám, hogy bármely $n > N$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy ha $n, m > N$, akkor

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Most tegyük fel, hogy teljesül (1.1.4). Ekkor minden rögzített $x \in H$ esetén $(f_n(x), n \in \mathbb{N})$ számsorozat Cauchy-sorozat, ezért a számsorozatokra vonatkozó Cauchy-kritérium alapján konvergens, azaz a függvénysorozat pontonként konvergál egy $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, melyre minden $n, m > N$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Végrehajtva az $m \rightarrow \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy minden $n > N$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

tehát (1.1.3) teljesül.

Belátjuk, hogy az egyenletes konvergencia már örökíti a folytonosságot.

1.1.8. Tétel. Legyen $(f_n : H \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ $(f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$ $\tilde{H}$ $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez egyenletesen konvergáló függvénysorozat. Ha minden index esetén folytonos a halmazon, akkor is folytonos a halmazon.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in H$ tetszőleges. Ekkor megmutatjuk, hogy f folytonos x_0 -ban, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ ha } x \in H \text{ és } |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Vizsgáljuk a függvényértékek eltérését:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Mivel f_n egyenletesen konvergál f -hez, ezért bármely pozitív ε esetén, így $\frac{\varepsilon}{3}$ -hoz is, létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor bármely H -beli x esetén $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nyilvánvalóan a becslés igaz $x_0 \in H$ esetén is, így a fenti összeg első és harmadik tagja is becsülhető felülről $\frac{\varepsilon}{3}$ -mal.

Legyen most $n > N$ rögzített index. Ekkor, mivel az f_n függvények x_0 -ban folytonosak ($n \in \mathbb{N}$), ezért bármely pozitív ε -hoz, így $\frac{\varepsilon}{3}$ -hoz is létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Így

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ha $|x - x_0| < \delta$.

1.1.9. Következmény. Ha a folytonos függvényekből álló $(f_n : H \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez konvergál, és f nem folytonos, akkor $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat nem konvergál egyenletesen f -hez H -n, ha $n \rightarrow \infty$.

Az egyenletes konvergencia a folytonosságot örökíti. Hasonlóan belátható, hogy a Riemann-integrálhatóság is öröklődik. A differenciálhatóság öröklődéséhez viszont további feltételeket kell tenni. Az integrálhatóságra és a differenciálhatóságra vonatkozó tételeket bizonyítás nélkül közöljük. A bizonyítások megtalálhatók [6]-ban.

1.1.10. Tétel. Legyen minden f_n függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat konvergáljon egyenletesen az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ határfüggvényhez. Ekkor f is Riemann-integrálható és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

1.1.11. Tétel. Legyen minden f_n függvény differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és az $\alpha \in (a, b)$ pontban az $(f_n(\alpha), n \in \mathbb{N})$ számsorozat legyen konvergens. Tegyük fel továbbá, hogy az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a g függvényhez az (a, b) intervallumon. Ekkor

i) az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat pontonként konvergál egy f függvényhez I -n.

ii) Ha (a, b) véges, akkor a konvergencia egyenletes.

iii) Az f függvény differenciálható és $f' = g$, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'.$$

A következőkben megadjuk az egyenletes konvergencia egy átfogalmazását, melyet a feladatok megoldása során fogunk használni.

1.1.12. Lemma. Legyen $f_n: H \rightarrow \mathbb{R}, (H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$. Az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál egyenletesen az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, ha az

$$\alpha_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in H\}.$$

sorozat nullsorozat.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f_n egyenletesen konvergál f -hez H -n. Ekkor a definíció alapján

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } n > N \text{ esetén } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in H$$

Az utolsó egyenlőtlenségben véve a szupréumot $x \in H$ -ra kapjuk, hogy

$$\alpha_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in H\} \leq \varepsilon \quad \forall n > N,$$

azaz $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ valóban nullsorozat.

Legyen most $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ nullsorozat. Ekkor definíció alapján

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } n > N \text{ esetén } \alpha_n < \varepsilon.$$

Mivel

$$|\alpha_n| = \alpha_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in H\} \geq |f_n(x) - f(x)| \quad (x \in H),$$

ezért $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ is teljesül minden $n > N$ esetén, azaz a konvergencia valóban egyenletes.

□

1.1.6. Példa. Igaz-e, hogy az $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = (-1, 1)$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határértéket 1.1.1. Példában már meghatároztuk:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1. \end{cases}$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sortozatot.

Legyen

$$\alpha_n = \sup\{|x^n - f(x)|: x \in (-1, 1)\} = \sup\{|x^n - 0|: x \in (-1, 1)\} = \sup\{|x|^n: x \in (-1, 1)\} = 1.$$

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 \neq 0$, azaz az 1.1.12. Lemma értelmében a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.

Megjegyzés. Egyszerűen igazolható, hogy a kérdéses függvénysorozat bármely $\delta > 0$ esetén a $H_\delta = [-1 + \delta, 1 - \delta]$ tartományon már egyenletesen konvergens lenne.

1.1.7. Példa. Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 2^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = [0, \infty)$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határértéket már 1.1.2. Példában már meghatároztuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 2 \\ 2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

II. Az egyenletes konvergencia a 1.1.9. Következmény alapján nem teljesülhet.

Ezt megmutatjuk ennek a következménynek felhasználása nélkül is. Az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat:

$$\alpha_n = \sup \{ |x^n + 2^n - f(x)| : x \in (0, \infty) \}.$$

Ha $x \leq 2$ és $n \geq 2$, akkor

$$x^n + 2^n - f(x) = x^n + 2^n - 2 = x^n + 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \geq x^n + 2^{n-1} = 2^{n-1} \left(x \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{n-1} + 1 \right) =: \beta_n$$

Az $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ biztosan nem nullsorozat ($\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$), azaz a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.

1.1.8. Példa. Legyen $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, n \in \mathbb{N}$). Vizsgáljuk meg a függvénysorozat konvergenciáját több tartományon is.

Megoldás.

I. A pontonkénti határértéket 1.1.3. Példában már meghatároztuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x < -1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 1, \\ 1, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

II. Hol egyenletes a konvergencia?

Csak olyan intervallumokat érdemes vizsgálni, amelyeken a határfüggvény folytonos, hiszen minden n index esetén f_n folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ halmazon, így az egyenletes konvergenciának szükséges feltétele a határfüggvény folytonossága.

a) Legyen $H = (0, 1)$. Ekkor $f \equiv 0$. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 0 \right| : x \in (0, 1) \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n + 1} \right| : x \in (0, 1) \right\}.$$

Mivel $\frac{1}{x} > 1$, ezért az f_n függvények szigorúan monoton nőnek minden rögzített $\alpha_n = \frac{1}{2}$ index esetén, így a szuprémum megegyezik a függvény $x=1$ helyen vett helyettesítési értékével, azaz

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{2} \neq 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében az $f_n, (n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergál a $H = (0,1)$ intervallumon.

b) Legyen $H = (0, 1-\delta]$, ahol $0 < \delta < 1$. A határfüggvény most is az azonosan 0 függvény. Az $\alpha_n (n \in \mathbb{N})$ sorozat felírása és az elemeinek kiszámolása során most is kihasználhatjuk, hogy az f_n függvények szigorú monoton növekedése miatt a keresett szuprémum az intervallum jobb végpontjában felvett függvényérték, azaz

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 0 \right| : x \in (0, 1-\delta] \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^n + 1} \right| : x \in (0, 1) \right\} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^n + 1}.$$

Mivel $\frac{1}{1-\delta} > 1$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Így ezen az intervallumon az 1.1.12. Lemma értelmében a konvergencia egyenletes.

c) Legyen $H = (1, \infty)$. Ekkor $f \equiv 1$, így az 1.1.12. Lemmában bevezetett $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat az alábbi alakban írható

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| : x > 1 \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{x^n - 1 - x^n}{1+x^n} \right| : x > 1 \right\} = \sup_{\mathbb{R}_n} \left\{ \frac{1}{1+x^n} : x > 1 \right\}.$$

Mivel a $\mathbb{R}_n$ függvények szigorúan monoton csökkenők minden rögzített n index esetén, $\alpha_n = \mathbb{R}_n(1) = \frac{1}{2} (n \in \mathbb{N})$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{2} \neq 0$, ezért a konvergencia az 1.1.12. Lemma értelmében nem egyenletes az $(1, \infty)$ intervallumon.

d) Legyen $H = [1+\delta, \infty)$, ahol $0 < \delta$. A határfüggvény most is az azonosan 1 függvény. Az $\alpha_n (n \in \mathbb{N})$ sorozat elemeinek kiszámítása során most is figyelembe vesszük, hogy a $\mathbb{R}_n$ függvények szigorú monoton csökkenése miatt a keresett szuprémumokat az intervallum bal végpontjában vett helyettesítési értékek adják, azaz

$$\alpha_n = \frac{1}{1+(1+\delta)^n}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért a $H = [1+\delta, \infty)$ intervallumon az 1.1.12. Lemma értelmében a konvergencia egyenletes.

1.1.9 Példa. Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} (n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = (\delta, \infty)$ halmazon, ahol $\delta > 0$ tetszőleges?

Megoldás.

I. Pontonkénti határértéket már 1.1.4. Példában már meghatároztuk, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = |x|$.

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| : x \in H \right\}.$$

Mivel

$$0 < \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{2|x|} \leq \frac{1}{2\delta} = \beta_n.$$

Így $0 < \alpha_n \leq \beta_n$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, így a rendőrlv értelmében $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, azaz a függvénytörözet egyenletesen konvergens a megadott intervallumon.

Megjegyzés. Szimmetriai okok miatt hasonló eredményre jutnánk a $H_2 = (-\infty, -\delta)$ halmazon is, ahol $\delta > 0$ tetszőleges. Nem lesz viszont egyenletesen konvergens a függvénytörözet semmilyen $\emptyset$ -t tartalmazó halmazon.

1.1.10. Példa. Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(\pi \cdot x \cdot n!)$, $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ függvénytörözet egyenletesen konvergens a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán?

Megoldás.

I. Az 1.1.5. Példában láthattuk, hogy a függvénytörözet pontonkénti határfüggvénye a Dirichlet-függvény, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{2lkülőnben} \end{cases}$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \cos^{2m}(\pi \cdot x \cdot n!) - f(x) \right| : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Legyen $g_n(x) = \left| \cos^{2m}(\pi \cdot x \cdot n!) - f(x) \right|$. Mivel $x_0 = \frac{1}{2 \cdot n!} \in \mathbb{Q}$, ezért $g_n(x_0) = 1$ és így $\alpha_n \geq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Nyilvánvaló tehát, hogy az $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat nem lehet nullsorozat, így az 1.1.12. Lemma értelmében függvénytörözet nem egyenletesen konvergens a valós számok halmazán.

1.1. Feladatok

1.1.1. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénytörözet egyenletesen konvergens-e a H halmazon?

a) Legyen $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) és $H = [0, 1]$. *megoldás*

b) Legyen $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ ($n \in \mathbb{N}$) és $H = (0, \infty)$. *megoldás*

c) Legyen $f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1+n+x}$ ($n \in \mathbb{N}$) és $H = [0, 1]$. *megoldás*

d) Legyen $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) és $H = [0, 1]$. *megoldás*

e) Legyen $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) és $H = H_1 = [0, 1]$. Mit mondhatunk ugyanezen függvénytörözet egyenletes konvergenciájáról a $H_2 = (1, \infty)$ halmazon? *megoldás*

f) Legyen $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^4x^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) és $H = [0, 1]$. *megoldás*

g) Legyen $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) és $H = H_1 = \mathbb{R}$. Mit mondhatunk ugyanezen függvénysorozat egyenletes konvergenciájáról a $H_2 = [-r, r]$ halmazon? *megoldás*

1.1.2. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a H halmazon?

a) Legyen $f_n(x) = n \cdot \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) és $H = H_1 = (0, \infty)$. Mit állíthatunk a konvergenciáról a $H_2 = [\delta, \infty)$ halmazon, ahol $\delta > 0$? *megoldás*

b) Legyen $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) és $H = \mathbb{R}$. *megoldás*

c) Legyen $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) és $H = \mathbb{R}$. *megoldás*

d) Legyen $f_n(x) = \frac{x}{n} \cdot \ln \frac{x}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) és $H = H_1 = \mathbb{R}^+$. Mit mondhatunk ugyanezen függvénysorozat egyenletes konvergenciájáról a $H_2 = (0, 1)$ intervallumon? *megoldás*

e) Legyen $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) és $H = \mathbb{R}$. *megoldás*

f) Legyen $f_n(x) = n \cdot (\sqrt[n]{x} - 1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) és $H = H_1 = \mathbb{R}^+$. Mit mondhatunk ugyanezen függvénysorozat egyenletes konvergenciájáról a $H_2 = [1, 2012]$ intervallumon. *megoldás*

1.1.3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy függvénysorozat konvergens, akkor korlátos is! *megoldás*

1.1.4. Feladat. Igazoljuk, hogy a korlátos függvényekből álló $(f_n : H \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvénysorozat ha egyenletesen konvergens, akkor egyenletesen korlátos is. *megoldás*

1.2. Megoldások

1.1.1. Feladat. a) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = [0, 1]$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{n+1}) = 0 \quad (x \in [0, 1]).$$

II. Egyenletes konvergencia vizsgálata. Meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sup \{ |x^n - x^{n+1} - 0| : x \in [0, 1] \} = \sup \{ |x^n| \cdot |1 - x| : x \in [0, 1] \} = \\ &= \sup \{ \underbrace{x^n \cdot (1 - x)}_{=: g_n(x)} : x \in [0, 1] \}. \end{aligned}$$

A g_n függvények folytonosak a kompakt⁴ $[0,1]$ halmazon, így a szuprénum egyenlő lesz a maximummal⁵.

Mivel a g_n függvény a $(0,1)$ intervallumon differenciálható, ezért szélsőérték vagy az intervallum határain, vagy olyan belső pontban van, ahol $g_n' = 0$. Mivel a függvényértékek nemnegatívak és az intervallum határain $g_n = 0$, ezért a maximumot a függvény belső pontban veszi fel.

$$g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0, \Leftrightarrow x = 0 \text{ vagy } n - (n+1)x = 0.$$

Mivel $g_n(0) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért a maximum az $x = \frac{n}{n+1}$ helyen van, melynek értéke

$$g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+1-n}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1},$$

így

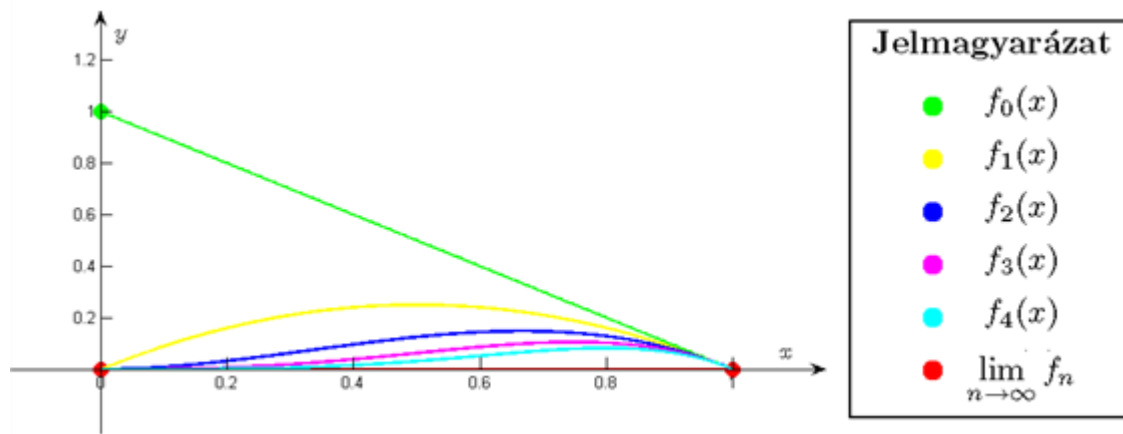
$$\alpha_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{1+n}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f \ (n \rightarrow \infty) \text{ a } (0,1) \text{ intervallumon.}$$

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.8. ábra.

1.8. ábra - Az $(x^n - x^{n+1}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in [0,1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.1. Feladat. b) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = (0, \infty)$ halmazon?

Megoldás.

⁴Egy $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *kompakt*, ha bármilyen H -beli pontsorozatnak létezik konvergens részsorozata, melynek határértéke is H -hoz tartozik.

⁵**Weierstrass-tétele:** Kompakt halmazon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit.

I. Pontonkénti határérték meghatározása. Nyilvánvaló, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ minden $x \in H$ esetén.

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{1}{x+n} - 0 \right| : x > 0 \right\} = \sup \left\{ \frac{1}{x+n} : x > 0 \right\} = \frac{1}{n},$$

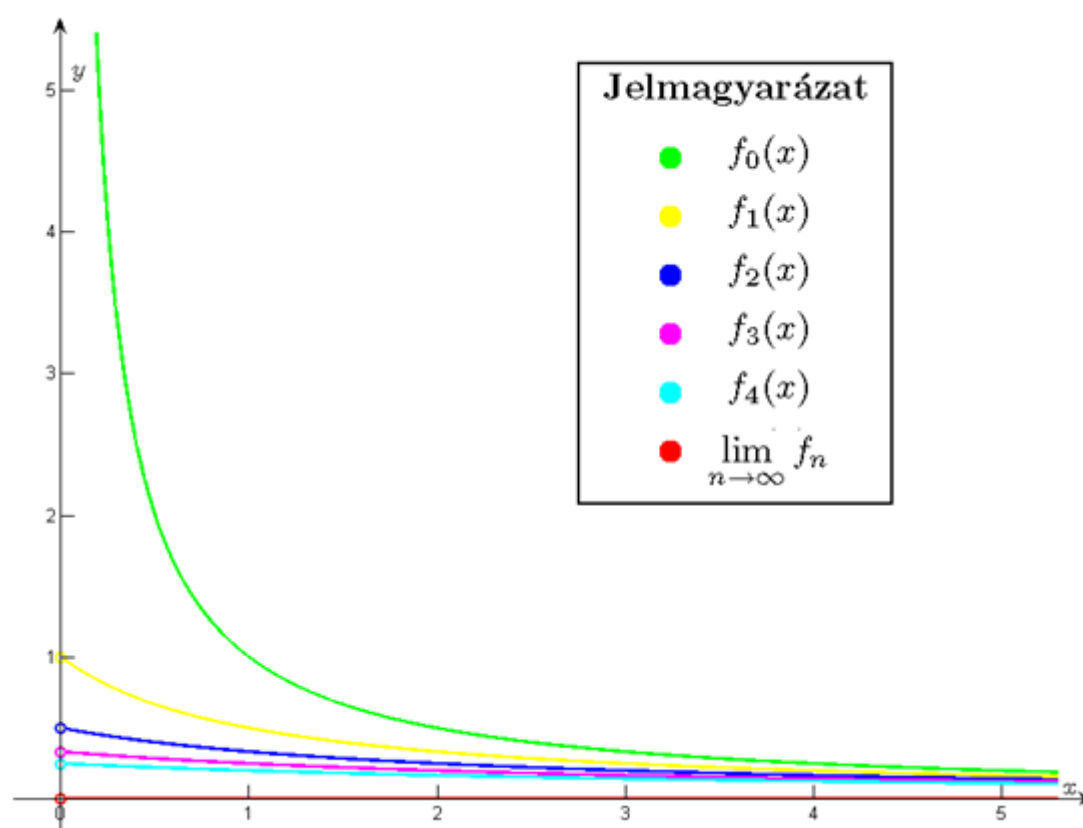
mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\frac{1}{x+n}$ függvény szigorúan monoton csökken. Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ezért a konvergencia egyenletes a $(0, \infty)$ intervallumon.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.9. ábra.

1.9. ábra - Az $\left(\frac{1}{x+n}, n \in \mathbb{N} \right)$ $(x \in (0, \infty))$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.1. Feladat. c) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1+n+x}$, $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = [0, 1]$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot x}{1 + n + x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}} = x = f(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához tekintsük Az 1.1.12. Lemmában bevezetett $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sup \left\{ \left| \frac{n \cdot x}{1 + n + x} - x \right| : x \in [0, 1] \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{n \cdot x - x - n \cdot x - x^2}{1 + n + x} \right| : x \in [0, 1] \right\} = \\ &= \sup \left\{ \frac{x + x^2}{\underbrace{1 + n + x}_{g_n(x)}} : x \in [0, 1] \right\}. \end{aligned}$$

A g_n függvények folytonosak a kompakt $[0, 1]$ halmazon, így a szuprénum egyenlő lesz a maximummal.

Mivel a g_n függvények a $(0, 1)$ intervallumon differenciálhatók, ezért szélsőérték vagy az intervallum határain, vagy olyan belső pontban van, ahol $g'_n = 0$. Mivel a függvényértékek nemnegatívak és az intervallum határain $g_n = 0$, ezért a maximumot a függvény belső pontban veszi fel. Mivel

$$g'_n(x) = \frac{(2x+1) \cdot (1+n+x) - (x^2+x)}{(1+n+x)^2},$$

ezért a $g'_n = 0$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha

$$x^2 + x(2n+2) + n+1 = 0, \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \text{ és } x_2 = \sqrt{n+1}(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

Mivel a derivált nevezője minden valós x és minden természetes n esetén pozitív, ezért az előjelet csak a számláló dönti el.

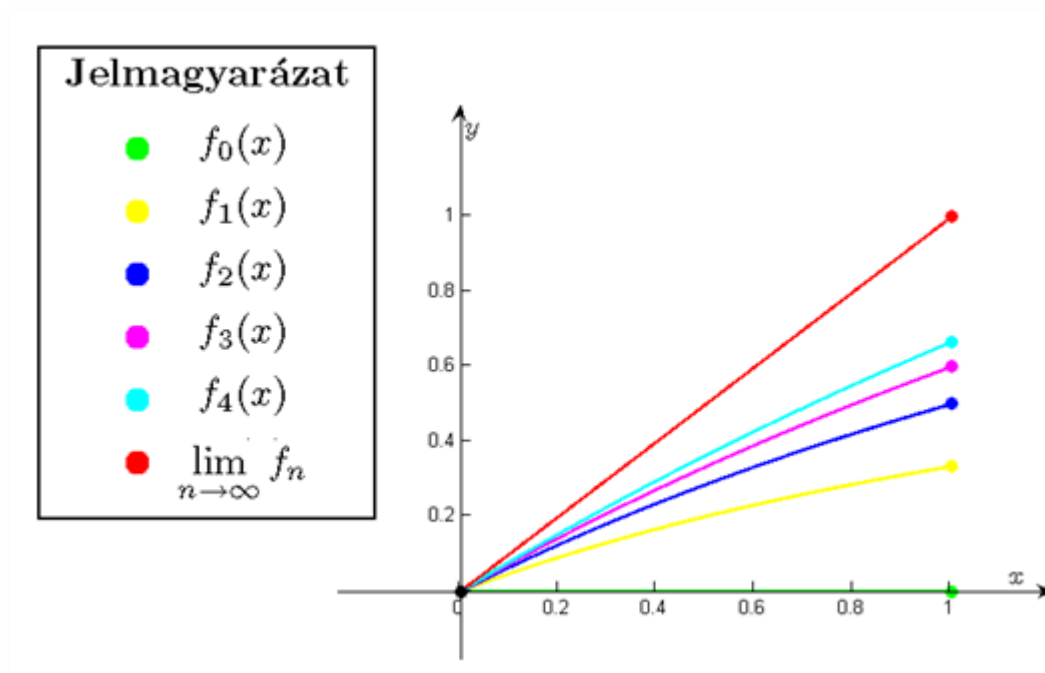
	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
g'_n előjele	+	0	-	0	+
g_n menete	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

Az x_1 pontban tehát lokális maximum lenne, de nem eleme a vizsgált intervallumnak, így a H halmaz belső pontjaiban nincs lokális maximuma a g_n függvénynek. A $[0, 1]$ intervallumon a függvény a maximumát valamelyik végpontban veszi fel. Mivel a függvény csak nem-negatív értékekkel rendelkezik és $g_n(0) = 0$, ezért 0 -ban nem lehet lokális maximuma, így azt $x = 1$ -ben veszi fel.

$$g_n(1) = \frac{2}{2+n} \Rightarrow \alpha_n = \frac{2}{2+n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow f_n \Rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty) \quad H-n.$$

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.10. ábra.

1.10. ábra - Az $\left(\frac{nx}{1+n+x}, n \in \mathbb{N} \right) (x \in [0, 1])$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

1.1.1. Feladat. d) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = [0, 1]$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{2n}) = 0 \quad (x \in [0, 1]).$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához tekintsük az 1.1.12. Lemmában bevezetett $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup \{ |x^n - x^{2n} - 0| : x \in [0, 1] \} = \sup \{ x^n - x^{2n} : x \in [0, 1] \}.$$

Vezessük be a $g_n(x) := x^n - x^{2n}$ ($x \in H$) jelölést. Mivel g_n folytonos a H -n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és H kompakt, ezért a függvény felveszi szélsőértékeit, így a keresett szuprémum egyben maximum is.

Mivel g_n a $(0, 1)$ intervallumon differenciálható, ezért szélsőérték vagy az intervallum határain, vagy olyan belső pontban van, ahol $g_n' = 0$. Mivel a függvényértékek nemnegatívak és az intervallum határain $g_n = 0$, ezért a maximumot a függvény belső pontban veszi fel.

Mivel $g_0 \equiv 0$, ezért $\alpha_0 = 0$.

Ha $n > 0$, akkor

$$g_n'(x) = n \cdot x^{n-1} - 2n \cdot x^{2n-1} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

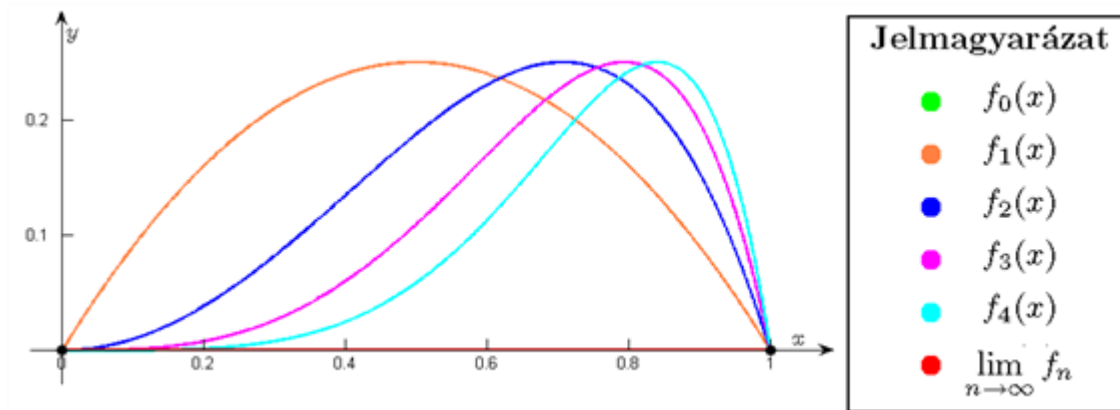
Így a g_n függvény a maximumát az $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ helyen veszi fel, a maximum értéke

$$\alpha_n = g_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n - \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{4} \neq 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a vizsgált intervallumon.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.11. ábra⁶.

1.11. ábra - Az $(x^n - x^{2n}, n \in \mathbb{N})$ ($x \in [0, 1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

1.1.1. Feladat. e) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H_1 = [0, 1]$ halmazon? Mit mondhatunk ugyanezen függvénysorozat egyenletes konvergenciájáról a $H_2 = (1, \infty)$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}x}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0 \quad (x \in H_1 \text{ vagy } x \in H_2).$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

Tekintsük a $H_1 = [0, 1]$ intervallumot, ekkor

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| : x \in [0, 1] \right\} = \sup \left\{ \frac{2nx}{1+n^2x^2} : x \in [0, 1] \right\},$$

$$\text{mivel } \frac{2nx}{1+n^2x^2} \geq 0 \quad \text{minden } x \in H_1 \text{ esetén.}$$

⁶Az ábrán az f_0 függvény azért nem látható, mert egybeesik az f határfüggvénnyel.

Vezessük be a $g_n(x) := \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ ($x \in H_1$) jelölést. A g_n folytonos a H_1 kompakt halmazon, ezért a függvény felveszi szélsőértékeit, így a keresett szuprémum egyben maximum is.

Mivel g_n a $(0,1)$ intervallumon differenciálható, ezért szélsőérték vagy az intervallum határain, vagy olyan belső pontban van, ahol $g'_n = 0$.

$$g'_n(x) = \frac{2n \cdot (1+n^2x^2) - 2nx \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $n = 0$ vagy, ha $n \neq 0$, akkor $x = \pm \frac{1}{n}$ esetén. Legyen $n > 0$. Mivel $H_1 = [0,1]$, ezért csak $\frac{1}{n}$ esik a vizsgált intervallumba:

x	$0 < x < \frac{1}{n}$	$x = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n} < x < 1$
g'_n előjele	+	0	-
g_n menete	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A függvény menetéből az is nyilvánvaló, hogy a talált lokális maximum egyben abszolút maximum is, így nem szükséges az intervallum végpontjaiban kiszámolni a függvényértéket. Ezért

$$\alpha_n = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n \cdot \frac{1}{n}}{1+n^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{1+1} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

és mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 \neq 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a H_1 intervallumon.

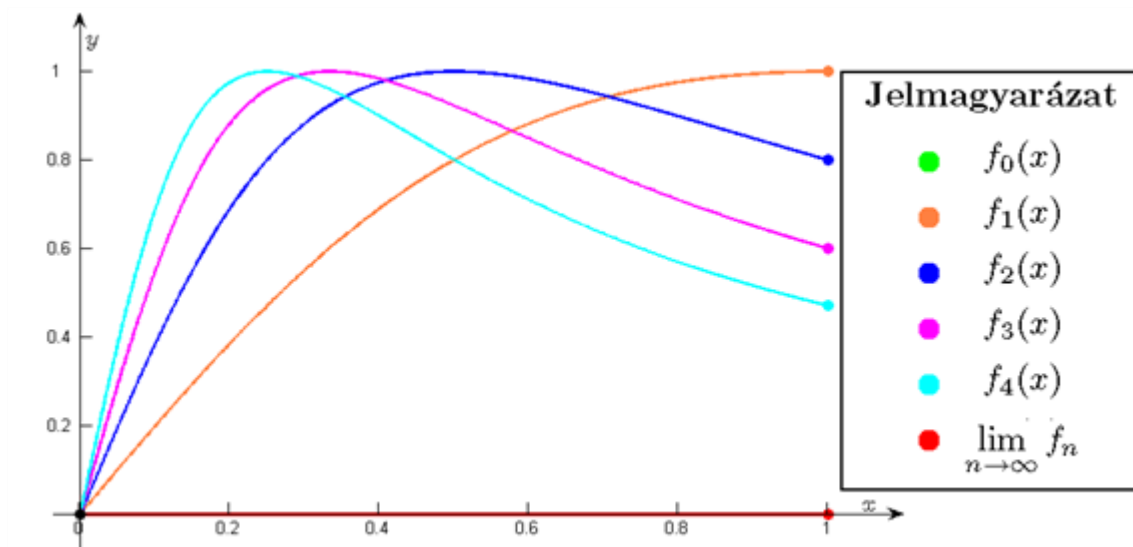
Tekintsük a $H_2 = (1, \infty)$ intervallumot. A lehetséges szélsőértékhelyek egyike sem esik az intervallumba. Mivel g_n ($n \in \mathbb{N}^*$) szigorúan monoton csökkenő a H_2 intervallumon ($g'_n < 0$, $x \in H_2$, $n \in \mathbb{N}^*$), ezért a szuprémum $\alpha_n = g_n(1) = \frac{2n}{1+n^2}$.

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0$, ezért a függvénysorozat a H_2 intervallumon egyenletesen konvergens.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.12. ábra⁷.

1.12. ábra - Az $\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}, n \in \mathbb{N}\right)$ ($x \in [0,1]$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény

⁷Az ábrán az f_0 függvény azért nem látható, mert egybeesik az f határfüggvénnyel.



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

1.1.1. Feladat. f) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^4x^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = [0, 1]$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1+n^4x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x}{\frac{1}{n^3} + n^3x^2} = 0 \quad (x \in H).$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{2nx}{1+n^4x^2} - 0 \right| : x \in [0, 1] \right\} = \sup \left\{ \frac{2nx}{1+n^4x^2} : x \in [0, 1] \right\}.$$

Az egyenletes konvergencia igazolásához nem szükséges a fenti szuprémum meghatározása abban az esetben, ha annak valamely felső becsléséről sikerül belátni, hogy szintén 0-hoz tart. Most a felső becslés az alábbi elemi módszerrel nyerhető. Ha $n > 0$, akkor a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján kapjuk, hogy

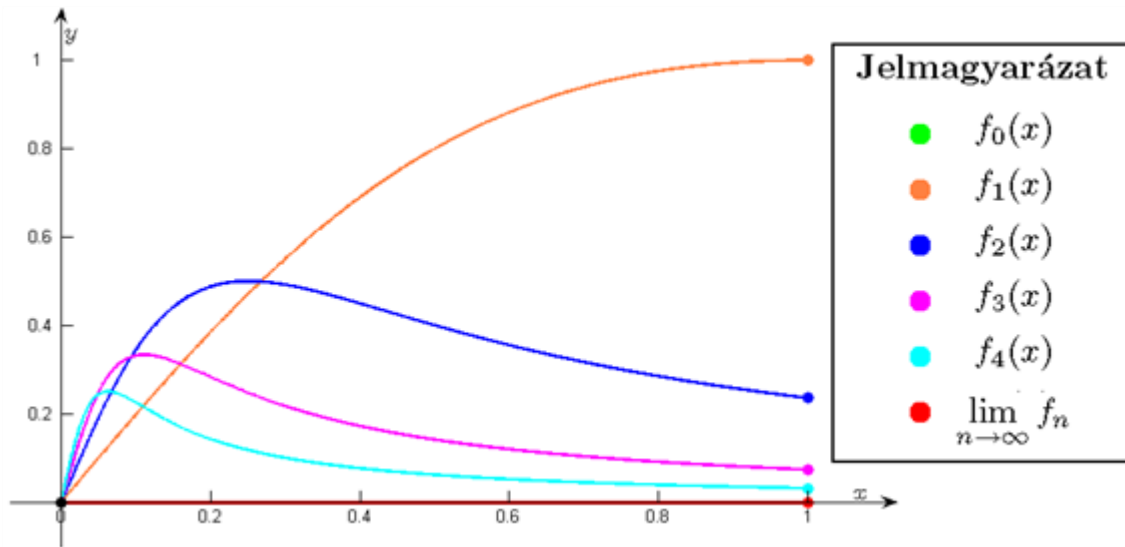
$$\frac{2nx}{1+n^4x^2} = \frac{nx}{\frac{1+n^4x^2}{2}} \leq \frac{nx}{\sqrt{1 \cdot (n^4x^2)}} = \frac{nx}{n^2 \cdot |x|} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mivel $0 \leq \alpha_n < \frac{1}{n}$, ($n \in \mathbb{N}^*$) és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ezért a rendőr-elv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, és a függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ intervallumon.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.13. ábra^a.

^aAz ábrán az f_0 függvény azért nem látható, mert egybeesik az f határfüggvénnyel.

1.13. ábra - Az $\left(\frac{2nx}{1+n^4x^2}, n \in \mathbb{N}\right) (x \in [0, 1])$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.1. Feladat. g) Vizsgáljuk meg, hogy az $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a valós számok $H_1 = \mathbb{R}$ halmazán illetve a $H_2 = [-r, r]$ halmazokon, ahol $r > 0$ tetszőleges.

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

Tekintsük a $H_1 = \mathbb{R}$ halmazt. Ekkor

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| e^{-(x-n)^2} - 0 \right| : x \in \mathbb{R} \right\} = \sup \left\{ e^{-(x-n)^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mivel $f_n(n) = 1$, ezért $\alpha_n \geq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Nyilvánvaló tehát, hogy az $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat nem lehet nullsorozat, így az 1.1.12. Lemma értelmében függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a valós számok halmazán.

Tekintsük a $H_2 = [-r, r]$ intervallumot. Mivel f_n folytonos a kompakt H_2 halmazon, ezért a függvény felveszi szélsőértékeit, így a keresett szuprérum egyben maximum is. Mivel f_n a $(-r, r)$ intervallumon differenciálható is, ezért a maximumot vagy az intervallum végpontjaiban, vagy pedig olyan belső pontban találjuk, melyben $f'_n = 0$.

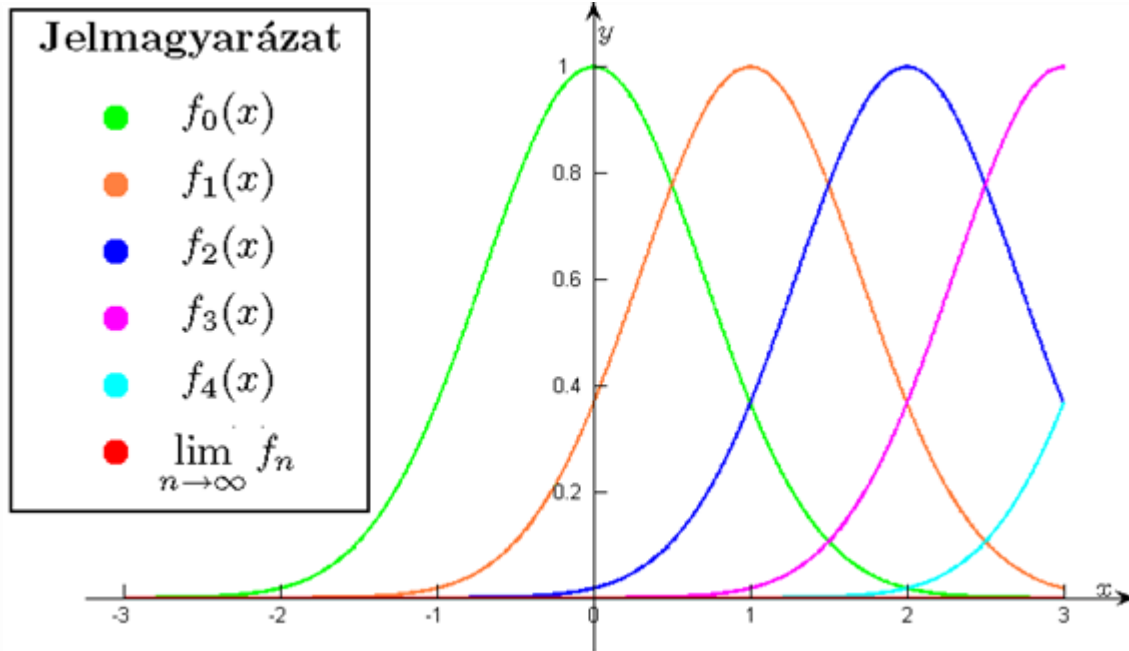
$$f'_n(x) = -2(x-n) \cdot e^{-(x-n)^2} = 0 \Leftrightarrow x = n.$$

Ha $n \leq r$, akkor a keresett szélsőérték 1, ha $n > r$, akkor $f'_n > 0$ a H_2 intervallumon, ezért a függvény szigorúan monoton csökkenő és a szélsőértékét az intervallum jobb végpontjában veszi fel, azaz $\alpha_n = e^{-(r-n)^2}$. Mivel

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében a függvénysorozat a $[-r, r]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.14. ábra.

1.14. ábra - Az $\left(e^{-(x-n)^2}, n \in \mathbb{N}\right) (x \in \mathbb{R})$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



[vissza a feladathoz](#)

1.1.2. Feladat. a) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = n \cdot \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) (n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H_1 = (0, \infty)$ halmazon? Mit állíthatunk a konvergenciáról a $H_2 = [\delta, \infty)$ halmazon, ahol $\delta > 0$?

Megoldás.

I. A pontonkénti határérték meghatározását két módszerrel is megmutatjuk. Egyrészt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in H_1, \text{ vagy } x \in H_2), \end{aligned}$$

másrészt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in H_1, \text{ vagy } x \in H_2),$$

hiszen a gyökfüggvény differenciálható mindkét intervallumon.

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozatot.

Tekintsük a $H_1 = (0, \infty)$ intervallumot.

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| : x \in (0, \infty) \right\} = \sup \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} : x \in (0, \infty) \right\},$$

mivel $\frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$
minden $x \in H_1$ esetén.

Vezessük be a $g_n(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}}$ ($x \in H_1$) jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{x + \frac{1}{n} - x}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})^2}. \end{aligned}$$

Mivel g_n a H_1 intervallumon szigorúan monoton csökkenő, így a keresett szuprémum a baloldali végpontban vett jobboldali határérték:

$$\alpha_n = \lim_{x \rightarrow 0+} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})^2} = \infty \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$, ezért a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens H_1 -en.

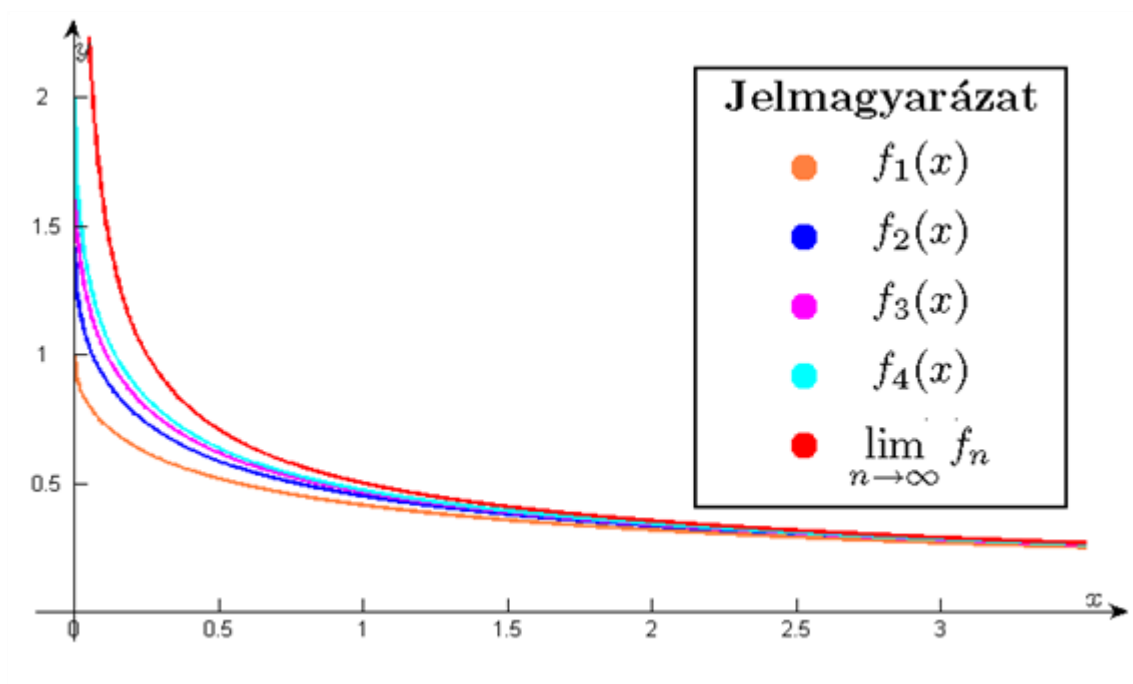
Tekintsük a $H_2 = [\delta, \infty)$ intervallumot. Mivel $H_2 \subset H_1$, ezért g_n ezen a intervallumon is szigorúan monoton csökkenő, így a szuprémum a baloldali végpontban vett helyettesítési érték:

$$\alpha_n = g_n(\delta) = \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{\delta} \cdot (\sqrt{\delta + \frac{1}{n}} + \sqrt{\delta})^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz a függvénysorozat egyenletesen konvergens H_2 -n.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti a 1.15. ábra.

1.15. ábra - Az $\left(n \cdot \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right), n \in \mathbb{N}^* \right)$ ($x \in \mathbb{R}^+$) függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.2. Feladat. b) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) függvénysorozat egyenletesen konvergens a $H = \mathbb{R}$ halmazon?

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

mivel korlátos és nullsorozat szorzata nullsorozat.

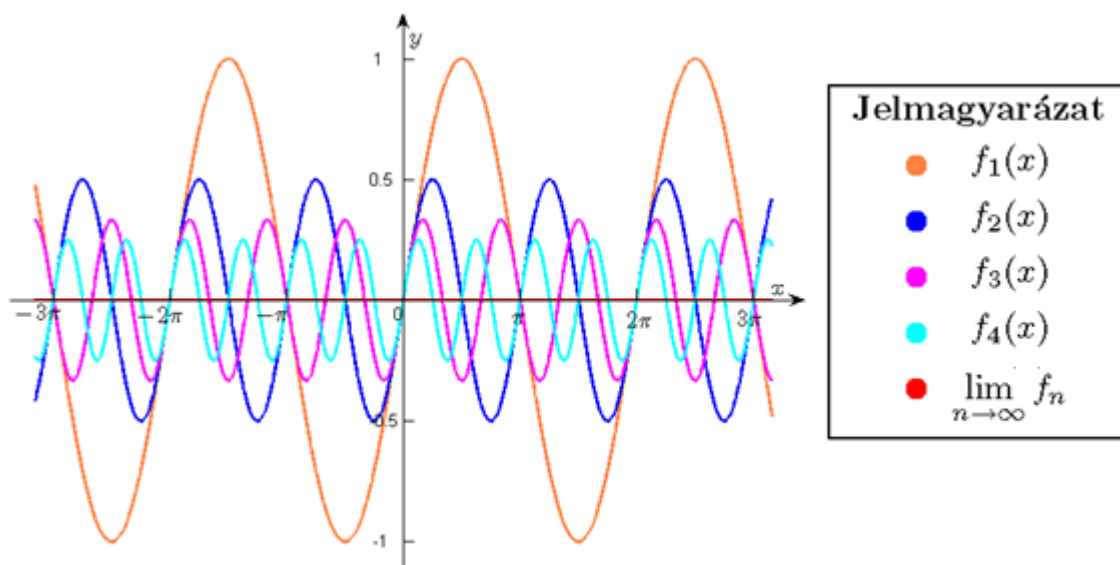
II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) - 0 \right| : x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében a függvénysorozat a valós számok halmazán egyenletesen konvergens.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.16. ábra.

1.16. ábra - Az $\left(\frac{1}{n} \cdot \sin(nx), n \in \mathbb{N}^* \right)_{(x \in \mathbb{R})}$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.2. Feladat. c) Vizsgáljuk meg, hogy az $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a $H = \mathbb{R}$ halmazon.

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

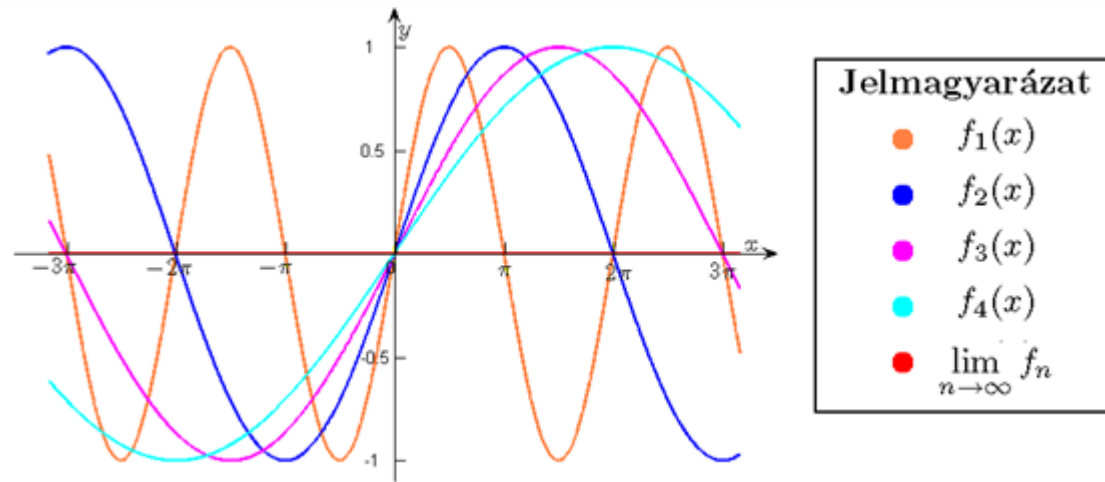
II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \sin \frac{x}{n} - 0 \right| : x \in \mathbb{R} \right\} = \sup \left\{ \left| \sin \frac{x}{n} \right| : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Legyen $g_n(x) = \left| \sin \frac{x}{n} \right|$. Mivel $g_n\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1$, ezért $\alpha_n \geq 1$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Nyilvánvaló tehát, hogy az $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat nem lehet nullsorozat, így az 1.1.12. Lemma értelmében függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a valós számok halmazán.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.17. ábra.

1.17. ábra - Az $\left(\sin \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right)_{(x \in \mathbb{R})}$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.2. Feladat. d) Vizsgáljuk meg, hogy az $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) függvénysorozat egyenletesen konvergencia-e a pozitív valós számok $H_1 = \mathbb{R}^+$ halmazán, illetve a $H_2 = (0, 1)$ intervallumon.

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

Ennek igazolásához legyen $x \in \mathbb{R}^+$ rögzített és $t \in \mathbb{R}^+$. Ha létezik az

$$F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) := t \ln t$$

függvény jobboldali határértéke nullában, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} F(t)$. A L'Hospital szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0+} -t = 0.$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk Az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

Tekintsük a $H_1 = \mathbb{R}^+$ halmazt. Ekkor

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} - 0 \right| : x \in \mathbb{R}^+ \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| : x \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Mivel $f_n(2n) = 2 \ln 2$, ezért $\alpha_n \geq 2 \ln 2$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Nyilvánvaló tehát, hogy az $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozat nem lehet nullsorozat, így az 1.1.12. Lemma értelmében függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a valós számok halmazán.

Tekintsük a $H_2 = (0, 1)$ intervallumot. Ha $x \in (0, 1)$, akkor $x < n$ minden n indexre, így

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| : x \in (0, 1) \right\} = \sup \left\{ -\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} : x \in (0, 1) \right\}.$$

Mivel $g_n(x) := -\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$ függvények differenciálhatók a H_2 halmazon (sőt $\mathbb{R}^+$ -on is), ezért a függvény szuprémumának meghatározásához segítségül hívhatjuk a deriváltat:

$$g_n'(x) = -\frac{\ln \frac{x}{n} + 1}{n} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n}{e}.$$

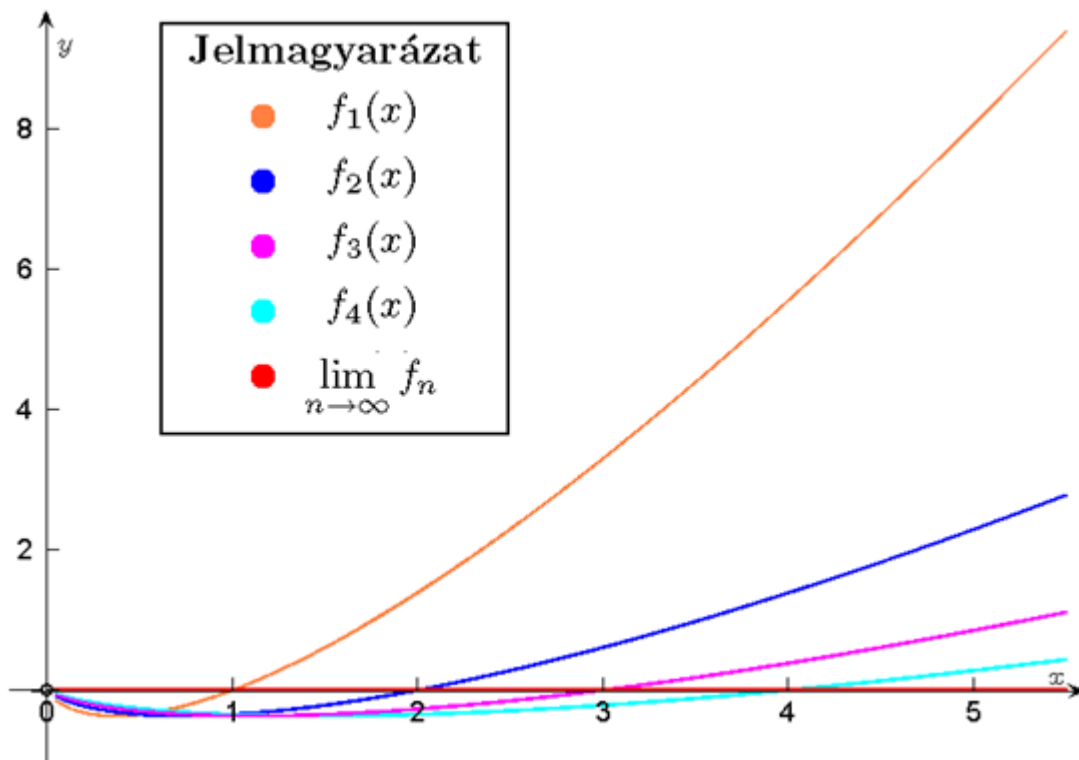
Ha $n \geq 3$, akkor fenti potenciális szélsőérték hely nincs az intervallumban, vagyis a g_n függvények az intervallumon szigorúan monotonok, és a derivált előjelvizsgálatával megállapítható, hogy szigorúan monoton nőnek. A függvények szuprémuma tehát az intervallum jobb végpontjában vett baloldali határértékkel egyenlő:

$$\alpha_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} = -\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}.$$

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ határértéket a 1. pontban már vizsgáltuk és $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében a függvénysorozat a $(0, 1)$ intervallumon egyenletesen konvergens.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.18. ábra.

1.18. ábra - Az $\left(\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right)_{(x \in \mathbb{R}^+)}$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.2. Feladat. e) Vizsgáljuk meg, hogy az $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a $H = \mathbb{R}$ halmazon.

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ha $x > 0$, akkor $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x < 0$ így $\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, ha $x < 0$, akkor hasonlóan $\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x$. Legyen

$$g_n(x) := \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Legyen $x_0 := n$, ekkor

$$g_n(n) = e^n - \left(1 + \frac{n}{n}\right)^n = e^n - 2^n = \underbrace{(e-2)}_{> \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(e^{n-1} + 2e^{n-2} + \dots + 2^{n-1})}_{> 2} > 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

azaz $\alpha_n > 1$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Nyilvánvaló tehát, hogy az $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat nem lehet nullsorozat, így az 1.1.12. Lemma értelmében függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a valós számok halmazán.

1.1.13. *Megjegyzés.* Ha nem vesszük észre a fenti egyszerűbb megoldást, akkor a hagyományos módon is vizsgálhatjuk az α_n sorozat határértékét.

Mivel

$$g'_n(x) := \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} - e^x < 0, & \text{ha } x < 0, \\ e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} > 0, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

ezért a g_n függvények a $(-\infty, 0)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenők, a $(0, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton növekszenek, így

$$\alpha_n = \max \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) \right\}.$$

L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával igazolható, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{e^x}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n}{e^x} \right)}_{\rightarrow 1} = \infty,$$

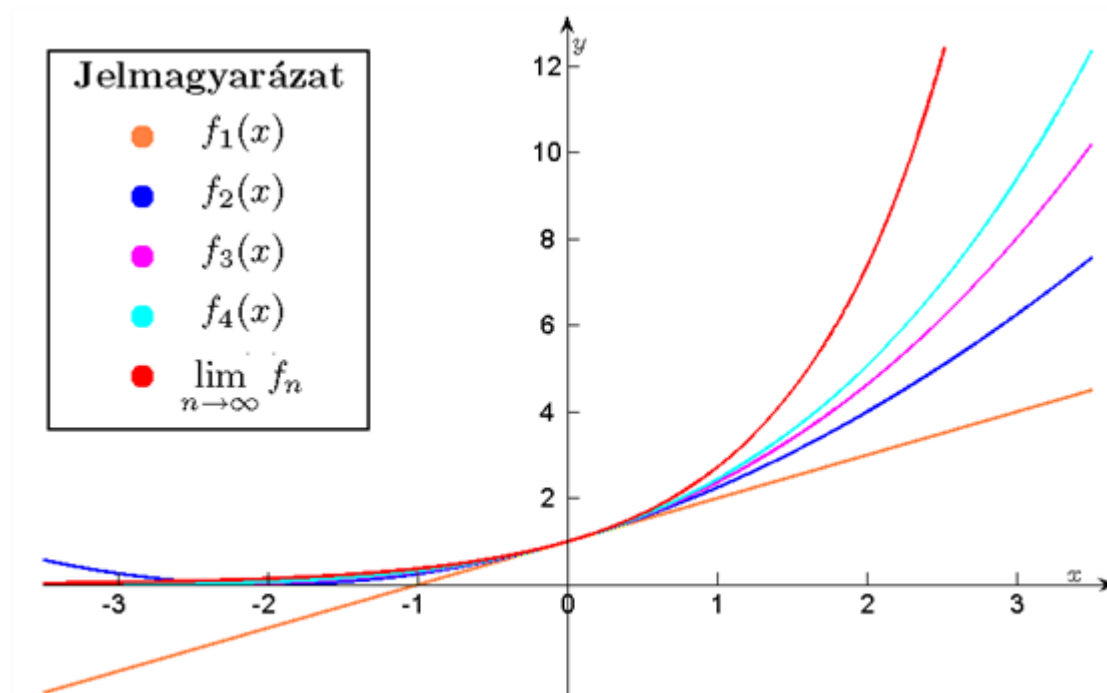
hiszen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n-1} \cdot \frac{n}{n}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n-2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{n^2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Hasonlóan igazolható, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = \infty$. Azaz az $(g_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat nem nullsorozat, így az 1.1.12. Lemma értelmében függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a valós számok halmazán.

A függvénysorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.19. ábra.

1.19. ábra - Az $\left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n, n \in \mathbb{N}^* \right)_{(x \in \mathbb{R})}$ függvénysorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.2. Feladat. f) Vizsgáljuk meg, hogy az $f_n(x) = n \cdot (\sqrt[n]{x} - 1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a pozitív valós számok $H_1 = \mathbb{R}^+$ halmazán, illetve a $H_2 = [1, 2012]$ intervallumon.

Megoldás.

I. Pontonkénti határérték meghatározása:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

Ennek igazolásához legyen $x \in \mathbb{R}^+$ rögzített és $y \in \mathbb{R}^+$. Ha létezik az

$$F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto F(y) := y \cdot \left(\frac{1}{x^y} - 1 \right)$$

függvény határértéke végtelenben, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(y)$. A L'Hospital szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \cdot \left(\frac{1}{x^y} - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{y}} - 1}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{y}} \cdot \ln x \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right)}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{y}} \cdot \ln x = \ln x.$$

II. Az egyenletes konvergencia vizsgálatához meghatározzuk az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

Tekintsük a $H_1 = \mathbb{R}^+$ halmazt.

$$\alpha_n = \sup \left\{ \underbrace{n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) - \ln x}_{=: g_n(x)} : x \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Mivel $2^n \in H_1$ és $|g_n(2^n)| = n \cdot (\ln 2 - 1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), ezért $\alpha_n \geq \ln 2 - 1$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Nyilvánvaló tehát, hogy az $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat nem lehet nullsorozat, így az 1.1.12. Lemma értelmében függvénsorozat nem egyenletesen konvergens a pozitív valós számok halmazán.

Tekintsük a $H_2 = [1, 2012]$ intervallumot.

$$\alpha_n = \sup \left\{ \left| n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) - \ln x \right| : x \in H_2 \right\} = \sup \left\{ \underbrace{n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) - \ln x}_{=: g_n(x)} : x \in H_2 \right\},$$

ugyanis $g_n(x) = n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) - \ln x > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ és minden $x > 1$ esetén, hiszen $g_n(1) = 0$ és a g_n

függvények az intervallumon differenciálhatók és $g_n'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{x} - \frac{1}{x} > 0$ minden $x > 1$ esetén, így a g_n függvények az intervallumon szigorúan monoton növekednek.

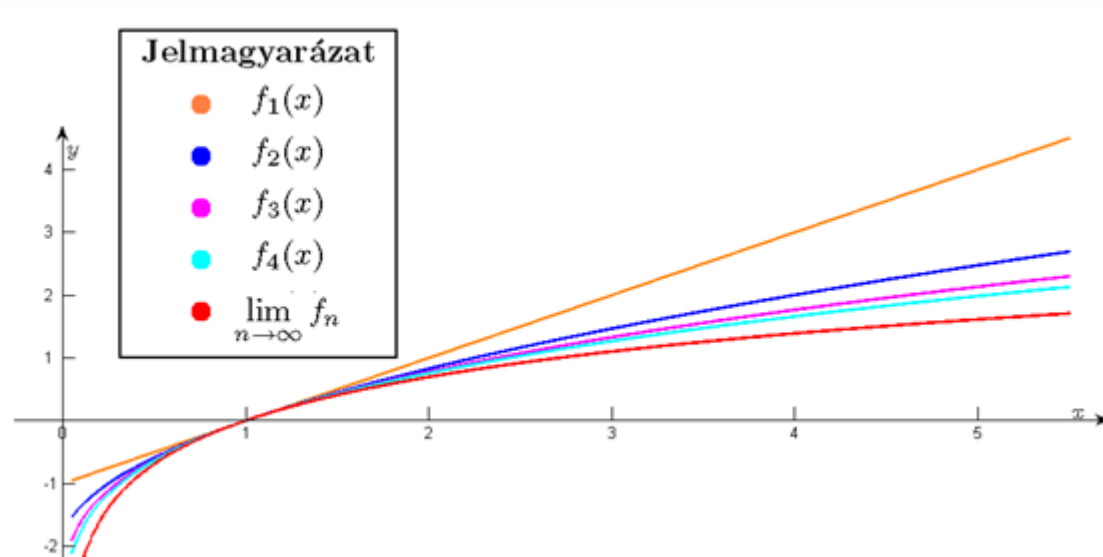
A fentiekből az is következik, hogy g_n függvények a szuprénumot az intervallum jobb végpontjában veszik fel:

$$\alpha_n = n \cdot \left(\sqrt[n]{2012} - 1 \right) - \ln 2012.$$

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ határérték a pontonként határérték számolásakor használt megfontolások alapján kapható. Az 1.1.12. Lemma értelmében a függvénsorozat a $[1, 2012]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

A függvénsorozat néhány tagját és a határfüggvényt szemlélteti az 1.20. ábra.

1.20. ábra - Az $\left(n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right), n \in \mathbb{N}^* \right)_{(x \in \mathbb{R}^+)}$ függvénsorozat első öt eleme és a határfüggvény



vissza a feladathoz

1.1.3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy függvénysorozat konvergens, akkor korlátos is!

Megoldás. Minden $x \in H$ esetén az $(f_n(x), n \in \mathbb{N})$ számsorozat konvergens, így a számsorozatokra vonatkozó tétel alapján korlátos is, tehát létezik egy x -től függő $M(x)$ pozitív valós szám, melyre

$$|f_n(x)| \leq M(x)$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát a függvénysorozat valóban korlátos.

vissza a feladathoz

1.1.4. Feladat. Igazoljuk, hogy a korlátos függvényekből álló $(f_n : H \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvénysorozat ha egyenletesen konvergens, akkor egyenletesen korlátos is.

Megoldás. Először belátjuk, hogy a határfüggvény $(f : H \rightarrow \mathbb{R})$ is konvergens. Az egyenletes konvergencia 6. definíciója alapján bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz, így $\varepsilon = 1$ -hez is létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor $|f_n(x) - f(x)| < 1$ minden $x \in H$ esetén.

Legyen $n_0 > N$ tetszőleges rögzített szám. Mivel f_{n_0} korlátos függvény, ezért létezik egy M_{n_0} pozitív valós szám, melyre $|f_{n_0}(x)| \leq M_{n_0}$ minden $x \in H$ esetén.

A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + M_{n_0} \quad (x \in H),$$

azaz f valóban korlátos.

Az egyenletes korlátossághoz alkalmazzuk ismét az egyenletes konvergencia definícióját $\varepsilon = 1$ -re. A háromszög-egyenlőtlenség segítségével kapjuk, hogy minden $n > N$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + 1 + M_{n_0} =: M_1,$$

mert f korlátos. Mivel a függvénysorozat minden eleme korlátos, ezért létezik és véges az alábbi maximum:

$$M := \max\{\sup\{|f_0(x)| : x \in H\}, \dots, \sup\{|f_N(x)| : x \in H\}, M_1\},$$

És minden $x \in H$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f_n(x)| \leq M$, azaz a függvénysorozat valóban egyenletesen korlátos.

vissza a feladathoz

2. Függvény sorok

Ha egy számsorozat elemeit összeadjuk formálisan, akkor egy ún. végtelen numerikus sort kapunk. Hasonlóan, ha egy függvénysorozat elemeit formálisan összeadjuk, akkor egy ún. függvény sort kapunk eredményül. Az alapozó képzésekben már mindenki találkozott egy speciális függvény sorral, nevezetesen a hatványsorral, mely függvények közelítésénél igen hasznosnak bizonyult.

Ebben a fejezetben az új, általánosabb fogalom, a függvény sorok különböző konvergencia-fogalmaival foglalkozunk.

1.2.1. Definíció. Legyen $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat, ahol $f_n: H \rightarrow \mathbb{R}$, $(H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ formális összeget függvény sornak nevezzük.

1.2.2. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény sor konvergens az $x \in H$ pontban, ha az

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

részletösszeg-függvénysorozat konvergens és a végtelen függvény sor összege x -ben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x).$$

1.2.3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény sor egyenletesen konvergens, ha az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ részletösszeg-függvénysorozat egyenletesen konvergens.

1.2.4. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ függvény sor konvergens.

A függvény sorok összegfüggvényének meghatározására igen kevés eszköz áll a rendelkezésünkre. (A hatványsorok elméletéből ismerünk hatványsorok összegfüggvényeit, ezekkel végzett műveletekkel kapott hatványsorok összegfüggvényét tudjuk megadni.)

Ebben a jegyzetben egy újabb speciális függvény sor, nevezetesen a Fourier-sor összegfüggvényét tudjuk majd bizonyos esetben meghatározni.

Egyelőre azonban beérjük azzal is, ha egy függvény sorról el tudjuk dönteni, hogy konvergens-e, egyenletesen konvergens-e.

Mivel minden egyes pontban a függvény sor egy numerikus sort eredményez, ezért a pontonkénti konvergencia vizsgálatakor a numerikus soroknál tanult konvergencia-kritériumok alkalmazhatóak.

Az egyenletes konvergencia vizsgálatát végezhetjük definíció alapján, a Cauchy-féle konvergenciakritériumnak a sorokra vonatkozó átfogalmazása segítségével, illetve bizonyos esetekben segít a következő tétel.

1.2.5. Tétel. Legyen $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat, ahol $f_n: H \rightarrow \mathbb{R}$, $(H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset)$. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nemnegatív tagú számsorozat, melyre $|f_n(x)| \leq a_n$, minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in H$ esetén és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens numerikus sor, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ végtelen függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens H -n.

Bizonyítás. A numerikus sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium alapján:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ ha } n > m > N, \text{ akkor } |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon. \quad (1.2.1)$$

Egyenletes konvergencia. A Cauchy-féle konvergencia definíció alapján $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ részletösszeg-függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ hogy } n > m > N \text{ esetén } |(S_n f)(x) - (S_m f)(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in H.)$$

A részletösszegsorozat definíciója és a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned} |(S_n f)(x) - (S_m f)(x)| &= |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| \leq \\ &\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n < \varepsilon, \end{aligned}$$

azaz az egyenletes konvergencia (1.2.1) alapján valóban teljesül.

Abszolút konvergencia. A függvénysor a Cauchy-féle konvergencia-kritérium értelmében pontosan akkor abszolút konvergens az $x \in H$ pontban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \text{ hogy } n > m > N \text{ esetén } |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \dots + |f_n(x)| < \varepsilon,$$

amely az előző részben szereplő becslés alapján nyilvánvalóan teljesül.

□

1.2.1. Példa. Döntsük el, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor milyen halmazon konvergál, illetve, hogy a konvergenciahalmazán egyenletes-e a konvergencia.

Megoldás. A feladatban szereplő függvénysor egy speciális hatványsor, a mértani sor. Mint tudjuk, csak a $(-1, 1)$ intervallumon konvergens és az összegfüggvénye

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1, 1).$$

A mértani sorozat első n elemének összegére (a mértani sor n -edik részletösszegére) ismert formula alapján a részletösszegsorozat:

$$(S_n f)(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1).$$

Az egyenletes konvergenciát definíció alapján, az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat vizsgálatával végezzük.

$$\alpha_n := \sup \{ |(S_n f)(x) - S(x)|, x \in (-1, 1) \} = \sup \left\{ \left| \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - \frac{1}{1-x} \right|, x \in (-1, 1) \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \left| \frac{x^{n+1} - 1 + 1}{x - 1} \right|, x \in (-1, 1) \right\} = \sup \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{1 - x}, x \in (-1, 1) \right\}$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} = +\infty$, ezért $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ nem nullsorozat, azaz a $(-1, 1)$ intervallumon a konvergencia nem egyenletes.

Megjegyzés. Igazolható, hogy a $(-1 + \delta, 1 - \delta)$ intervallumon, ahol $0 < \delta < 1$, már egyenletesen konvergens az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ részletösszeg-függvénysorozat és így a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor is.

Interaktív animáció

1.2.2. Példa. Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $(x \in [-1, 1])$ függvénysort abszolút és egyenletes konvergencia szempontjából.

Megoldás. A kérdéses függvénysornak van konvergens numerikus majoránsa, így 1.2.5. Tétel alapján a konvergencia egyenletes és abszolút:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Interaktív animáció

1.2.3. Példa. Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ függvénysor a $(0, \infty)$ intervallumon?

Megoldás. Ha találunk numerikus majoránst, akkor készen vagyunk. Itt két módszer is a rendelkezésünkre áll.

1. Megkeressük f_n szuprémumát az adott halmazon. Mivel most f_n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén differenciálható az adott halmazon, ezért a függvény menete vizsgálható az első derivált segítségével. A menet ismeretében a szuprémum leolvasható. Ezt a megoldást az olvasóra bízuk.

2. Az f_n az adott halmazon nemnegatívak, felülről elemi úton is becsülhetők:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^2} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1 + n^4 x^2}{2}} \leq \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{n^4 x^2}} = \frac{\frac{x}{2}}{n^2 x} = \frac{1}{2n^2} \quad (x > 0).$$

A becslés során két nem negatív kifejezés (1 és $n^4 x^2$) számtani- és mértani-közepére vonatkozó összefüggést használtuk. Mivel ez a becslés minden $n \geq 1$ esetén igaz, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2} \leq x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \quad (x > 0),$$

azaz a függvénysornak van konvergens numerikus majoránsa, így 1.2.5. tétel értelmében a függvénysor egyenletesen (és abszolút) konvergens a $(0, \infty)$ intervallumon.

Interaktív animáció

1.2.4. Példa. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \cdot e^{-nx}$ függvénysor konvergencia-halmazát, majd vizsgáljuk meg az adott halmazon egyenletes és abszolút konvergencia szempontjából.

Megoldás. Először állapítsuk meg, hogy mely x -ek esetén konvergens a függvénysor. A Cauchy-féle gyökkritérium alapján vizsgálva:

$$\sqrt[n]{\frac{x^2}{e^{nx}}} = \frac{\sqrt[n]{x^2}}{e^x} \rightarrow \frac{1}{e^x} \quad (n \rightarrow \infty),$$

így a függvénysor olyan x -ekre konvergens, amelyekre

$$\frac{1}{e^x} < 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0,$$

ha $x < 0$, akkor a függvénysor divergens. Az $x = 0$ esetben külön kell vizsgálni a konvergenciát. Behelyettesítve látjuk, hogy ekkor triviálisan teljesül a konvergencia. Így a $H = [0, \infty)$ intervallumon vizsgáljuk az egyenletes konvergenciát.

Ismét lehet deriváltak segítségével és elemi úton is numerikus majoránst keresni.

1. Mivel a függvényünk mindenütt differenciálható, ezért a menete az első derivált segítségével megadható:

$$f'_n(x) = \left(\frac{x^2}{e^{nx}} \right)' = \frac{2xe^{nx} - x^2 e^{nx} n}{e^{2nx}} = \frac{x(2 - nx)}{e^{nx}}.$$

Mivel $n \neq 0$, ezért a számlálóban x másodfokú polinomja szerepel, a nevező pedig pozitív, ezért f'_n előjele könnyen leolvasható:

x	$x = 0$	$0 < x < \frac{2}{n}$	$x = \frac{2}{n}$	$\frac{2}{n} < x$
f'_n előjele	0	+	0	-
f'_n menete	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Mivel f'_n nemnegatív, ezért abszolút értékének szupréuma a $\frac{2}{n}$ helyen vett helyettesítési értéke lesz:

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| \leq \frac{4}{n^2 e^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, \infty)).$$

Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 e^2} = \frac{4}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ numerikus sor konvergens, ezért 1.2.5. tétel értelmében a függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens a $[0, \infty)$ intervallumon.

2. Elemi úton is meg tudjuk keresni a numerikus majoránst. Ehhez az általánosított Bernoulli-féle egyenlőtlenséget használjuk:

$$\frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{x^2}{\left((1 + (\sqrt{e} - 1))^n \right)^2} \leq \frac{x^2}{\left(1 + nx(\sqrt{e} - 1) \right)^2} \leq \frac{x^2}{n^2 x^2 (\sqrt{e} - 1)^2} = \frac{1}{n^2 (\sqrt{e} - 1)^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*, x > 0).$$

Az $x = 0$ esetben az itt kapott becslés nyilvánvalóan teljesül. Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\sqrt{e} - 1)^2}$ numerikus sor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor konvergens numerikus majoránsa a $[0, \infty)$ intervallumon, ezért a függvénysor a vizsgált halmazon egyenletesen és abszolút konvergens.

Interaktív animáció

2.1. Feladatok

1.2.1. Feladat. Vizsgáljuk meg a következő függvénysorokat, hogy egyenletesen konvergensek-e a megadott halmazokon.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^{n+1} \quad (x \in [0, 1))$ megoldás

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (x \in [-1, 1])$ megoldás

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x}{1 + n^5 x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$ megoldás

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) \quad (x \in \mathbb{R})$ megoldás

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$ megoldás

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2 + n^3} \quad (x \in \mathbb{R})$ megoldás

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$ megoldás

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \left(x \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \right)$ megoldás

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{x+2^n} \quad (-2 < x < \infty)$ megoldás

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \quad (x \in \mathbb{R})$ megoldás

k) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n! n^2} \right) \quad (x \in (-a, a), a \in \mathbb{R}^+)$ megoldás

l) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x} \quad [i]$

(a) $(x \in \mathbb{R}^+)$

(b) $(x \in [\delta, \infty))$ megoldás

m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \quad (x \in [0, 2\pi])$ megoldás

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^n}} \quad (x \in (-a, a), a \in \mathbb{R}^+)$ megoldás

o) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in (-1+\delta, 1-\delta), 0 < \delta < 1)$ megoldás

2.2. Megoldások

1.2.1. Feladat. a) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^{n+1}$ függvénysor a $[0,1)$ intervallumon?

Megoldás. Írjuk fel a függvénysor részletösszeg-sorozatát:

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=0}^n x^k - x^{k+1} = (x^0 - x^1) + (x^1 - x^2) + \dots + (x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{n+1} \quad (x \in [0,1)).$$

A függvénysor összegfüggvénye a részletösszeg-sorozat határfüggvénye:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x^{n+1} = 1.$$

Az egyenletes konvergencia vizsgálatához írjuk fel az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozathoz az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup\{|(S_n f)(x) - S(x)| : x \in [0,1)\} = \sup\{|1 - x^{n+1} - 1| : x \in [0,1)\} = \sup\{x^{n+1} : x \in [0,1)\} = 1.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat és így a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor sem egyenletesen konvergens a $[0,1)$ intervallumon.

1.2.6. Megjegyzés. Igazolható, hogy a fenti függvénysor a $[0,1-\delta]$ intervallumon már egyenletesen konvergens, ahol $0 < \delta < 1$ tetszőleges.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. b) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ függvénysor a $[-1,1]$ intervallumon?

Megoldás. Írjuk fel a függvénysor részletösszeg-sorozatát. Minden $x \in [-1,1]$ esetén

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^k - \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \dots + \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Így a függvénysor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x - \frac{x^{n+1}}{\frac{n+1}{\rightarrow 0}} = x = S(x) \quad (x \in [-1,1]).$$

A fenti számítás során kihasználtuk, hogy a $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ hányados egy korlátos és egy végtelenbe tartó sorozat hányadosa.

Az egyenletes konvergencia vizsgálatához írjuk fel az $(S_n f, n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozathoz az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozatot:

$$\alpha_n = \sup\{|(S_n f)(x) - S(x)| : x \in [-1,1]\} = \sup\left\{\left|x - \frac{x^{n+1}}{n+1} - x\right| : x \in [-1,1]\right\} =$$

$$= \sup \left\{ \left\lfloor x \right\rfloor^{\frac{n+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} : x \in [-1, 1] \right\} = \frac{1}{n+1}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért az 1.1.12. Lemma értelmében az $(S_n f, n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozat és így a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvény is definíció szerint egyenletesen konvergens a $[-1, 1]$ intervallumon.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. c) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$ függvény sor a valós számok halmazán?

Megoldás. Numerikus majoráns kereséshez határozzuk meg az f_n függvények szuprémumát. Mivel f_n minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén differenciálható a valós számok halmazán, ezért a függvény menete vizsgálható az első derivált segítségével. Az

$$f'_n(x) = \frac{n(1+n^5 x^2) - nx \cdot 2nx^2}{(1+n^5 x^2)^2} = \frac{n+n^6 x^2 - 2n^6 x^2}{(1+n^5 x^2)^2}$$

nevezőjében szereplő kifejezés minden $n \in \mathbb{N}^*$ és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pozitív, így a derivált előjele megegyezik a számlálójának előjelével és

$$f'_n = 0 \Leftrightarrow n \cdot (1 - n^5 x^2) = 0,$$

mivel $n \neq 0$, ezért az $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n^5}}$ lehetséges szélsőérték helyeket kapjuk. Mivel f_n páratlan függvény, ezért elegendő a $[0, \infty)$ intervallumon vizsgálni:

x	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{n^5}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{n^5}}$	$\frac{1}{\sqrt{n^5}} < x$
f'_n előjele	+	0	-
f_n menete	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Így

$$|f_n(x)| \leq \frac{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^5}}}{1 + n^5 \cdot \frac{1}{n^5}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad (n \geq 1, x \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvény sornak tehát van konvergens numerikus majoránsa, így 1.2.5. Tétel értelmében a függvény sor egyenletesen (és abszolút) konvergens a valós számok halmazán.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. d) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$ függvény sor a valós számok halmazán?

Megoldás. Mivel $|\cos(nx)| \leq 1$, ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $x \in \mathbb{R}$ ezért

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény sornak tehát van konvergens numerikus majoránsa, így 1.2.5. Tétel értelmében a függvény sor egyenletesen (és abszolút) konvergens a valós számok halmazán.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. e) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ függvény sor a pozitív valós számok $\mathbb{R}^+$ halmazán?

Megoldás. A feladatra két megoldást is adunk.

1) Keressünk a függvény sorhoz numerikus majoránst! Ehhez vegyük észre, hogy

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 1),$$

ugyanis $x > 0$ és $x+1 > 0$. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

A függvény sornak tehát van konvergens numerikus majoránsa, így az 1.2.5. Tétel értelmében a függvény sor egyenletesen (és abszolút) konvergens a $(0, \infty)$ intervallumon.

2) Az egyenletes konvergencia a definíció alapján is vizsgálható. A függvény sor összegfüggvénye egyszerűen felírható:

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(x+k+1) - (x+k)}{(x+k)(x+k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Az egyenletes konvergencia vizsgálatához írjuk fel az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ függvény sorozathoz az 1.1.12. Lemmában szereplő $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sup\{|(S_n f)(x) - S(x)| : x \in (0, \infty)\} = \sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x}\right| : x \in (0, \infty)\right\} = \\ &= \sup\left\{\frac{1}{x+n+1} : x \in (0, \infty)\right\} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért 1.1.12. Lemma értelmében az $(S_n^f, n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozat és így a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor is egyenletesen konvergens a pozitív valós számok halmazán.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. f) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2 + n^3}$ függvénysor a valós számok halmazán?

Megoldás. Numerikus majoráns keresésére két módszert is megmutatunk.

[1.])

1. Mivel az f_n függvények páratlanok és $f_n(x) > 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x > 0$, ezért $|f_n|$ szuprémumát elegendő a $[0, \infty)$ intervallumon keresnünk, ahol $|f_n| = f_n$. Ismeretes $\arctg x < x$, ha $x > 0$, így

$$f_n(x) = \arctg \frac{2x}{x^2 + n^3} \leq \frac{2x}{x^2 + n^3} =: g_n(x) \quad (x \in \mathbb{R}_0^+).$$

Mivel a g_n függvények minden $n \in \mathbb{N}$ esetén differenciálhatók a pozitív valós számok halmazán, ezért a függvény menete vizsgálható az első derivált segítségével.

$$g_n'(x) = \frac{2n^3 - 2x^2}{(x^2 + n^3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{n^3}.$$

Mivel csak $\sqrt{n^3}$ esik a vizsgált intervallumba, ezért

x	$0 < x < \sqrt{n^3}$	$x = \sqrt{n^3}$	$-\sqrt{n^3} < x$
g_n' előjele	+	0	-
g_n menete	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A függvény szuprémuma tehát az alábbi módon becsülhető:

$$|f_n(x)| \leq g_n(x) \leq g_n(\sqrt{n^3}) = \frac{2\sqrt{n^3}}{2n^3} = \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty,$$

azaz a függvénysornak van konvergens numerikus majoránsa, így 1.2.5. Tétel értelmében a függvénysor egyenletesen (és abszolút) konvergens a valós számok halmazán.

2) A numerikus majoráns elemi módszerekkel is megtalálható. Az $|\arctg x| \leq |x|$ becslés és a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján

$$\left| \arctg \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| \leq \frac{2|x|}{x^2 + n^3} \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*).$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konvergens, ezért 1.2.5. Tétel értelmében a függvénysor egyenletesen (és abszolút) konvergens a valós számok halmazán.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. g) Egyenletesen konvergencia-e a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ függvényesor a pozitív valós számok halmazán?

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{x+n}$$

Leibniz-típusú sor minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén, így $|S_n f - S|$ becslésére használható a Leibniz-típusú sor hibaformulája:

$$|(S_n f)(x) - S(x)| \leq \frac{1}{x+n+1} \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

Így

$$\alpha_n = \sup\{|(S_n f)(x) - S(x)| : x \in \mathbb{R}^+\} \leq \sup\{\frac{1}{x+n+1} : x \in \mathbb{R}^+\} = \frac{1}{n+1}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ is teljesül, így az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ függvényesorozat és a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvényesor is egyenletesen konvergens a pozitív valós számok halmazán.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. h) Egyenletesen konvergencia-e a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$ függvényesor a

$H := [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$ halmazon?

Megoldás. A függvényesorhoz numerikus majoránst keresünk. Mivel

$$f_n(-x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} ((-x)^n + (-x)^{-n}) = \begin{cases} f_n(x), & \text{ha } n \text{ páros,} \\ -f_n(x), & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

ezért $|f_n(-x)| = |f_n(x)|$ minden $x \in H$ esetén. Elegendő tehát az $[\frac{1}{2}, 2]$ intervallumot vizsgálni.

Numerikus majoráns kereséséhez vizsgáljuk a függvények menetét! Az f_n függvények a vizsgált intervallumon differenciálhatók, ezért a függvény menetének vizsgálatához írjuk fel a deriváltakat:

$$f'_n(x) = \left(\frac{n^2}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{x^{2n} + 1}{x^n} \right) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{2nx^{2n-1} \cdot x^n - (x^{2n} + 1) \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{n^3}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in H).$$

Szélsőérték az intervallum határain, vagy ott lehet, ahol $f'_n = 0$. Ez utóbbi feltétel akkor teljesül, ha $x = \pm 1$. A lehetséges szélsőérték helyek közül csak $x = 1$ esik a $[\frac{1}{2}, 2]$ intervallumba. A függvény monotonitását az alábbi

táblázattal vizsgáljuk. Ehhez vegyük észre, hogy f'_n előjele megegyezik a számlálójának előjelével, így elegendő $x^{2n} - 1$ előjelét vizsgálni:

x	$\frac{1}{2} < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$
f'_n előjele	-	0	+
f'_n menete	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A függvény menetéből nyilvánvaló, hogy a lokális maximumot az intervallum végpontjában találjuk:

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = f_n(2) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right).$$

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} f_n(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right) \quad (x \in H)$$

becslés alapján a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(2)$ numerikus sor konvergenciáját vizsgáljuk. A Cauchy-féle gyökkritérium alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} \cdot 2 \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n!}}} = 0 < 1,$$

így a végtelen sor abszolút konvergens. A függvény sornak tehát van konvergens numerikus majoránsa, így az 1.2.5. Tétel értelmében egyenletesen (és abszolút) konvergens a vizsgált intervallumon.

vissza a feladathoz

Interaktív animáció

1.2.1. Feladat. i) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{x + 2^n}$ függvény sor a $(2, \infty)$ intervallumon?

Megoldás. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{x + 2^n}$$

függvény sor Leibniz-típusú minden $x \in (2, \infty)$ esetén, így $|S_n f - S|$ becslésére használható a Leibniz-típusú sor hibaformulája:

$$|(S_n f)(x) - S(x)| \leq \frac{1}{x + 2^{n+1}} < \frac{1}{2 + 2^{n+1}} \quad (x \in (2, \infty)).$$

Így

$$\alpha_n = \sup\{|(S_n f)(x) - S(x)| : x \in \mathbb{R}^+\} \leq \frac{1}{2 + 2^{n+1}}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 2^{n+1}} = 0$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, és a $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ függvény sorozat és így a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény sor is egyenletesen konvergens a $(2, \infty)$ intervallumon.

vissza a feladathoz

1.2.1. Feladat. j) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$ függvényssor a valós számok halmazán?

Megoldás. Numerikus majoráns kereséséhez tekintsük a következő becslést:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

Az első lépés során kihasználtuk, hogy $|\sin nx| \leq 1$ ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$) és hogy a tört nevezője minden szóbjáhető x és minden szóbjáhető n esetén pozitív, a második lépés során pedig azt, hogy $x^4 \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ konvergens, ezért a függvényssornak van konvergens numerikus majoránsa, így az 1.2.5. Tétel értelmében egyenletesen (és abszolút) konvergens a vizsgált intervallumon.

vissza a feladathoz

1.2.1. Feladat. k) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right)$ függvényssor a $(-a, a)$ intervallumon?

Megoldás. Mivel

$$\ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) = \frac{1}{n \ln^2 n} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right)^{n \ln^2 n}$$

és a

$$\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right)^{n \ln^2 n}, \quad n \geq 2$$

függvénysorozat monoton növekedve tart e^{x^2} -hez, ezért

$$\frac{1}{n \ln^2 n} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right)^{n \ln^2 n} \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n \ln^2 n} \quad (x \in (-a, a)).$$

A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$ numerikus sor az integrálkritérium értelmében konvergens, ugyanis a

$$\int_2^{\infty} \frac{a^2}{t^2 \ln^2 t} dt = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} a^2 \int_2^{\varphi} \frac{1}{t^2 \ln^2 t} dt = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} a^2 \int_{\ln 2}^{\ln \varphi} \frac{1}{u^2} du = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} a^2 \left(-\frac{1}{\ln \varphi} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{a^2}{\ln 2}$$

$u = \ln t, \quad du = \frac{1}{t} dt$

impropius integrál konvergens. Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvényssornak van konvergens numerikus majoránsa, így az 1.2.5. Tétel értelmében egyenletesen (és abszolút) konvergens a valós számok halmazán.

vissza a feladathoz

1.2.1. Feladat. l) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ függvényssor a pozitív valós számok $\mathbb{R}^+$ halmazán. Vizsgáljuk meg az egyenletes konvergenciát a $[\delta, \infty)$ intervallumon is.

Megoldás.

i) A függvénysor $(S_n f, n \in \mathbb{N}^*)$ részletösszeg sorozata a $\mathbb{R}^+$ halmazon nem teljesíti az egyenletes konvergenciára vonatkozó 1.1.7. Cauchy-féle konvergencia kritériumot, azaz

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n, m \in \mathbb{N}^*, n, m > N, \exists x \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } |S_n f(x) - S_m f(x)| \geq \varepsilon.$$

Valóban, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n = 2N$, $m = 2N+1 > N$ és $x = \frac{2}{3^{2N}\pi}$ választása esetén

$$|(S_n f)(x) - (S_m f)(x)| = 2^{2N+1} \sin \frac{1}{2} = 2^{2N+1} \sin \frac{\pi}{6} = 2^{2N} > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

ii) Vizsgáljuk meg a függvénysor egyenletes konvergenciáját a $[\delta, \infty)$ intervallumon is, ahol $\delta > 0$.

Ismeretes, hogy ha $x > 0$, akkor $\sin x < x$, így

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \delta} = \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty$$

A függvénysornak tehát van konvergens numerikus majoránsa, így az 1.2.5. Tétel értelmében egyenletesen (és abszolút) konvergens a $[\delta, \infty)$ intervallumon.

vissza a feladathoz

1.2.1. Feladat. m) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$ függvénysor a $[0, 2\pi]$ intervallumon?

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n + \sin x}$$

Leibniz-típusú sor minden $x \in [0, 2\pi]$ esetén, így $|S_n f - S|$ becslésére használható a Leibniz-típusú sor hibaformulája:

$$|(S_n f)(x) - S(x)| \leq \frac{1}{n+1 + \sin x} \quad (x \in [0, 2\pi], n \geq 2).$$

Így

$$0 \leq \alpha_n = \sup\{|(S_n f)(x) - S(x)| : x \in \mathbb{R}^+\} \leq \sup\left\{\frac{1}{n+1 + \sin x} : x \in [0, 2\pi]\right\} = \frac{1}{n} \quad (n \geq 2).$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért az $(S_n f, n \geq 2)$ függvénysorozat és így a $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ függvénysor is egyenletesen konvergens a $[0, 2\pi)$ intervallumon.

vissza a feladathoz

1.2.1. Feladat. n) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[n]{n^2 + e^n}}$ függvénysor a $(-\alpha, \alpha)$ intervallumon?

Megoldás. Vegyük észre, hogy $\frac{n(n-1)}{2}$ páros, ha n 4-gyel osztható, vagy ha $4k+1$ alakú természetes szám, ahol $k \in \mathbb{N}$ és páratlan a többi esetben, így a hatványsorunk két Leibniz-típusú sor összegeként írható fel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{l=1}^{\infty} f_{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} f_{2l+1}. \quad (1.2.2)$$

Fontos kiemelni, hogy az (1.2.2) felbontás akkor és csak akkor érvényes, ha mind a $\sum_{l=1}^{\infty} f_{2l}$ sor, mind pedig a $\sum_{l=0}^{\infty} f_{2l+1}$ sor konvergens.

A

$$\sum_{l=1}^{\infty} f_{2l} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{2l(2l-1)}{2}}}{\sqrt[3]{(2l)^2 + e^x}} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\sqrt{4l^2 + e^x}}$$

és a

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_{2l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(2l+1)2l}{2}}}{\sqrt[3]{(2l+1)^2 + e^x}} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\sqrt{(2l+1)^2 + e^x}}$$

sorok a Leibniz-kritérium értelmében konvergenssek, tehát az (1.2.2) felbontás helyes. A sorok összegét jelöljük S_a -val illetve S_b -vel. A Leibniz-típusú sorokra vonatkozó hibabecslés alapján $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) esetben

$$\begin{aligned} |S_{2k}f(x) - S(x)| &= \left| \sum_{l=1}^k f_{2l} + \sum_{l=0}^{k-1} f_{2l+1} - (S_a + S_b) \right| \leq \left| \sum_{l=1}^k f_{2l} - S_a \right| + \left| \sum_{l=0}^{k-1} f_{2l+1} - S_b \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt[3]{4(k+1)^2 + e^x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(2k+1)^2 + e^x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4(k+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(2k+1)^2}} \leq \frac{2}{\sqrt[3]{(2k+1)^2}}. \end{aligned}$$

Mivel $0 \leq \alpha_{2k} \leq \frac{2}{\sqrt[3]{(2k+1)^2}}$ és $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(2k+1)^2}} = 0$, ezért az $(\alpha_{2k}, k \in \mathbb{N}^*)$ nullsorozat. Hasonlóan igazolható, hogy $0 \leq \alpha_{2k+1} \leq \frac{2}{\sqrt[3]{(2k+2)^2}}$ ($k \in \mathbb{N}$).

Mivel $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ páros és páratlan indexű részsorozatai egyaránt nullához tartanak, ezért $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ is nullsorozat. Így $(S_n f, n \in \mathbb{N}^*)$ és ezért $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ is egyenletesen konvergens a $(-a, a)$ ($a \in \mathbb{R}^+$) intervallumon.

vissza a feladathoz

1.2.1. Feladat. o) Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor a $(-1+\delta, 1-\delta)$ intervallumon, ahol $0 < \delta < 1$?

Megoldás. A függvénysor összegfüggvényét és a részletösszeg sorozatot az 1.2.1. Példa. megoldása során már meghatároztuk. Az $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat egyenletes konvergenciáját most az $x \in (-1+\delta, 1-\delta)$ feltétel mellett kell vizsgálnunk, így

$$\alpha_n = \sup \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{1-x}, x \in (-1+\delta, 1-\delta) \right\}.$$

A szuprénum meghatározásához a $g_n(x) := \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$ függvények menetét a derivált alapján fogjuk vizsgálni. Mivel g_n az $x=0$ pont kivételével mindenhol differenciálható és a deriváltja:

$$g'_n(x) = \begin{cases} \frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n(1-x) + (-1)^{n+1}x^{n+1}}{(1-x)^2}, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{(n+1)x^n(1-x) + x^{n+1}}{(1-x)^2}, & \text{ha } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{-(-x)^n(n+1-nx)}{(1-x)^2}, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^n(n+1-nx)}{(1-x)^2}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

A g'_n számlálójában szereplő $n+1-nx$ lineáris kifejezés pozitív, ha $x < 1$, ezért $g'_n > 0$ ha $0 < x < 1-\delta$ és $g'_n < 0$, ha $-1+\delta < x < 0$. Tehát g_n szigorúan monoton csökkenő a $(-1+\delta, 0)$ intervallumon és szigorúan monoton növekvő a $(0, 1-\delta)$ intervallumon minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A g_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények szuprémumát az intervallum végpontjaiban vett egyoldali határértékek valamelyike adja:

$$\alpha_n = \max\left\{\lim_{x \rightarrow -1+\delta+} \frac{|x|^{n+1}}{1-x}, \lim_{x \rightarrow 1-\delta-} \frac{|x|^{n+1}}{1-x}\right\} = \frac{(1-\delta)^{n+1}}{\delta}.$$

Mivel $(\alpha_n, n \in \mathbb{N}^*)$ nullsorozat, ezért $(S_n f, n \in \mathbb{N})$ és így $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ is egyenletesen konvergens a $(-1+\delta, 1-\delta)$ ($0 < \delta < 1$) intervallumon.

vissza a feladathoz

2. fejezet - Lebesgue-integrál

Ebben a fejezetben a Lebesgue-integrál fogalmát vezetjük be és megvizsgáljuk, hogy függvénysorozatok esetén a határátmenet és a Lebesgue-integrálás sorrendje milyen feltételekkel cserélhető fel. Továbbá megmutatjuk, hogy a Riemann-integrál és a Lebesgue-integrál milyen kapcsolatban áll egymással. A Lebesgue-féle integrálfogalom bevezetése után a mérhető függvény és mérhető halmaz fogalmát is bevezetjük.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: lépcsősfüggvény, majdnem mindenütt való konvergencia, C_1 függvényosztály, C_2 függvényosztály, alsó- és felső burkoló, függvény pozitív-, illetve negatív része, (Lebesgue-)mérhető halmaz, (Lebesgue-)mérhető függvény.

Szükséges előismeret: 1. fejezet, Riemann-integrál.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 8 tanóra + 8 óra önálló munka.

A Lebesgue-integrál bevezetése előtt néhány új fogalommal, illetve tétellel kell megismerkednünk. Ezeket tartalmazza az első két alfejezet.

1. Nullamértékű halmazok

2.1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{I}$ egy nyílt, zárt, vagy félig nyílt, félig zárt intervallum. Az intervallum mértékén az intervallum hosszát értjük és $mes(\mathcal{I})$ -vel jelöljük.

2.1.2. Definíció. A $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres halmazt nullamértékűnek nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $(\mathcal{I}_n, n \in \Gamma)$ intervallum-rendszer, ahol Γ véges, vagy megszámlálhatóan végtelen indexhalmaz, amelyre

$$\bigcup_{n \in \Gamma} \mathcal{I}_n \supseteq H \quad \text{és} \quad \sum_{n \in \Gamma} mes(\mathcal{I}_n) < \varepsilon.$$

Jelölés: $|H| = 0$.

Példák $\mathbb{R}$ -en nullamértékű halmazokra:

(1) Az egyelemű halmaz nullamértékű. Ekkor $H = \{x_0\}$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

A halmazt ekkor egyetlen intervallummal is le tudjuk fedni. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és a H -t lefedő intervallum

$$\mathcal{I} := \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{4}, x_0 + \frac{\varepsilon}{4} \right) \supseteq \{x_0\} = H.$$

Az intervallum hossza:

$$mes(\mathcal{I}) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(2) Minden véges halmaz nullamértékű. Ekkor $H = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, ahol $x_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq N$, és $N \in \mathbb{N}$.

A halmaz minden elemét lefedjük egy intervallummal, melynek a felezőpontja az adott pont. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és a H -t lefedő intervallum-rendszer:

$$\mathcal{I}_n := (x_n - r, x_n + r), \quad 0 \leq n \leq N, \quad \text{ahol} \quad r = \frac{\varepsilon}{4(N+1)}.$$

Ekkor

$$\bigcup_{n=0}^N \mathcal{I}_n \supseteq H \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^N \text{mes}(\mathcal{I}_n) = \sum_{n=0}^N \frac{\varepsilon}{2(N+1)} = (N+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(N+1)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(3) Minden megszámlálhatóan végtelen halmaz nullamértékű. Ekkor $H = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, ahol $x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Itt szintén minden pontot lefedünk egy intervallummal (a pont egy adott sugarú környezetével), de az intervallumok hosszát egyre kisebbre választjuk. A lefedő intervallumrendszer:

$$\mathcal{I}_n := K_{r_n}(x_n) = (x_n - r_n, x_n + r_n), \quad \text{ahol} \quad r_n := \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n \supseteq H \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \text{mes}(\mathcal{I}_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2r_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk, hogy minden megszámlálható $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nullamértékű. Felmerül a kérdés, hogy az állítás megfordítása teljesül-e, azaz, hogy minden $\mathbb{R}$ -en nullamértékű halmaz megszámlálható-e. A válasz nem, azaz létezik nullamértékű, nem megszámlálható halmaz. Ilyen például a Cantor-féle triadikus halmaz:

A $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ intervallumból emeljük ki a középső nyílt harmadát, vagyis az $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ intervallumot, aztán ugyanígy járunk el a megmaradó két zárt intervallummal, azaz távolítsuk el az $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ és $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ intervallumot; ezt az eljárást folytassuk a keletkező négy, nyolc, zárt intervallummal. A végül megmaradó halmaz legyen C . Megmutatható, hogy C nem megszámlálható, nullamértékű halmaz. Lásd: [3] vagy [13].

2.1.3. Definíció. A majdnem mindenütt (rövidítve m.m.) kifejezést annak kifejtésére használjuk, hogy a szóban forgó tény mindenütt érvényes, kivéve legfeljebb egy nullamértékű halmaz pontjait.

Ez a definíció értelmében függvénysorozatok esetében bevezethetjük a pontonkénti, egyenletes konvergencia mellett az ún. majdnem mindenütt konvergencia fogalmát:

2.1.4. Definíció. Az $(f_n : H \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ ($H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \emptyset$) függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, ha az

$$E := \{x \in H \mid f_n(x) \not\rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)\}$$

halmaz nullamértékű. Jelölés: $f_n \rightarrow f$ m.m. ($n \rightarrow \infty$) H -n.

Megjegyzés. A nullamértékű halmaz fogalma bármelyik $n \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) térre kiterjeszthető. A definícióban szereplő n -dimenziós intervallum a következőképpen értelmezhető:

$$\mathcal{I}^n := \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \times \dots \times \mathcal{I}_n,$$

ahol $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n$ egydimenziós intervallumok. Az n -dimenziós intervallum mértéke:

$$\text{mes}(\mathcal{I}^n) := \text{mes}\mathcal{I}_1 \cdot \text{mes}\mathcal{I}_2 \cdot \dots \cdot \text{mes}\mathcal{I}_n.$$

• Példák $\mathbb{R}^2$ -beli nullamértékű halmazokra:

- Minden $\mathbb{R}$ -beli nullamértékű halmaz.
- Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények grafikonja is nullamértékű.

- Riemann-integrálható függvények grafikonja is nullamértékű.
- Példák $\mathbb{R}^3$ -beli nullamértékű halmazokra:
- Minden $\mathbb{R}^2$ -beli nullamértékű halmaz.
- A kompakt halmazon értelmezett folytonos kétváltozós függvények grafikonja is, azaz minden egyszerű felület nullamértékű.

2. Borel-féle befedési Tétel.

2.2.1. Tétel. (Borel-féle befedési tétel.) Ha $H \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz¹, akkor akárhogyan fedjük le végtelen sok nyitott intervallummal vagy végtelen sok nyitott halmazzal, ezek közül mindig kiválasztható véges sok, amelyek a H halmazt szintén lefedik.

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben végezzük.

1. eset. Tegyük fel, hogy $H = [a, b]$ korlátos és zárt intervallum. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Az indirekt állítás értelmében létezik $(I_n, n \in \mathbb{N})$ ($\mathbb{N}$ egy végtelen indexhalmaz) lefedés, melyből nem választható ki véges sok, amely lefedné $[a, b]$ -t.

Alkalmazzuk a korábban „oroszlánfogás módszereként” megismert intervallumfelezési eljárást. Az eljárás a következő két lépés iterálásából áll:

a) Megfelezzük a vizsgált intervallumot.

b) A két félintervallum közül legalább az egyikre igaz, hogy nem fedhető le véges sokkal a halmaz-rendszerünk elemei közül. A vizsgálódást ezen a félintervallumon folytatjuk. Azaz

- Legyen $[a_0, b_0] := [a, b]$ és $s_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$.

- $[a_1, b_1] := \begin{cases} [a_0, s_0], & \text{ha } [a_0, s_0] \text{ nem fedhető le véges sok intervallummal,} \\ \text{különben.} & [s_0, b_0], \end{cases}$

- Tegyük fel, hogy az $[a_n, b_n]$ intervallumot már definiáltuk, ekkor $s_n := \frac{a_n + b_n}{2}$.

- Így

$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, s_n], & \text{ha } [a_n, s_n] \text{ nem fedhető le véges sok intervallummal,} \\ \text{különben.} & [s_n, b_n], \end{cases}$

Így egymásba skatulyázott zárt intervallumok rendszerét kapjuk, melyekre

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_0,$$

azaz $(a_n, n \in \mathbb{N})$ és $(b_n, n \in \mathbb{N})$ monoton és korlátos sorozatok, így konvergensek is.

Mivel az intervallum-sorozat hossza nullához tart, ha n tart végtelenbe, hiszen

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

¹Egy $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz kompakt, ha bármilyen H -beli pontsorozatnak létezik konvergens részsorozata, melynek határértéke is H -hoz tartozik.

ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: \alpha$.

Az $[a, b]$ intervallum zárt, – azaz minden konvergens sorozattal együtt tartalmazza annak határértékét is – és $a_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, ezért $\alpha \in [a, b]$.

Az intervallum minden pontját lefedtük, így α -t is, azaz létezik olyan $n_0 \in \Gamma$ index, hogy $\alpha \in \mathcal{I}_{n_0}$.

Mivel az $[a_n, b_n]$ intervallum hossza tart nullához, ha n tart végtelenbe és $\alpha \in [a_n, b_n]$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért létezik olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy $[a_{n_1}, b_{n_1}] \subseteq \mathcal{I}_{n_0}$, azaz $[a_{n_1}, b_{n_1}]$ lefedhető az eredeti lefedésből egyetlen egy nyílt halmazzal is. Ez ellentmond annak, hogy $[a_{n_1}, b_{n_1}]$ nem fedhető le véges sok halmazzal, ami a feltétel alapján teljesül.

2. eset. Ha $H \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt (azaz kompakt) halmaz.

Mivel H korlátos, ezért létezik $[a, b]$ intervallum ($a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$), amelyre $H \subseteq [a, b]$. (Például $a := \inf H$ és $b := \sup H$.)

Legyen $(\mathcal{I}_n, n \in \Gamma)$ a H halmaz tetszőleges nyílt lefedése, azaz

$$\bigcup_{n \in \Gamma} \mathcal{I}_n \supseteq H.$$

Ekkor $[a, b] \subseteq \bigcup_{n \in \Gamma} \mathcal{I}_n \cup H^c$, azaz $[a, b]$ lefedhető nyílt halmazokkal.² Az első esetet alkalmazva kapjuk, hogy $[a, b]$ már lefedhető véges sok halmazzal is, azaz

$$H \subseteq [a, b] \subseteq \mathcal{I}_{n_1} \cup \mathcal{I}_{n_2} \cup \dots \cup \mathcal{I}_{n_k} \cup H^c,$$

de mivel H és H^c diszjunkt halmazok, ezért éppen az igazolandó állítás adódik:

$$H \subseteq \mathcal{I}_{n_1} \cup \mathcal{I}_{n_2} \cup \dots \cup \mathcal{I}_{n_k}.$$

Megjegyzés. A 2.2.1 Tétel feltételei közül sem a zárttság, sem a korlátosság nem hagyható el:

1. Korlátosság

Legyen $H := [0, \infty)$. Ekkor

$$[0, \infty) \subseteq \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (n, n+1) \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n} \right) \right)$$

intervallum-rendszer lefedi H -t, de nincs olyan véges részrendszere, amely szintén lefedné.

2. Zárttság

Legyen $H := (0, 1)$. Ekkor

$$(0, 1] \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right) \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right) \right)$$

intervallum-rendszer lefedi H -t, de nincs olyan véges részrendszere, amely szintén lefedné.

²Mint ismeretes, a zárt H halmaz H^c komplementer halmaza nyílt.

3. Lépcsős függvények

2.3.1. Definíció. Legyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum. A $\tau \subseteq [a, b]$ felosztása az intervallumnak, ha [i)]

1. $a, b \in \tau$,
2. τ véges számosságú.

Jelölés: $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát jelöljük $\mathcal{F}_{[a,b]}$ -vel.

2.3.2. Definíció. Legyen (a, b) korlátos intervallum. A $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt lépcsős függvénynek nevezzük, ha létezik $\tau \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, úgy hogy minden $x \in (x_{i-1}, x_i)$ pont esetén $\varphi(x) = c_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), $c_i \in \mathbb{R}$. Az osztópontokban a függvényt akárhogyan értelmezhetjük, a következőkben ugyanis mindig eltekintünk egy esetlegesen zavaró nullamértékű halmaztól.

2.3.3. Definíció. Ha (a, b) nem korlátos intervallum, akkor a $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt lépcsős függvénynek nevezzük, ha létezik $a < \alpha < \beta < b$, melyre

- $\varphi(x) = 0$, ha $x < \alpha$, vagy $\beta < x$,
- φ lépcsős függvény az $[\alpha, \beta]$ intervallumon.

Az (a, b) véges vagy végtelen intervallumon értelmezett lépcsősfüggvények osztályát C_0 -al jelöljük.

2.3.4. Definíció. Integrál értelmezése lépcsős függvények esetén. Legyen $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ lépcsős függvény. A fenti definíciónak megfelelő felosztás legyen $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ és $\varphi(x) := c_i, x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n$.

Ekkor a φ lépcsős függvény (a, b) intervallumon vett integrálja definíció szerint legyen:

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Az így definiált integrál nyilván rendelkezik a Riemann-integrálnál bebizonyított tulajdonságokkal; additivitás, monotonitás a $\leq$ relációra nézve, intervallum szerinti additivitás és egyéb műveleti tulajdonságok.

4. A C_1 függvényosztály

Ebben a pontban két lemma segítségével kiterjesztjük az integrált egy, a C_0 -nál bővebb, úgynevezett C_1 osztályra.

2.4.1. Lemma (A-Lemma). Legyen $\varphi_n \in C_0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton csökkenően tart 0-ba majdnem mindenütt (a, b) -n ($n \rightarrow \infty$). Ekkor

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás. Mivel $\varphi_n \rightarrow 0$ m.m. ($n \rightarrow \infty$), ezért $E_0 := \{x \in (a, b) \mid \varphi_n(x) \rightarrow 0 \text{ } (n \rightarrow \infty)\}$ nullamértékű halmaz.

Legyen $E_1 := \{x \in (a, b) \mid \exists n \in \mathbb{N} \varphi_n \notin C_n\}$. Mivel minden lépcsős függvénynek véges sok ilyen tulajdonságú pontja van és megszámlálhatóan végtelen sok ilyen függvény van, ezért E_1 -be megszámlálhatóan végtelen pont kerül, így E_1 is nullamértékű halmaz.

Vezessük be az $E_2 := E_0 \cup E_1 \cup \{a, b\}$ jelölést. Nyilvánvaló, hogy E_2 is nullamértékű halmaz. Észrevételek:

1. Legyen $x_0 \in (a, b) \setminus E_2$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_0) = 0$, és ezért

$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N = N(\varepsilon_1, x_0) \in \mathbb{N}$, ha $n > N$, akkor $|\varphi_n(x_0)| < \varepsilon_1$.

Tudjuk továbbá, hogy $\varphi_n(x_0)$ monoton csökkenően tart 0-ba, így $\varphi_n(x_0) \geq 0$, így a konvergencia definíció által szabott feltételben az abszolútérték-jel elhagyható, továbbá mivel φ_n folytonos x_0 -ban, ezért létezik az x_0 pontnak olyan $\mathcal{J}(x_0)$ nyílt környezete, melyre

$$\varphi_n(x) < \varepsilon_1 \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_0).$$

Minden „jó” pontot lefedhetünk ilyen nyílt intervallumokkal, azaz

$$(a, b) \setminus E_2 \subseteq \bigcup_{x_0 \in (a, b) \setminus E_2} \mathcal{J}(x_0).$$

2. Másrészt, mivel E_2 nullamértékű, ezért bármely $\varepsilon_2 > 0$ esetén létezik $(\mathcal{I}_n, n \in \mathbb{N})$ nyílt intervallumok egy rendszere, hogy

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n \supseteq E_2 \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{L}}(\mathcal{I}_n) < \varepsilon_2.$$

3. A $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat egyenletesen korlátos, ugyanis minden $x \in (a, b)$ esetén $(\varphi_n(x), n \in \mathbb{N})$ monoton csökkenő sorozat, ezért

$$\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \quad \forall x \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}.$$

és így

$$\sup\{\varphi_n(x) \mid n \in \mathbb{N}, x \in (a, b)\} = \sup\{\varphi_0(x) \mid x \in (a, b)\} = M > 0.$$

Mivel φ_0 függvény értékkészlete véges, ezért M nyilván valós szám.

Az 1., 2., és 3. megállapítások felhasználásával tudjuk bizonyítani az A-Lemmat:

[1. eset.] Először azt az esetet vizsgáljuk, ha (a, b) korlátos intervallum.

Ekkor az $[a, b]$ intervallum lefedhető az előbb definiált „jó” illetve „rossz” pontokat körülvevő nyílt intervallumok egyesítésével:

$$[a, b] \subseteq \underbrace{\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n \right)}_{\text{„rosszpontok”}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{x \in [a, b] \setminus E_2} \mathcal{J}(x) \right)}_{\text{„jópontok”}}.$$

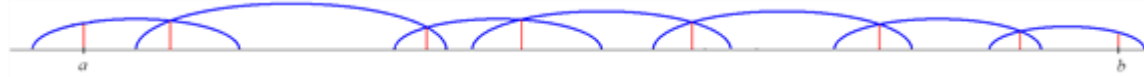
A Borel-féle befedési tételből következik, hogy létezik véges lefedés is, azaz léteznek k, s természetes számok, melyekkel

$$[a, b] \subseteq \left(\bigcup_{j=0}^k \mathcal{I}_{n_j} \right) \cup \left(\bigcup_{\ell=0}^s \mathcal{J}(x_{\ell}) \right),$$

ahol $x_{\ell} \in [a, b] \setminus E_2$ ($\ell = 1, \dots, s$).

Tehát véges sok nyílt intervallummal lefedtük $[a, b]$ -t, de ezek közös része nem feltétlenül üres. Vágjuk le az egyes intervallumokat úgy, hogy bármely $[a, b]$ -részintervallumnak legfeljebb egy közös pontja legyen és az intervallumok egyesítettje ne tartalmazzon a -n kívüli pontokat.

2.1. ábra - Lefedő intervallumok "levágása"



Ekkor

$$[a, b] = \left(\bigcup_{j=0}^k \overline{I}_{n_j} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s \overline{J}(x_i) \right),$$

ahol $\overline{I}_{n_j}$ és $\overline{J}(x_i)$ a fenti levágásokkal származtatott részintervallumok.

Be szeretnénk látni, hogy

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz bármely pozitív ε -hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n > N$, akkor

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Mivel $\varphi_n(x) \geq 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén, az integrál elemi értelmezését felhasználva $\int_a^b \varphi_n(x) dx \geq 0$. Ezt a bizonyítandó egyenlőtlenséggel összevetve és felhasználva a szintén az integrál értelmezéséből adódó intervallum szerinti additivitást kapjuk, hogy

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x) dx \right| = \int_a^b \varphi_n(x) dx = \sum_{j=0}^k \int_{\overline{I}_{n_j}} \varphi_n(x) dx + \sum_{i=1}^s \int_{\overline{J}(x_i)} \varphi_n(x) dx. \quad (2.1)$$

Ha $n > N := \max\{N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_s)\}$, akkor a „jó pontok” környezetében a függvényértékek ε_1 -gyel, a „rossz pontok” környezetében a függvényértékek szuprémumával (M -mel) tudjuk felülről becsülni. Így a (2.4.1)-ben szereplő integrálok felülről becsülhetők:

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x) dx \right| \leq \sum_{j=0}^k M \cdot \text{mes}(\overline{I}_{n_j}) + \sum_{i=1}^s \varepsilon_1 \cdot \text{mes}(\overline{J}(x_i)) < M \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1(b-a).$$

Itt kihasználtuk, hogy E_2 nullamértékű halmaz, ezért

$$\sum_{j=0}^k \text{mes}(\overline{I}_{n_j}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \text{mes}(I_n) \leq \varepsilon_2,$$

továbbá

$$\sum_{i=1}^s \text{mes}(\overline{J}(x_i)) \leq b-a.$$

A fenti kifejezés

$$\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2M} \text{ és } \varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

választás mellett, egyenlő ε -nal, amivel az állítást beláttuk.

Tegyük fel, hogy (a, b) nem korlátos intervallum. Mivel $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ monoton csökkenő, ezért bármely $x \in (a, b)$ esetén $\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x)$, és így bármely $x \in (a, b)$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_0(x) \geq \varphi_n(x)$. Ebből következik, hogy, ha $\alpha < \beta$ valós számokra $x < \alpha$ és $x > \beta$ esetén $\varphi_0(x) = 0$, akkor az $[\alpha, \beta]$ korlátos zárt intervallumon kívül a lépcsősfüggvény-sorozat összes eleme nulla. Ezzel az 1. esetre vezettük a problémát, hiszen (a, b) intervallum helyett áttérhetünk az $[\alpha, \beta]$ korlátos és zárt intervallumra.

2.4.2. Lemma (B-Lemma). Legyen $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő lépcsősfüggvény-sorozat, melynek integráljai korlátosak, azaz létezik $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \leq K.$$

Ekkor $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ függvényt sorozat m.m. konvergens.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\varphi_n \geq 0$ (a, b) -n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. (Ha nem teljesülne, akkor a $\psi_n := \varphi_n - \varphi_0 \geq 0$ sorozatot vizsgáljuk.)

Mivel $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton nő, ezért ha valamely x pontban $(\varphi_n(x), n \in \mathbb{N})$ nem konvergens, akkor a határértéke $+\infty$.

Legyen

$$E_0 := \{x \mid x \in (a, b), \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \infty\}.$$

Megmutatjuk, hogy E_0 nullamértékű.

Legyen

$$A := \sup \left\{ \int_a^b \varphi_n(x) dx, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Mivel $\varphi_n \geq 0$ minden szóbjövő (a, b) -n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért $A \geq 0$, továbbá $A = 0$ esetén minden φ_n azonosan egyenlő nulla, így az állítás triviálisan teljesül. Feltehető tehát, hogy $A > 0$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és

$$E_\varepsilon := \{x \mid x \in (a, b), \exists n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) > \frac{A}{\varepsilon}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy intervallumok egyesítése, illetve, hogy $E_\varepsilon \supseteq E_0$.

Vezessük be az

$$E_{\varepsilon, n} := \{x \mid x \in (a, b), \varphi_n(x) > \frac{A}{\varepsilon}\}$$

halmazokat, melyek szintén intervallumok, melyekből álln: $\frac{A}{\varepsilon} < \varphi_n(x)$ sorozat monoton nő, ezért ha $x \in (a, b)$ $n \in \mathbb{N}$ $\frac{A}{\varepsilon} < \varphi_{n+1}(x)$ $(E_{\varepsilon, n}, n \in \mathbb{N})$ valamely és esetén teljesül, akkor is igaz, azaz az halmazok monoton növekedő halmazsorozatot alkotnak:

$$E_{\varepsilon, 0} \subseteq E_{\varepsilon, 1} \subseteq \dots \subseteq E_{\varepsilon, n} \subseteq \dots$$

Továbbá nyilvánvalóan igaz, hogy

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_{\varepsilon, n} = E_{\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\varepsilon, n}.$$

Ekkor a φ_n nemnegatív függvény integrálja a C_0 -beli integrál tulajdonságai alapján alulról és felülről az alábbiak szerint becsülhető:

$$\frac{A}{\varepsilon} \cdot \text{mes}(E_{\varepsilon, n}) = \int_{E_{\varepsilon, n}} \frac{A}{\varepsilon} dx < \int_{E_{\varepsilon, n}} \varphi_n(x) dx \leq \int_a^b \varphi_n(x) dx \leq A,$$

ahol $\text{mes}(E_{\varepsilon, n})$ jelöli az $E_{\varepsilon, n}$ halmazt alkotó intervallumok hosszának összegét. Innen

$$\frac{A}{\varepsilon} \cdot \text{mes}(E_{\varepsilon, n}) < A \Rightarrow \text{mes}(E_{\varepsilon, n}) < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \geq \text{mes}(E_{\varepsilon}).$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$E_0 \subseteq E_{\varepsilon} \text{ és } \text{mes}(E_{\varepsilon}) \leq \varepsilon,$$

amiből következik, hogy E_0 nullamértékű halmaz.

A B-Lemma lehetőséget ad az integrál fogalmának kiterjesztésére.

2.4.3. Definíció. Legyen C_1 olyan függvények osztálya, melyekhez található B-Lemma-beli $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekedő, C_0 -beli, korlátos integrállal rendelkező függvénytársorozat, amely majdnem mindenütt tart f -hez, azaz

$$C_1 := \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \varphi_n \in C_0, (n \in \mathbb{N}), \text{ hogy } \varphi_n \nearrow f \text{ m.m. } (n \rightarrow \infty) \text{ és } (\int_a^b \varphi_n(x) dx, n \in \mathbb{N}) \text{ korlátos}\}.$$

Az így definiált függvényosztály nyilván magában foglalja a C_0 -at is, azaz $C_0 \subseteq C_1$.

2.4.4. Definíció. Integrál értelmezése C_1 -beli függvények esetén. Legyen $f \in C_1$, ekkor

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx.$$

Az alábbi tételben belátjuk, hogy ez a definíció jó abban az értelemben, hogy az integrál értéke nem függ a függvénytársorozat választásától.

2.4.5. Tétel.

i) Ha $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ és $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ két B-Lemma-beli függvénytársorozat, melyekre $\varphi_n \rightarrow f$ $(n \rightarrow \infty)$ m.m. és $\psi_n \rightarrow f$ $(n \rightarrow \infty)$ m.m., akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

ii) Ha $f \in C_0$, akkor az integrál C_1 -beli definíciója alapján számolva ugyanazt kapjuk eredményül, mintha a C_0 -beli definíciót használnánk.

Bizonyítás.

i) A tételben szereplő állítás helyett a következő, annál erősebb állítást bizonyítjuk:

Ha $f, g \in C_1$ és $f \leq g$, és $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$, $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ két B-Lemma-beli függvénysorozat, melyekre $\varphi_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) m.m. és $\psi_n \rightarrow g$ ($n \rightarrow \infty$) m.m., akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

Vizsgáljuk a $\varphi_n - \psi_m$ különbséget, ha n rögzített index és $m \rightarrow \infty$. Ekkor $(\varphi_n - \psi_m, m \in \mathbb{N})$ monoton csökkenve tart $\varphi_n - g$ -be majdnem mindenütt, és

$$\varphi_n - g \leq f - g \leq 0.$$

Vegyük a $(\varphi_n - \psi_m, m \in \mathbb{N})$ függvénysorozat pozitív részét.³ A $((\varphi_n - \psi_m)^+, m \in \mathbb{N})$ függvénysorozat is C_0 -beli és monoton csökkenve tart 0-ba majdnem mindenütt, ha $m \rightarrow \infty$, azaz erre a függvénysorozatra teljesülnek az A-Lemma feltételei. Az A-Lemma alapján

$$\int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_m(x))^+ dx \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Mivel $(\varphi_n - \psi_m)^+ \geq \varphi_n - \psi_m$ ezért a C_0 -beli integrál tulajdonságai miatt:

$$\int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_m(x))^+ dx \geq \int_a^b \varphi_n(x) - \psi_m(x) dx = \int_a^b \varphi_n(x) dx - \int_a^b \psi_m(x) dx.$$

Véve az $m \rightarrow \infty$ határátmenetet, kapjuk, hogy

$$0 \geq \int_a^b \varphi_n(x) dx - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_m(x) dx \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_m(x) dx \geq \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

melyből n szerinti határátmenettel az állítás adódik.

Ha a most bebizonyított állítást az $f = g$, azaz $f \leq g$ és $g \leq f$ esetre alkalmazzuk, akkor az i) állítás bizonyítását nyerjük.

ii) Legyen $f \in C_0$. Ekkor i) miatt a C_0 -beli függvénysorozat választása tetszőleges. Legyen $(\varphi_n = f, n \in \mathbb{N})$ a feltételeknek megfelelő C_0 -beli sorozat. Ekkor a két értelmezés egyértelműsége triviálisan teljesül.

□

A 2.4.5. tétel i) részének bizonyítása közben beláttuk azt is, hogy a C_1 -beli integrál monoton a $\leq$ relációra nézve:

³Az $a \in \mathbb{R}$ szám pozitív illetve negatív része:

$$a^+ := \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \quad a^- := \begin{cases} 0, & \text{ha } a \geq 0, \\ -a, & \text{különben,} \end{cases}$$

melyekre a következő megállapítások teljesülnek: $a^+, a^- \geq 0$, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ és $a \leq a^+$.

2.4.6. Következmény. Ha $f, g \in C_1$ és $f \leq g$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

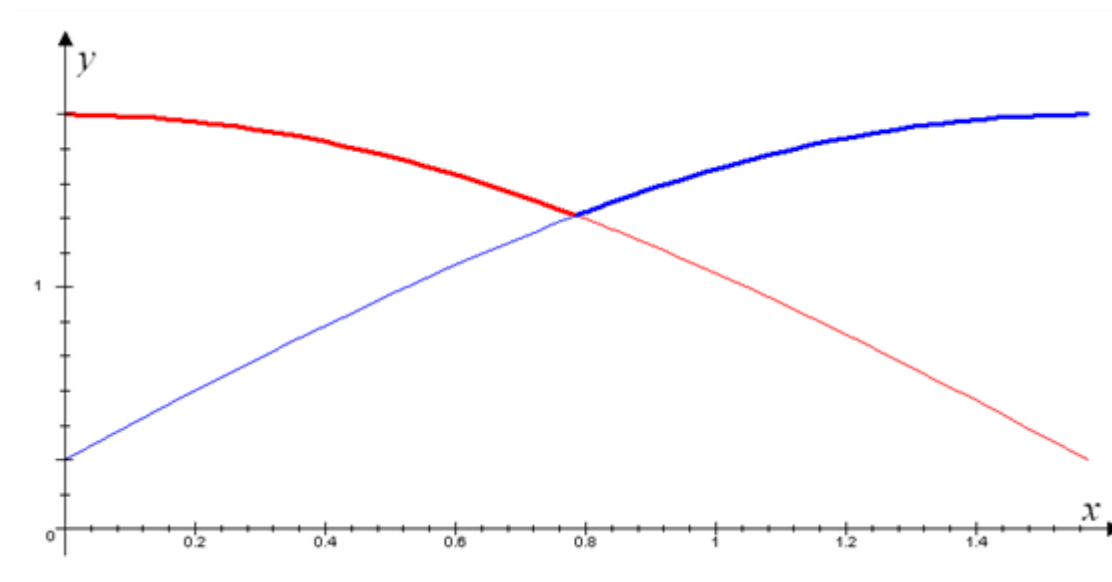
4.1. Műveleti tulajdonságok C_1 -ben

A C_0 -beli integrál triviálisan rendelkezik a Riemann-integrálnál megismert műveleti tulajdonságokkal. Most megnézzük, hogy a C_1 függvényosztályra melyek teljesülnek.

2.4.7. Definíció. Az $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények felső burkolóján azt az $f \cup g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értjük, amelyre:

$$(f \cup g)(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq g(x), \\ g(x), & \text{különben} \end{cases} \quad (x \in (a, b)).$$

2.2. ábra - Felső burkoló



Az $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények alsó burkolóján azt az $f \cap g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értjük, amelyre:

$$(f \cap g)(x) := \begin{cases} g(x), & \text{ha } f(x) \geq g(x), \\ f(x), & \text{különben} \end{cases} \quad (x \in (a, b)).$$

2.4.8. Tétel. Ha $f, g \in C_1$ függvények és $\lambda > 0$ szám, akkor

$$f + g, \lambda \cdot f, f \cup g, f \cap g \in C_1$$

és

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

illetve

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Bizonyítás. $f + g$: Legyen $\varphi_n \rightarrow f$ m.m. kor $\psi_n \rightarrow g$ m.m. $n \rightarrow \infty$ illetve $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ illetve $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő függvénysorozat, melyekre és , ha $f + g$ Ekkor C_0 -intén -beli monoton növekedő függvénysorozat, mely majdnem mindenütt -hez tart. Az integrál -beli műveleti tulajdonságai miatt:

$$\int_a^b (\varphi_n(x) + \psi_n(x)) dx = \int_a^b \varphi_n(x) dx + \int_a^b \psi_n(x) dx,$$

ahonnan n -szerinti határátmenettel kapjuk az állítást.

$\lambda \cdot f$: Mivel $f \in C_1$, ezért létezik $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő függvénysorozat, melyre $\varphi_n \rightarrow f$ m.m. $(n \rightarrow \infty)$. Mivel $\lambda > 0$, ezért $(\lambda \varphi_n, n \in \mathbb{N})$ szintén monoton növekedő C_0 -beli függvénysorozat, melynek határfüggvénye λf majdnem mindenütt. Az integrál C_0 -beli műveleti tulajdonságai miatt

$$\int_a^b \lambda \varphi_n(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi_n(x) dx,$$

ahonnan n -szerinti határátmenettel kapjuk az állítást.

$f \cup g$: Legyenek $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ illetve $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő függvénysorozatok, melyekre $\varphi_n \rightarrow f$ m.m. és $\psi_n \rightarrow g$ m.m., ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor $(\varphi_n \cup \psi_n, n \in \mathbb{N})$ nyilván szintén C_0 -beli.

Igazoljuk, hogy $(\varphi_n \cup \psi_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekvő, azaz

$$\varphi_n \cup \psi_n \leq \varphi_{n+1} \cup \psi_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha valamely $x \in (a, b)$ -re $\varphi_n(x) \geq \psi_n(x)$, akkor az igazolandó reláció bal oldala:

$$(\varphi_n \cup \psi_n)(x) = \varphi_n(x),$$

míg a jobb oldal

$$(\varphi_{n+1} \cup \psi_{n+1})(x) = \begin{cases} \varphi_{n+1}(x), & \text{ha } \varphi_{n+1}(x) \geq \psi_{n+1}(x), \\ \psi_{n+1}(x), & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha a jobb oldal $\varphi_{n+1}(x)$, akkor $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekedése miatt a reláció teljesül, míg ha a jobb oldal $\psi_{n+1}(x)$, akkor a felső burkoló értelmezése miatt $\psi_{n+1}(x) \geq \varphi_{n+1}(x)$ és $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekedése miatt $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$. A kapott relációkat összevetve az állítás adódik. A $\varphi_n(x) < \psi_n(x)$ eset hasonlóan igazolható.

A $(\varphi_n \cup \psi_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat nyilván majdnem mindenütt $f \cup g$ -hez tart és az $\int_a^b (\varphi_n(x) \cup \psi_n(x)) dx$ integrál-sorozat pedig korlátos, mert az $\int_a^b \varphi_n(x) dx$ és $\int_a^b \psi_n(x) dx$ integrál-sorozatok korlátosak. Tehát $f \cup g$ valóban C_1 -beli.

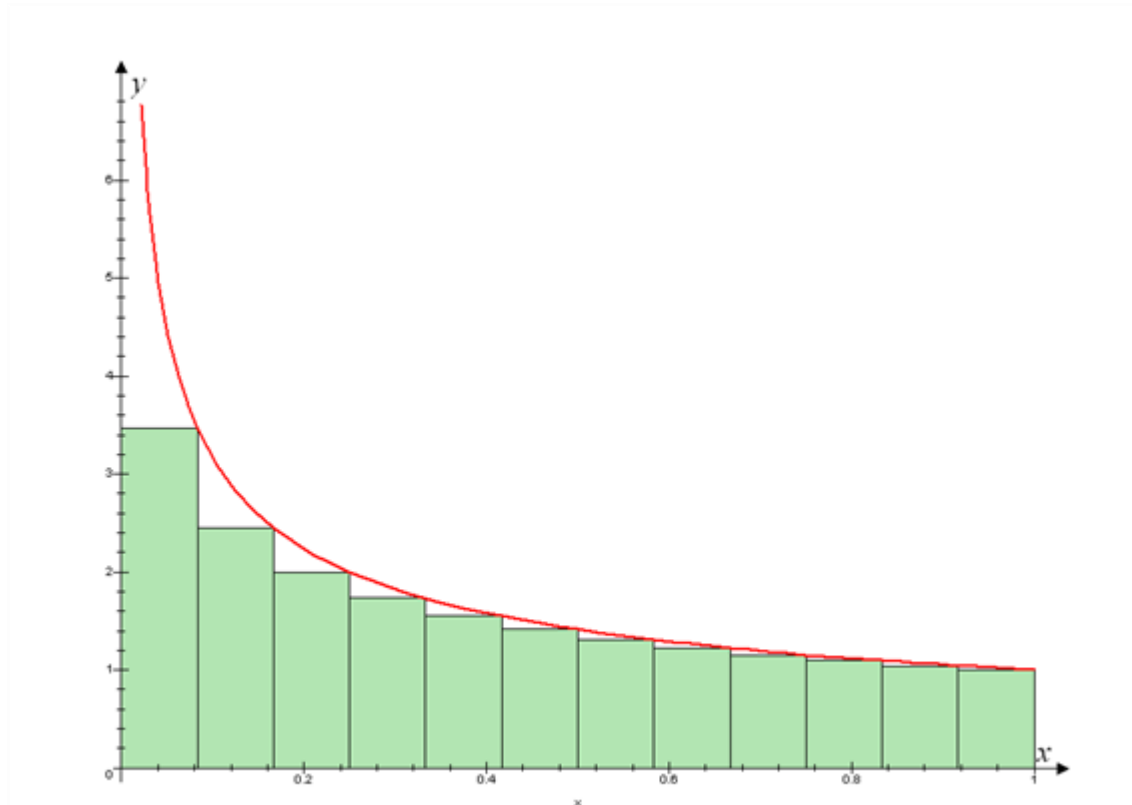
Az alsó burkolóra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

□

Megjegyezzük, hogy ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda \cdot f$, illetve $f - g$ is kivezethet C_1 -ből. Legyen például $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x \in (0, 1)$). A φ_0 legyen a konstans 1 függvény, a φ_n ($n \in \mathbb{N}^*$) függvény pedig legyen a következőképpen

értelmezve. A $[0,1]$ intervallumot osszuk n egyenlő részre. Minden intervallumon legyen a függvényérték a jobboldali végpontban felvett függvényérték. Az így definiált függvénysorozat monoton nő, és határértéke majdnem mindenütt f . A függvénysorozat integráljainak határértéke $\int_a^b \varphi_n(x) dx \rightarrow 2$ ($n \rightarrow \infty$), tehát f C_1 -beli. Az 2.3. ábrán φ_{12} és f grafikonja látható.

2.3. ábra - φ_{12} és f grafikonja



A $g = -f$ függvény esetén nem lehet a definíciónak megfelelő monoton növekvő $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot találni.

Tegyük fel ugyanis, hogy létezik ilyen függvénysorozat, és a φ_0 függvény a $(0, x_1)$ ($x_1 \in (0, 1)$) intervallumon a c_1 értéket veszi fel. Mivel a sorozat növekedő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n \geq c_1$ a $(0, x_1)$ intervallumon, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \geq c_1$ majdnem mindenütt és mivel $f < 0$ $(0, 1)$ -en, ezért $c_1 < 0$.

Ha $x \in (0, \frac{1}{c_1^2})$, akkor $-\frac{1}{\sqrt{x}} < c_1$, ami ellentmond annak, hogy $\varphi_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) majdnem mindenütt a $(0, x_1)$ intervallumon.

Ezzel beláttuk, hogy a (-1) -gyel való szorzás kivezet a C_1 függvényosztályból. A következő részben bevezetünk egy bővebb függvényosztályt, melyből ez a művelet már nem vezet ki.

2.4.9. Tétel. Az integrál intervallum szerinti additivitása. Az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor C_1 -beli, ha $a < c < b$ esetén $f|_{[a, c]}$, $f|_{[c, b]}$ is C_1 -beli és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Bizonyítás. A tétel állítása a definíció közvetlen következménye.

5. A C_2 függvényosztály

2.5.1. Definíció. A két C_1 -beli függvény különbségeként előálló függvények osztályát C_2 -vel fogjuk jelölni, azaz legyen

$$C_2 := \{f \mid f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \exists f_1, f_2 \in C_1, f = f_1 - f_2\},$$

ahol (a, b) véges, vagy nem véges intervallum.

2.5.2. Definíció. Integrál értelmezése C_2 -beli függvények esetén.

Legyen $f \in C_2$. Ekkor létezik $f_1, f_2 \in C_1$, hogy $f = f_1 - f_2$ (a, b) intervallumon. Ekkor⁴

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

2.5.3. Tétel. A fenti definíció jó, azaz

i) ha $f \in C_2$ és $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, ahol $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$, akkor

$$\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b g_1(x) dx - \int_a^b g_2(x) dx,$$

azaz az integrál nem függ f_1 és f_2 választásától;

ii) ha $f \in C_1$, akkor az integrál C_2 -beli definíciója alapján számolva ugyanazt kapjuk, mintha a C_1 -beli definíciót használnánk.

Bizonyítás.

i) Ha $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, akkor $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$. Mivel mind a négy függvény C_1 -beli és az összeadás nem vezet ki a C_1 függvényosztályból, ezért $f_1 + g_2$ és $g_1 + f_2$ is C_1 -beli, és

$$\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b g_2(x) dx = \int_a^b (f_1 + g_2)(x) dx = \int_a^b (g_1 + f_2)(x) dx = \int_a^b g_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx,$$

melyből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b g_1(x) dx - \int_a^b g_2(x) dx.$$

ii) Tegyük fel, hogy $f \in C_1$. Ekkor 1) miatt f_1 és f_2 tetszőlegesen választható. Például $f_1 = f$ és $f_2 \equiv 0$ egy jó választás, amely mellett

⁴A rövidebb írásmód kedvéért gyakran fogjuk használni a Riemann-integrálnál is megszokott $\int_a^b f$ jelölést.

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

triviálisan teljesül.

□

5.1. Műveleti tulajdonságok C_2 -ben

2.5.4. Tétel. Ha $f, g \in C_2$ függvények és $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, akkor

$$f + g, \lambda \cdot f, f \cup g, f \cap g, f^+, f^-, |f| \in C_2$$

és

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

illetve

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f, g \in C_2$. Ekkor létezik $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$, hogy $f = f_1 - f_2$ és $g = g_1 - g_2$.

$f + g$: Az $f + g = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ függvény C_2 -beli, mert $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$ és az összeadás nem vezet ki a C_1 függvényosztályból. A C_2 -beli integrál definíciója és a C_1 -beli integrál műveleti tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned} \int_a^b f + g &= \int_a^b f_1 - f_2 + g_1 - g_2 = \int_a^b (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) dx = \\ &= \int_a^b f_1 + g_1 - \int_a^b f_2 + g_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b g_1 - \int_a^b f_2 - \int_a^b g_2 = \\ &= \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 + \int_a^b g_1 - \int_a^b g_2 = \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

$\lambda \cdot f$: Az állítás igazolását két lépésben végezzük.

Tegyük fel, hogy $\lambda \geq 0$. Ekkor $\lambda f = \lambda f_1 - \lambda f_2$. Mivel a nemnegatív számmal való szorzás nem vezet ki a C_1 függvényosztályból, ezért λf_1 és λf_2 C_1 -beli függvények, így λf C_2 -beli. A C_2 -beli integrál definíciója és a C_1 -beli integrál műveleti tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f &= \int_a^b \lambda f_1 - \lambda f_2 = \int_a^b \lambda f_1 - \int_a^b \lambda f_2 = \\ &= \lambda \int_a^b f_1 - \lambda \int_a^b f_2 = \lambda \left(\int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 \right) = \lambda \int_a^b f. \end{aligned}$$

Ha $\lambda < 0$, akkor $|\lambda| = -\lambda$ és $|\lambda| > 0$, így a $\lambda f = \lambda f_1 - \lambda f_2 = -|\lambda| f_1 + |\lambda| f_2 = |\lambda| f_2 - |\lambda| f_1$ átalakítás alapján λf C_2 -beli, továbbá

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f &= \int_a^b \lambda |f_2(x) - f_1| = \int_a^b \lambda |f_2| - \int_a^b \lambda |f_1| = \\ &= \lambda \int_a^b f_2 - \lambda \int_a^b f_1 = -\lambda \int_a^b f_2 + \lambda \int_a^b f_2 = \lambda \int_a^b f.\end{aligned}$$

f^+ : Az f pozitív részére vonatkozó állítás igazolásához vegyük észre, hogy

$$f^+ = (f_1 - f_2)^+ = \begin{cases} f_1 - f_2, & \text{ha } f_1 - f_2 \geq 0, \\ 0, & \text{különben} \end{cases} = (f_1 \cup f_2) - f_2 \in C_2,$$

hiszen a C_1 -beli műveleti tulajdonságok miatt $f_1 \cup f_2, f_2 \in C_1$ teljesül és így f^+ felírható két C_1 -beli függvény különbségeként. (Megjegyezzük, hogy az $f^+ = f_1 - (f_1 \cap f_2)$ felírás is megfelelő lenne.)

f^- : Az f negatív részére vonatkozó állítás igazolásához vegyük észre, hogy

$$f^- = (f_1 - f_2)^- = \begin{cases} 0, & \text{ha } f_1 - f_2 \geq 0, \\ f_2 - f_1, & \text{különben} \end{cases} = (f_1 \cup f_2) - f_1 \in C_2,$$

hiszen a C_1 -beli műveleti tulajdonságok miatt $f_1 \cup f_2, f_1 \in C_1$ teljesül és így f^- felírható két C_1 -beli függvény különbségeként. (Megjegyezzük, hogy az $f^- = f_2 - (f_1 \cap f_2)$ felírás is megfelelő lenne.)

$f \cup g$: Az f és g függvények felső burkolójára vonatkozó állítás közvetlenül következik az alábbi észrevételből:

$$(f \cup g) = \begin{cases} f, & \text{ha } f \geq g, \\ g, & \text{különben} \end{cases} = (f - g)^+ + g.$$

Mivel a tétel korábban igazolt állításai alapján $f - g$ és így $(f - g)^+$ is C_2 -beli és mivel $g \in C_2$ is teljesül, továbbá az összeadás sem vezet ki a függvényosztályból, így $f \cup g \in C_2$ is igaz.

$f \cap g$: Az előzőhöz hasonló átírás alkalmazható ebben az esetben is, amelyből az állítás azonnal adódik:

$$(f \cap g) = \begin{cases} g, & \text{ha } f \geq g, \\ f, & \text{különben} \end{cases} = f - (f - g)^+ \in C_2.$$

$|f|$: Mivel f^+ és f^- is C_2 -beli függvények és az összeadás nem vezet ki a C_2 függvényosztályból, továbbá $|f| = f^+ + f^-$, ezért $|f| \in C_2$ is teljesül.

□

Az alábbi állítás teljes indukcióval igazolható, melynek elvégzését az olvasóra bízunk.

2.5.5. Következmény. Nyilvánvaló, hogy ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ és $f_1, f_2, \dots, f_n \in C_2$, akkor

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n \in C_2, \quad f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_n \in C_2, \quad f_1 \cap f_2 \cap \dots \cap f_n \in C_2,$$

azaz C_2 -beli függvények lineáris kombinációja, alsó és felső burkolója is C_2 -beli.

2.5.6. Tétel. Az integrál intervallum szerinti additivitása. Az $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor C_2 -beli, ha $a < c < b$ esetén $f|_{[a, c]}$, $f|_{[c, b]}$ is C_2 -beli és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bizonyítás. A tétel állítása a definíció közvetlen következménye.

□

2.5.7. Lemma. Ha $h \in C_2$ és $h \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor $\int_a^b h \geq 0$.

Bizonyítás. Mivel $h \in C_2$, ezért létezik $h_1, h_2 \in C_1$, hogy $h = h_1 - h_2 \geq 0$. Ekkor $h_1 \geq h_2$ és a C_1 -beli tulajdonságok alapján

$$\int_a^b h_1 \geq \int_a^b h_2,$$

ahonnan az állítás átrendezéssel kapható.

□

2.5.8. Tétel. A Lebesgue-integrál monoton a $\leq$ relációra nézve, azaz ha $f, g \in C_2$ és $f \leq g$, akkor

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Legyen $h = g - f \geq 0$. Ekkor a 2.5.7. lemma és a műveleti tulajdonságok alapján

$$\int_a^b h = \int_a^b g - f = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f.$$

□

Megjegyzés. A 2.5.7. lemma és a 2.5.8. tétel feltételeinél elegendő az is, ha a reláció majdnem minden $x \in (a, b)$ esetén teljesül.

2.5.9. Következmény. Legyen $f \in C_2$. Ekkor $|f| \in C_2$, és

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Bizonyítás. A 2.5.4. tétel alapján $|f| \in C_2$ teljesül. Az abszolút érték definíciója alapján nyilvánvaló, hogy

$$-|f| \leq f \leq |f|.$$

Felhasználva a 2.5.8. tételt kaphatjuk, hogy

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

az abszolút érték definíciójával összevetve a fenti relációt az állítás adódik.

□

Megjegyzés. A C_2 függvényosztályt ezentúl a Lebesgue-integrálható függvények osztályának is fogjuk nevezni. Az így kapott függvényosztály megegyezik a Lebesgue által definiált függvényosztállyal.

6. Beppo Levi Tétel.

Miután a lépcsősfüggvények C_0 osztályából kiindulva az integrál fogalmát kiterjesztettük a nála tágabb C_1 és C_2 függvényosztályokra, felmerül a kérdés, hogy ugyanennek az eljárásnak a megismétlésével ki lehet-e terjeszteni az integrál fogalmát egy bővebb halmazra. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy a B-lemmának megfelelő függvénysorozatot véve a C_2 függvényosztályból, a majdnem mindenütt való határátmenet nem vezet ki a Lebesgue-integrálható függvények osztályából, azaz az eljárás megismétlése nem vezet ki a C_2 osztályból.

Ennek a tételnek az igazolása Beppo Levi⁵ nevéhez fűződik. A tételnek megadjuk a függvénysorozatokra és sorokra való megfogalmazásait és bebizonyítjuk azt is, hogy a két tétel-kimondás egymással ekvivalens.

2.6.1. Tétel. (Beppo Levi tétel. függvénysorozatokra). Legyen $(f_n, n \in \mathbb{N})$ C_2 -beli (azaz (a, b) intervallumon integrálható) monoton növekedő függvénysorozat. Feltehető, – a B-Lemmához hasonló módon – hogy $f_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Továbbá tegyük fel, hogy az integrálok sorozata korlátos, azaz létezik egy $K > 0$ szám, melyre

$$\int_a^b f_n \leq K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor létezik f , az (a, b) intervallumon integrálható ($f \in C_2$) függvény, hogy $f_n \rightarrow f$ m.m. ($n \rightarrow \infty$) és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_a^b f.$$

2.6.2. Tétel. (Beppo Levi Tétel. függvénysorokra). Legyen $(g_n, n \in \mathbb{N})$ nemnegatív C_2 -beli (azaz (a, b) intervallumon integrálható) függvénysorozat. Ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n$$

numerikus sor konvergens, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n$$

függvénysor majdnem mindenütt konvergens és létezik egy g , az (a, b) intervallumon integrálható ($g \in C_2$) függvény, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n = g \quad \text{m.m.},$$

továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n = \int_a^b g.$$

Először belátjuk, hogy a két megfogalmazás egymással ekvivalens.

2.6.3. Tétel. A 2.6.1. tétel és a 2.6.2. tétel ekvivalens.

Bizonyítás. A 2.6.1 $\Rightarrow$ 2.6.2: Legyen $(g_n, n \in \mathbb{N})$ a 2.6.2. tételnek megfelelő függvénysorozat és

⁵Beppo Levi (1875–1961) olasz matematikus.

$$f_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f_n - f_{n-1} = g_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Mivel minden f_n függvény véges sok C_2 -beli függvény összege, ezért $f_n \in C_2$. Továbbá mivel véges sok tag esetén az integrálás tagonként elvégezhető, illetve nemnegatív tagú sor felső korlátja az összege, ezért

$$\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{k=0}^n g_k = \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b g_k < \infty.$$

Így a 2.6.1. tétel feltételei teljesülnek, ezért

$$\exists f \in C_2, \text{ hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ m.m. és } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Mivel

$$f_n = \sum_{k=0}^n g_k \text{ ezért } f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \text{ m.m.,}$$

továbbá mivel véges sok tag esetén az integrálás és az összeadás sorrendje felcserélhető, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

2.6.2 $\Rightarrow$ 2.6.1:

Legyen $(f_n, n \in \mathbb{N})$ a 2.6.1. tétel feltételeinek megfelelő függvénysorozat, és legyen

$$g_n := f_n - f_{n-1}, \text{ ha } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{és} \quad g_0 := f_0.$$

Ekkor

$$f_n = \sum_{k=0}^n g_k = f_n - f_{n-1} + f_{n-1} - f_{n-2} + \dots + f_2 - f_1 + f_1 - f_0 + f_0.$$

Az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat monotonitása és nemnegativitása miatt $g_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), továbbá $g_n \in C_2$ minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén, hiszen két C_2 -beli függvény különbségeként kapható. Ekkor, mivel

$$\int_a^b f_n \leq K \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és véges sok tag esetén az integrálás és az összeadás sorrendje felcserélhető, ezért

$$\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{k=0}^n g_k = \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k \leq K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Végrehajtva a $n \rightarrow \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b g_k \leq K,$$

amivel a 2.6.2. tétel minden feltétele teljesül, azaz

$$\exists g \in C_2, \text{ amelyre } \sum_{n=0}^{\infty} g_n = g \text{ m.m. és } \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n = \int_a^b g.$$

A végtelen sor összegének definícióját és az f_n függvények felírását felhasználva:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = g \quad m.m.,$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b g_k = \int_a^b g = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

amivel az állításunkat bebizonyítottuk.

□

A Beppo Levi tétel bizonyítása. A bizonyítást a 2.6.2. tétel esetére végezzük. Ehhez a következő két esetet érdemes külön vizsgálni:

1. eset: Tegyük fel, hogy $(g_n, n \in \mathbb{N})$ nemnegatív C_1 -beli függvénysorozat és

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b g_k \leq K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden n esetén létezik $(\varphi_{nk}, k \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő függvénysorozat, melyre $\varphi_{nk} \rightarrow g_n$ m.m., ha $k \rightarrow \infty$. Legyen

$$\Phi_k := \sum_{i=0}^k \varphi_{ik} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Nilvánvaló, hogy $\Phi_k \in C_0$.

A Φ_{k+1} -et előállító összeg minden tagjára igaz, hogy nem kisebb, mint a Φ_k -t előállító összeg megfelelő tagja és a tagok száma is eggyel nagyobb, ezért $\Phi_k \leq \Phi_{k+1}$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén.

Legyen most

$$G_k := \sum_{i=0}^k g_i \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy $\Phi_k \leq G_k$ (a, b) -n $(k \in \mathbb{N})$.

Mivel minden G_k függvény véges sok C_1 -beli függvény összegeként kapható, ezért $G_k \in C_1$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Kihasználva a C_1 -beli integrál monotonitását a $\leq$ relációra nézve kapjuk, hogy

$$\int_a^b \Phi_k \leq \int_a^b G_k = \int_a^b \sum_{i=0}^k g_i = \sum_{i=0}^k \int_a^b g_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b g_i < \infty.$$

Tehát a $(\Phi_k, k \in \mathbb{N})$ függvénysorozat kielégíti a B-Lemma feltételeit. Így a B-Lemma alapján

$$\exists G \in C_1 \text{ hogy } \Phi_k \rightarrow G \text{ m.m. } (k \rightarrow \infty)$$

és

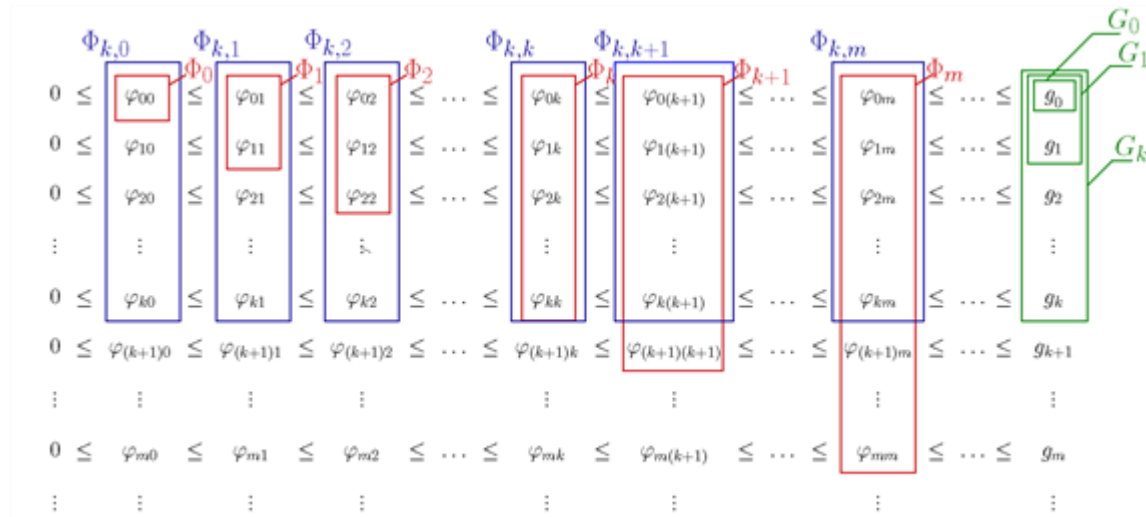
$$\int_a^b \Phi_k \rightarrow \int_a^b G \quad (k \rightarrow \infty).$$

Azt szeretnénk belátni, hogy a $(G_k, k \in \mathbb{N})$ függvénysorozat határfüggvénye majdnem mindenütt G . Legyen

$$\Phi_{k,n} := \sum_{i=0}^k \varphi_{in} \quad (k, n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $\Phi_{k,n} \leq G_k$ minden k és minden n esetén, hiszen mindegyik függvény ugyanannyi tagú összegként áll elő és a megfelelő tagok között fennáll a reláció.

2.4. ábra - A $(\Phi_k, k \in \mathbb{N})$, a $(G_k, k \in \mathbb{N})$ és a $(\Phi_m, m \in \mathbb{N})$ függvénysorozatok



A 2.4. ábrán szemléltetjük a $(\Phi_k, k \in \mathbb{N})$, a $(G_k, k \in \mathbb{N})$ és a $(\Phi_m, m \in \mathbb{N})$ függvénysorozat néhány tagját.

Mivel

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_{k,m} = G_k \quad m.m. \quad \text{és} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m = G \quad m.m.$$

és a határérték képzés monoton a $\leq$ relációra nézve, ezért $\Phi_{k,m} \leq \Phi_m, (m \geq k)$ egyenlőtlenségből $m \rightarrow \infty$ határátmenettel

$$G_k \leq G \quad m.m. \quad (k \in \mathbb{N})$$

adódik.

Az eddigi megállapításokat összefoglalva kapjuk, hogy

$$\Phi_k(x) \leq G_k(x) \leq G(x)$$

minden $k \in \mathbb{N}$ és majdnem minden $x \in (a, b)$ esetén. Mivel $\Phi_k \rightarrow G \quad m.m. \quad (k \rightarrow \infty)$ és $G \rightarrow G \quad (k \rightarrow \infty)$, ezért a rendőr-elv alapján

$$G_k \rightarrow G \quad m.m. \quad (k \rightarrow \infty).$$

Másrészt, kiindulva a $\Phi_k \leq G_k \leq G \quad m.m. \quad (k \in \mathbb{N})$ egyenlőtlenségből, és kihasználva, hogy G_1 -ben az integrál monoton a $\leq$ relációra nézve kapjuk, hogy

$$\int_a^b \Phi_k \leq \int_a^b G_k \leq \int_a^b G \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A $k \rightarrow \infty$ határátmenet és a rendőr-elv alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int_a^b G_k \rightarrow \int_a^b G \quad (k \rightarrow \infty).$$

Ezzel az 1. eset vizsgálatát befejeztük. A 2.6.3. tétel bizonyításának folytatása előtt további segédtetelek kimondására és bizonyítására van szükség.

2.6.4. Lemma. Legyen $h \in C_1$ és $\varphi \in C_0$, ekkor $h - \varphi \in C_1$.

A 2.6.4. lemma bizonyítása. Mivel $h \in C_1$, ezért létezik $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő függvénysorozat, amelyre $\varphi_n \rightarrow h$ m.m. $(n \rightarrow \infty)$, és

$$\int_a^b \varphi_n \leq K \quad (n \in \mathbb{N})$$

valamely $K \in \mathbb{R}$ számra. A $h - \varphi$ függvény akkor lesz C_1 -beli, ha található B-Lemma-beli függvénysorozat, amely $h - \varphi$ -hez tart majdnem mindenütt.

A $(\varphi_n - \varphi, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat nyilván monoton növekedő, C_0 -beli és határértéke $h - \varphi$ majdnem mindenütt.

Igaz továbbá, hogy $\left(\int_a^b \varphi_n - \varphi, n \in \mathbb{N} \right)$ korlátos számsorozat, mert

$$\int_a^b \varphi_n - \varphi = \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \leq K - M \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tehát $(\varphi_n - \varphi, n \in \mathbb{N})$ valóban B-Lemma-beli függvénysorozat, mely $h - \varphi$ -hez tart majdnem mindenütt, ezért $h - \varphi \in C_1$ teljesül.

2.6.5. Lemma. Legyen $h \in C_2$, $h \geq 0$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

i) létezik $h_1, h_2 \in C_1$, hogy $h = h_1 - h_2$,

ii) $h_1, h_2 \geq 0$,

iii) $\int_a^b h_2 < \varepsilon$.

A 2.6.5. lemma bizonyítása. Mivel $h \in C_2$, ezért létezik $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in C_1$, hogy $h = \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2$. Ekkor az integrál C_2 -beli definíciója alapján

$$\int_a^b h = \int_a^b \tilde{h}_1 - \int_a^b \tilde{h}_2.$$

Mivel $\tilde{h}_2 \in C_1$, ezért létezik $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli függvénysorozat, amely monoton növekedő és majdnem mindenütt tart $\tilde{h}_2$ -höz és

$$\int_a^b \varphi_n \rightarrow \int_a^b \tilde{h}_2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mivel $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekedő, ezért $\varphi_n \leq \tilde{h}_2$, $(n \in \mathbb{N})$, melyből $\int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b \tilde{h}_2$ $(n \in \mathbb{N})$, és a sorozatokra vonatkozó konvergencia definíciót felírva kapjuk, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ ha } n > N, \text{ akkor } \left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \tilde{h}_2 \right| = \int_a^b \tilde{h}_2 - \int_a^b \varphi_n < \varepsilon. \quad (2.6.1)$$

Legyen $n_0 > N$ rögzített index, és

$$h_2 := \tilde{h}_2 - \varphi_{n_0} \quad \text{és} \quad h_1 := \tilde{h}_1 - \varphi_{n_0}.$$

Megmutatjuk, hogy h_1 és h_2 teljesítik az i), ii), iii) feltételeket.

i) A 2.6.4. lemma alapján $h_1, h_2 \in C_1$, továbbá

$$h = h_1 - h_2 = (\tilde{h}_1 - \varphi_{n_0}) - (\tilde{h}_2 - \varphi_{n_0}) = \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2.$$

ii) Mivel $\varphi_{n_0} \leq \tilde{h}_2$ és $h_2 = \tilde{h}_2 - \varphi_{n_0}$, ezért $h_2 \geq 0$, továbbá mivel $h_1 = h + h_2$ és $h, h_2 \geq 0$, ezért $h_1 \geq 0$ is teljesül.

$$\text{iii) (2.6.1) alapján } \int_a^b \tilde{h}_2 = \int_a^b \tilde{h}_2 - \int_a^b \varphi_{n_0} = \int_a^b \tilde{h}_2 - \int_a^b \varphi_{n_0} < \varepsilon.$$

□

2. eset. Legyen $(g_n, n \in \mathbb{N})$ a tétel feltételeinek megfelelő C_2 -beli függvénysorozat, továbbá legyen $\varepsilon := \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

A 2.6.5. lemma alapján léteznek $g_{n,1}, g_{n,2} \in C_1$ függvények, hogy $g_{n,1}, g_{n,2} \geq 0$, $g_n = g_{n,1} - g_{n,2}$ és

$$\int_a^b g_{n,2} < \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor a majoráns kritérium értelmében $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,2}$ konvergens, hiszen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Mivel $g_{n,1} = g_n + g_{n,2}$, ezért a végtelen sorokra vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n + g_{n,2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_n + \int_a^b g_{n,2} \right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n}_{< \infty} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,2}}_{< 2} < \infty.$$

A $(g_{n,1}, n \in \mathbb{N})$ és $(g_{n,2}, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatok C_1 -beliek, és a tétel feltételeit teljesítik, tehát az 1. eset alapján léteznek $g_1, g_2 \in C_1$ függvények, melyekre

$$g_1 = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,1} \quad m.m. \quad \text{és} \quad g_2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,2} \quad m.m.,$$

továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,1} = \int_a^b g_1 \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,2} = \int_a^b g_2. \quad (2.6.2)$$

A végtelen sorokra vonatkozó műveleti szabályok alapján

$$g := g_1 - g_2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,1} - \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,2} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_{n,1} - g_{n,2}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \quad m.m.$$

Mivel $g_1, g_2 \in C_1$, ezért $g \in C_2$ és (2.6.2) illetve a műveleti tulajdonságok alapján

$$\begin{aligned} \int_a^b g &= \int_a^b g_1 - g_2 = \int_a^b g_1 - \int_a^b g_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,1} - \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_{n,2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_{n,1} - \int_a^b g_{n,2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_{n,1} - g_{n,2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n. \end{aligned}$$

□

Az alábbiakban felsorolunk néhány következményét a Beppo Levi tételének.

2.6.6. Következmény.

a) Legyen $(f_n, n \in \mathbb{N})$ az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvényekből (C_2-beli) álló monoton sorozat, mely majdnem mindenütt az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható f függvényhez tart. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

b) Legyen $(g_n, n \in \mathbb{N})$ az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható, nemnegatív függvényekből álló függvényt sorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n = g \quad m.m.,$$

ahol g szintén az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvény. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n = \int_a^b g.$$

c) Legyen $(g_n, n \in \mathbb{N})$ az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvényekből álló függvényt sorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |g_n| < \infty.$$

Ekkor létezik g , az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvény, hogy

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \quad m.m.$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n = \int_a^b g.$$

d) Legyen f nemnegatív, az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvény. Ekkor az

$$\int_a^b f = 0$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$f(x) = 0 \quad m.m. \ x \in (a, b).$$

Bizonyítás. a) Ha $(f_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekedő függvénysorozat, akkor $\int_a^b f$ az integráljainak jó felső korlátja, tehát a Beppo Levi tétel függvénysorozatokra való megfogalmazásának feltételei teljesülnek.

Ha $(f_n, n \in \mathbb{N})$ monoton csökkenő, akkor $(-f_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekedő szintén integrálható függvényekből álló, $-f$ -hez majdnem mindenütt konvergáló függvénysorozat, tehát az előző eset alapján

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b -f_n = \int_a^b -f = -\int_a^b f.$$

b) Mivel $g_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért a $(\sum_{k=0}^n \int_a^b g_k, n \in \mathbb{N})$ számsorozat monoton nő és a $K := \int_a^b g$ szám egy jó felső korlátja, tehát a Beppo Levi tétel sorokra való megfogalmazásának feltételei teljesülnek.

c) Tekintsük a $(g_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat pozitív és negatív részét. Mivel

$$g_n = g_n^+ - g_n^-, \quad |g_n| = g_n^+ + g_n^-, \quad g_n^+ \leq |g_n|, \quad g_n^- \leq |g_n| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá g_n^+, g_n^- is Lebesgue-integrálható (a, b) -n, ezért a $(g_n^+, n \in \mathbb{N})$ és $(g_n^-, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatok teljesítik a Beppo Levi tétel sorokra való megfogalmazásának feltételeit.

A Beppo Levi tétel értelmében léteznek g^+ és g^- Lebesgue-integrálható függvények, melyekre

$$g^+ = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^+ \quad m.m. \quad \text{és} \quad g^- = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^- \quad m.m.,$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n^+ = \int_a^b g^+ \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n^- = \int_a^b g^-.$$

A $g := g^+ - g^-$ függvény az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható, továbbá a végtelen sorokra vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \quad m.m. \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n = \int_a^b g.$$

d) A Beppo Levi tétel sorokra való megfogalmazását használjuk. Legyen $g_n = f$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $g_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén teljesül és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f = 0.$$

A Beppo Levi tétel értelmében a

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n$$

függvénysor majdnem mindenütt konvergens. A végtelen sorok konvergenciájának szükséges feltétele miatt $f = g_n \rightarrow 0$ m.m. ($n \rightarrow \infty$).

□

7. Lebesgue Tétele

A Beppo Levi tétel és következménye monoton függvénysorozat tagonkénti integrálhatóságára vonatkozik. Kérdés, hogy lehet-e tagonként integrálni tetszőleges, majdnem mindenütt konvergens függvénysorozat esetén?

Tekintsük a következő három példát! A példák során kihasználjuk, hogy ha egy függvény Riemann-integrálható az (a, b) intervallumon, akkor Lebesgue-integrálható is és a kétféle integrál értéke megegyezik. A Riemann-integrál és a Lebesgue-integrál kapcsolatával a későbbiekben részletesen is foglalkozunk.

a) Legyen $(f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N})$ ($x \in (0, 1)$).

Ekkor $f_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) minden $x \in (0, 1)$, továbbá

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

b) Legyen $(f_n(x) = n \cdot x^n, n \in \mathbb{N})$ ($x \in (0, 1)$).

Ekkor $f_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) minden $x \in (0, 1)$, továbbá

$$\int_0^1 n \cdot x^n dx = \left[\frac{n \cdot x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

c) Legyen $(f_n(x) = n^2 \cdot x^n, n \in \mathbb{N})$ ($x \in (0, 1)$).

Ekkor $f_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) minden $x \in (0, 1)$, továbbá

$$\int_0^1 n^2 \cdot x^n dx = \left[\frac{n^2 \cdot x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n^2}{n+1} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

A fenti három példa mutatja, hogy általában az integrál és a határérték képzés nem cserélhető fel, hiszen mindhárom esetben a határfüggvény integrálja 0. Ebben a fejezetben arra a kérdésre kapunk választ, hogy milyen kikötések mellett lehet az integrálás és a határátmenet sorrendjét felcserélni.

2.7.1. Tétel. (Lebesgue Tétele). Legyen (a, b) tetszőleges véges vagy végtelen intervallum, $(f_n, n \in \mathbb{N})$ az (a, b) intervallumon integrálható függvénysorozat, mely majdnem mindenütt az f függvényhez tart. Ha létezik g , az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvény, melyre

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor f is Lebesgue-integrálható (a, b) -n és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

$\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$ Tegyük fel, hogy az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat teljesíti a tétel feltételeit, és jelölje $\mathcal{G}_n$ a *végtelen sok függvény felső burkolóját*, amelyet az alábbi módon értelmezünk:

$$\mathcal{G}_n(x) := (f_n \cup f_{n+1} \cup \dots)(x) := \sup\{f_k(x), k \geq n\} \quad (x \in (a, b)). \quad (2.7.1)$$

Hasonlóan bevezethetjük *végtelen sok függvény alsó burkolóját*:

$$h_n(x) := (f_n \cap f_{n+1} \cap \dots)(x) := \inf\{f_k(x), k \geq n\} \quad (x \in (a, b)). \quad (2.7.2)$$

Belátjuk, hogy a tétel feltételei mellett a (2.7.2) és a (2.7.1) függvények integrálhatóak. (Az állítást a $\mathcal{G}_n$ függvények esetére igazoljuk, a h_n -re vonatkozó állítás bizonyítását az olvasóra bízuk.) Vezessük be a

$$\mathcal{G}_{n,k} := f_n \cup f_{n+1} \cup \dots \cup f_{n+k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

függvényeket. A $\mathcal{G}_{n,k}$ függvények minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén integrálhatóak, hiszen véges sok függvény felsőburkolójáról van szó, továbbá

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{n,k} = \mathcal{G}_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\mathcal{G}_{n,k}$ függvények értelmezéséből következik, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ rögzített indexre

$$\mathcal{G}_{n,k} \leq \mathcal{G}_{n,k+1} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

azaz $(\mathcal{G}_{n,k}, k \in \mathbb{N})$ monoton növekvő függvénysorozat. Kihasználva, hogy $|f_n| \leq g$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az (a, b) intervallumon, a felső határ értelmezése alapján kapjuk, hogy

$$f_n \leq |f_n| \leq g \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{G}_{n,k} \leq g \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$$

teljesül az (a, b) intervallumon. Mivel az integrál monoton a $\leq$ relációra nézve, ezért

$$\int_a^b \mathcal{G}_{n,k} \leq \int_a^b g \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}).$$

Mivel $(\mathcal{G}_{n,k}, k \in \mathbb{N})$ monoton növekvő függvénysorozat, melynek integráljai korlátosak, ezért alkalmazható a (2.6.2) Beppo Levi tétel. Ez alapján $\mathcal{G}_n$ integrálható és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \mathcal{G}_{n,k} = \int_a^b \mathcal{G}_n.$$

Belátjuk, hogy az integrálható $(h_n, n \in \mathbb{N})$ és $(\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatok majdnem mindenütt konvergensek és a határfüggvényük f . Tudjuk, hogy majdnem minden $x \in (a, b)$ -re $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ($k \rightarrow \infty$), azaz majdnem minden $x \in (a, b)$ esetén

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \text{ ha } k > N \text{ akkor } |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$\text{azaz } f(x) - \varepsilon < f_k(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Legyen $x \in (a, b)$ rögzített, amelyre $(f_k(x), k \in \mathbb{N})$ konvergens és legyen $n > N$ rögzített index. Ekkor

$$f(x) - \varepsilon \leq \inf\{f_k(x), k \geq n\} = h_n(x) \leq f_n(x) \leq \mathcal{G}_n(x) = \sup\{f_k(x), k \geq n\} \leq f(x) + \varepsilon \quad n > N,$$

mivel az infimum- illetve szuprémum-képzésben résztvevő összes függvényre igaz az egyenlőtlenség. Azaz

$$|h_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{és} \quad |g_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > N,$$

ami definíció szerint azt jelenti, hogy

$$h_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{és} \quad g_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

minden olyan x pontban, ahol f is konvergál, azaz

$$h_n \rightarrow f \quad m.m. \quad \text{és} \quad g_n \rightarrow f \quad m.m. \quad (n \rightarrow \infty).$$

Az alsó és felső burkoló értelmezéséből következik, hogy a $(h_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekvő és $(g_n, n \in \mathbb{N})$ monoton csökkenő függvénysorozat.

Másrészt, mivel $|h_n| \leq g$ és $|g_n| \leq g$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre (a, b) -n, ezért

$$-g \leq h_n \leq g, \quad -g \leq g_n \leq g$$

az (a, b) intervallumon, így az integrál monotonitását kihasználva kapjuk, hogy

$$-K := \int_a^b -g \leq \int_a^b h_n \leq \int_a^b g_n \leq \int_a^b g = K.$$

Tehát $(h_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekvő függvénysorozat majdnem mindenütt tart f -hez és tagjainak integráljai korlátosak, azaz h_n -re alkalmazható a (2.6.1.) Beppo Levi tétel, azaz f integrálható és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \int_a^b f.$$

Mivel $(g_n, n \in \mathbb{N})$ monoton csökkenő, ezért $(-g_n, n \in \mathbb{N})$ monoton növekvő függvénysorozat és

$$-K \leq \int_a^b g_n \Rightarrow \int_a^b -g_n \leq K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $(-g_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat monoton nő, majdnem mindenütt tart $-f$ -hez, integráljai korlátosak, ezért alkalmazható rá a (2.6.1.) Beppo Levi tétel, mely alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b -g_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} -g_n = \int_a^b -f.$$

Az integrál műveleti tulajdonságai alapján

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n = -\int_a^b f \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n = \int_a^b f.$$

Mivel $h_n \leq f_n \leq g_n$ az (a, b) intervallumon és az integrál monoton a $\leq$ relációra nézve, ezért

$$\int_a^b h_n \leq \int_a^b f_n \leq \int_a^b g_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A rendőrelv alapján az $n \rightarrow \infty$ határátmenet elvégezve kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n = \int_a^b f,$$

melyből már az állítás adódik.

□

2.7.2 Megjegyzés.

1. Ha a tételben szereplő (a, b) intervallum véges, akkor mivel a konstans függvény integrálható, ezért elegendő, hogy az f_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények abszolút értékben egy közös korlát alatt maradjanak.

2. Ha az f határfüggvény rendelkezik csak integrálható majoránssal, akkor is integrálható az f függvény, de ebben az esetben nem tudunk semmit sem mondani a tagonkénti integrálhatóságról (lásd 2.10.1. feladat).

A következő fontos tétel P. Fatou-nak⁶ a trigonometrikus sorokról szóló nevezetes dolgozatában (1906), mint segédétel szerepel, ezért Fatou-féle „lemma” néven szokták emlegetni.

2.7.3. Lemma (Fatou-féle lemma). *Legyen $(f_n, n \in \mathbb{N})$ a véges vagy végtelen (a, b) intervallumon értelmezett, nemnegatív integrálható függvényekből álló sorozat, továbbá a sorozat majdnem mindenütt tartson az f függvényhez, és tegyük fel, hogy létezik $K > 0$ szám, melyre*

$$\int_a^b f_n \leq K$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor f is integrálható az (a, b) intervallumon és

$$\int_a^b f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \leq K.$$

Bizonyítás. Lebesgue tételének bizonyításának egyik felét ismételjük meg. Mivel az f_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények nemnegatívok, ezért a Beppo Levi tétel alapján a (2.7.2)-ben definiált alsó burkolók is integrálhatók, határértékük majdnem mindenütt f . Minthogy

$$h_n \leq f_{n+k}, \quad \text{és így} \quad \int_a^b h_n \leq \int_a^b f_{n+k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ezért ha $k \rightarrow \infty$, akkor

$$\int_a^b h_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n+k} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k.$$

A Beppo Levi tétel szerint az alsó burkolók határértéke, f is integrálható, és

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k,$$

amivel állításunkat bebizonyítottuk.

□

8. A Riemann-integrál beépítése a Lebesgue-integrál elméletébe

A Lebesgue-integrál felépítésében a lépcsősfüggvények egyszerű, elemi geometriai értelmezését vettük alapul és nem hivatkoztunk a Riemann⁷-féle elméletre.

⁶Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) francia matematikus és csillagász.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a $\mathcal{C}_1$ -es (a, b) intervallumon értelmezett Riemann-integrálható függvények Lebesgue-integrálhatóak, sőt még a $\mathcal{C}_1$ függvényosztályba is beletartoznak és a kétféle integráljuk egyenlő.

A 2.3.1 definícióban már definiáltuk a felosztás fogalmát. Most a felosztásokkal kapcsolatban vezetünk be néhány új elnevezést.

2.8.1. Definíció. Legyen $\tau \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum egy felosztása. A

$$\|\tau\| = \max\{(x_i - x_{i-1}), i = 1, \dots, n\}$$

számot a τ felosztás finomságának nevezzük.

2.8.2. Definíció. Legyen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ az $[a, b]$ zárt intervallum két felosztása. Akkor mondjuk, hogy a τ_2 felosztás a τ_1 felosztás finomítása, ha annak minden osztópontját tartalmazza, azaz, ha $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha a τ_2 felosztás a τ_1 felosztás finomítása, akkor $\|\tau_2\| \leq \|\tau_1\|$.

A Riemann-integrál Darboux⁸-féle felépítését ismételjük át. Ehhez a Darboux-féle alsó és felső közelítő összegek fogalmát kell bevezetnünk.

2.8.3. Definíció. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\tau \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, amelyre $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Jelölje

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.8.1)$$

$$M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.8.2)$$

Ekkor az

$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget *Darboux-féle alsó közelítő összegnek*, a

$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget *Darboux-féle felső közelítő összegnek* nevezzük.

A Darboux-féle alsó és felső összegek fontos tulajdonságát tartalmazza a

2.8.4. Tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

i) Legyen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ két felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. Ha $\tau_1 \subseteq \tau_2$, akkor

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2) \quad \text{és} \quad S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2).$$

ii) Legyen $\tau', \tau'' \in \mathcal{F}_{[a,b]}$ két tetszőleges felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, ekkor

$$s(f, \tau') \leq S(f, \tau'').$$

Bizonyítás. Az alsó és felső közelítő összegek definíciója alapján mindkét állítás egyszerűen igazolható.⁹

⁸Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) német matematikus.

⁹Jean Gaston Darboux (1842-1917) francia matematikus.

□

A 2.8.4. tételből következik, hogy $\{s(f, \tau), \tau \in \mathcal{F}_{[a,b]}\}$ és $\{S(f, \tau), \tau \in \mathcal{F}_{[a,b]}\}$ halmazok korlátosak.

2.8.5. Definíció. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$I_* f := \sup\{s(f, \tau), \tau \in \mathcal{F}_{[a,b]}\}$$

értéket az f függvény Darboux-féle alsó integráljának, az

$$I^* f := \inf\{S(f, \tau), \tau \in \mathcal{F}_{[a,b]}\}$$

értéket az f függvény Darboux-féle felső integráljának nevezzük. Azt mondjuk, hogy az f függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha $I_* f = I^* f = If$. Az If értéket az f függvény Riemann-integráljának nevezzük.

Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. *Belátjuk, hogy f Lebesgue-integrálható.* Tekintsünk $(\tau_n, n \in \mathbb{N}^*)$ egy felosztás-sorozatot, melynek elemeire $\tau_n \subseteq \tau_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tau_n\| = 0$ és $\tau_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Rendeljünk minden τ_n felbontáshoz két lépcsősfüggvényt:

$$\varphi_n(x) := m_i \quad \text{ha } x \in [x_{i-1}, x_i), \quad \text{és} \quad \Phi_n(x) := M_i \quad \text{ha } x \in [x_{i-1}, x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ahol m_i illetve M_i a (2.8.1)-ben illetve (2.8.2)-ben definiált értékek.

Az értelmezésből következik, hogy $(\varphi_n, n \in \mathbb{N}^*)$ és $(\Phi_n, n \in \mathbb{N}^*)$ C_0 -beli monoton függvénysorozatok:

$$\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad \text{és} \quad \Phi_n \geq \Phi_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Mivel

$$s(f, \tau_n) = \int_a^b \varphi_n \quad \text{és} \quad S(f, \tau_n) = \int_a^b \Phi_n,$$

és f korlátos függvény, ezért

$$k := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{és} \quad K := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

valós számokkal a

$$k(b-a) \leq \int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b \Phi_n \leq K(b-a) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

egyenlőtlenség teljesül.

Ezzel beláttuk, hogy $(\varphi_n, n \in \mathbb{N}^*)$ és $(\Phi_n, n \in \mathbb{N}^*)$ függvénysorozatok teljesítik a B-Lemma feltételeit, így a függvénysorozatok majdnem mindenütt konvergálnak. A határfüggvények pedig C_1 -beliek.

^aA ⁱⁱ⁾ bizonyításánál az ⁱ⁾ állítást a τ' , $\tau' \cup \tau''$, illetve a τ'' , $\tau' \cup \tau''$ halmazokra alkalmazzuk.

($n \rightarrow \infty$), hogy $\exists f, x_0 \in (a, b)$ egyik függvénynek sem osztópontja, akkor $\varphi_n(x_0) \rightarrow \underline{f}(x_0)$, $\Phi_n(x_0) \rightarrow \overline{f}(x_0)$, azaz az $\underline{f}$ függvény alsó, illetve felső határértékéhez konvergálnak.¹⁰

A τ_n felosztáshoz tartozó intervallumok közül legyen $\mathcal{I}_n$ az, amelyik az x_0 pontot tartalmazza, továbbá x_0 -nak az intervallum végeitől vett nagyobb távolságát jelöljük δ_n -nel, a kisebbiket pedig δ_n^* -vel ($0 < \delta_n^* \leq \delta_n$). Ekkor az alsó és felső határérték definíciójában szereplő jelöléseket használva kapjuk, hogy

$$m_{\delta_n}(x_0) \geq \varphi_n(x_0) \geq m_{\delta_n^*}(x_0), \quad M_{\delta_n}(x_0) \leq \Phi_n(x_0) \leq M_{\delta_n^*}(x_0).$$

Mivel $\|\tau_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), ezért $\delta_n \rightarrow 0$ és $\delta_n^* \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), és a rendőr-elv alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} m_\delta(x_0) = \underline{f}(x_0) \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} M_\delta(x_0) = \overline{f}(x_0).$$

Azon pontok halmaza az $[a, b]$ intervallumban, amelyek osztópontként szerepelnek valamelyik felosztásban, megszámlálható számosságú, ezért nullamértékű ezért

$$\varphi_n \rightarrow \underline{f} \quad m.m. (n \rightarrow \infty) \quad \text{és} \quad \Phi_n \rightarrow \overline{f} \quad m.m. (n \rightarrow \infty).$$

Így a B-Lemma alapján $\underline{f} \in C_1$ és $-\overline{f} \in C_1$ ($\overline{f} \in C_2$) teljesül, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n = \int_a^b \underline{f} \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi_n = \int_a^b \overline{f}. \quad (2.8.3)$$

Másrészt bármely τ felosztásra a τ -hoz rendelt φ és Φ függvényekre legfeljebb az osztópontokon kívül a

$$\varphi \leq \underline{f} \leq \overline{f} \leq \Phi$$

egyenlőtlenség teljesül, és így az integrál monotonitását felhasználva

$$s(f, \tau) = \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \underline{f}(x) dx \leq \int_a^b \overline{f}(x) dx \leq \int_a^b \Phi(x) dx = S(f, \tau).$$

A Darboux-féle alsó- illetve felső integrál definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$I_* f \leq \int_a^b \underline{f}(x) dx \leq \int_a^b \overline{f}(x) dx \leq I^* f.$$

Ha f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható, akkor $I_* f = I^* f$ és így szükségszerűen

¹⁰Függvény alsó és felső határértéke: Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény és $x_0 \in (a, b)$. Minden $\delta > 0$ szám esetén legyen $m_\delta(x_0) = \inf\{f(x) \mid x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$ és $M_\delta(x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$. Ha $0 < \delta_1 < \delta_2$, akkor $m_{\delta_1}(x_0) \geq m_{\delta_2}(x_0)$ és $M_{\delta_1}(x_0) \leq M_{\delta_2}(x_0)$, ezért a véges vagy végtelen $\lim_{\delta \rightarrow 0+} m_\delta(x_0)$ és $\lim_{\delta \rightarrow 0+} M_\delta(x_0)$ határértékek mindig léteznek. **Definíció 61** $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény és $x_0 \in (a, b)$. Az $\underline{f}(x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} m_\delta(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} (\inf\{f(x) \mid x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\})$ határértéket az f függvény x_0 helyen vett alsó határértékének, az $\overline{f}(x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} M_\delta(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} (\sup\{f(x) \mid x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\})$ határértéket az f függvény x_0 helyen vett felső határértékének nevezzük. Belátható, hogy minden $x_0 \in (a, b)$ és bármilyen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ x_0 -hoz konvergáló (a, b) -beli pontsorozat esetén $\underline{f}(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \overline{f}(x_0)$, továbbá, hogy $\underline{f}(x_0) \leq f(x_0) \leq \overline{f}(x_0)$, és f pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha $\underline{f}(x_0) = f(x_0) = \overline{f}(x_0)$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \bar{f}(x) dx \stackrel{\mathcal{F}_2 f}{\Leftrightarrow} \underline{f} = \bar{f} \text{ m.m.},$$

azaz f majdnem mindenütt folytonos. Ekkor $f = \underline{f} = \bar{f}$ m.m., tehát azt is beláttuk, hogy f Lebesgue-integrálható (sőt, C_1 -beli) és Lebesgue-integrálja megegyezik a Riemann-integráljával.

Másrészt ha f majdnem mindenütt folytonos, akkor $\underline{f} = \bar{f}$ m.m. és $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \bar{f}(x) dx$, és mivel

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = s(f, \tau_n) \leq I_* f \leq I^* f \leq S(f, \tau_n) = \int_a^b \Phi_n(x) dx,$$

e ezért a határérték monotonitására vonatkozó tétel alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \leq I_* f \leq I^* f \leq \int_a^b \bar{f}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi_n(x) dx,$$

tehát, ha $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \bar{f}(x) dx$, akkor $I_* f = I^* f$, azaz f Riemann-integrálható az $[a, b]$ -n.

Ezzel beláttuk a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériumát is:

2.8.7. Következmény. Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha

$$f = \underline{f} = \bar{f} \text{ m.m.},$$

azaz, ha f majdnem mindenütt folytonos.

Megjegyzés. Az $[a, b]$ korlátos intervallumon Lebesgue-integrálható függvények halmaza bővebb az $[a, b]$ -n Riemann-integrálható függvények halmazánál, hiszen például a Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható semmilyen $[a, b]$ intervallumon, de bármelyiken Lebesgue-integrálható, hiszen majdnem mindenütt egyenlő nullával.

A 2.6.1. Beppo Levi tétel és a 2.7.1. Lebesgue-tételének és feltételeit kiegészítve az alábbi, Riemann-integrálható függvényekre érvényes állításokat kapjuk:

a) Tegyük fel, hogy $(f_n, n \in \mathbb{N})$ az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható, monoton növekedő függvényt sorozat, mely majdnem mindenütt az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez konvergál. Ha létezik egy $K > 0$ szám, melyre

$$\int_a^b f_n(x) dx \leq K \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és ha f az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható¹¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_a^b f.$$

¹¹Ha nem tennénk fel Riemann-integrálhatóságot, akkor csak a Lebesgue-integrálhatóságot tudnánk garantálni.

b) Tegyük fel, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat, mely majdnem mindenütt az $|f_n| \leq g$ függvényekhez konvergál. Ha létezik egy Riemann-integrálható függvény, melyre minden indexre, akkor ha Riemann-integrálható¹², akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_a^b f.$$

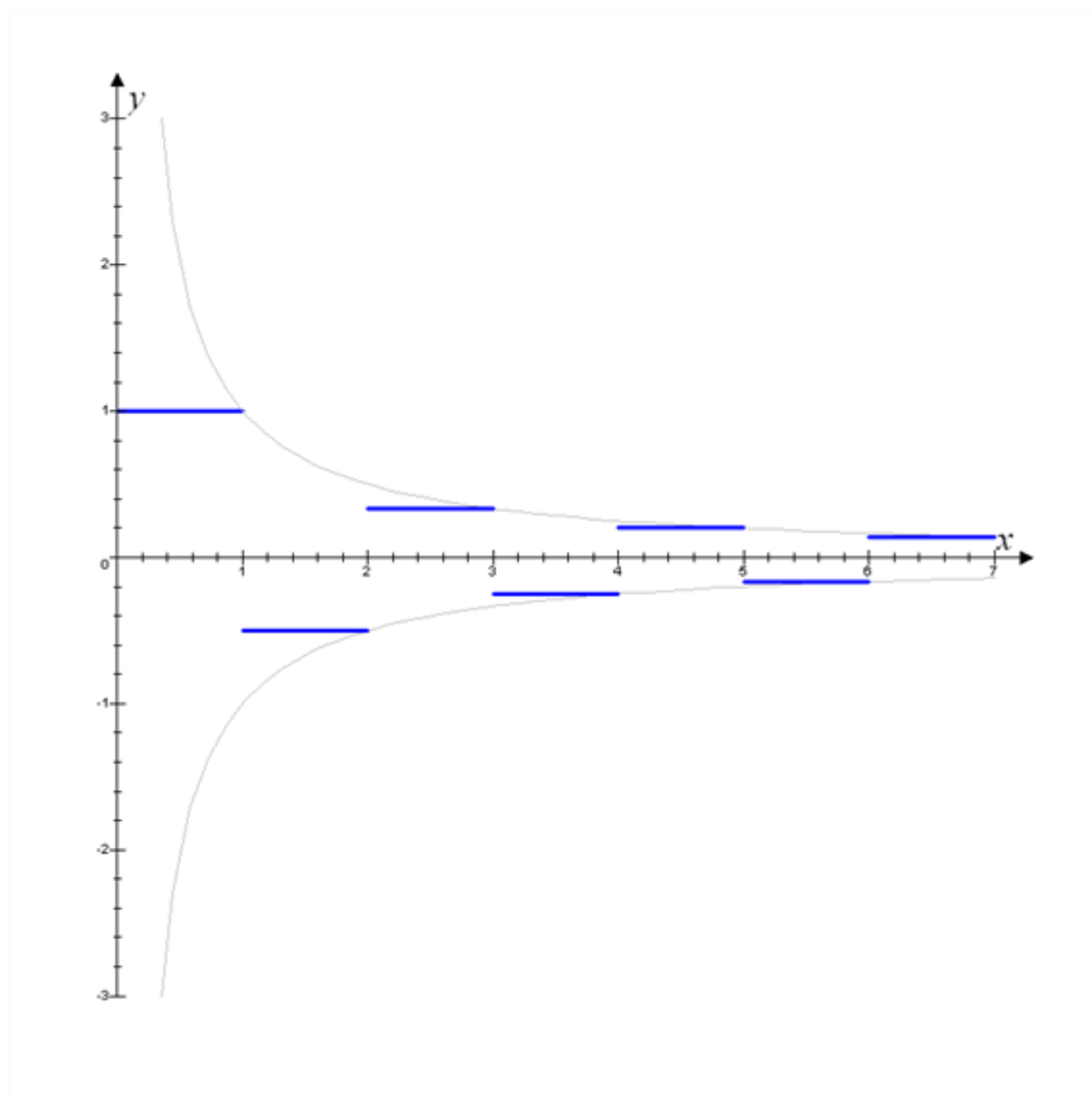
Felmerül a kérdés, hogy az impropriusan Riemann-integrálható függvények milyen kapcsolatban állnak a Lebesgue-integrálható függvényekkel. Nézzünk egy példát.

Legyen $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, melyre

$$f(x) := (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1} \quad \text{ha } x \in [k, k+1), \quad (k \in \mathbb{N})$$

A függvény grafikonja a 2.5. ábrán látható.

2.5. ábra - Az f függvény grafikonja



¹²Itt is igaz az a) ponthoz fűzött kiegészítés.

Mivel a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

szor konvergencia a Leibniz-kritérium alapján, ezért f impropriusan Riemann-integrálható a $[0, \infty)$ intervallumon, viszont abszolútértéke impropriusan nem Riemann-integrálható, mert

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty. \quad (2.8.4)$$

Ezért f nem lehet Lebesgue-szerint integrálható¹³.

Legyen (a, b) véges vagy nem véges intervallum. Megmutatható, hogy ha f impropriusan integrálható (a, b) -n és $|f|$ is impropriusan integrálható (a, b) -n, akkor f Lebesgue-integrálható (a, b) -n és f Lebesgue-integrálja megegyezik f improprius Riemann-integráljával. (Lásd 2.10.2. feladatot.)

A Lebesgue-integrálnak is létezik úgynevezett improprius Lebesgue-integrál kiterjesztése, amely kiterjesztéssel jelen jegyzet keretein belül nem foglalkozunk.

9. Mérhető halmazok, mérhető függvények

Ebben a fejezetben először a mérhető függvények, majd a mérhető halmazok fogalmát vezetjük be. Megjegyezzük, hogy Lebesgue az integrálfogalom bevezetése során először vezette be a mérhető halmaz fogalmát, majd ennek segítségével értelmezte a függvények mérhetőségét.

Az általunk követett Riesz-féle és a Lebesgue-féle felépítés egymással ekvivalens. Ennek bizonyítása megtalálható [13] 181. oldalán.

9.1. Mérhető függvények

2.9.1. Definíció. Az $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt Lebesgue-mérhetőnek nevezzük, ha létezik olyan $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli függvénysorozat, amely majdnem mindenütt tart f -hez.

2.9.2. Lemma. Ha f Lebesgue-integrálható az (a, b) intervallumon, akkor Lebesgue-mérhető is.

Bizonyítás. Legyen f az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvény. Ekkor létezik $f_1, f_2 \in C_1$, hogy $f = f_1 - f_2$.

Mivel f_1 és f_2 is C_1 -beli függvények, ezért létezik $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ és $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő függvénysorozat, hogy

$$\varphi_n \rightarrow f_1 \quad m.m. \quad (n \rightarrow \infty), \quad \psi_n \rightarrow f_2 \quad m.m. \quad (n \rightarrow \infty).$$

A $(\varphi_n - \psi_n, n \in \mathbb{N})$ is C_0 -beli függvénysorozat és

$$\varphi_n - \psi_n \rightarrow f_1 - f_2 \quad m.m. \quad (n \rightarrow \infty),$$

¹³Ugyanis, ha f a $[0, \infty)$ -on Lebesgue-integrálható lenne, akkor a műveleti tulajdonságok miatt $|f|$ is. Legyen $\chi_{[0, n)}$ a $[0, n)$ ($n \in \mathbb{N}$) intervallum karakterisztikus függvénye. Az $f_n := (|f| \chi_{[0, n)}, n \in \mathbb{N})$ monoton növekedő lépcsősfüggvény-sorozat határértéke $|f|$, és a Beppo Levi-tételnek 2.6.6/a) következménye alapján a határátmenet és az integrálás sorrendje felcserélhető. Viszont $(f_n, n \in \mathbb{N})$ Lebesgue-integráljainak –ami megegyezik a Riemann-integráljaikkal– sorozatának határértéke a (2.8.4) sor összege, ami végtelen, tehát $|f|$ Lebesgue-integrálja végtelen. Ez ellentmondás.

azaz $f = f_1 - f_2$ valóban Lebesgue-mérhető.

□

2.9.3. Megjegyzés.

1) A Lemma állítása nem fordítható meg, azaz van olyan Lebesgue-mérhető függvény, amely nem Lebesgue-integrálható. Legyen ugyanis például

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in (-n, n), \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az így definiált lépcsősfüggvény-sorozat határértéke a valós számok halmazán értelmezett $f \equiv 1$ függvény. Az f függvény tehát Lebesgue-mérhető, de nem Lebesgue-integrálható.

2) Ha viszont egy függvény Lebesgue-mérhető és van integrálható majoránsa, akkor Lebesgue-integrálható. (Ez a 2.10.1. feladat közvetlen következménye.)

Kérdés, hogy a mérhetőség tulajdonságát mely műveletek őrzik meg. Erre kapunk választ a következő tételben.

2.9.4. Tétel. Legyen (a, b) véges vagy nem véges intervallum. Ha $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Lebesgue-mérhetőek, akkor az

$$f \cup g, f \cap g, f + g, fg, |f| \quad (2.9.1)$$

függvények is Lebesgue-mérhetőek. Továbbá, ha $g \neq 0$ m.m., akkor f/g is Lebesgue-mérhető.

Ha $f_1, f_2, \dots, f_r: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhetőek és $F \in \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ ($r \in \mathbb{N}^*$) folytonos függvény, akkor az $F(f_1, f_2, \dots, f_r)$ összetett függvény is Lebesgue-mérhető.

Bizonyítás. A (2.9.1)-ben szereplő függvények nyilván mérhetőek, hiszen a lépcsősfüggvény-sorozatokkal a megfelelő műveletet elvégezve szintén lépcsősfüggvény-sorozatot kapunk, melynek határértéke az f, g függvényekkel végzett művelet eredménye.

A hányadosfüggvény esetén a következőképpen járhatunk el. Legyen $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ a g függvényhez majdnem mindenütt konvergáló lépcsősfüggvény-sorozat. Mivel $g \neq 0$ m.m., ezért $\varphi_n \neq 0$ m.m. ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor a

$$\psi_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } \varphi_n(x) = 0, \\ \frac{1}{\varphi_n(x)}, & \text{ha } \varphi_n(x) \neq 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in (a, b))$$

lépcsősfüggvény-sorozat majdnem mindenütt $1/g$ -hez tart, tehát $1/g$ mérhető, és ezért $f/g = f \cdot (1/g)$ függvény is mérhető.

Az utolsó állítás igazolásához legyen $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ az f_i ($i = 1, 2, \dots, r$) függvényekhez konvergáló lépcsősfüggvény-sorozatok. Az F függvény folytonossága miatt

$$h_n := F(\varphi_n, \varphi_n, \dots, \varphi_n) \rightarrow F(f_1, f_2, \dots, f_r) =: h \quad \text{m.m.} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ha $F(0, 0, \dots, 0) \neq 0$, akkor h_n lépcsősfüggvény, tehát az állítás teljesül. Ha $F(0, 0, \dots, 0) = 0$, akkor h_n nem feltétlenül lesz véges intervallumon kívül nulla, tehát nem lesz lépcsősfüggvény. Ekkor tekintsük a $\tilde{h}_n := \chi_{[-n, n]} h_n$

$(n \in \mathbb{N})$ függvényeket, ahol $\chi_{[-n,n]}$ a $[-n,n]$ intervallum karakterisztikus függvényét jelöli. A $\tilde{h}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) függvények már garantáltan lépcsősek és határfüggvényük majdnem mindenütt h , tehát h valóban mérhető.¹⁴

□

A mérhető függvények halmazából a majdnem mindenütt való határátmenet sem vezet ki. Erről szól az alábbi

2.9.5 Tétel. *Mérhető függvények majdnem mindenütt konvergens sorozatának határértéke is mérhető függvény.*

Bizonyítás. Legyen (a,b) véges vagy nem véges intervallum, $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ az $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez majdnem mindenütt konvergáló, mérhető függvényekből álló sorozat. Tekintsünk továbbá egy $h: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ pozitív, integrálható függvényt. (Korlátos intervallum esetén legyen például $h \equiv 1$, nem korlátos intervallum esetén pedig $h(x) = \frac{1}{x^2}$, ha $x \in (a,b)$ és $n-1 \leq |x| < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Ezzel a h függvénnyel képezzük a

$$g_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{h(x)f_n(x)}{h(x) + |f_n(x)|} \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot. Az előző tétel alapján a g_n függvények mérhetőek, és $|g_n| < h$ teljesül az (a,b) intervallumon minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Továbbá

$$g_n(x) \rightarrow \frac{h(x)f(x)}{h(x) + |f(x)|} =: g(x) \quad m.m.,$$

ezért Lebesgue tétele szerint g is Lebesgue-integrálható, tehát mérhető is. Mivel f és g előjele megegyezik, ezért átrendezéssel kapjuk, hogy

$$f = \frac{hg}{h - |g|},$$

így f is mérhető.

□

9.2. Mérhető halmazok

2.9.6. Definíció. A véges vagy végtelen (a,b) intervallumban fekvő $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazt Lebesgue-mérhetőnek nevezzük, ha a halmaz

$$\chi_H(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

karakterisztikus függvénye Lebesgue-mérhető. Ha χ_H Lebesgue-integrálható, akkor az

$$m(H) := \int_a^b \chi_H(x) dx \quad (H \subseteq (a,b)),$$

értéket a H halmaz *Lebesgue-mértékének* nevezzük, ellenkező esetben definíció szerint $m(H) := \infty$.

¹⁴A hányadosra vonatkozó állítás kivételével a többi nyilván ennek az állításnak közvetlen következménye, de közvetlenül is bizonyítható.

A Lebesgue-mérhetőség és a Lebesgue-mérték nagysága nyilván nem függ az (a, b) intervallum választásától, továbbá a definícióból következik, hogy minden vég(+∞) vagy végtelen intervallum mérhető halmaz, és mértéke az intervallum hosszával (végtelen intervallum esetén -nel) egyezik meg.

2.9.7. Megjegyzés. A 2.1. fejezetben bevezetett fogalom szerinti nullamértékű $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz ebben az értelemben is nullamértékű, hiszen H karakterisztikus függvényének integrálja nulla.

Fordítva, ha egy $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz karakterisztikus függvényének integrálja nulla, akkor a Beppo Levi tétel 2.6.6./d) következménye miatt a karakterisztikus függvény majdnem mindenütt nulla, azaz H az eddigi értelemben is nullamértékű.

A fent definiált Lebesgue-mérték rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

2.9.8. Tétel. Legyenek $H_n \subseteq \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) mérhető halmazok. Ekkor

i) a

$$H_1 \setminus H_2, \quad \bigcup_{i=0}^n H_i, \quad \bigcap_{i=0}^n H_i \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n, \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n$$

halmazok is mérhetőek,

ii) ha valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i, j \in \{0, 1, \dots, n\}, i \neq j$), akkor

$$m(H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_n) = m(H_0) + m(H_1) + \dots + m(H_n),$$

iii) ha $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$), akkor

$$m(H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_n \cup \dots) = m(H_1) + m(H_2) + \dots + m(H_n) + \dots,$$

iv) ha $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_n \subseteq \dots$, akkor

$$m(H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_n \cup \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(H_n),$$

v) ha $H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_n \supseteq \dots$, és mindegyik halmaz véges mértékű akkor

$$m(H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n \cap \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(H_n),$$

Bizonyítás.

i) A

$$H_1 \setminus H_2, \quad \bigcup_{i=0}^n H_i, \quad \bigcap_{i=0}^n H_i \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i, \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} H_i$$

halmazok karakterisztikus függvényei rendre a

$$\chi_{H_1} - \chi_{H_2}, \quad \bigcup_{i=0}^n \chi_{H_i}, \quad \bigcap_{i=0}^n \chi_{H_i} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=0}^n \chi_{H_i}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=0}^n \chi_{H_i}$$

függvények. Mivel a mérhető függvények köréből nem vezet ki a szorzás, a különbségképzés, a véges sok függvény burkolóinak képzése és a határátmenet sem, ezért a fenti függvények mindegyike mérhető.

ii) Legyenek először H_1, H_2 közös pont nélküli mérhető halmazok. Ekkor a $H = H_1 \cup H_2$ halmazok karakterisztikus függvénye $\chi_H = \chi_{H_1} + \chi_{H_2}$. Ha χ_{H_1} és χ_{H_2} függvények mindegyike Lebesgue-integrálható, akkor χ_H is, és tagonkénti integrálással

$$m(H) = m(H_1) + m(H_2)$$

adódik. Ha χ_{H_1} és χ_{H_2} függvények közül legalább az egyik Lebesgue-szerint nem integrálható, akkor egyrészt χ_H sem Lebesgue-integrálható, másrészt a megfelelő halmazok Lebesgue-mértéke végtelen, ezért a $m(H) = m(H_1) + m(H_2)$ egyenlőség teljesül.

Ez az egyenlőség n -szerinti teljes indukcióval tetszőleges véges sok, közös pont nélküli halmaz esetére kiterjeszthető.

iii) A $H := H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_n \cup \dots$ halmaz karakterisztikus függvénye ebben az esetben a

$$\chi_H = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{H_k}$$

végtelen függvénysor összege. Mivel a függvénysor minden tagja nemnegatív, ezért az összegfüggvény majorálja a sort, így Beppo Levi és Lebesgue tétele alapján a χ_H függvény pontosan akkor lesz integrálható, ha a χ_{H_k} függvények mindegyike integrálható és az integrálok sora konvergens. Ebben az esetben szabad tagonként integrálni, és a mértékekre a kívánt egyenlőség adódik. Ha a χ_{H_k} függvények bármelyike nem integrálható, vagy az integrálok sora nem konvergens (nemnegatív tagú sorok esetén sor az összege ekkor szükségképpen végtelen), akkor az egyenlőség szintén triviálisan teljesül.

iv) Ha $A \subseteq B$ mérhető halmazok, akkor mivel $B \setminus A \cup A = B$, továbbá A és $B \setminus A$ közös pont nélküli halmazok, ezért $m(B \setminus A) + m(A) = m(B)$. Ebből adódik, hogy egyrészt $m(A) \leq m(B)$, továbbá, ha $m(A) < \infty$, akkor $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.

Legyenek $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_n \subseteq \dots$ mérhető halmazok monoton növekedő sorozata. A H halmaz előáll a $H_0, H_1 \setminus H_0, H_2 \setminus H_1, \dots, H_{n+1} \setminus H_n, \dots$ közös pont nélküli mérhető halmazok egyesítéséeként.

Ha a $H_n \subseteq H$ ($n \in \mathbb{N}$) halmazok véges mértékűek, akkor iii) alapján

$$\begin{aligned} m(H) &= m(H_0) + \sum_{n=0}^{\infty} m(H_{n+1} \setminus H_n) = m(H_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (m(H_{n+1}) - m(H_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(H_0) + \sum_{i=0}^{n-1} m(H_{i+1}) - m(H_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(H_0) + (m(H_1) - m(H_0)) + \dots + (m(H_n) - m(H_{n-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(H_n). \end{aligned}$$

Mivel $m(H_0) \leq m(H_1) \leq \dots \leq m(H_n) \leq \dots \leq m(H)$, ezért, ha bármelyik H_n halmazra $m(H) = \infty$, akkor szükségképpen $m(H_i) = \infty$ ($i > n$), $m(H) = \infty$ is teljesül, ezért fennáll az $m(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(H_n)$ előállítás.

v) Mivel $H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_n \supseteq \dots \supseteq H := \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n$, és mindegyik halmaz véges mértékű, ezért

$$m(H) \leq \dots \leq m(H_n) \leq \dots \leq m(H_1) \leq m(H_0) < \infty,$$

ahol $m(H_n)$ definíció szerint a χ_{H_n} függvény integrálja. Mivel a $(\chi_{H_n}, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat monoton csökkenve a Lebesgue-integrálható χ_H függvényhez tart, ezért a Beppo Levi tételének 2.6.6/a) következménye alapján a határátmenet és az integrálás sorrendje felcserélhető.

□

Felmerül a kérdés, hogy van-e egyáltalán olyan halmaz, amely Lebesgue-szerint nem mérhető? A válasz igen. Az ilyen típusú halmazok konstrukciója nem triviális. Az érdeklődő olvasó egy ilyen konstrukciót talál [13] 185. oldalán.

9.3. Mérhető halmazok és mérhető függvények közötti összefüggés

Az alábbi tétel további kapcsolatot teremt mérhető halmazok és mérhető függvények között. A tétel bizonyítása megtalálható [13] 179. oldalán.

2.9.9. Tétel. Ha az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mérhető, akkor az

$$\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \geq c\}, \quad \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) > c\}, \quad \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \leq c\}, \quad \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) < c\}$$

nívóhalmazok is mérhetők bármilyen $c \in \mathbb{R}$ számra.

Fordítva, ha a fenti nívóhalmazok közül bármelyik, bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén mérhető, akkor az f függvény is mérhető.

10. Feladatok

2.10.1. Feladat. Legyen (a, b) egy véges vagy nem véges intervallum, $(f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ Lebesgue-integrálható függvények egy sorozata, mely majdnem mindenütt konvergál az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik egy $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvény, melyre $|f| \leq g$ az (a, b) intervallumon, akkor f is Lebesgue-integrálható.

[Lebfelmo]megoldás

2.10.2. Feladat. Legyen (a, b) egy véges vagy nem véges intervallum. Igazoljuk, hogy ha f impropriusan integrálható (a, b) -n és $|f|$ is impropriusan integrálható (a, b) -n, akkor f Lebesgue-integrálható (a, b) -n és f Lebesgue-integrálja megegyezik f improprius Riemann-integráljával.

[imprfeladatmo]megoldás

11. Megoldások

2.10.1. Feladat. Legyen (a, b) egy véges vagy nem véges intervallum, $(f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ Lebesgue-integrálható függvények egy sorozata, mely majdnem mindenütt konvergál az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik egy $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvény, melyre $|f| \leq g$ az (a, b) intervallumon, akkor f is Lebesgue-integrálható.

Megoldás. Tekintsük az

$$f_n^* = (f_n \cap g) \cup (-g) \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot. A műveleti tulajdonságok alapján az f_n^* függvények Lebesgue-integrálhatók és mivel $g \geq 0$, ezért az $(f_n^*, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra

$$|f_n^*| \leq g \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül az (a, b) intervallumon, továbbá $f_n^* \rightarrow f$ majdnem mindenütt, ha $n \rightarrow \infty$. Lebesgue-tétele alapján f Lebesgue-integrálható.

[Lebesguetétel_kevesebbfelt]vissza a feladathoz

2.10.2. Feladat. Legyen f egy véges vagy nem véges (a, b) intervallumon értelmezett függvény. Igazoljuk, hogy ha f (a, b) -n improprius Riemann-integrálható, akkor f is Lebesgue-integrálható (a, b) -n és $|f|$ is Lebesgue-integrálható (a, b) -n és a Lebesgue-integrálja megegyezik az improprius Riemann-integráljával.

Megoldás. A bizonyítást az improprius integrál két alapesetére fogjuk elvégezni. (A többi eset is hasonlóan tárgyalható.) Először tegyük fel, hogy $(a, b) = (a, +\infty)$, ahol $a \in \mathbb{R}$, továbbá, hogy f és $|f|$ is Riemann-integrálható minden $\omega > a$ esetén az (a, ω) intervallumon, továbbá léteznek a véges

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) dx, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega |f(x)| dx \quad (2.11.1)$$

határértékek. Feltehetjük, hogy $a = 0$. Tekintsük először a

$$g_n := \chi_{[0, n]} |f| \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot, ahol $\chi_{[0, n]}$ a $[0, n]$ intervallum karakterisztikus függvénye. A g_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények a feltételek miatt Riemann-integrálhatók a $[0, n]$ intervallumon, tehát ezen az intervallumon Lebesgue-integrálhatók is, és a két integrál értéke megegyezik. Mivel ezen az intervallumon kívül nulla az értékük, ezért a $(0, \infty)$ intervallumon is Lebesgue-integrálhatók. Az integráljaik sorozata (2.11.1) alapján korlátos, továbbá a sorozat monoton nő és határértéke $|f|$, ha $n \rightarrow \infty$. A Beppo Levi tétele alapján $|f|$ is Lebesgue-integrálható a $(0, \infty)$ intervallumon, és

$$\int_0^\infty |f(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n |f(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n g_n(x) dx,$$

azaz $|f|$ improprius Riemann- és Lebesgue-integrálja megegyezik.

Most tekintsük az

$$f_n := \chi_{[0, n]} f \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot. Az f_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények a $(0, \infty)$ intervallumon Lebesgue-integrálhatók (ugyanaz az indoklás érvényes itt is, mint a g_n függvényekre), határértékük f , és a függvénysorozatnak van integrálható majoránsa:

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| \quad (x \in (0, \infty)).$$

A Lebesgue-tétele alapján f is Lebesgue-integrálható $(0, \infty)$ -n és

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f_n(x) dx,$$

azaz f improprius Riemann- és Lebesgue-integrálja megegyezik.

A másik alapeset tárgyalása következik. Tegyük fel, hogy $(a, b]$ véges intervallum, továbbá, hogy f és $|f|$ is Riemann-integrálható minden $b - a > \varepsilon > 0$ esetén az $[a + \varepsilon, b]$ intervallumon, továbbá léteznek a véges

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)| dx \quad (2.11.2)$$

határértékek. Tekintsük először a

$$g_n := \chi_{[a+\frac{1}{2^n}, b]} |f| \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot. A g_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények a feltételek miatt Riemann-integrálhatók az $[a + \frac{1}{2^n}, b)$ intervallumon, tehát ezen az intervallumon Lebesgue-integrálhatók is, és a két integrál értéke megegyezik. Mivel ezen az intervallumon kívül nulla az értékük, ezért az f intervallumon is Lebesgue-integrálható. Az integráljaik sorozata (2.11) alapján korlátos, továbbá a f monoton nő és határértéke f , ha $x \rightarrow b^-$. A Beppo Levi tétele alapján f is Lebesgue-integrálható az (a, b) intervallumon, és

$$\int_a^b |f(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a + \frac{1}{2^n}}^b |f(x)| dx,$$

azaz $|f|$ improprius Riemann- és Lebesgue-integrálja megegyezik.

Most tekintsük az

$$f_n := \chi_{[a + \frac{1}{2^n}, b]} f \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot. Az f_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények a (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálhatók (ugyanaz az indoklás érvényes itt is, mint a g_n függvényekre), határértékük f , és a függvénysorozatnak van integrálható majoránsa:

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| \quad (x \in (a, b]).$$

A Lebesgue-tétele alapján f is Lebesgue-integrálható (a, b) -n és

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a + \frac{1}{2^n}}^b f(x) dx,$$

azaz f improprius Riemann- és Lebesgue-integrálja megegyezik.

[imprfeladat]vissza a feladathoz

3. fejezet - Euklideszi terek

Ebben a fejezetben a metrikus, normált, lineáris és euklideszi tér általános fogalmát vezetjük be. Az $\mathbb{R}^n$ térhez hasonlóan euklideszi, illetve Hilbert terekben vizsgáljuk, hogy a tér elemeit hogyan és milyen feltételek teljesülése esetén tudjuk előállítani egy ortogonális rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. Megvizsgáljuk azt is, hogy ez az előállítás milyen feltétel mellett egyértelmű. Eljárást mutatunk továbbá arra, hogyan lehet egy lineárisan független vektorrendszerrel azonos teret kifesztítő ortogonális rendszert létrehozni.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: metrikus tér, lineáris tér, norma, normált tér, skaláris szorzat, euklideszi tér, teljes metrikus tér, Hilbert tér, Banach tér, ortogonalitás, ortogonális vektorrendszer, teljes ortogonális vektorrendszer.

Szükséges előismeret: Komplex számok, $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) tér, számsorozatok, végtelen sorok.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 3 tanóra + 3 óra önálló munka.

1. Metrikus tér, lineáris tér, normált tér

1.1. Metrikus tér

A metrika távolságot jelent. A metrikus tér alatt egy olyan halmazt értünk, melyben két elemnek a távolságát meg tudjuk adni. A távolságnak, mint függvénynek természetesen kell, hogy rendelkezzen néhány tulajdonsággal.

3.1.1. Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$ és $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ leképezés. Ekkor az $\langle X, \rho \rangle$ párt metrikus térnek nevezzük ha [i)]

1. $\rho(x, y) \geq 0$ minden $x, y \in X$ esetén és $\rho(x, y) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ($x, y \in X$);
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ ($x, y, z \in X$).

A bevezető matematikai kurzusokon számos metrikus térrel találkoztunk már. Ezek közül néhányat megemlítünk.

3.1.1. Példa. A következő halmazok a mellettük feltüntetett távolság-függvényekkel metrikus teret alkotnak. [1)]

1. $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$, ahol $\rho(x, y) = |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
2. $\langle \mathbb{R}^2, \rho_2 \rangle$, ahol $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ($x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$) (euklideszi távolság).

1.2. Lineáris tér

3.1.2. Definíció. Az X halmaz lineáris tér $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ számtest felett, ha

I. X -en értelmezve van egy $+$ -szal jelölt belső művelet:

$$+: X \times X \rightarrow X, \quad (a, b) \mapsto a + b \in X \quad (a, b \in X),$$

amellyel $(X, +)$ kommutatív csoport.

II. X -en értelmezve van $\cdot$ -tal jelölt skalárral való szorzásnak nevezett külső művelet:

$$\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X, \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a \in X \quad (\lambda \in \mathbb{K}, a \in X)$$

az alábbi tulajdonságokkal. Minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ és minden $a, b \in X$ esetén:

$$i) (\lambda_1 + \lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a,$$

$$ii) \lambda_1(a + b) = \lambda_1 a + \lambda_1 b,$$

$$iii) \lambda_1(\lambda_2 a) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)a,$$

$$iv) 1 \cdot a = a.$$

A lineáris tér elemeit *vektoroknak* is szokás nevezni.

A bevezető matematika órákon az alábbi lineáris terekkel találkoztunk:

3.1.2. Példa.

1) $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) a szokásos vektor-összeadással és a szokásos skalárral való szorzással lineáris teret alkot $\mathbb{R}$ -felett.

2) Az $m \times n$ -es, valós elemű mátrixok $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) halmaza a szokásos műveletekkel lineáris tér a valós számok felett.

3) A legfeljebb n -edfokú valós illetve komplex együtthatós polinomok $\mathcal{P}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) halmaza a szokásos műveletekkel vektortér a valós illetve komplex számtest felett.

4) A valós illetve komplex számsorozatok halmaza a szokásos műveletekkel lineáris tér a valós illetve komplex számtest felett.

3.1.3. Definíció. Egy X lineáris tér $Y \subseteq X$ részhalmazát a lineáris tér alterének nevezzük, ha a lineáris téren értelmezett két művelet nem vezet ki az Y halmazból.

1.3. Euklideszi tér

3.1.4. Definíció. Az $\langle X, \mathbb{K}, +, \cdot \rangle$ lineáris teret euklideszi térnek nevezzük, ha benne értelmezve van egy

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

skaláris szorzat az alábbi tulajdonságokkal:

$$i) \langle x, x \rangle \geq 0 \ (x \in X) \text{ és } \langle x, x \rangle = 0 \text{ pontosan akkor teljesül, ha } x = \mathbf{0}, \text{ ahol } \mathbf{0} \text{ a lineáris tér nulleleme.}$$

$$ii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \ (x, y \in X),$$

$$iii) \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \ (x, y, z \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}).$$

A fenti tulajdonságokból azonnal következik, hogy

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

A bevezető matematika órákon az alábbi euklideszi terekkel találkoztunk:

3.1.3. Példa.

1) A síkvektorok $\mathbb{R}^2$ halmaza a vektorösszeadással és a számmal való szorzással lineáris tér a valós számtest felett és euklideszi teret alkot a jól ismert

¹Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ feltétel teljesül.

$$\langle y_1, y_2 \rangle = |y_1| \cdot |y_2| \cdot \cos \varphi$$

skaláris szorzattal, ahol $|u|$ az u vektor hossza és φ a két vektor által bezárt szög.

2) $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ euklideszi tér az

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$$

skaláris szorzattal.

3) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) euklideszi tér az

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n))$$

skaláris szorzattal.

Könnyen igazolható, hogy az 1) példában szereplő $(V^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ és a 2) példában szereplő $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ euklideszi terek izomorfak.

A későbbiekben szükségünk lesz a skaláris szorzatra vonatkozó alábbi egyenlőtlenségre.

3.1.5. Tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség). Legyen $(X, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy euklideszi tér. Ekkor

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad (x, y \in X).$$

Bizonyítás. Ha y a tér nulleleme, akkor az állítás triviálisan teljesül, hiszen ekkor az egyenlőtlenség mindkét oldala nulla². Tegyük fel, hogy $y \neq \Theta$ és legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges szám. Ekkor

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle.$$

A további átalakítások előtt vizsgáljuk meg a $\bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle$ összeget. Ehhez tegyük fel, hogy $\lambda = a + bi$ és $\langle x, y \rangle = c + di$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Az $\mathbb{R}^2$ -beli Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle &= (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di) = \\ &= 2(ac + bd) = 2\langle (a, b), (c, d) \rangle \stackrel{\text{CBS}}{\leq} 2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = 2|\lambda| |\langle x, y \rangle|. \end{aligned}$$

Az itt kapott becslést, továbbá a $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$ azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$0 \leq \langle x, x \rangle + 2|\lambda| |\langle x, y \rangle| + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle.$$

A fenti kifejezés $|\lambda|$ másodfokú függvénye, amely akkor és csak akkor nemnegatív minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha a másodfokú kifejezés diszkriminánsa nempozitív, azaz

$$4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0,$$

melyet átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk.

□

1.4. Normált tér

²Ugyanis $\langle x, \Theta \rangle = \langle x, \lambda \Theta \rangle = \bar{\lambda} \langle x, \Theta \rangle$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén, ami csak úgy lehetséges, ha $\langle x, \Theta \rangle = 0$, továbbá $\langle \Theta, \Theta \rangle = 0$.

3.1.6. Definíció. Az $\langle X, \mathbb{K}, +, \cdot \rangle$ lineáris teret normált térnek nevezzük, ha benne értelmezett egy $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ leképezés a következő tulajdonságokkal:

- i) $\|x\| \geq 0$ ($x \in X$) és $\|x\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = \Theta$,
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ($\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$),
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($x, y \in X$) (háromszög-egyenlőtlenség).

A $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ leképezést *normának* nevezzük.

A bevezető matematika órákon az alábbi normált terekkel találkoztunk:

3.1.4. Példa.

1) $\mathbb{R}$ -ben norma az abszolútérték függvény.

2. $\mathbb{R}^n$ -ben norma az $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) ($n \in \mathbb{N}^*$) függvény (euklideszi norma).

Az eddigiekben definiált terek között kapcsolatot teremtenek az alábbi tételek.

3.1.7. Tétel. Minden skaláris szorzat normát indukál az $(X, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi térben. Az indukált norma:

$$\|\cdot\|: X \rightarrow [0, +\infty), \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Bizonyítás. Megnézzük, hogy $\|\cdot\|$ rendelkezik-e a szükséges norma-tulajdonságokkal. A skaláris szorzat tulajdonságai alapján:

- i) $\|x\| \geq 0$ ($x \in X$), mert $\langle x, x \rangle \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = \Theta$,
- ii) $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$ ($\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$),

iii) *Minkowski-egyenlőtlenség:*

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \leq |\langle x, x + y \rangle| + |\langle y, x + y \rangle| \stackrel{\text{CBS}}{\leq} \|x\| \cdot \|x + y\| + \|y\| \cdot \|x + y\|.$$

Ha $\|x + y\| \neq 0$, akkor a fenti egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Ha $\|x + y\| = 0$, a kívánt egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

□

Ezzel igazoltuk, hogy $\|\cdot\|$ valóban norma.

3.1.8. Tétel. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér. A

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

leképezés egy metrikát definiál X -en.

Bizonyítás. A norma tulajdonságait felhasználva a metrika tulajdonságait is könnyen igazolhatjuk:

- i) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ ($x, y \in X$) és $\rho(x, y) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\|x - y\| = 0$, azaz ha $x - y = \Theta$, így $x = y$.

$$\text{ii) } \rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \rho(y, x) \quad (x, y \in X).$$

$$\text{iii) } \rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad (x, y, z \in X).$$

3.1.9. Következmény. Minden euklideszi tér normált tér, és (mivel minden norma metrikát indukál), így metrikus tér is.

Az analízis számára nagyon fontos a teljesség fogalma:

3.1.10. Definíció. Egy (X, ρ) metrikus tér teljes, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens, azaz ha egy $(x_n, n \in \mathbb{N})$ X -beli sorozatra $\rho(x_n, y_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$, akkor létezik $\alpha \in X$, hogy $\rho(x_n, \alpha) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Megjegyezzük, hogy minden metrikus térben teljesül, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat is. Legyen ugyanis az (X, ρ) metrikus térben az $(x_n, n \in \mathbb{N})$ egy konvergens sorozat, határértéke legyen $\alpha \in X$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$$0 \leq \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, \alpha) + \rho(x_m, \alpha) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty),$$

tehát a rendőrelv alapján $\rho(x_n, y_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$ is teljesül.

Eddigi tanulmányokban teljességgel az alábbi terekben találkoztunk:

3.1.5. Példa.

1) Az $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$ tér teljes az abszolútérték által generált metrikára nézve.

2) Az $\langle \mathbb{R}^n, \rho \rangle \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ tér teljes az euklideszi norma által generált metrikára nézve.

3) A $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ tér nem teljes az abszolútérték által generált metrikára nézve, mert az $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, n \in \mathbb{N}^* \right)$ sorozat Cauchy-sorozat, de nem konvergens a racionális számok halmazán.

3.1.11. Definíció. A teljes euklideszi teret Hilbert-térnek, a teljes normált teret pedig Banach-térnek nevezzük.

1.5. Feladatok

3.1.1. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy metrikus tér-e az $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$ pár.

a) Legyen $\rho(x, y) = |x| + |y| \quad (x, y \in \mathbb{R})$. megoldás

b) Legyen $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad (x, y \in \mathbb{R})$. megoldás

c) Legyen $\rho(x, y) = ||x| - |y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$. megoldás

3.1.2. Feladat. Igazoljuk, hogy $\langle \mathbb{R}^2, \rho \rangle$ metrikus tér, ahol

a) $\rho(x, y) = \rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$; [1_normamo]megoldás

b) $\rho(x, y) = \rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$. megoldás

3.1.3. Feladat. Legyen $X \neq \emptyset$ egy halmaz és

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y, \\ 1, & \text{ha } x \neq y. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy ρ metrika X -en.

[diszkrmetrmo]megoldás

3.1.4. Feladat. Legyen ℓ_2 azon valós $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ számsorozatok halmaza, melyre a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

numerikus sor konvergens. Bizonyítsuk be, hogy

a) ℓ_2 lineáris tér a sorozatok terén szokásos összeadás és konstansszoros műveletekkel;

b) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \quad (x, y \in \ell_2)$ skaláris szorzat ℓ_2 -n;

c) ℓ_2 teljes a skaláris szorzat által indukált metrikára nézve, azaz Hilbert-tér.

[kisell2mo]megoldás

1.6. Megoldások

3.1.1. Feladat. a) Metrikus tér-e $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$, ha

$$\rho(x, y) = |x| + |y| \quad (x, y \in \mathbb{R})?$$

Megoldás. $\rho(x, y) \geq 0$ az abszolútérték tulajdonságai miatt nyilvánvalóan teljesül, de $\rho(x, y) = 0$ nem mindig teljesül, ha $x = y$, csak akkor, ha $x = y = 0$. Így $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$ nem metrikus tér.

vissza a feladathoz

3.1.1. Feladat. b) Metrikus tér-e $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$, ha

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad (x, y \in \mathbb{R})?$$

Megoldás. Megnézzük, hogy teljesülnek-e a megkívánt norma-tulajdonságok.

i) $\rho(x, y) \geq 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$ nyilvánvalóan teljesül. A

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = 0$$

feltétel pontosan akkor teljesül, ha $|x - y| = 0$, ami azzal ekvivalens, hogy $x = y$.

ii) A szimmetria is teljesül, hiszen
$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|} = \rho(y, x).$$

iii) Megvizsgáljuk, hogy teljesül-e a

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) = \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}$$

egyenlőtlenség minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén. Vezessük be az $|x - y| = \alpha$, $|x - z| = \beta$, $|z - y| = \gamma$ jelöléseket. A bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

Az egyenlőtlenséget rendezzük:

$$\alpha(1+\gamma)(1+\beta) \stackrel{?}{\leq} \beta(1+\alpha)(1+\gamma) + \gamma(1+\alpha)(1+\beta)$$

$$\alpha + \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma \stackrel{?}{\leq} \beta + \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma$$

$$\alpha \stackrel{?}{\leq} \beta + \beta\gamma + \gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma$$

Mivel $\alpha = |x-y| \leq |x-z| + |z-y| = \beta + \gamma$ és $2\beta\gamma + \alpha\beta\gamma \geq 0$, ezért a fenti egyenlőtlenség teljesül.

Tehát ρ metrika az $\mathbb{R}$ halmazon.

vissza a feladathoz

3.1.1. Feladat. c) Vizsgáljuk meg, hogy metrika-e az $\mathbb{R}$ halmazon a

$$\rho(x, y) = \|x| - |y|\| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

leképezés!

Megoldás. $\rho(x, y) \geq 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$ nyilvánvalóan teljesül. A $\rho(x, y) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $|x| = |y|$, tehát $x = y$ vagy $x = -y$, ezért ρ nem definiál metrikát $\mathbb{R}$ -en.

vissza a feladathoz

3.1.2. Feladat. a) Igazoljuk, hogy $\langle \mathbb{R}^2, \rho_1 \rangle$ metrikus tér, ahol $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$.

Megoldás. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a metrika tulajdonságai.

i) $\rho_1(x, y) \geq 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$ az abszolútérték tulajdonságai alapján nyilvánvalóan teljesül. A $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$ csak akkor teljesülhet, ha $|x_1 - y_1| = 0$ és $|x_2 - y_2| = 0$, azaz ha $x = y$.

ii) $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$ az abszolútérték tulajdonságai alapján nyilvánvalóan teljesül.

iii) Mivel $\rho(a, b) = |a - b| \quad (a, b \in \mathbb{R})$ metrika $\mathbb{R}$ -en, ezért bármilyen $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ vektorokra

$$|x_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|,$$

$$|x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|.$$

A két egyenlőtlenség összeadásával kapjuk, hogy

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = \rho_1(x, z) + \rho_1(y, z).$$

Ezzel beláttuk, hogy ρ_1 valóban metrika $\mathbb{R}^2$ -en.

[1_norma]vissza a feladathoz

3.1.2. Feladat. b) Igazoljuk, hogy $\langle \mathbb{R}^2, \rho_\infty \rangle$ metrikus tér, ahol $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$.

Megoldás. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a metrika tulajdonságai.

i) $\rho_{\infty} \geq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$) az abszolútérték tulajdonságai alapján nyilvánvalóan teljesül. A $\rho_{\infty}(x, y) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 0$, azaz ha $x = y$.

ii) $\rho_{\infty}(x, y) = \rho_{\infty}(y, x)$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$) az abszolútérték tulajdonságai alapján nyilvánvalóan teljesül.

iii) A $\rho(a, b) = |a - b|$, ($a, b \in \mathbb{R}$) metrika $\mathbb{R}$ -en, és ρ_{∞} értelmezését felhasználva kapjuk, hogy bármilyen $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ vektorokra

$$\begin{aligned} |x_1 - y_1| &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \leq \rho_{\infty}(x, z) + \rho_{\infty}(y, z) \\ |x_2 - y_2| &\leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \leq \rho_{\infty}(x, z) + \rho_{\infty}(y, z). \end{aligned}$$

Mivel a bal oldalon szereplő kifejezések maximuma $\rho_{\infty}(x, y)$, ezért

$$\rho_{\infty}(x, y) \leq \rho_{\infty}(x, z) + \rho_{\infty}(y, z).$$

Ezzel beláttuk, hogy ρ_{∞} valóban metrika $\mathbb{R}^2$ -en.

vissza a feladathoz

3.1.3. Feladat. Legyen $X \neq \emptyset$ egy halmaz és

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y, \\ 1, & \text{ha } x \neq y. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy ρ metrika X -en.

Megoldás. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a metrika tulajdonságai.

i) $\rho \geq 0$ ($x, y \in X$) nyilvánvalóan teljesül. Definíció alapján $\rho(x, y) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = y$.

ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ($x, y \in X$) szintén nyilvánvalóan teljesül.

iii) A

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad (x, y, z \in X).$$

egyenlőtlenség csak akkor nem teljesülne, ha létezne olyan eset, hogy a jobb oldalon álló összeadás mindkét tagja 0, míg a bal oldalon álló kifejezés értéke 1. Az értelmezés alapján ekkor $x = z$ és $y = z$ és $x \neq y$, ami egyszerre nem teljesülhet.

Ezzel beláttuk, hogy ρ valóban metrika X -en³.

[diszkrmetr]vissza a feladathoz

3.1.4. Feladat. Legyen ℓ_2 azon valós $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ számsorozatok halmaza, melyre a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

numerikus sor konvergens. Bizonyítsuk be, hogy

a) ℓ_2 lineáris tér a sorozatok terén szokásos összeadás és konstansszoros műveletekkel;

³Az így definiált távolságot *diszkrét metrikának* nevezzük.

$$b) \langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \quad (x, y \in \ell_2) \quad \text{skaláris szorzat } \ell_2\text{-n};$$

c) ℓ_2 teljes a skaláris szorzat által indukált metrikára nézve, azaz Hilbert-tér.

Megoldás.

a) Az $x, y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatok összegén és az x sorozat $\lambda \in \mathbb{R}$ konstansszorosán az

$$x + y := (x_n + y_n, n \in \mathbb{N}), \quad \lambda x := (\lambda x_n, n \in \mathbb{N})$$

sorozatokat értjük.

A két művelet nem vezet ki az ℓ_2 függvényosztályból: Ha $x, y \in \ell_2$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség, továbbá az $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^2 \leq 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 < \infty,$$

melyből a majoráns kritériumot alkalmazva kapjuk, hogy $x + y \in \ell_2$ valóban teljesül. A numerikus sorokra vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda x_n|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

tehát $\lambda x \in \ell_2$ is teljesül.

A valós számokra vonatkozó összeadás és szorzás tulajdonságai alapján a sorozatok halmazán értelmezett összeadás és konstanssal való szorzás is rendelkezik a megkívánt tulajdonságokkal. Az ℓ_2 tér nulleleme a $\Theta = (0, n \in \mathbb{N})$ sorozat.

b) Felmerül a kérdés, hogy a feladatban szereplő $\langle \cdot, \cdot \rangle$ függvény valóban minden $x, y \in \ell_2$ esetén egy valós

számot ad-e eredményül, azaz a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ sorozat konvergens-e? A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján

$$|x_n y_n| \leq \frac{|x_n|^2 + |y_n|^2}{2} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

melyből összegzéssel a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|^2 + |y_n|^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$$

becslés adódik. Tehát a majoráns kritérium alapján a kérdéses sor abszolút konvergens. A skaláris szorzatra vonatkozó tulajdonságok:

$$i) \langle x, x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0 \quad \text{triviálisan teljesül, továbbá } \langle x, x \rangle = 0 \quad \text{pontosan akkor igaz, ha a monoton növekedő,}$$

nemnegatív tagokból álló $\left(\sum_{k=0}^n |x_k|^2, n \in \mathbb{N} \right)$ sorozat határértéke nulla. Ilyen tulajdonsággal csak a konstans nulla sorozat bír. Mivel nemnegatív számok összege pontosan akkor nulla, ha minden tagja nulla, ezért $x_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát x valóban a tér nulleleme.

ii) A valós számokon értelmezett szorzás művelete kommutatív, tehát:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n = \langle y, x \rangle \quad (x, y \in \ell_2).$$

iii) Legyenek λ, μ valós számok, $x, y, z \in \ell_2$. Ekkor a valós számokra és a sorokra vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján

$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda x_n z_n + \sum_{n=0}^{\infty} \mu y_n z_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n z_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} y_n z_n = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ valóban skaláris szorzat.

c) A skaláris szorzat által indukált norma és a norma által indukált metrika:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2} \quad (x \in \ell_2), \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^2} \quad (x, y \in \ell_2).$$

Be szeretnénk látni, hogy a ℓ_2 tér teljes, azaz, hogy benne minden Cauchy-sorozat konvergens. Legyen $(x^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ ℓ_2 -beli Cauchy-sorozat, azaz $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \rightarrow 0$, ha $n, m \rightarrow \infty$. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ hogy } n, m > N \text{ esetén } \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon.$$

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2} = \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon \quad (n, m > N), \quad (3.1)$$

tehát az $(x_k^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ valós számsorozat Cauchy-sorozat minden rögzített $k \in \mathbb{N}$ indexre. A számsorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján a sorozat konvergens, tehát létezik $\alpha_k \in \mathbb{R}$ szám, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = \alpha_k$. Ezzel egy $\alpha := (\alpha_k, k \in \mathbb{N})$ valós számsorozatot kaptunk. Kérdés, hogy α ℓ_2 -beli-e, illetve, hogy az $(x^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ sorozat ℓ_2 -normában α -hoz konvergál-e?

((3.1.1) egyenlőtlenség alapján minden rögzített $k \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{i=0}^k |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2 \quad (n, m > N).$$

Végrehajtva az $m \rightarrow \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^k |x_i^{(n)} - \alpha_i|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (n > N),$$

melyből $k \rightarrow \infty$ határátmenettel

$$\sum_{i=0}^k |x_i^{(n)} - \alpha_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(n)} - \alpha_i|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \|x^{(n)} - \alpha\| \leq \varepsilon \quad (n > N)$$

adódik. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért a kapott egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $\|x^{(n)} - \alpha\| \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, továbbá, hogy $x^{(n)} - \alpha \in \ell_2$, ha $n > N$.

Tekintsünk egy $n > N$ rögzített indexet. Mivel $x^{(n)}, x^{(n)} - \alpha \in \ell_2$, ezért a különbségük is ℓ_2 -beli, azaz $x^{(n)} - (x^{(n)} - \alpha) = \alpha \in \ell_2$, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

[kisell2]vissza a feladathoz

2. Ortogonalitás

2.1. Ortogonális függvényrendszerek

A síkvektorok esetén a skaláris szorzat a két vektor hosszának és közbezárt szögének koszinuszának szorzatával egyezik meg. Az is egyszerűen igazolható, hogy két nemnulla hosszúságú vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla. A skaláris szorzatnak ez a tulajdonsága lehetőséget ad euklideszi térben a merőlegesség fogalmának bevezetésére.

3.2.1. Definíció. Legyen X egy euklideszi tér.

i) Akkor mondjuk, hogy $\varphi, \psi \in X$ vektorok ortogonálisak, ha $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$.

ii) Legyen $\{\varphi_n, n \in \Gamma\}$ X -beli vektorok véges, vagy végtelen rendszere. Akkor mondjuk, hogy az $\{\varphi_n, n \in \Gamma\}$ vektorrendszer ortogonális, ha

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, \text{ ha } i \neq j \quad (i, j \in \Gamma).$$

iii) Az $\{\varphi_n, n \in \Gamma\}$ vektorrendszert ortonormálnak nevezzük, ha

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (i, j \in \Gamma).$$

A definícióból következik, hogy minden ortonormált rendszer ortogonális. Visszafelé általában nem igaz az állítás, viszont minden, a tér nullelemét nem tartalmazó $\{\psi_n, n \in \Gamma\}$ ortogonális rendszer normálható, azáltal, hogy a

$$\varphi_n := \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|} \quad (n \in \Gamma)$$

rendszerrel helyettesítjük, ahol $\|\cdot\|$ a skaláris szorzat által indukált norma.

Az $\{\varphi_n, n \in \Gamma\}$ rendszer már ortonormált: Ha $i \neq j$, akkor

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \left\langle \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|}, \frac{\psi_j}{\|\psi_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\psi_i\| \cdot \|\psi_j\|} \cdot \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0,$$

ha $i = j$, akkor

$$\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \left\langle \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|}, \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\psi_i\|^2} \cdot \underbrace{\langle \psi_i, \psi_i \rangle}_{\|\psi_i\|^2} = 1.$$

Kérdés, hogy ha egy X euklideszi térben $\{\varphi_n, n \in \Gamma\}$ egy ortonormált rendszer, $f \in X$ tetszőleges, akkor $N \in \mathbb{N}$ esetén lesz-e a $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ vektoroknak olyan lineáris kombinációja, amely legjobban közelíti meg f -et a skaláris szorzat által indukált norma által definiált távolság értelmében? Erre az ún. minimum-feladatra ad választ a következő

3.2.2. Tétel. Legyen $\{\varphi_n, n \in \Gamma\}$ ortonormált rendszer a valós vagy a komplex számtest feletti X euklideszi térben. Valamely $N \in \mathbb{N}$ rögzített szám esetén tekintsük az

$$Y := \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\} = \{c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_N \varphi_N \mid c_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \dots, N\}$$

altér elemeit.

Ekkor minden $f \in X$ vektorhoz egyértelműen létezik $g \in Y$ vektor, hogy

$$\|f - g\| = \inf\{\|f - h\|, h \in Y\},$$

még hozzá

$$g = \sum_{k=0}^N \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Érvényes továbbá a Bessel-féle azonosság is, azaz

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^N |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \quad (3.2.1)$$

Bizonyítás. Legyen $h \in Y$ tetszőleges. Ekkor léteznek a $c_0, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K}$ együtthatók, amelyekkel

$$h = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_N \varphi_N.$$

Az f és h vektorok távolságnégyzete:

$$\begin{aligned} \|f - h\|^2 &= \langle f - h, f - h \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, h \rangle - \langle h, f \rangle + \langle h, h \rangle = \|f\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle f, h \rangle) + \|h\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle f, \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k \rangle) + \|h\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^N \operatorname{Re}(\bar{c}_k \langle f, \varphi_k \rangle) + \langle \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k, \sum_{l=0}^N c_l \varphi_l \rangle = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^N 2\operatorname{Re}(\bar{c}_k \langle f, \varphi_k \rangle) + \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N c_k \bar{c}_l \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle}_{=\delta_{kl}} = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^N 2\operatorname{Re}(\bar{c}_k \langle f, \varphi_k \rangle) + \sum_{k=0}^N |c_k|^2 = \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=0}^N (|c_k|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{c}_k \langle f, \varphi_k \rangle)) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^N |c_k - \langle f, \varphi_k \rangle|^2 - \sum_{k=0}^N |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Mivel $\|f - h\|^2$ előállításában csak $\sum_{k=0}^N |c_k - \langle f, \varphi_k \rangle|^2 \geq 0$ függ h -től, ezért $\|f - h\|^2$ pontosan akkor minimális, ha $\sum_{k=0}^N |c_k - \langle f, \varphi_k \rangle|^2 = 0$, azaz ha

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

A minimális távolságnégyzet tehát $g := \sum_{k=0}^N \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ esetén adódik. Ekkor

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^N |\langle f, \varphi_k \rangle|^2,$$

amivel állításunkat bebizonyítottuk.

□

3.2.3. Megjegyzés.

1. Nyilvánvaló, hogy ha $f \in Y$, akkor $g = f$ és $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^N |\langle f, \varphi_k \rangle|^2$.

Ha ezt összevetjük (3.2.1) Bessel-féle azonossággal, akkor a Pitagorasz-tétel egy általánosítását kapjuk:

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2 \Leftrightarrow \|f - g\|^2 + \|g\|^2 = \|f\|^2.$$

2. Mivel $\|f - g\|^2 \geq 0$, ezért $\|f\|^2 - \sum_{k=0}^N |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \geq 0$, amelyből átrendezéssel kapható az alábbi *Bessel-féle egyenlőtlenség*nek nevezett összefüggés:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=0}^N |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \quad (N \in \Gamma). \quad (3.2.2)$$

Ha $\Gamma = \mathbb{N}$, akkor az előző egyenlőtlenség minden $N \in \mathbb{N}$ esetén teljesül. Az $N \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik a Bessel-féle egyenlőtlenség végtelen rendszerre vonatkozó alakja:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \quad (3.2.3)$$

3.2.4. Megjegyzés. Ha az ortonormált $\{\varphi_n, n \in \Gamma\}$ rendszer helyett az ortogonális $\{\psi_n, n \in \Gamma\}$ rendszert használjuk, akkor az f vektorhoz legközelebb eső altérbeli g vektor előállítása a következő:

$$g = \sum_{k=0}^N \frac{\langle f, \psi_k \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle} \psi_k.$$

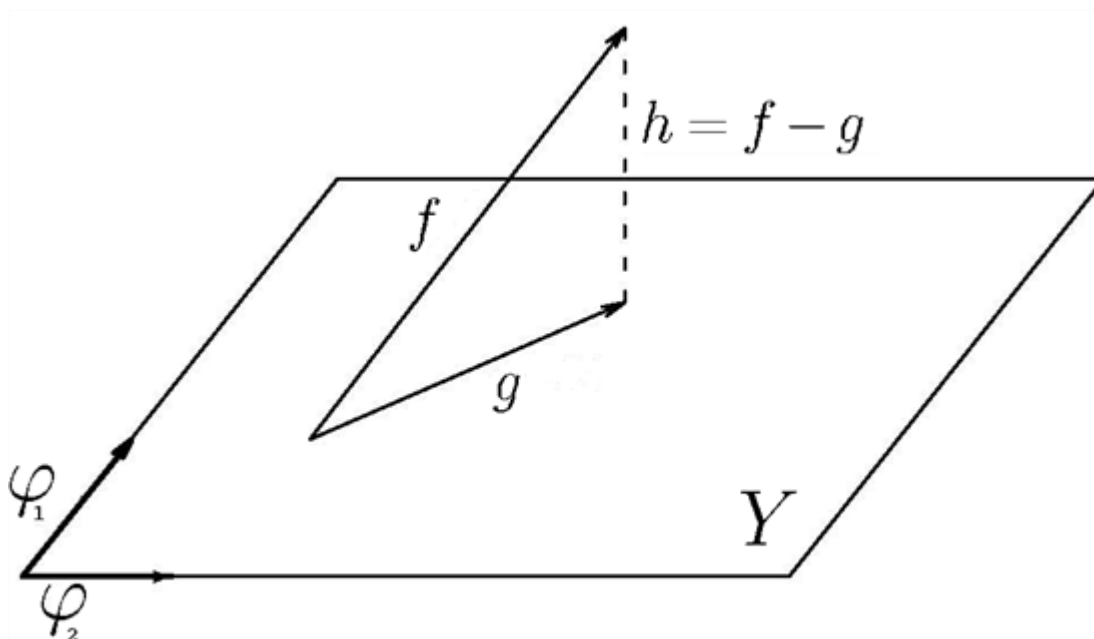
3.2.5. Következmény. A 3.2.2. tételben definiált $f - g$ elem ortogonális az Y altérre.

Bizonyítás. Azt szeretnénk belátni, hogy $f - g$ ortogonális az Y altér bármely elemére. Legyen $h \in Y$ tetszőleges. Ekkor $h = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k$ valamely $c_0, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K}$ számokkal. A skaláris szorzat tulajdonsága és a rendszer ortonormáltsága miatt

$$\begin{aligned} \langle f - g, h \rangle &= \langle f, h \rangle - \langle g, h \rangle = \langle f, \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k \rangle - \langle \sum_{k=0}^N \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{i=0}^N c_i \varphi_i \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^N c_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N c_i \langle f, \varphi_k \rangle \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_i \rangle}_{=\delta_{ki}} = \sum_{k=0}^N c_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=0}^N c_k \langle f, \varphi_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

A tételben szereplő g vektort az f függvény Y altérre vett *merőleges vetületének* (merőleges projekciójának) is szokás nevezni. Jelölés: $P_Y f$. A 3.2.5. következmény állítását szemlélteti a 3.1. ábra az $X = \mathbb{R}^3$ és $Y = \mathbb{R}^2$ esetben.

3.1. ábra - $\mathbb{R}^3$ -beli vektor $\mathbb{R}^2$ -re vett merőleges vetülete



2.2. Parseval-formula és Riesz-Fischer Tétel. ortogonális sorokra

Mivel 3.2.2. Tételben szereplő rendszer ortonormált, ezért a közönséges vektorok analógiájára az $\langle f, \varphi_n \rangle$ skaláris szorzat az f vektornak a φ_n irányára való vetületének (*komponensének*) nevezhető. (3.2.3) Bessel-egyenlőtlenség tehát azt fejezi ki, hogy minden X -beli f hosszának a négyzete nagyobb vagy egyenlő, mint a $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ ortonormált rendszerre vonatkozó komponenseinek négyzetösszege.

Véges dimenziós vektortérben minden vektor hosszának négyzete egyenlő a komponenseinek négyzetösszegével, feltéve, hogy az ortonormált rendszert n darab egységvektor alkotja. A dimenzió megadása nélkül az ilyen típusú ortonormált rendszerek úgy jellemezhetők, hogy teljesek, azaz nem bővíthetők újabb elemmel.

Ez az értelmezés végtelen dimenziós rendszerekre is kiterjeszthető.

3.2.6. Definíció. Legyen X egy euklideszi tér. Egy $\{\varphi_n \in X, n \in \Gamma\}$ – ahol Γ véges vagy végtelen indexhalmaz – ortogonális rendszer teljes, ha nem bővíthető, azaz, ha nincs X -nek a tér nullelemétől különböző olyan ψ eleme, amely a rendszer összes elemére ortogonális.

A teljesség definíciójából következik, hogy ha valamely $f \in X$ elemre a teljes $\{\varphi_n \in X, n \in \Gamma\}$ ortogonális rendszer minden eleme ortogonális, azaz

$$\langle f, \varphi_n \rangle = 0 \quad (n \in \Gamma),$$

akkor f a tér nulleleme.

Nyilvánvaló, hogy nem minden – akár végtelen sok elemű – ortogonális rendszer teljes, hiszen, ha egy teljes ortogonális rendszer akár egy elemét is elhagyjuk, az már nem lesz teljes.

A véges dimenziós vektorterek analógiájára azt várjuk, hogy teljes rendszerek esetén a Bessel-egyenlőtlenségben az egyenlőség jele legyen érvényes. Erre keresünk választ ebben a fejezetben.

A rendszer teljessége mellett az $\mathbb{R}^n$ -térre is jellemző teljességet is fel kell tennünk, azaz a továbbiakban Hilbert-tereket vizsgálunk.

3.2.7. Tétel. Legyen $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ $f \in X$, teljes ortonormált rendszer a valós vagy komplex számtest feletti X Hilbert-térben. Ekkor bármely vektor esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n = f, \quad (3.2.4)$$

azaz a sor részletösszegeire

$$\|f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k\| = \|f - s_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

ahol $\|\cdot\|$ a skaláris szorzat által indukált normát jelöli. Érvényes továbbá az

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \quad (3.2.5)$$

ún. Parseval-formula.

Bizonyítás. Legyen $f \in X$ tetszőleges, és $m < n$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \langle s_n - s_m, s_n - s_m \rangle = \left\langle \sum_{k=m+1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{l=m+1}^n \langle f, \varphi_l \rangle \varphi_l \right\rangle = \\ &= \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n \langle f, \varphi_l \rangle \cdot \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} \cdot \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_{k=m+1}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Legyen $c_k := \langle f, \varphi_k \rangle$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor (3.2.3) Bessel-egyenlőtlenség alapján $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$, így a $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$ végtelen sor konvergens. Alkalmazva a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia-kritériumot kapjuk, hogy

$$\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty). \quad (3.2.7)$$

(3.2.6) átalakításba a kapott eredményeket visszaírva, $\|s_n - s_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$, azaz $(s_n, n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat az X Hilbert térben. Mivel X teljes, ezért benne minden Cauchy-sorozat konvergens, így létezik $s \in X$ elem, hogy

$$\|s_n - s\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Belátjuk, hogy $s = f$. Egyrészt

$$|\langle s - s_n, \varphi_k \rangle| = |\langle s, \varphi_k \rangle - \langle s_n, \varphi_k \rangle| = \left| \langle s, \varphi_k \rangle - \left\langle \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i, \varphi_k \right\rangle \right| = \left| \langle s, \varphi_k \rangle - \sum_{i=0}^n c_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle \right| = |\langle s, \varphi_k \rangle - c_k|,$$

másrészt a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$|\langle s - s_n, \varphi_k \rangle| \leq \|s - s_n\| \cdot \|\varphi_k\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így $|\langle s, \varphi_k \rangle - c_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$, ami pontosan akkor teljesül, ha $\langle s, \varphi_k \rangle \rightarrow c_k \quad (n \rightarrow \infty)$. Mivel $\langle s, \varphi_k \rangle$ független n -től, ezért

$$\langle s, \varphi_k \rangle = c_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Az $\langle f, \varphi_k \rangle = c_k$ ($k \in \mathbb{N}$) előállításból kapjuk, hogy

$$\langle f - s, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle - \langle s, \varphi_k \rangle = c_k - c_k = 0.$$

Mivel $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ teljes, ezért $s - f = 0$, azaz $s = f$. Beírva s helyére f -et (3.2.7) képletbe a normakonvergenciára vonatkozó állítást kapjuk. Az

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2$$

(3.2.2) Bessel-formulából, $n \rightarrow \infty$ határátmenettel a

$$0 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$$

összefüggéshez jutunk, amelyből átrendezéssel kapható a Parseval-formula.

□

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben akárhogyan adunk meg számokat, pontosan egy olyan vektor van, amelyek adott n -dimenziós derékszögű-koordináta-rendszerben rendre ezek a komponensei.

Felvetődik a kérdés, hogy végtelen dimenzióban is érvényes-e – ha igen milyen feltételekkel – ez a megállapítás. Erre a kérdésre ad választ a

3.2.8. Tétel. Legyen $(c_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2$, azaz egy olyan $\mathbb{K}$ -beli számsorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

és legyen $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ teljes ortonormált rendszer az X $\mathbb{K}$ számtest feletti Hilbert-térben. Ekkor egyértelműen létezik $f \in X$ vektor, hogy

$$\langle f, \varphi_n \rangle = c_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. Egzisztencia: Mivel $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, ezért a numerikus sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia-kritérium alapján $\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \rightarrow 0$, ha $n, m \rightarrow \infty$.

A 3.2.7. tétel jelöléseit és bizonyításának egy részét megismételve kapjuk, hogy az X -beli $(s_n := \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k, n \in \mathbb{N})$ sorozat Cauchy-sorozat, mert

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Mivel az X tér teljes, ezért létezik $f \in X$ elem, hogy $\|s_n - f\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$0 \leq |\langle s_n - f, \varphi_k \rangle| \leq \|s_n - f\| \cdot \|\varphi_k\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

A rendőrelv alapján $|\langle s_n - f, \varphi_k \rangle| \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, így

$$\langle \varepsilon_n - f, \varphi_k \rangle = \langle \varepsilon_n, \varphi_k \rangle - \langle f, \varphi_k \rangle = c_k - \langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mivel $c_k - \langle f, \varphi_k \rangle$ független n -től, ezért

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Unicitás: Tegyük fel, hogy $f_1, f_2 \in X$ vektorok esetén $c_k = \langle f_1, \varphi_k \rangle = \langle f_2, \varphi_k \rangle$ minden $k \in \mathbb{N}$ indexre teljesül. Ekkor

$$\langle f_1, \varphi_k \rangle - \langle f_2, \varphi_k \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle f_1 - f_2, \varphi_k \rangle = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Mivel $(\varphi_k, k \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer, ezért ez csak úgy teljesülhet, ha $f_1 - f_2 = 0$, azaz, ha $f_1 = f_2$.

□

2.3. Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció

Ebben az alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy egy euklideszi térben, hogyan lehet ortonormált vektorrendszert létrehozni.

3.2.9. Tétel. Legyen X egy euklideszi tér és $\{f_0, f_1, \dots, f_k, \dots\}$ X -beli nemnulla elemek véges, vagy megszámlálhatóan végtelen rendszere. Tegyük fel, hogy a fenti rendszer lineárisan független. Ekkor létezik $\{g_0, g_1, \dots, g_k, \dots\}$ ortonormált rendszer, melyre

$$\text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_k\} = \text{span}\{f_0, f_1, \dots, f_k\} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (3.2.8)$$

Bizonyítás. A tételre konstruktív bizonyítást fogunk adni, azaz megmutatjuk, hogyan állítható elő $\{f_0, f_1, \dots, f_k, \dots\}$ rendszer ismeretében a keresett ortonormált rendszer.

i) Legyen $g_0 := \frac{f_0}{\|f_0\|}$. Ekkor $\|g_0\| = 1$ és $\text{span}\{g_0\} = \text{span}\{f_0\}$ nyilvánvalóan teljesül.

ii) Tegyük fel, hogy valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\{g_0, g_1, \dots, g_{k-1}\}$ rendszer már ismert.

iii) Határozzuk meg a feltételeknek elegettevő g_k elemet, azaz g_k legyen olyan vektor, melyre

$$\text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_k\} = \text{span}\{f_0, f_1, \dots, f_k\}$$

teljesül. Ekkor $f_k \in \text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_k\}$, azaz

$$f_k = \sum_{j=0}^k c_{jk} g_j,$$

ahol $c_{jk} \in \mathbb{K}$ ($j=0, \dots, k$) és $c_{kk} \neq 0$. A fenti összefüggést átrendezve kapható, hogy

$$g_k = \frac{1}{c_{kk}} \left(f_k - \sum_{j=0}^{k-1} c_{jk} g_j \right). \quad (3.2.9)$$

Mivel $\{g_0, g_1, \dots, g_k\}$ ortonormált rendszer, ezért

$$\langle g_k, g_j \rangle = 0 \quad (j=0, \dots, k-1).$$

A fenti skaláris szorzatokat (3.2.9) egyenlettel összevetve k darab feltétel kapható:

$$0 = \langle g_k, g_\ell \rangle = \frac{1}{c_{kk}} \left(\langle f_k, g_\ell \rangle - \sum_{j=0}^{k-1} c_{jk} \langle g_j, g_\ell \rangle \right) \quad (\ell = 0, 1, \dots, k-1).$$

Mivel $\langle g_j, g_\ell \rangle = \delta_{j\ell}$, $(j, \ell \in \{0, 1, \dots, k-1\})$, ezért a j -edik feltétel jobboldalán szereplő összeg tagjai egy kivétellel mind egyenlők nullával, így a következő egyszerűbb feltételrendszer írható:

$$\langle f_k, g_\ell \rangle = c_{kk} \underbrace{\langle g_\ell, g_\ell \rangle}_{=1} = c_{kk} \quad (\ell = 0, 1, \dots, k-1).$$

Ily módon a g_k felírásához szükséges együtthatókat a c_{kk} együttható kivételével meghatároztuk, ez utóbbit a normáltsági feltételből nyerhetjük:

$$\langle g_k, g_k \rangle = 1 \Rightarrow c_{kk} = \left\| f_k - \sum_{j=0}^{k-1} c_{jk} g_j \right\|.$$

□

3.2.10. Megjegyzés. Az előző bizonyítás alapját adó módszert Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásnak nevezzük.

3.2.11. Megjegyzés. Gyakran az előállítandó rendszer esetén nincs szükségünk arra, hogy elemei normáltak is legyenek. Ilyenkor a konstrukcióban a normáltsági feltételtől eltekinthetünk, helyette a $c_{kk} = 1$ feltételt vehetjük. A számolásaink az új feltétellel egyszerűbbek lehetnek. Vigyáznunk kell azonban, hogy a c_{kk} együtthatók számolása során $\langle g_\ell, g_\ell \rangle$ skaláris szorzat értéke nem feltétlenül 1, így az együtthatókra

$$c_{kk} = \frac{\langle f_k, g_\ell \rangle}{\langle g_\ell, g_\ell \rangle} \quad (\ell = 0, 1, \dots, k-1)$$

összefüggés adódik.

4. fejezet - Integrálható függvények terei

Ebben a fejezetben Hilbert térre példaként a négyzetesen integrálható függvények terét nézzük. Bevezetjük a Fourier-sorok általános fogalmát. A négyzetesen integrálható függvények terében a klasszikus trigonometrikus rendszer mellett a Rademacher-, Walsh-Paley-, Haar-rendszerrel, továbbá néhány ortogonális polinomrendszerrel ismerkedhetünk meg.

A fejezet végén az L^p tereket vezetjük be, melyről megmutatjuk, hogy Banach teret alkotnak $p \geq 1$ esetén.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: L^2 tér, szeparábilis tér, Fourier-sor, Fourier-együttható, trigonometrikus rendszer, Rademacher-rendszer, Haar-rendszer, Ortogonális polinomok.

Szükséges előismeret: 2. fejezet, 3. fejezet.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 4 tanóra + 4 óra önálló munka.

1. Az L^2 függvénytér

A fizikában és a matematika számos ágában fontos szerepet játszanak a négyzetesen integrálható függvények és az ortogonális sorfejtések.

4.1.1. Definíció. Legyen (a, b) egy véges vagy nem véges intervallum. Az (a, b) intervallumon értelmezett, Lebesgue-mérhető függvények halmazát, melyek négyzete integrálható, négyzetesen integrálható függvények terének nevezzük. Jelölés:

$$L^2 = L^2_{(a,b)} := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető és } f^2 \in L_{(a,b)}\}.$$

Megjegyzés.

1. Ha (a, b) véges intervallum, akkor ha f négyzetesen integrálható, akkor nyilván az $(1 + f^2)/2$ is integrálható, viszont a számtani, mértani közép közötti összefüggés alapján érvényes az

$$|f| \leq \frac{1 + f^2}{2},$$

becslés, és mivel f mérhető, ezért integrálható is (lásd a 4.2. megjegyzés).

2. Ha (a, b) végtelen intervallum, akkor a négyzetes integrálhatóságból nem következik az integrálhatóság. Ilyen például az $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in (1, \infty)$) függvény, ami nem integrálható, de négyzetesen integrálható.

3. Az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ valós változós komplex értékű függvényt akkor mondjuk négyzetesen integrálhatónak, ha mérhető és f abszolút értékének négyzete integrálható.

1.1. Az L^2 tér Hilbert-tér

Ebben a fejezetben belátjuk, hogy az L^2 függvénytér Hilbert-tér. Először igazoljuk, hogy L^2 **lineáris teret alkot az $\mathbb{R}$ számtest felett.**

Belátjuk, hogy ha $f, g \in L^2$, akkor $f + g \in L^2$, ahol $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ($x \in (a, b)$). Az állítás igazolása előtt igazoljuk, hogy $fg \in L^1$, ahol $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ($x \in (a, b)$).

Legyen $\lambda > 0$ tetszőleges. Ekkor a számtani és mértani közép közti összefüggés alapján:

$$\frac{\frac{1}{\lambda} f^2 + \lambda g^2}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{\lambda} f^2 \lambda g^2} = |fg|. \quad (4.1.1)$$

Mivel f és g is Lebesgue-mérhető, ezért fg is mérhető.¹ A (4.1.1) összefüggés alapján fg -nek van integrálható majoránsa és fg Lebesgue-mérhető, ezért 2.7.2./2. megjegyzés alapján fg valóban integrálható.

Térjünk vissza az $f + g \in L^2$ állítás vizsgálatára. Az $f + g$ Lebesgue-mérhetősége a sorozatok határértékére vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján nyilvánvalóan teljesül. Mivel $(f + g)^2$ felírható három integrálható függvény összegeként $(f + g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$, ezért Lebesgue-integrálható.

A valós számokra vonatkozó műveleti tulajdonságokból következik, hogy $(L^2, +)$ Abel-csoport, melynek zérus-eleme az $f = 0$ m.m. függvény.

A λf függvény $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \ (x \in (a, b))$ Lebesgue-mérhető, mivel f Lebesgue-mérhető, továbbá négyzetesen integrálható, hiszen f is négyzetesen integrálható, és $(\lambda f)^2 = \lambda^2 f^2$. A skalárral való szorzásra a megkívánt tulajdonságok nyilván teljesülnek.

Most belátjuk, hogy L^2 **euklideszi tér**. Vezessük be az

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

skaláris szorzatot és ellenőrizzük, hogy a fenti leképezés teljesíti-e a skaláris szorzat tulajdonságait.

i) $\langle f, f \rangle \geq 0$ minden $f \in L^2$ függvény esetén, hiszen $f^2 \geq 0$ (2.5.7. lemma).

$\langle f, f \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f^2 = 0$ m.m. és így $f = 0$ m.m.

ii) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, mivel $fg = gf$ teljesül.

iii) $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle$.

$$\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \int_a^b (\lambda f + \mu g)h = \int_a^b \lambda fh + \int_a^b \mu gh = \lambda \int_a^b fh + \mu \int_a^b gh = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle.$$

A skaláris szorzat által indukált norma:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \quad (f \in L^2).$$

Mivel a fenti normát a skaláris szorzat indukálja, ezért biztosan rendelkezik a norma-tulajdonságokkal.

Megjegyzés. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség ebben a térben egyszerűen adódik a korábban már igazolt (4.1.1) egyenlőtlenség segítségével. Integráljuk (4.1.1) mindkét oldalát,

$$\int_a^b |fg| \leq \frac{\frac{1}{\lambda} \int_a^b f^2 + \lambda \int_a^b g^2}{2},$$

¹Léteznek $(\varphi_n \in C_0, n \in \mathbb{N})$, $(\psi_n \in C_0, n \in \mathbb{N})$ lépcsősfüggvény-sorozatok, hogy $\varphi_n \rightarrow f$ és $\psi_n \rightarrow g$ majdnem mindenütt az (a, b) -n $(n \rightarrow \infty)$. Ekkor $\varphi_n \psi_n \rightarrow fg$ m.m. $(n \rightarrow \infty)$ az (a, b) intervallumon, azaz fg valóban mérhető.

majd válasszuk $\lambda > 0$ értékét olyannak, hogy $\frac{1}{\lambda} \int_a^b f^2 = \int_a^b g^2$ feltétel teljesüljön. Ekkor

$$\lambda = \sqrt{\int_a^b f^2 / \int_a^b g^2}$$

és a fenti egyenlőtlenség az alábbi alakba írható:

$$\int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2} = \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}. \quad (4.1.2)$$

Ezzel a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenségnél erősebb egyenlőtlenséget igazoltunk, hiszen:

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2} = \|f\| \cdot \|g\|.$$

Már csak annak igazolása van hátra, hogy az L^2 tér teljes.²

Tétel. 95 (Riesz-Fischer Tétel.) Az L^2 tér teljes, azaz az $(f_n \in L^2, n \in \mathbb{N})$ sorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha létezik $f \in L^2$ függvény, amelyhez a függvénysorozat normában konvergál $(f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f (n \rightarrow \infty))$, azaz ha $\|f_n - f\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f (n \rightarrow \infty)$. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n \rightarrow 0} \|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f - f_m\|}_{\rightarrow 0},$$

tehát $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ ha $n, m \rightarrow \infty$.³

Tegyük fel, hogy $(f_n, n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat. Ekkor

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy } n, m > N \text{ esetén } \|f_n - f_m\| < \varepsilon. \quad (4.1.3)$$

A bizonyítást két lépésben végezzük.

1. lépés: Belátjuk, hogy $(f_n, n \in \mathbb{N})$ -nek van egy olyan részsorozata, amely majdnem mindenütt konvergál egy integrálható függvényhez.

A fenti (4.1.3) definícióban legyen $\varepsilon := \frac{1}{2^k}$. Ekkor

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists N_k \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy } n, m > N_k \text{ esetén } \|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Válasszuk az $(m_k, k \in \mathbb{N})$ indexsorozat, hogy $\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\| < \frac{1}{2^k} (k \in \mathbb{N})$ teljesüljön. Ehhez

²Ennek az állításnak az igazolása Riesz Frigyes Riesz Frigyes(1880-1956) magyar matematikus, egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, a funkcionálanalízis egyik megalapítója. és az osztrák matematikus Ernst Fischer (1875-1954) nevéhez fűződik, akik két hónap különbséggel, egymástól teljesen függetlenül nyújtották be eredményüket ugyanahhoz a laphoz. (Riesz Frigyes nyújtotta be korábban.)

³Az állításnak ez a fele minden metrikus térben igaz.

$$\begin{aligned} m_{k+1} &> m_k > N_k \\ m_{k+2} &> m_{k+1} > N_{k+1} \\ m_{k+2} &> N_{k+2} \\ &\vdots & \vdots \end{aligned}$$

egyenlőtlenségeket kell az indexsorozatnak teljesítenie. Tekintsük a következő teleszkópikus összeget:

$$f_{m_0} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{m_k} - f_{m_{k-1}}.$$

Ennek a sornak a részletösszeg-sorozatának n . eleme ($n \in \mathbb{N}$):

$$f_{m_0} + \sum_{k=1}^n f_{m_k} - f_{m_{k-1}} = f_{m_0} + (f_{m_1} - f_{m_0}) + (f_{m_2} - f_{m_1}) + (f_{m_3} - f_{m_2}) + \dots + (f_{m_n} - f_{m_{n-1}}) = f_{m_n}.$$

Legyen (α, β) az (a, b) intervallum egy véges részintervalluma, és tekintsük az alábbi integrálokat:

$$I_n := \int_{\alpha}^{\beta} |f_{m_0}| + \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} |f_{m_k} - f_{m_{k-1}}| = \int_{\alpha}^{\beta} |f_{m_0}| + \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} |f_{m_k} - f_{m_{k-1}}|. \quad (4.1.4)$$

Mivel a konstans függvény véges intervallumon négyzetesen integrálható, ezért érvényes a (4.1.2) egyenlőtlenség. Ezzel a (4.1.4) jobb oldala becsülhető:

$$\begin{aligned} I_n &\leq \|1\| \cdot \|f_{m_0}\| + \sum_{k=1}^n \|1\| \cdot \|f_{m_k} - f_{m_{k-1}}\| = \sqrt{\beta - \alpha} \cdot \|f_{m_0}\| + \sum_{k=1}^n \sqrt{\beta - \alpha} \cdot \|f_{m_k} - f_{m_{k-1}}\| \leq \\ &\leq \sqrt{\beta - \alpha} \cdot \|f_{m_0}\| + \sum_{k=1}^n \sqrt{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{2^k} = \sqrt{\beta - \alpha} \cdot \left(\|f_{m_0}\| + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} \right) \leq \sqrt{\beta - \alpha} \cdot (\|f_{m_0}\| + 1) \end{aligned}$$

Ekkor a Beppo Levi tétel 3. következménye (2.6.6. következmény/c)) miatt

$$f_{m_0} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{m_k} - f_{m_{k-1}}$$

függvénysor majdnem mindenütt konvergens (sőt, majdnem mindenütt abszolút konvergens) az (α, β) intervallumon. Mivel a fenti függvénysor részletösszeg-sorozata $(f_{m_n}, n \in \mathbb{N})$, ezért létezik az (α, β) intervallumon integrálható f függvény, hogy $f_{m_n} \rightarrow f$ m.m. ($n \rightarrow \infty$) az (α, β) -n.

Ha az (a, b) intervallum nem véges, akkor előállítjuk megszámlálható sok véges intervallum egyesítéseként. Mindegyik részintervallumon érvényes a fenti gondolatmenet, ezért azt kapjuk, hogy $(f_{m_n}, n \in \mathbb{N})$ majdnem mindenütt konvergál egy f függvényhez az (a, b) intervallumon.

2. lépés: Belátjuk, hogy f négyzetesen integrálható, és hogy a függvénysorozat normában konvergál hozzá, azaz

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

A (4.1.3) definíció alapján ha $n > N$ és $m_k > N$, akkor ⁴

$$\|f_n - f_{m_k}\| < \varepsilon.$$

⁴Mivel $m_k \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$, ezért biztosan létezik olyan k index, amelyre $m_k > N(\varepsilon)$ teljesül.

Az így kapott egyenlőtlenséget négyzetre emelve és a norma definícióját beírva kapjuk, hogy

$$\|f_n - f_{m_k}\|^2 = \int_a^b (f_n - f_{m_k})^2 < \varepsilon^2 \quad n, m_k > N. \quad (4.1.5)$$

Legyen $n > N$ tetszőleges rögzített szám. Mivel $f_{m_k} \rightarrow f$ majdnem mindenütt, ha $k \rightarrow \infty$, ezért [•]

$$(f_n - f_{m_k})^2 \rightarrow (f_n - f)^2 \quad m.m. \quad (k \rightarrow \infty),$$

$$(f_n - f_{m_k})^2 \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

• Az $((f_n - f_{m_k})^2, k \in \mathbb{N})$ sorozat integráljai felülről korlátosak (4.1.5)),

tehát az $((f_n - f_{m_k})^2, k \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra alkalmazható a 2.7.3. Fatou-féle lemma: Az $(f_n - f)^2$ függvény integrálható, és

$$\int_a^b (f_n - f)^2 \leq \varepsilon^2 \quad (4.1.6)$$

Mivel $f_n - f$ mérhető, ezért négyzetesen integrálható.

Felhasználva, hogy f_n és $f_n - f$ is L^2 -beli függvények, adódik, hogy

$$f_n - (f_n - f) = f \in L^2,$$

továbbá (4.1.6) miatt a normakonvergencia is teljesül.

□

A teljesség igazolásával beláttuk a következő tételt:

4.1.3. Tétel. Az L^2 függvénytér Hilbert-tér.

4.1.4. Megjegyzés. Az általunk bevezetett L^2 teret pontosabban valós L^2 térnek nevezik, megkülönböztetve a komplex L^2 tértől, mely egy valós (a, b) véges vagy nem véges intervallumon értelmezett komplex értékű, négyzetesen integrálható függvényekből áll. A komplex L^2 függvénytér tehát olyan mérhető f függvényekből áll, melyekre $|f|^2$ is integrálható.⁵ A skaláris szorzat és a norma ebben az esetben a következő alakot ölti:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

A skaláris szorzat és a norma is rendelkezik a megkívánt tulajdonságokkal, és a komplex L^2 tér is Hilbert tér. A továbbiakban, ha külön nem hangsúlyozzuk ki, akkor L^2 téren továbbra is valós L^2 teret értünk.

1.2. Teljes ortogonális rendszer létezése az L^2 térben

Legyen (a, b) véges vagy nem véges intervallum. Létezik-e az $L^2 = L^2_{(a,b)}$ -térben megszámlálható teljes ortonormált rendszer? Ebben a fejezetben erre a kérdésre fogunk választ kapni.

⁵Egy valós változós komplex értékű $f = u + iv$ függvény akkor mérhető illetve integrálható, ha a valós és a képzetes része mérhető illetve

integrálható. Az f függvény integrálja: $\int_a^b f = \int_a^b u + i \int_a^b v$.

Véges elemből álló ortonormált rendszer nem létezik. Indirekt módon tegyük fel ugyanis, hogy van n ($n \in \mathbb{N}^*$) elemű teljes ortonormált rendszer. Ekkor az L^2 tér bármilyen n elemű rendszere már lineárisan összefüggő, azaz lineáris kombinációjuk előállítja a tér nullelemét.

Tekintsünk $n+1$ darab közös pont nélküli, véges mértékű $I_0, I_1, \dots, I_n \subset (a, b)$ intervallumot. A $\chi_{I_0}, \chi_{I_1}, \dots, \chi_{I_n}$ karakterisztikus függvények négyzetesen integrálhatók és nincsenek olyan $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$ valós számok, melyekre

$$c_0 \chi_{I_0} + c_1 \chi_{I_1} + \dots + c_n \chi_{I_n} = 0 \quad m.m.$$

teljesülne az (a, b) intervallumon, azaz a $\chi_{I_0}, \chi_{I_1}, \dots, \chi_{I_n}$ függvények nem lineárisan összefüggők. Ellentmondásra jutottunk, tehát valóban nem létezik véges elemből álló teljes ortogonális rendszer L^2 -ben.

Mielőtt a megszámlálhatóan végtelen teljes ortogonális rendszer létezését igazolnánk, egy új fogalmat vezetünk be.

4.1.5. Definíció. Egy (X, ρ) metrikus tér *szeparábilis*, ha van X -nek egy megszámlálható, X -ben mindenütt sűrű H részhalmaza, azaz minden $x \in X$ és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $h \in H$ elem, melyre $\rho(x, h) < \varepsilon$.

4.1.1 Példa. Az $\mathbb{R}^n$ -tér szeparábilis, mert a $\mathbb{Q}^n$ egy megszámlálható, $\mathbb{R}^n$ -ben mindenütt sűrű részhalmaza.

A megszámlálható, teljes ortonormált rendszer létezésére vonatkozó tétel bizonyításánál ki fogjuk használni, hogy az L^2 tér szeparábilis.

4.1.6. Tétel. Az L^2 -tér szeparábilis.

Bizonyítás. Legyen f az L^2 tér tetszőleges eleme és legyen $(f_n, n \in \mathbb{N})$ a következő függvénysorozat:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |f_n(x)| > n \text{ vagy } x \in (a, b) \setminus (-n, n), \\ f(x), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor nyilván $f - f_n \rightarrow 0$ (a, b) -n, továbbá mivel

$$f(x) - f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } |f_n(x)| > n \text{ vagy } x \in (a, b) \setminus (-n, n), \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ezért $(f - f_n)^2 \leq f^2$. A 2.7.1. Lebesgue tételét az $(f - f_n)^2$ függvénysorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|f - f_n\|^2 = \int_a^b (f(x) - f_n(x))^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

tehát f tetszőlegesen megközelíthető (az L^2 -távolságra nézve) véges intervallumon nem nulla, korlátos, L^2 -beli függvényekkel.

Legyen g egy véges (α, β) intervallumon nem nulla, korlátos (létezik $M > 0$, melyre $|g| \leq M$) mérhető függvény. Mivel g mérhető, ezért létezik $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ lépcsősfüggvény-sorozat, melynek határértéke majdnem mindenütt g . Legyen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (a, b) \setminus (\alpha, \beta), \\ \varphi_n(x), & \text{ha } x \in (\alpha, \beta) \text{ és } |\varphi_n(x)| \leq M, \quad (n \in \mathbb{N}) \\ M, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ (α, β) -én lépcsősfüggvény-sorozat, M -árértéke majdnem mindenütt g , és mindegyik lépcsősfüggvény intervallumon kívül nulla, pedig közös korlátjuk. Alkalmazva a 2.7.2./1) megjegyzést kapjuk, hogy

$$\|g - \varphi_n\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - \varphi_n(x))^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

tehát g tetszőlegesen megközelíthető L^2 -beli távolságra nézve lépcsősfüggvénnyel.

Továbbá minden lépcsősfüggvény nyilván tetszőlegesen megközelíthető L^2 -ben olyan lépcsősfüggvénnyel, melyek értékei racionálisak és szakadási helyei is racionális számokban vannak.

Legyen

$$H := \{ \psi \in C_0 : \psi \text{ függvényértékei és szakadási helyei racionális számok} \}.$$

Mivel a racionális számok halmaza megszámlálható számosságú és egy lépcsősfüggvény véges sok különböző függvényértékkel és véges sok szakadási hellyel rendelkezik, ezért a $H \subseteq L^2$ megszámlálható számosságú.

Legyen $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ egy olyan index, melyre $\|f - f_n\| < \varepsilon/3$. Legyen továbbá φ olyan lépcsősfüggvény, melyre $\|f_n - \varphi\| < \varepsilon/3$ és $\psi \in H$, melyre $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon/3$. A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|f - \psi\| = \|f - f_n + f_n - \varphi + \varphi - \psi\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - \varphi\| + \|\varphi - \psi\| < \varepsilon.$$

Mivel f tetszőleges L^2 -beli elem volt, ezért ezzel beláttuk, hogy L^2 valóban szeparábilis.

□

Az L^2 tér szeparabilitását kihasználva már be tudjuk látni, hogy létezik benne teljes ortonormált rendszer.

4.1.7. Tétel. Az L^2 térben létezik teljes ortonormált rendszer.

Bizonyítás. Tekintsünk egy, az L^2 térben mindenütt sűrű megszámlálható halmazt. Ezek elemeit indexezzük meg:

$$g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$$

Hagyjuk el a kapott függvénysorozatból a tér nullelemét (ha benne volt), továbbá a k -elemet hagyjuk el, ha ő előáll az előzőek lineáris kombinációjaként.

Az így kapott megszámlálhatóan végtelen, lineárisan független

$$f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$$

rendszert ortogonalizáljuk (például a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással). Eredményül egy

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$$

ortonormális rendszert kapunk.

A $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer teljes. Legyen ugyanis $\psi \in L^2$ olyan függvény, mely ortogonális a $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer összes elemére. Az ortogonalizációs eljárás alapján ekkor ψ ortogonális az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer összes elemére is, hiszen (3.2.8) alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek $c_0, c_1, \dots, c_n$ valós számok, melyekre

$$f_n = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n.$$

Mivel a $(g_n, n \in \mathbb{N})$ függvény-sorozat összes eleme $g_n: (f_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat véges sok elemének lineáris kombinációjaként előáll, ezért ortogonális az összes függvényre is. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\|\psi - g_n\|^2 = \langle \psi - g_n, \psi - g_n \rangle = \langle \psi, \psi \rangle - 2\langle \psi, g_n \rangle + \langle g_n, g_n \rangle = \|\psi\|^2 + \|g\|^2 \geq \|\psi\|^2.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $(g_n, n \in \mathbb{N})$ mindenütt sűrű L^2 -ben, ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ index, melyre $\|\psi - g_n\| < \varepsilon$. Ekkor az egyenlőtlenség alapján $\|\psi\| < \varepsilon$ is teljesül. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi, ezért ez csak akkor teljesülhet, ha $\|\psi\| = 0$, azaz $\psi = 0$ majdnem mindenütt. Ezzel a teljességet bebizonyítottuk.

□

1.3. Fourier-sorok

A 4.1. fejezetben beláttuk, hogy az L^2 tér Hilbert tér. 4.1.2. fejezetben bebizonyítottuk, hogy az L^2 függvényterben létezik teljes ortonormált rendszer.

A 3.2.7. tételben szereplő sort az L^2 -tér esetében külön névvel illetjük. Erről szól a következő

4.1.8. Definíció. Legyen (a, b) egy véges intervallum, $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ egy ortonormált rendszer az L^2 téren. A (3.2.4) sorfejtést az f függvény (általánosított) Fourier-sorának, ennek c_k együtthatóit, a

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N})$$

f (általánosított) Fourier-együtthatóinak nevezzük.

A 3.2.8. Tételt speciálisan az $X = L^2$ térre felírva a Riesz-Fischer-tétel ortogonális sorokra vonatkozó megfelelőjét kapjuk.

4.1.9. Tétel (Riesz-Fischer Tétel. ortogonális sorokra). Legyen $(c_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2$, azaz egy olyan valós számsorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty,$$

és legyen $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ a korlátos (a, b) intervallumon négyzetesen integrálható függvények L^2 terében teljes ortonormált rendszer.

Ekkor egyértelműen létezik $f \in L^2$ függvény, amelynek a $(c_n, n \in \mathbb{N})$ számsorozat elemei erre a rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói, azaz, amelyre

$$\langle f, \varphi_n \rangle = c_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

4.1.10. Megjegyzés.

1. A Parseval-képlet és a Riesz-Fischer-tétel szerint a $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az L^2 függvénytér –sőt, az összes valós számtest feletti Hilbert-tér – elemei és a valós ℓ^2 sorozatok tere között.

2. A komplex számtest feletti X Hilbert-téren is érvényben marad a tétel, annyi eltéréssel, hogy ekkor komplex számokból álló $(c_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2$ sorozatokat veszünk, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

1.4. Ortogonális függvényrendszerek az L^2 térben

1.4.1. A trigonometrikus rendszer

A legismertebb példa ortogonális függvényrendszerre az ún. trigonometrikus rendszer. Ebben a fejezetben ezt a rendszert vezetjük be, továbbá megvizsgáljuk ortogonalitását, teljesség szempontjából.

4.1.11. Definíció. Az $\{1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N}^*\}$ ($x \in \mathbb{R}$) rendszert trigonometrikus rendszernek nevezzük. Az alapintervallum tetszőleges 2π hosszúságú intervallum.

4.1.12. Tétel. A trigonometrikus rendszer ortogonális minden 2π hosszúságú intervallumon.

Bizonyítás. Mivel a rendszer elemei 2π szerint periodikusak, ezért mindegy, hogy melyik 2π hosszúságú intervallumot választjuk. Legyen a vizsgált intervallum a $(-\pi, \pi)$. Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\langle 1, \cos n \cdot \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} (\sin(n\pi) - \sin(n(-\pi))) = 0,$$

továbbá

$$\langle 1, \sin n \cdot \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} (\cos(n\pi) - \cos(n(-\pi))) = 0.$$

Ha $n, m \in \mathbb{N}^*$ és $n \neq m$, akkor

$$\langle \cos n \cdot, \cos m \cdot \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x + \cos(n-m)x \, dx = 0,$$

$$\langle \sin n \cdot, \sin m \cdot \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x - \cos(n-m)x \, dx = 0,$$

$$\langle \sin n \cdot, \cos m \cdot \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x \, dx = 0,$$

mert a szinusz és a koszinusz függvény egy teljes periódusán az integrál értéke nulla.

□

A trigonometrikus rendszer nem normált, ugyanis

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi,$$

és minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\|\cos n \cdot\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\|\sin n \cdot\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

4.1.13. Megjegyzés. A trigonometrikus rendszerből a következő, bármely 2π hosszú intervallumon ortonormált rendszer származtatható:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Mivel véges intervallumon a négyzetes integrálhatóságból következik az integrálhatóság, ezért az alábbi tételben a trigonometrikus rendszer teljességénél többet bizonyítunk.

4.1.14. Tétel. Ha $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ a $(-\pi, \pi)$ intervallumon Lebesgue-integrálható függvény és

$$\int_{-x}^x f(x) dx = 0, \quad \int_{-x}^x f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad \int_{-x}^x f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*), \quad (4.1.7)$$

akkor $f(x) = 0$ majdnem minden $x \in (-\pi, \pi)$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben végezzük.

1. lépés: Tekintsünk először egy 2π szerint periodikus, folytonos F függvényt, amely a $(-\pi, \pi)$ intervallumon ortogonális a trigonometrikus rendszer elemeire. Megmutatjuk, hogy ekkor $F \equiv 0$.

Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\xi \in (-\pi, \pi)$, hogy $F(\xi) = c \neq 0$. Vezessük be a következő segédfüggvényt:

$$G(x) := \frac{1}{c} F(\xi + x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Nyilvánvaló, hogy G is folytonos és $G(0) = 1$. Mivel G folytonos, ezért létezik olyan δ szám $(0 < \delta < \frac{\pi}{2})$, hogy minden $x \in (-\delta, \delta)$ esetén $G(x) > \frac{1}{2}$.

F ortogonális a trigonometrikus rendszer minden elemére és ezt a tulajdonságot G is örökli, ugyanis mivel F 2π szerint periodikus, és (4.1.7) fennáll F -re, ezért minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x G(x) \cos nx \, dx &= \int_{-x}^x \frac{1}{c} F(\xi + x) \cos nx \, dx = \int_{-x+\xi}^{x+\xi} \frac{1}{c} F(t) \cos n(t - \xi) \, dt = \\ &= \frac{1}{c} \cos n\xi \int_{-x+\xi}^{x+\xi} F(t) \cos nt \, dt + \frac{1}{c} \sin n\xi \int_{-x+\xi}^{x+\xi} F(t) \sin nt \, dt = 0, \\ \int_{-x}^x G(x) \sin nx \, dx &= \int_{-x}^x \frac{1}{c} F(\xi + x) \sin nx \, dx = \int_{-x+\xi}^{x+\xi} \frac{1}{c} F(t) \sin n(t - \xi) \, dt = \\ &= \frac{1}{c} \cos n\xi \int_{-x+\xi}^{x+\xi} F(t) \sin nt \, dt - \frac{1}{c} \sin n\xi \int_{-x+\xi}^{x+\xi} F(t) \cos nt \, dt = 0, \end{aligned}$$

továbbá

$$\int_{-x}^x G(x) \cdot 1 \, dx = \int_{-x}^x \frac{1}{c} F(\xi + x) \, dx = \frac{1}{c} \int_{-x+\xi}^{x+\xi} F(t) \, dt = 0.$$

Legyen δ a korábban már megállapított $(0, \frac{\pi}{2})$ -beli szám. Vezessük be a

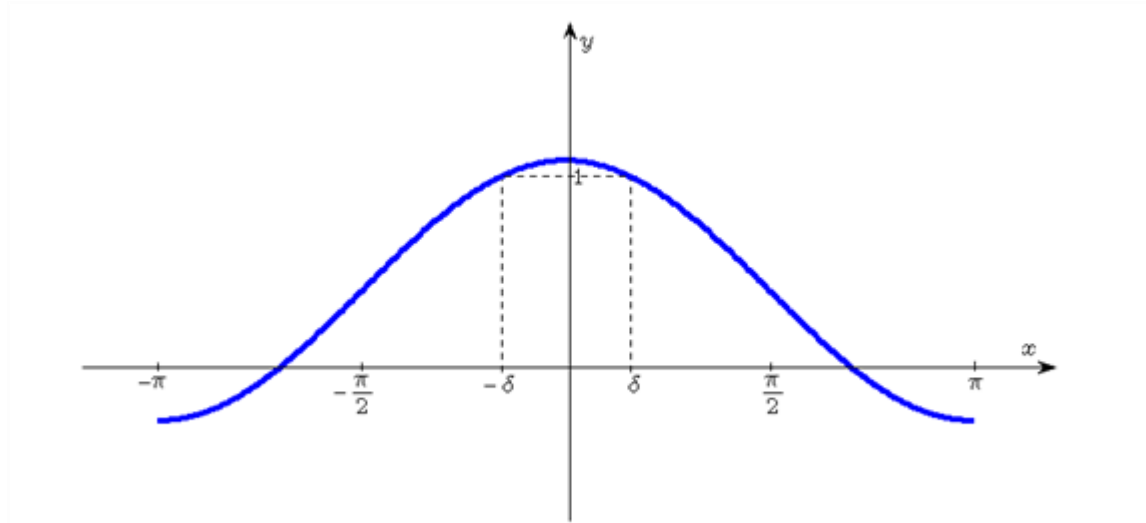
$$T(x) := \cos x + (1 - \cos \delta) \quad (x \in \mathbb{R})$$

segédfüggvényt. A T függvényre igazak a következő megállapítások: $[\bullet]$

- Ha $-\delta < x < \delta$, akkor $T(x) > 1$,
- Ha $\delta < x < \pi$ vagy $-\pi < x < -\delta$, akkor $-\cos \delta < T(x) < 1$, azaz $|T(x)| < 1$.

A 27. ábra a T függvényt szemlélteti.

4.1. ábra - A T segédfüggvény grafikonja



Az addíciós képletekből következik, hogy a $(T(x))^n = (\cos x + (1 - \cos \delta))^n$ ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) függvény felírható a trigonometrikus rendszer n -nél nem nagyobb indexű elemeinek lineáris kombinációjaként. Mivel G ortogonális a rendszer minden elemére, ezért ortogonális T^n -re is, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 = \langle G, T^n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} G(x) T^n(x) dx = \int_{-\pi}^{-\delta} G(x) T^n(x) dx + \int_{-\delta}^{\delta} G(x) T^n(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} G(x) T^n(x) dx = I_n + J_n + K_n.$$

Mivel G a $[-\pi, \pi]$ intervallumon folytonos függvény, ezért létezik $M > 0$, hogy $|G(x)| \leq M$ minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén, továbbá és $|T(x)| < 1$ minden $x \in (\delta, \pi) \cup (-\pi, -\delta)$ számra, ezért

$$|G(x) \cdot T^n(x)| = |G(x)| \cdot |T(x)|^n \leq M \cdot |T(x)|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } x \in (\delta, \pi) \cup (-\pi, -\delta),$$

és így Lebesgue-tétele alapján

$$I_n = \int_{-\pi}^{-\delta} G(x) \cdot T^n(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad K_n = \int_{\delta}^{\pi} G(x) \cdot T^n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.1.8)$$

Ha $-\delta < x < \delta$, akkor $T(x) > 1/2$ és δ választása miatt $G(x) > \frac{1}{2}$, így

$$J_n = \int_{-\delta}^{\delta} G(x) \cdot T^n(x) dx \geq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2} \cdot 1^n dx = \frac{1}{2} [x]_{-\delta}^{\delta} = \delta > 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ez (4.1.8)-cal együtt ellentmond annak, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 = I_n + J_n + K_n$. Tehát az a felvetés, hogy F nem azonosan egyenlő nullával, ellentmondásra vezetett.

2. lépés: Tekintsünk egy olyan Lebesgue-integrálható függvényt, melyre (4.1.7) teljesül. Belátjuk, hogy ekkor $f = 0$ majdnem mindenütt a $(-\pi, \pi)$ intervallumon.

A bizonyítást a folytonos esetre való visszavezetéssel végezzük. Vezessük be a következő segédfüggvényt:

$$F(x) := \int_{-\pi}^x f(t) dt + d \quad (x \in [-\pi, \pi)) \quad \text{és} \quad F(x) := F(x + 2\pi) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Válasszuk d értékét úgy, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = 0$$

teljesüljön. Ekkor F 2π szerint periodikus és folytonos függvény, továbbá majdnem mindenütt differenciálható, és $F'(x) = f(x)$ majdnem minden $x \in [-\pi, \pi)$ esetén.⁶

Az F függvény is ortogonális a trigonometrikus rendszer minden elemére. Az $\langle F, 1 \rangle = 0$ feltétel a d konstans választása miatt automatikusan teljesül, továbbá minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned} \langle F, \sin nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx = \left[F(x) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &\quad \begin{matrix} h(x) = F(x) & g(x) = \sin nx \\ h'(x) = f(x) & g'(x) = \frac{\cos nx}{n} \end{matrix} \\ &= \frac{-F(\pi) \cos n\pi}{n} - \frac{-F(-\pi) \cos n(-\pi)}{n} = \frac{\cos n\pi}{n} (-d + d) = 0, \\ \langle F, \cos nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \left[F(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \\ &\quad \begin{matrix} h(x) = F(x) & g(x) = \cos nx \\ h'(x) = f(x) & g'(x) = -\frac{\sin nx}{n} \end{matrix} \\ &= \frac{F(\pi) \sin n\pi}{n} - \frac{F(-\pi) \sin n(-\pi)}{n} = 0. \end{aligned}$$

Az első lépésben már bizonyítottak alapján $F' = 0$ teljesül. Mivel $F' = f$ majdnem mindenütt, ezért $0 = f$ majdnem mindenütt, ami éppen az igazolandó állítás.

□

A trigonometrikus rendszer teljes az L^2 függvénytérben, ezért érvényes rá a 3.2.4. tétel. Mivel a trigonometrikus rendszer elemei korlátosak, így minden Lebesgue-integrálható függvényhez tudunk a trigonometrikus rendszerre vonatkozó Fourier-sort rendelni, de a Parseval-formula nem érvényes, ha f nem négyzetesen integrálható.

A továbbiakban, ha a trigonometrikus rendszerről beszélünk, akkor az eddig használt rendszer helyett annak normáltjára gondolunk:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, (n \in \mathbb{N}^*) \right\}.$$

Mivel a trigonometrikus rendszer 2π szerint periodikus, ezért célszerű 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorfejtését számolni.

Legyen f 2π szerint periodikus, Lebesgue-integrálható függvény. Ekkor az

⁶Bontsuk fel ugyanis f -et a pozitív és a negatív részének különbségére. ($f = f^+ - f^-$) Ekkor f^+ és f^- is nemnegatív integrálható függvények. A hozzájuk tartozó integrálfüggvények F^+ és F^- monoton nőnek. Mivel $F = F^+ - F^-$, ezért F korlátos változású, azaz majdnem mindenütt differenciálható (10.5.3. Megjegyzés). Belátható továbbá, hogy F deriváltja majdnem mindenütt f -fel egyezik meg (Annak ellenére, hogy az f függvény lehet, hogy egyetlen pontban sem folytonos). A bizonyítás megtalálható [13]-ban.

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0 &:= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x f(t) dt, \\ \tilde{a}_n &:= \left\langle f, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x f(t) \cos ntdt \quad (n \in \mathbb{N}^*), \\ \tilde{b}_n &:= \left\langle f, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x f(t) \sin ntdt \quad (n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

jelölések mellett az f függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{a}_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \tilde{b}_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Az általános esetből adódó fenti együtthatók helyett az alábbi egyszerűbb formulákat fogjuk használni.

Legyen $a_0 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \tilde{a}_0$, $a_n := \frac{\tilde{a}_n}{\sqrt{\pi}}$, $b_n := \frac{\tilde{b}_n}{\sqrt{\pi}}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Ekkor az együtthatókat az

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(t) \cos ntdt \quad (n \in \mathbb{N}), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(t) \sin ntdt \quad (n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned} \quad (4.1.9)$$

képlettel számoljuk ki és a *trigonometrikus Fourier-sor*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathcal{D}_f) \quad (4.1.10)$$

alakot ölt. Ha f négyzetesen integrálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon, akkor a Parseval-formula érvényes:

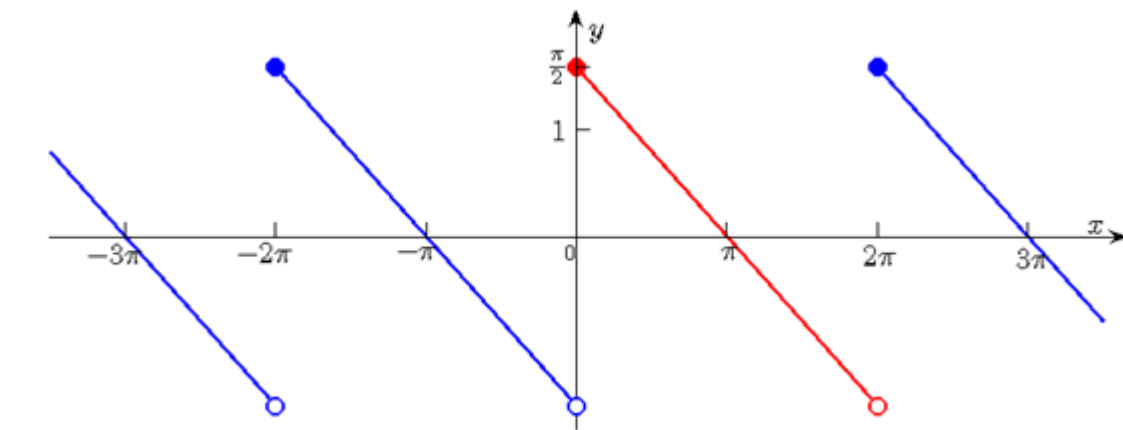
$$\|f\|^2 = \tilde{a}_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\pi a_n^2 + \pi b_n^2) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (4.1.11)$$

A Fourier-sor számolásánál célszerű figyelembe venni, hogy ha f páratlan függvény, akkor $a_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és ha f páros, akkor $b_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

4.1.2. Példa. Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$, ha $0 \leq x < 2\pi$. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát. Határozzuk meg a Parseval formulával adódó sorösszeget.

Megoldás. A 4.2. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f 2π -szerint periodikus függvény grafikonját.

4.2. ábra - Az f függvény grafikonja



Szimmetriai okokból $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

A Fourier-együtthatók számításakor bármilyen 2π hosszúságú intervallumon számolhatunk. Jelen esetben a b_n együtthatók számolását célszerű a $[0, 2\pi]$ intervallumon végezni, ugyanis a függvény ezen intervallum egyszerűbben írható fel. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-t}{2} \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{(\pi-t) \cos nt}{2n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{2n} \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{(\pi-t) \cos nt}{2n} - \frac{\sin nt}{2n^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tehát a függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az f függvény a $[0, 2\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért érvényes a (4.1.11) Parseval-formula. A függvény norma-négyzete:

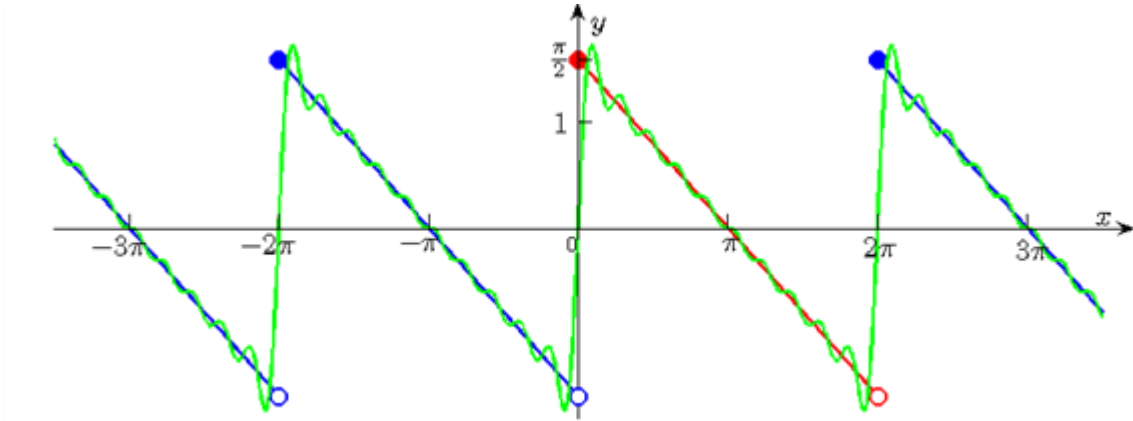
$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\pi-x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \left[\frac{(\pi-x)^3}{-3} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{6},$$

így a Parseval-formula alapján a következő sorösszeg adódik:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

A 4.3. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonját.

4.3. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja



1.4.2. A trigonometrikus rendszer komplex alakja

Sok esetben sokkal kényelmesebb a Fourier-sorokat komplex alakban kifejezni. Ebben a fejezetben a komplex trigonometrikus rendszert és a rá vonatkozó Fourier-sort, illetve a valós és komplex trigonometrikus rendszer kapcsolatát mutatjuk be.

Először egy egyszerű állítást igazolunk.

4.1.15. Tétel. A trigonometrikus rendszer a komplex $L^2_{(-\pi, \pi)}$ térben teljes.

Bizonyítás. Legyen $f = u + iv$ a komplex L^2 tér egy eleme, mely ortogonális a trigonometrikus rendszer összes elemére. Ekkor

$$0 = \langle f, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\cos nx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx dx + i \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \cos nx dx \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$0 = \langle f, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\sin nx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin nx dx + i \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \sin nx dx \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

ami csak akkor teljesül, ha u és v is ortogonális a trigonometrikus rendszer összes elemére. Mivel u, v a valós L^2 tér elemei, és a valós L^2 -téren a trigonometrikus rendszer teljes, ezért u és v függvények is majdnem mindenütt nullával egyenlők, tehát $f = 0$ m.m. is teljesül.

Legyen a valós változós, komplex értékű f függvény négyzetesen integrálható. Ekkor a

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$

Euler-formulák alapján a függvény (4.10) Fourier-sora:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx}. \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k - ib_k), & \text{ha } k > 0, \\ \frac{1}{2} a_0, & \text{ha } k = 0, \\ \frac{1}{2} (a_{-k} + ib_{-k}), & \text{ha } k < 0. \end{cases}$$

együtthatókat, a Fourier-sor

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (x \in \mathcal{D}_f) \quad (4.1.12)$$

alakba írható. A Fourier-együtthatók (4.1.9) képletét beírva kapjuk, hogy

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (4.1.13)$$

A (4.1.12) Fourier-sor és a (4.1.13) együtthatók képletéhez közvetlenül is eljuthatunk, ha az $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (x \in \mathbb{R})$ rendszerből indulunk ki.

4.1.16. Tétel. Az

$$\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

rendszer ortogonális a komplex $L^2_{(-\pi, \pi)}$ térben.

Bizonyítás. Az ortogonalitás egyszerűen adódik:

$$\langle e^{in\cdot}, e^{im\cdot} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = \begin{cases} \left[\frac{e^{ix(n-m)}}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, & \text{ha } n \neq m, \\ 2\pi, & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

□

A bizonyításból is látszik, hogy a rendszer nem normált, viszont az

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

rendszer már ortonormált.

Az ortogonális rendszerekre vonatkozó teljességfogalom a rendszer sorozatba szedésétől függetlenül van értelmezve, ezért a két irányban végtelen (4.1.12) sornak tetszőleges módon is választjuk a véges részletösszegeit, ezek négyzetintegrálra a sorbafejtett f függvényhez tartanak, feltéve, hogy a határátmenet során a részletösszegek is felölelik a sor minden egyes tagját. Lehet például a $\sum_{k=-m}^n$ részletösszegeket tekinteni, ahol m és n egymástól függetlenül tart $+\infty$ -be.

A Parseval-képlet ebben az esetben az alábbi alakot ölti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

A komplex Fourier-sor és a komplex függvénytanból ismert Laurent-sor szoros kapcsolatban van egymással:

Legyen $F: H \rightarrow \mathbb{C}$ ($H \subseteq \mathbb{C}$) holomorf függvény, ahol H olyan tartomány, mely tartalmazza a $\{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$ egységkört. Ekkor valamely $0 \leq r < 1 < R$ számokkal a $H_1 = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ gyűrű-tartományon érvényes az

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad (z \in H_1)$$

Laurent-féle sorfejtés, ahol

$$c_k = \int_{|z|=1} \frac{F(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Az F függvény Laurent-sorfejtése tehát nem más, mint a t valós változó $f(t) = F(e^{it})$ ($t \in [-\pi, \pi)$) függvényének a komplex Fourier-sora.

A valós együtthatós trigonometrikus sor a komplex hatványsorral van szoros kapcsolatban. Ha f valós változós, valós értékű függvény, akkor komplex Fourier-sorában $c_{-k} = \overline{c_k}$, mert

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt} = \overline{c_k} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy a komplex Fourier sor

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k} e^{-ikx} \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

alakba írható. Mivel minden $z \in \mathbb{C}$ komplex számra $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, ezért

$$\begin{aligned} f(x) &\sim c_0 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} \right) = \frac{a_0}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{ikx} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) (\cos kx + i \sin kx) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (x \in \mathcal{D}_f), \end{aligned}$$

tehát f trigonometrikus Fourier-sora a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k$$

hatványsor valós része a $z = e^{ix}$ ($x \in [-\pi, \pi)$) egységkörvonalon.

4.1.3. Példa. Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Írjuk fel a függvény komplex Fourier-sorát.

Megoldás. A függvény páratlan, ezért $c_0 = 0$. Az f függvény n . Fourier-együtthatója, ha $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 -e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{in\pi} - \frac{1}{in\pi} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = -\frac{i}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{i}{n\pi} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Tehát a függvény komplex Fourier-sora:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n\pi} ((-1)^n - 1) e^{inx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -\frac{2i}{(2k+1)\pi} e^{i(2k+1)x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1.4.3. Ortogonális polinomok

4.1.1. (a, b) definíció. Legyen (a, b) egy véges vagy nem véges intervallum, $w: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrálható függvény; Az intervallumon értelmezett, L^1_w -súlyozott mérhető függvények halmazát, melyek négyzetének a függvénnyel való szorzata integrálható, a súlyfüggvényre nézve négyzetesen integrálható függvények terének nevezzük. Jelölés:

$$L^2_w = L^2_{w(a,b)} := \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető és } f^2 w \in L^1_{w(a,b)}\}.$$

Ha $w \equiv 1$, akkor a négyzetesen integrálható függvények terét kapjuk. Igazolható, hogy $L^2_{w(a,b)}$ függvényter Hilbert-teret alkot az

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad (4.11.4)$$

skaláris szorzattal.

A hatványfüggvények $\{h_k(x) = x^k, (x \in (a, b)), k \in \mathbb{N}\}$ lineárisan független⁷ rendszeréből kiindulva 3.2.11. Megjegyzésben bemutatott Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás segítségével 1-főegyütthatós, a (4.1.14) skaláris szorzatra nézve ortogonális $\{P_k\}_{k=0}^\infty$ polinomrendszer konstruálható, melynek elemeire

$$P_0 \equiv 1, \quad P_n(x) := x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{kn} P_k(x) \quad (x \in (a, b), n \in \mathbb{N}^*), \quad (4.1.15)$$

ahol

$$\alpha_{kn} = \frac{\langle x^n, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}.$$

Megjegyezzük továbbá, hogy a hatványfüggvény-rendszerből konstruált ortogonális polinomrendszerek mindig teljeseek.⁸ irodalomban.

4.1.4. Példa. Állítsuk elő az $(a, b) = (-1, 1)$ intervallumon értelmezett $w \equiv 1$ súlyfüggvényre ortogonális $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ polinomrendszert.

Megoldás. Használjuk a (4.1.15) konstrukciót. Eszerint legyen $P_0 \equiv 1$. Mivel

$$\alpha_{01} = \frac{\langle x, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = 0,$$

ezért $P_1(x) = x - \alpha_{01}P_0(x) = x$ ($x \in (-1, 1)$).

A konstrukciót folytatjuk. A P_2 együtthatóira

⁷A $h_k, (k \in \mathbb{N})$ hatványfüggvények lineárisan függetlenek az L^2_w térben, ugyanis a $\{h_k, k = 0, 1, \dots, n\}$ elemek lineáris kombinációjaként a tér nulleleme, a majdnem mindenhol 0 függvény, csak triviálisan áll elő. (A $\{h_k, k = 0, 1, \dots, n\}$ elemek bármely lineáris kombinációja egy legfeljebb n -edfokú polinom. Az algebra alaptételének következménye alapján ha egy legfeljebb n -edfokú polinomnak n -nél több különböző gyöke van, akkor az szükségképpen a zéruspolinom.)

⁸Bizonyítás megtalálható [5]

$$\alpha_{02} = \frac{\langle id^2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1}{\left[x \right]_{-1}^1} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \alpha_{12} = \frac{\langle id^2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0$$

adódik, ezért $P_2(x) = x^2 - \alpha_{02}P_0(x) - \alpha_{12}P_1(x) = x^2 - \frac{1}{3} (x \in (-1,1))$.

A P_3 polinom együtthatóira

$$\alpha_{03} = \frac{\langle id^3, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = 0 \quad \text{és} \quad \alpha_{13} = \frac{\langle id^3, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^4 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5},$$

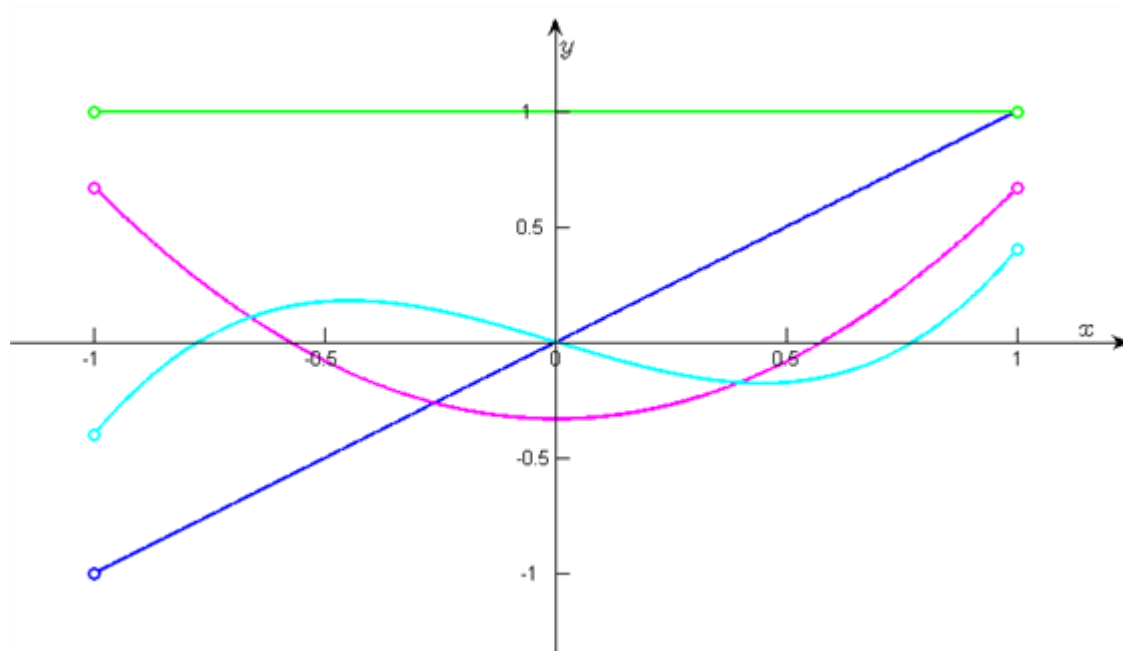
valamint

$$\alpha_{23} = \frac{\langle id^3, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = 0,$$

adódik, melyből $P_3(x) = x^3 - \alpha_{03}P_0(x) - \alpha_{13}P_1(x) - \alpha_{23}P_2(x) = x^3 - \frac{3}{5}x (x \in (-1,1))$.

4.1.18. Megjegyzés. A fenti eljárást folytatva egy ortogonális polinom-rendszer konstruálható. Az így kapott polinomokat Legendre⁹-polinomoknak nevezzük. A 4.4. ábrán szemléltetjük a 4.1.4. példában definiált első 4 1-főegyütthatós Legendre-polinom grafikonját.

4.4. ábra - Az első 4 1-főegyütthatós Legendre-polinom grafikonja



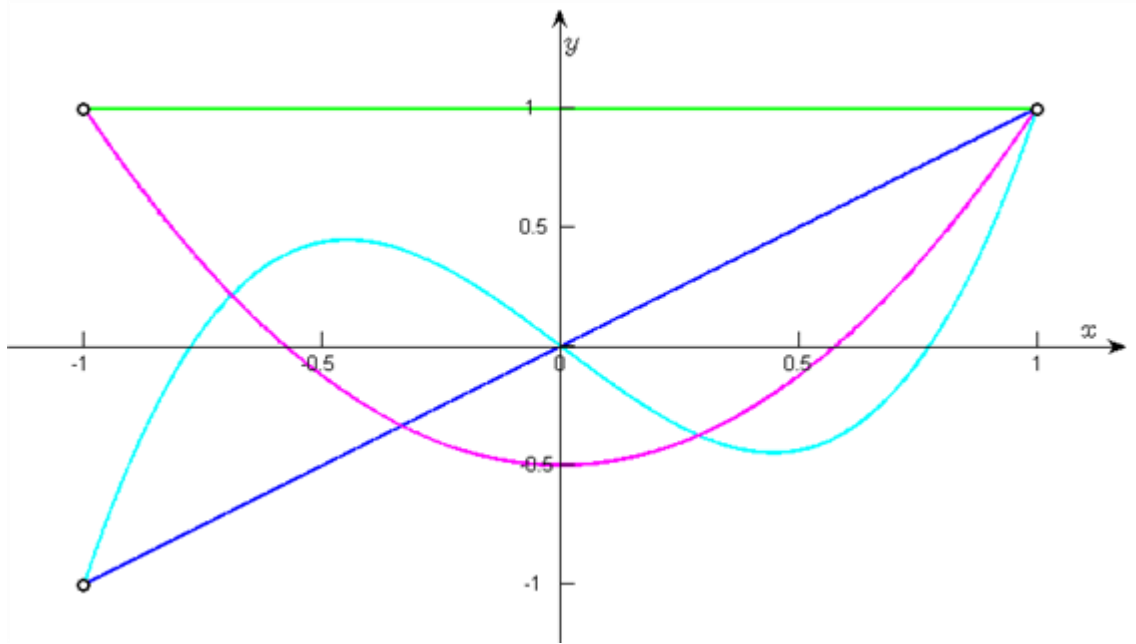
⁹Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) francia matematikus.

4.1119. *Megjegyzés.* A Legendre-polinomokat szokás úgy normálni, hogy minden polinom helyettesítési értéke az -1 -ben 1 legyen. Ekkor az alábbi rekurzió alapján számolhatók a polinomok:

$$P_0 \equiv 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad (n \geq 1, x \in (-1, 1)).$$

A 4.5.ábrán a fenti definíció alapján számolt Legendre-polinomok grafikonját szemléltetjük.

4.5. ábra - Az első 4 klasszikus Legendre-polinom grafikonja



Animáció

A (4.1.15) konstrukció alapján számolva az n -edik polinom előállításához n darab együttható meghatározása szükséges, melyek során 2^n darab integrált kell kiszámítani. Kevesebb számolást igénylő konstrukciót biztosít 4.1.21. Tétel. A tétel bizonyításához fel fogjuk használni a következő lemmát.

4.1.20. Lemma. Legyen $P \in L_w^2$ egy legfeljebb n -edfokú polinom. Ekkor P egyértelműen felírható $P_0, P_1, \dots, P_n$ ortogonális polinomok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen létezik $\{c_k\}_{k=0}^n$ együttható rendszer, mellyel

$$P = \sum_{k=0}^n c_k P_k,$$

ahol

$$c_k = \frac{\langle P, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

és $\langle P, P_k \rangle = 0$, ha $k \geq n+1$.

Bizonyítás. Legyen $P \in L_w^2$ egy legfeljebb n -edfokú polinom és jelölje

$$Y_n := \text{span}\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

a $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ által kifeszített alteret. A $\{P_k, k \in \mathbb{N}\}$ polinom-rendszer konstrukciójánál használt Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció értelmében

$$Y_n = \text{span}\{h_0, h_1, \dots, h_n\},$$

így $P \in Y_n$ és 3.2.4. Megjegyzés értelmében egyértelműen előáll a p_k ($k=0,1,\dots,n$) polinomok lineáris kombinációjaként, és

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{\langle P, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle} p_k.$$

□

4.1.21. Tétel. Az $L^2_{w(a,b)}$ téren (4.1.15) alapján előállított ortogonális polinomok kielégítik az alábbi másodrendű rekurziót:

$$p_{-1} \equiv 0, p_0 \equiv 1 \quad \text{és} \quad p_{n+1}(x) = (x - \beta_n) p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x), \quad (n \in \mathbb{N}^*, x \in (a, b))$$

ahol β_n és γ_n az a , b és w adatoktól függő alkalmas konstansok.

Bizonyítás. Mivel $p_{n+1} - id \cdot p_n$ egy legfeljebb n -edfokú polinom, ezért az előző lemmában foglaltak szerint előáll

$$p_{n+1}(x) - xp_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk} p_k(x) \quad (x \in (a, b))$$

alakban. A fenti egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) + \sum_{k=0}^n c_{nk} p_k(x) \quad (x \in (a, b)). \quad (4.1.16)$$

Az $n+1$. polinomot a j -edikkel skalárisan szorozva és felhasználva a $\{p_k\}_{k=0}^{n+1}$ polinomok ortogonalitását (4.1.16) egyenletből

$$0 = \langle id \cdot p_n, p_j \rangle + c_{nj} \langle p_j, p_j \rangle \quad (j=0,1,\dots,n)$$

adódik, ahonnan c_{nj} ($j=0,1,\dots,n$) együtthatók meghatározhatók. Vegyük észre, hogy a (4.1.14) skaláris szorzat tulajdonságai miatt

$$\langle id \cdot p_n, p_j \rangle = \langle p_n, id \cdot p_j \rangle, \quad (4.1.17)$$

továbbá mivel $id \cdot p_j$ pontosan $j+1$ -edfokú polinom, ezért $\langle p_n, id \cdot p_j \rangle = 0$, ha $j+1 < n$, azaz $c_{nj} = 0$, ha $j < n-1$. A kapott együtthatókat (4.1.16) összefüggésbe visszaírva kapjuk, hogy

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) + c_{nn} p_n(x) + c_{n(n-1)} p_{n-1}(x) = (x + c_{nn}) p_n(x) + c_{n(n-1)} p_{n-1}(x) \quad (x \in (a, b)).$$

A $\beta_n := -c_{nn}$ és $\gamma_n := c_{n(n-1)}$ jelölések bevezetésével éppen az igazolandó állítás kapható.

□

A 4.1.21. Tétel és 4.1.20. Lemma összevetéséből az is kiderül, hogy

$$\beta_n = -c_{nn} = \frac{\langle id \cdot p_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} = \frac{\int_a^b x p_n^2(x) w(x) dx}{\int_a^b p_n^2(x) w(x) dx} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

illetve

$$\gamma_n = \begin{cases} -c_{n(n-1)} = \frac{\langle id \cdot p_n, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}, & \text{ha } n \neq 0, \\ 0, & \text{ha } n = 0. \end{cases}$$

Legyen $n \geq 1$, ekkor a rekurzió alapján

$$p_n(x) = x p_{n-1}(x) - \beta_{n-1} p_{n-1}(x) - \gamma_{n-1} p_{n-2}(x) \quad (x \in (a, b))$$

kapható. A p_n polinommal skalárisan szorozva

$$\langle p_n, p_n \rangle = \langle id \cdot p_{n-1}, p_n \rangle - \beta_{n-1} \langle p_{n-1}, p_n \rangle - \gamma_{n-1} \langle p_{n-2}, p_n \rangle = \langle id \cdot p_{n-1}, p_n \rangle = \langle p_{n-1}, id \cdot p_n \rangle$$

adódik. A számolás során kihasználtuk, hogy p_n ortogonális p_{n-1} és p_{n-2} polinomokra és a skaláris szorzat (4.1.17) tulajdonságát.

A γ_n együtthatók tehát az alábbi egyszerűbb alakba írhatók:

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle} = \frac{\int_a^b p_n^2(x) \cdot w(x) dx}{\int_a^b p_{n-1}^2(x) \cdot w(x) dx}, & \text{ha } n \neq 0, \\ 0, & \text{ha } n = 0. \end{cases}$$

4.1.5. Példa. Határozzuk meg a 4.1.4. Példában előállított ortogonális polinomrendszer negyedik tagját.

Megoldás. A (4.1.15) konstrukció alapján számolva a polinom felírásához 4 együttható kiszámítása lenne szükséges. Használjuk inkább a 4.1.21. Tétel által adott rekurziót. Ez alapján

$$P_4(x) = (x - \beta_3)P_3(x) - \gamma_3 P_2(x) \quad (x \in (-1, 1)),$$

ahol $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ és $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$ ($x \in (-1, 1)$) továbbá

$$\beta_3 = \frac{\langle id \cdot P_3, P_3 \rangle}{\langle P_3, P_3 \rangle} = 0,$$

ugyanis $id \cdot P_3^2$ páratlan függvény, az integrálási tartomány pedig origóra szimmetrikus intervallum, továbbá

$$\gamma_3 = \frac{\langle P_3, P_3 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{8}{45}} = \frac{9}{35},$$

így

$$P_4(x) = x \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right) - \frac{9}{35} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \quad (x \in (-1, 1)).$$

4.1.22. Megjegyzés. A (4.1.15) konstrukciót más intervallumon és/vagy más súlyfüggvény esetén alkalmazva további ortogonális polinomrendszerek készíthetők.

A klasszikus ortogonális polinomok értelmezési tartományait és súlyfüggvényeit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

--	--	--

név	értelmezési tartomány	súlyfüggvény
(elsőfajú) Csebisev polinomok (lásd: a 4.1.6 Feladat)	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
másodfajú Csebisev polinomok	$(-1, 1)$	$\sqrt{1-x^2}$
Hermite polinomok	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}
Laguerre polinomok	$(0, \infty)$	e^{-x}
Legendre polinomok	$(-1, 1)$	1

Table 1: Klasszikus ortogonális polinomok

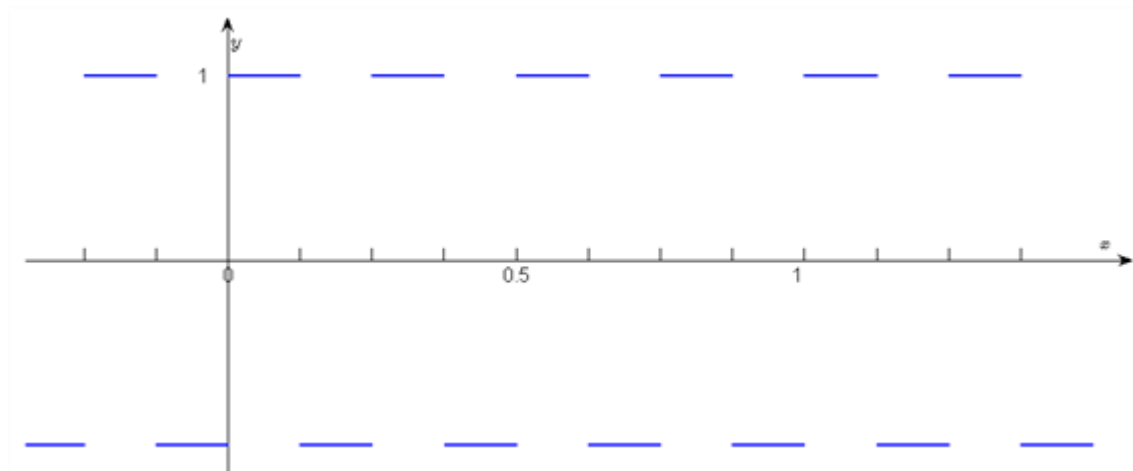
1.4.4. Rademacher-rendszer

4.1.23. Definíció. Legyen $r: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ függvény 1-szerint periodikus és

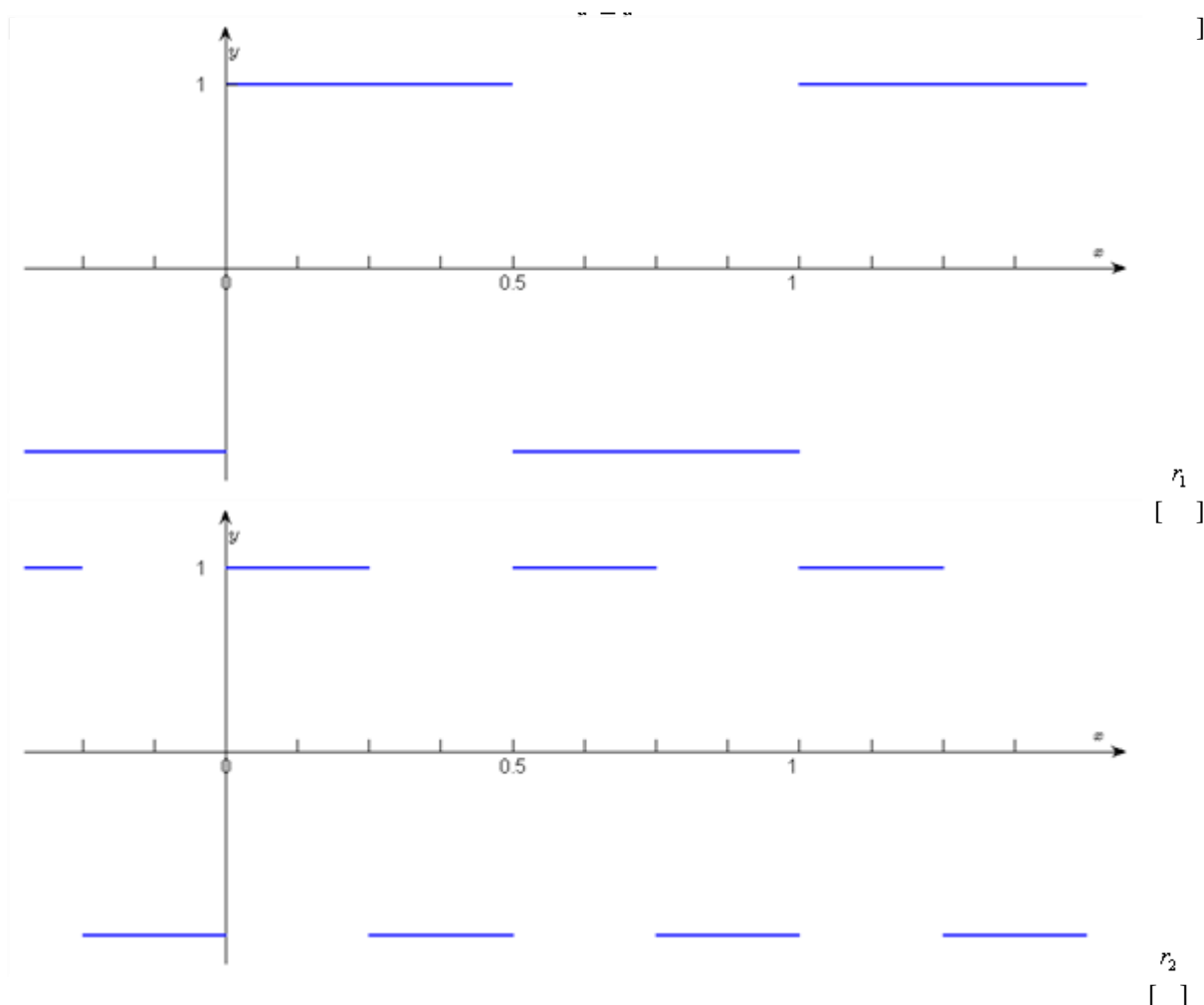
$$r(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Legyen továbbá $r_n(x) = r(2^n x)$ ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$). Ekkor az $\{r_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ rendszert *Rademacher¹⁰-rendszernek* nevezzük.

4.6. ábra - A Rademacher-rendszer első három eleme



¹⁰Hans Adolph Rademacher (1892 – 1969) német matematikus.



4.1.24. Tétel. A Rademacher-rendszer ortogonális az $L^2_{[0,1]}$ térben a szokásos skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle r_k, r_\ell \rangle = \int_0^1 r_k(x) r_\ell(x) dx = 0 \quad (k, \ell \in \mathbb{N}, k \neq \ell).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $k > \ell$. Ekkor, mivel az n . függvény periódusa 2^{-n} , ezért jelenleg a periódusok között a $2^{-k} < 2^{-\ell}$ egyenlőtlenség teljesül. Emiatt a skaláris szorzat az alábbi egyszerűbb alakba írható:

$$\langle r_k, r_\ell \rangle = \int_0^1 r_k(x) r_\ell(x) dx = 2^\ell \int_0^{2^{-\ell}} r_k(x) r_\ell(x) dx = 2^\ell \int_0^{2^{-\ell-1}} r_k(x) dx - 2^\ell \int_{2^{-\ell-1}}^{2^{-\ell}} r_k(x) dx = 0.$$

Felhasználtuk, hogy mind a $[0, 2^{-\ell-1})$, mind pedig a $[2^{-\ell-1}, 2^{-\ell})$ intervallum az r_k függvény egész számú periódusát tartalmazza, és minden Rademacher-függvény egy periódusára vett integrál nulla.

□

4.1.25. Megjegyzés. A Rademacher-rendszer nem teljes az $L^2_{[0,1]}$ térben, ugyanis például $f = r_0 r_1$ függvény minden Rademacher-függvényre ortogonális, azaz minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\langle r_k, f \rangle = 0.$$

Valóban, hiszen $k = 0$ esetén

$$\langle r_0, r_0 r_1 \rangle = \int_0^1 r_0^2(x) r_1(x) dx = \int_0^1 r_1(x) dx = 0.$$

Felhasználtuk, hogy $r_\ell^2 \equiv 1$ minden $\ell \in \mathbb{N}$ esetén és hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén a $[0, 1]$ intervallum az r_m függvény egész számú periódusát tartalmazza, így

$$\int_0^1 r_m(x) dx = 0.$$

Hasonlóan igazolható, hogy az állítás $k=1$ esetén is igaz. Legyen $k \geq 2$ egész. Ekkor

$$\langle r_k, f \rangle = \int_0^1 r_k(x) r_0(x) r_1(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} r_k(x) r_1(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 r_k(x) r_1(x) dx = 0.$$

Felhasználtuk, hogy mind a $[0, \frac{1}{2})$, mind pedig a $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallum az $r_k r_1$ függvénynek is egész számú periódusát tartalmazza továbbá hogy egy perióduson belül az integrál értéke nulla.

4.1.26. Megjegyzés. Legyen $\{r_k, k \in \mathbb{N}\}$ a Rademacher-rendszer. Legyen $m \in \mathbb{N}$ egész szám 2 -es számrendszerbeli alakjának jegyei $(m_k, k \in \mathbb{N})$, azaz

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k 2^k.$$

Ekkor a

$$w_m := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{m_k} \quad (m \in \mathbb{N})$$

rendszert *Walsh-Paley-rendszernek*¹¹ nevezzük¹². Mivel $w_{2^n} = r_n$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért a Walsh-Paley-rendszer a Rademacher-rendszert tartalmazza.

Igazolható, hogy a Walsh-Paley-rendszer teljes ortogonális rendszer az $L^2_{[0,1]}$ térben¹³.

1.4.5. Haar-rendszer

A Haar Alfréd¹⁴ által 1909-ben konstruált *Haar-féle ortogonális rendszerrel* foglalkozunk. A rendszer jelentőségére a 9. fejezetben mutatunk rá.

4.1.27. Definíció. A $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $\{h_{2^n+k} = h_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ rendszert Haar-rendszernek nevezzük, ahol

$$h_0(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

és

¹¹Joseph Leonard Walsh (1895–1973) amerikai matematikus és Raymond Paley (1907–1933) angol matematikus.

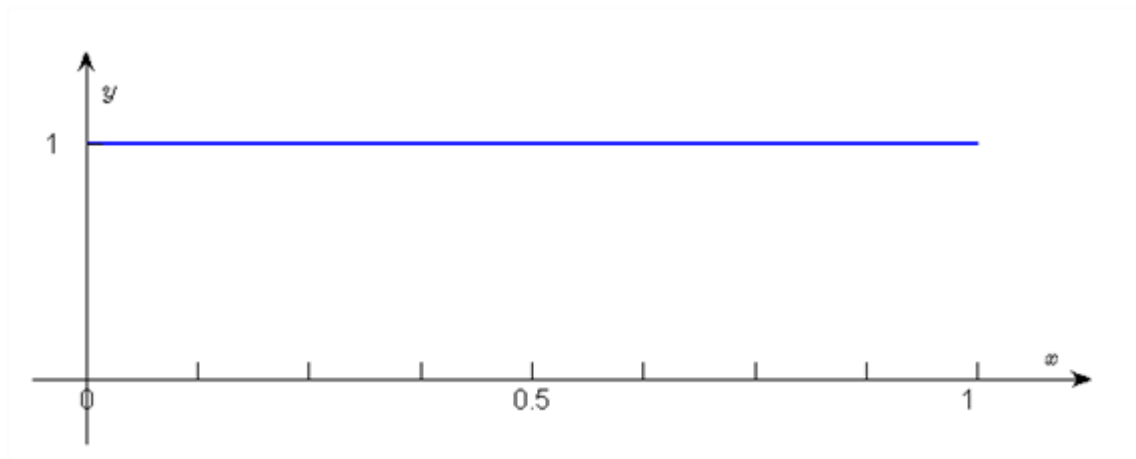
¹²A szakirodalomban szokásos szóhasználatul élve a Walsh-Paley-rendszer a Rademacher-rendszer szorzatrendszerre.

¹³Bizonyítás megtalálható [10] irodalomban.

¹⁴Haar Alfréd (1885–1933) magyar matematikus.

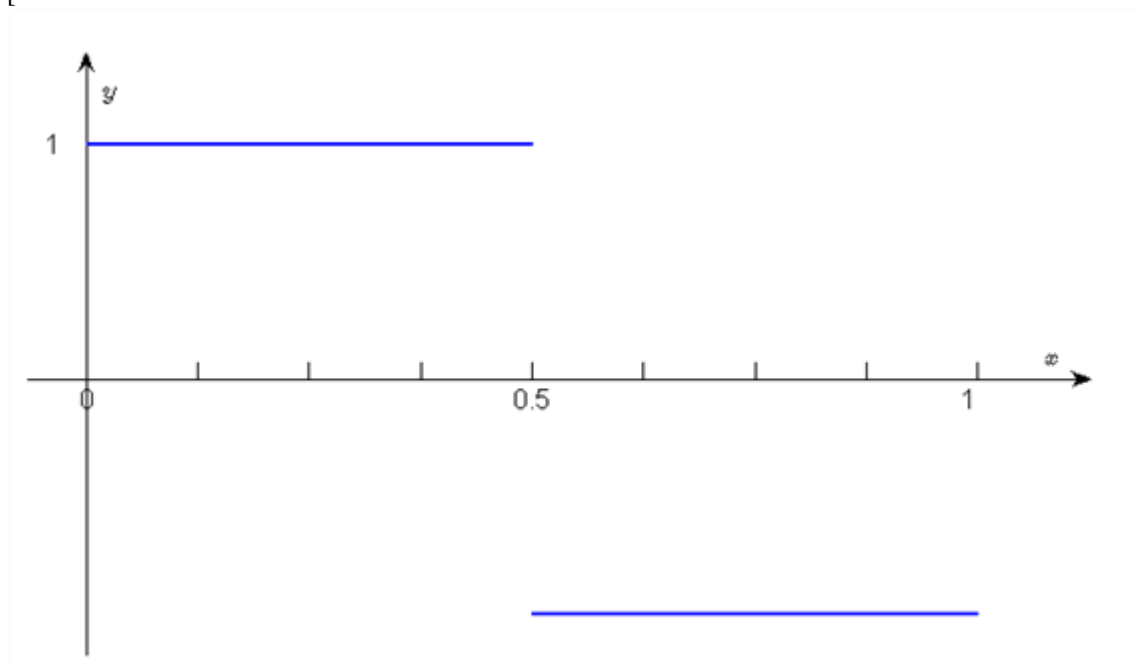
$$h_{2^n+k}(x) = h_{nk}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}), \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } x \in [\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

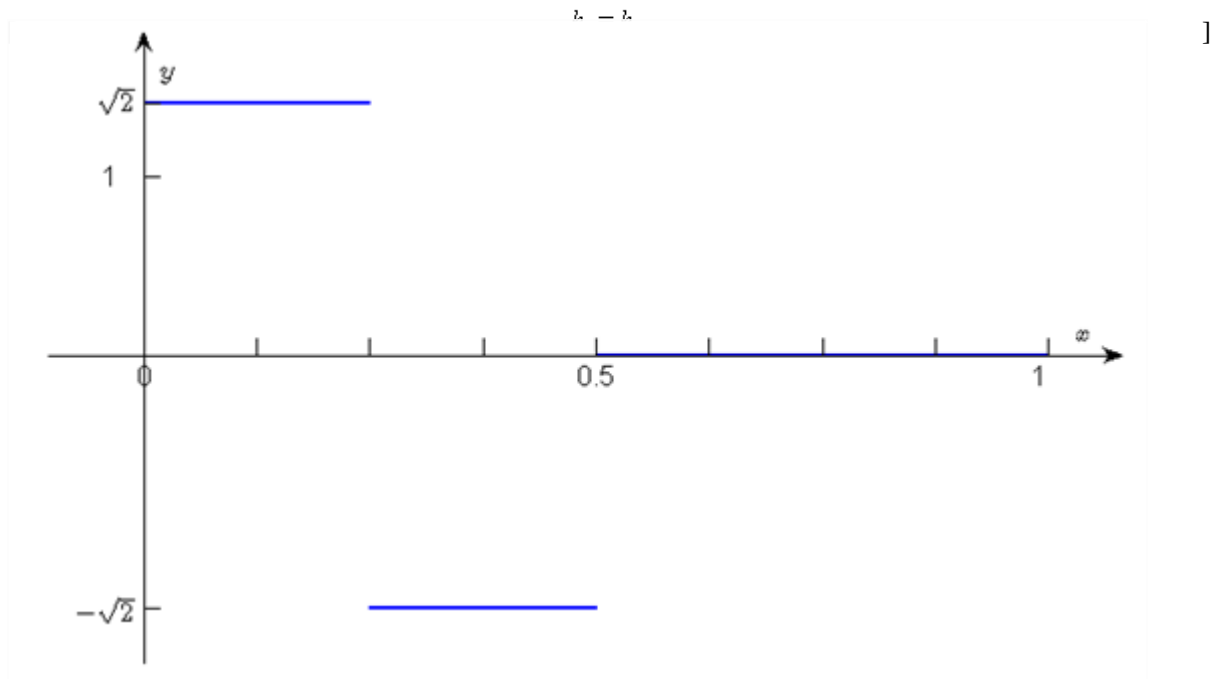
4.7. ábra - A Haar-rendszer első néhány eleme



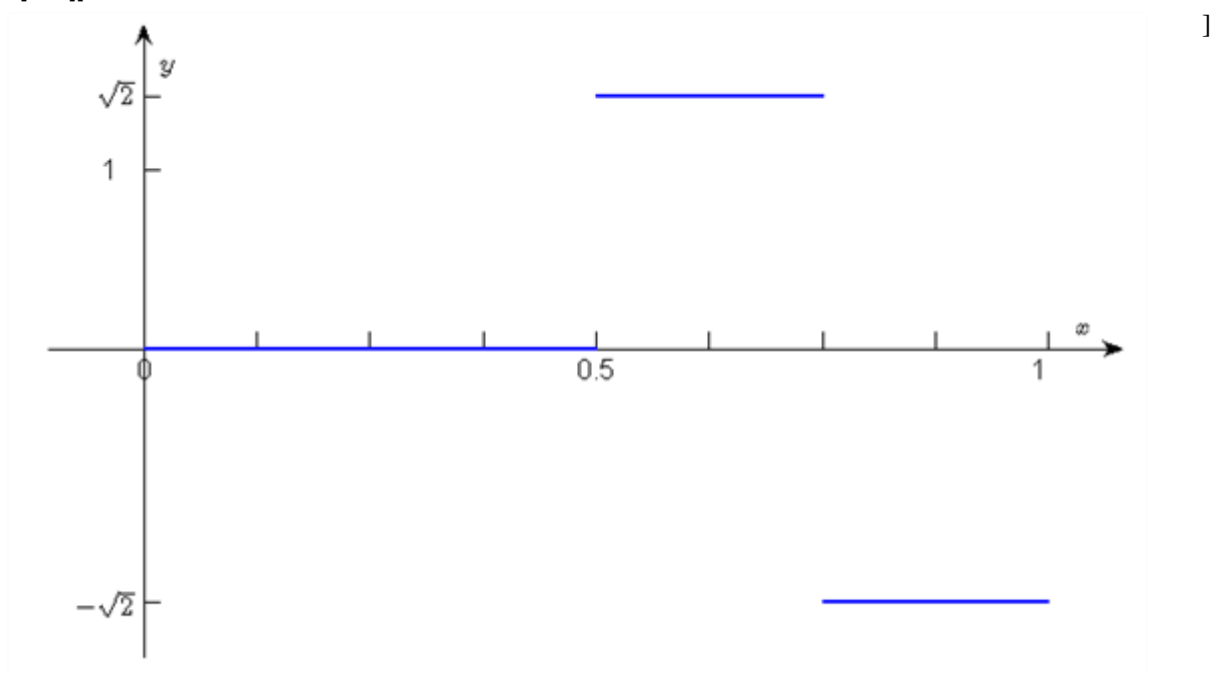
$[h_0, \chi_{[0,1)}]$

$[h = h_1 = h_{00}]$

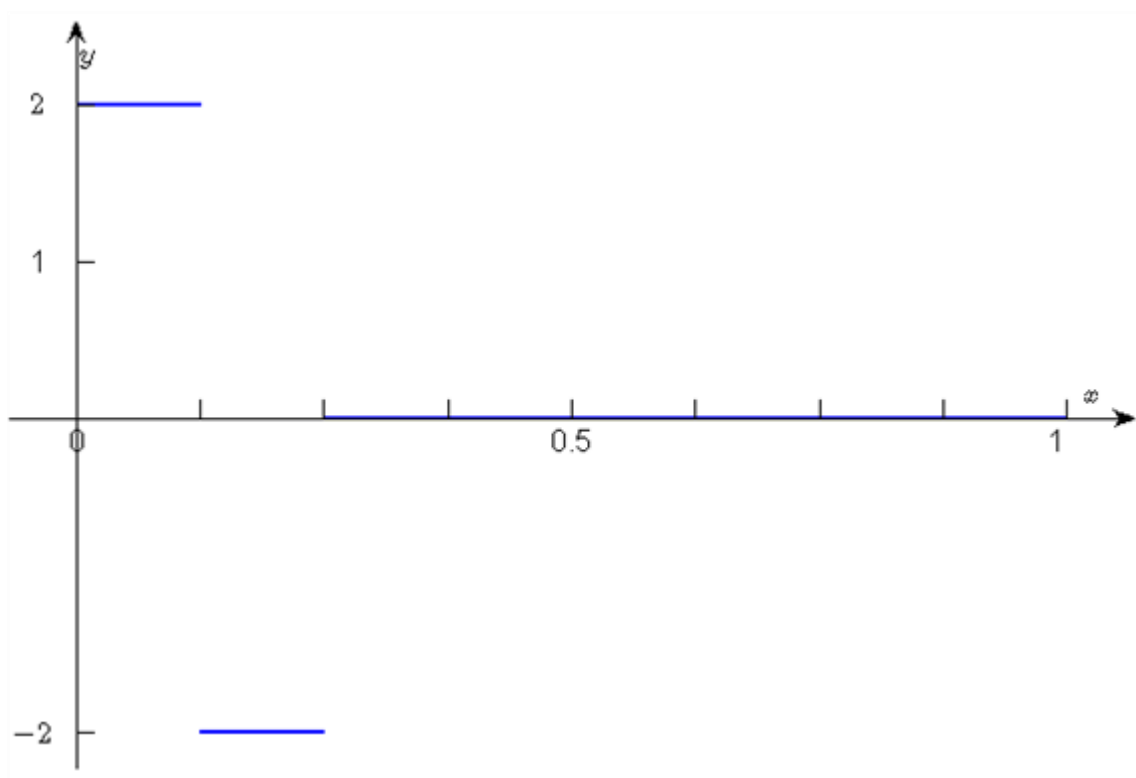




$$h_3 = h_{41}$$

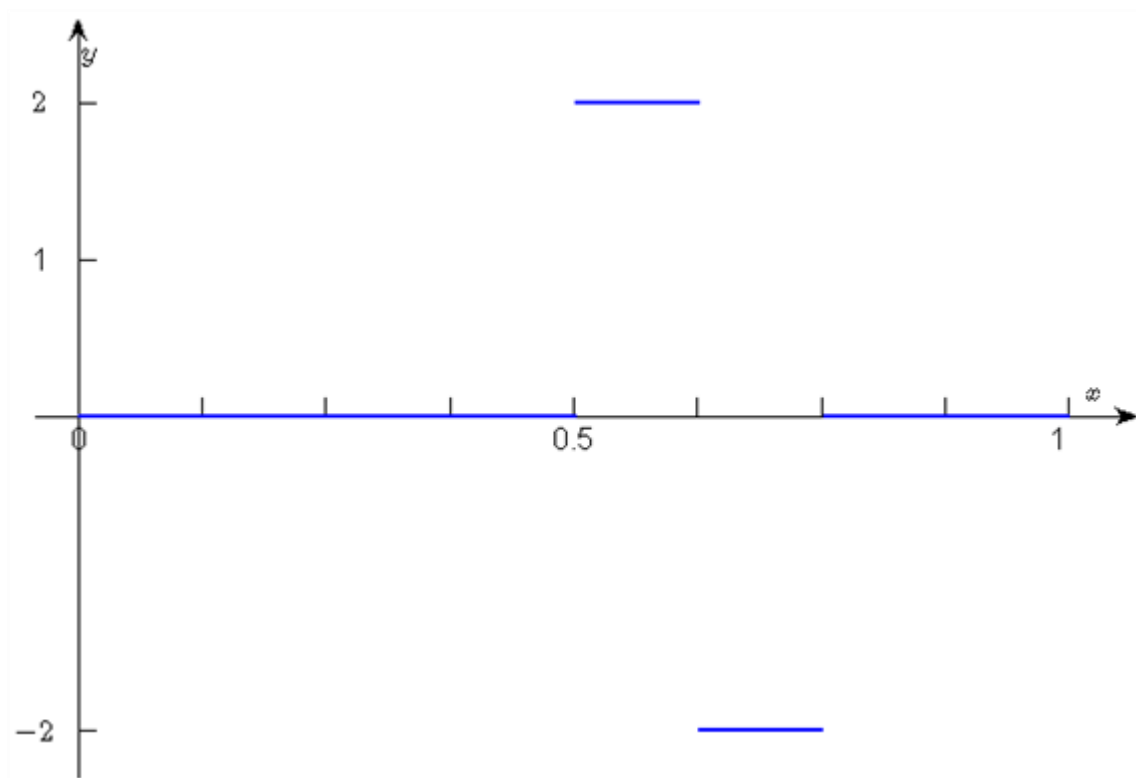


$$h_4 = h_{20}$$



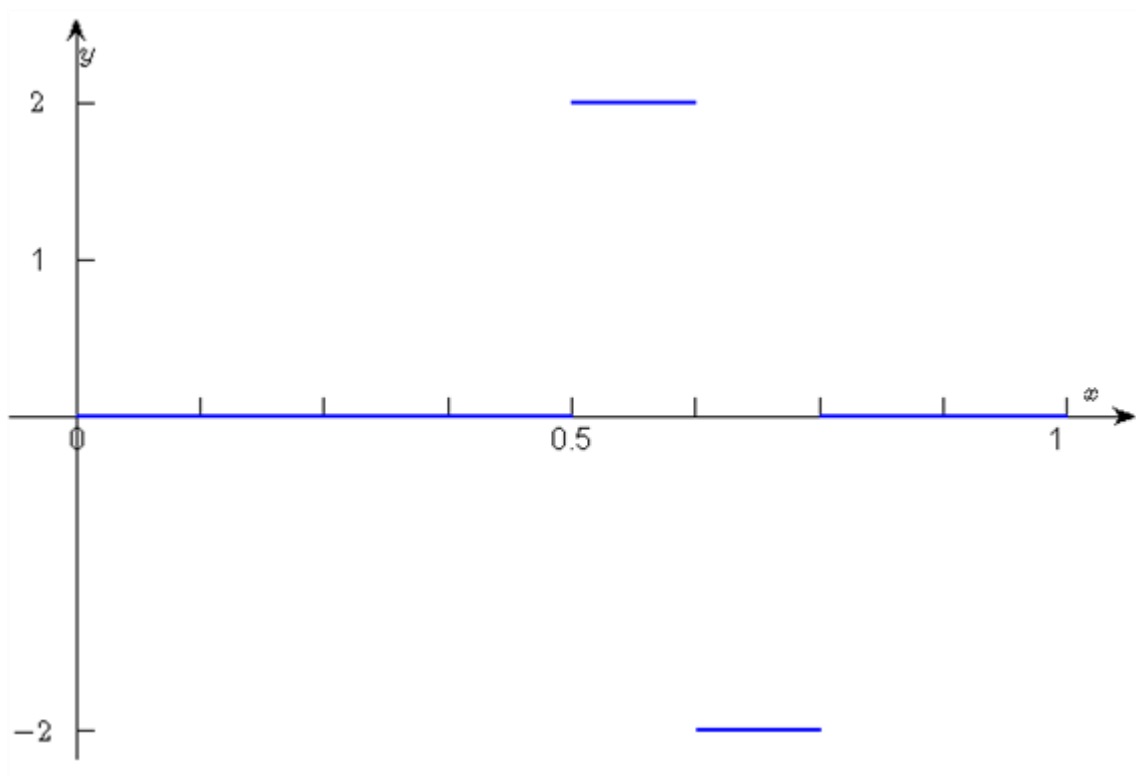
$h_5 = h_{21}$

[
]

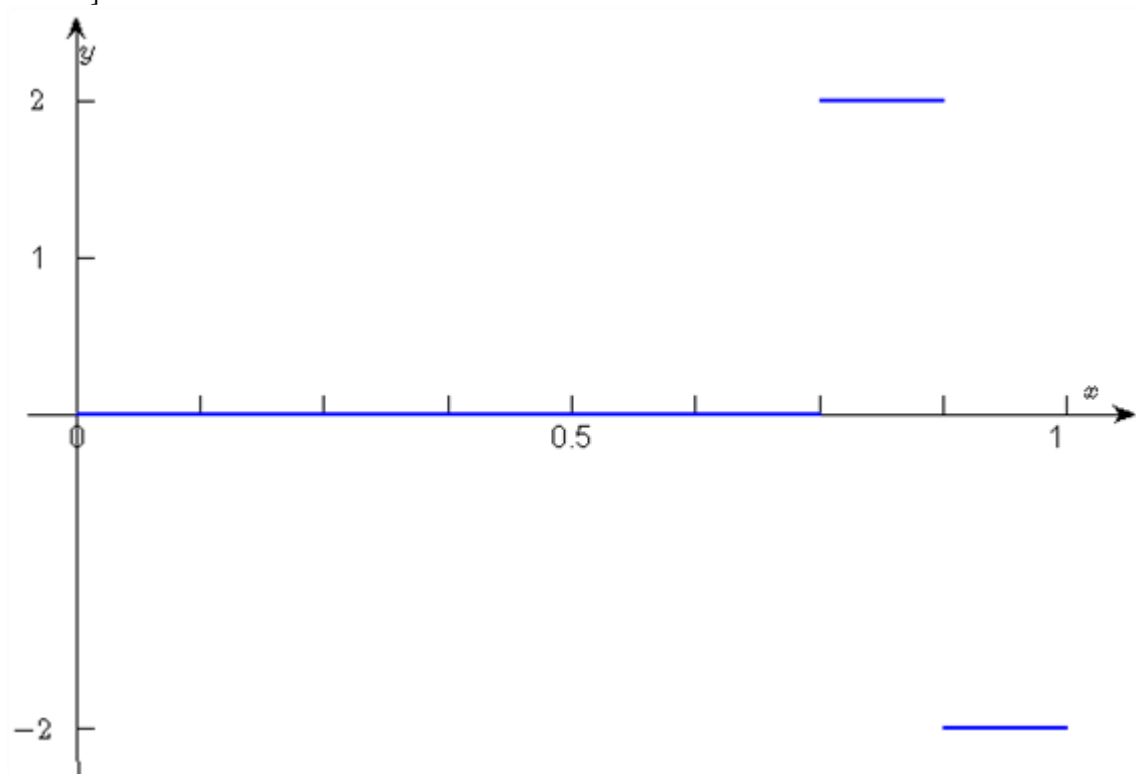


$h_6 = h_{22}$

[
]



$h_7 = h_{2^3}$



4.1.28. *Megjegyzés*. A h_{nk} függvény tartója a $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ intervallum és értéke az intervallum első felében $2^{\frac{n}{2}}$, a második fél-intervallumban pedig $-2^{\frac{n}{2}}$. Igazolható, hogy a Haar-függvények és tartóik kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők egymásnak, azaz h_{nk} függvény indexelhető a $I_{nk} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ tartóintervallumával is.

4.1.29. Tétel. A $\{h_m, m \in \mathbb{N}\}$ rendszer ortonormált az $L^2_{[0,1]}$ térben a szokásos skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle h_i, h_j \rangle = \int_0^1 h_i(x) h_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. Legyen

$$i = 2^n + k \quad (n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n), \quad \text{és} \quad j = 2^m + \ell \quad (m \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell < 2^m).$$

A $h_i = h_{nk}$ tartója

$$\text{supp}\{h_{nk}\} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right],$$

a $h_j = h_{m\ell}$ tartója pedig

$$\text{supp}\{h_{m\ell}\} = \left[\frac{\ell}{2^m}, \frac{\ell+1}{2^m} \right].$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\text{supp}\{h_{nk}\} \cap \text{supp}\{h_{m\ell}\} = \emptyset$, akkor $h_i h_j = 0$ a valós számok halmazán és így a kérdéses skaláris szorzat is 0. Az alábbi esetek fordulhatnak elő:

i) Ha $n = m$, akkor,

a) ha emellett $k = \ell$, akkor $i = j$ és így

$$\langle h_i, h_i \rangle = \int_0^1 h_i(x) h_i(x) dx = \int_0^1 h_{2^n+k}^2(x) dx = 2^n \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} 1 dx = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1.$$

b) ha $k \neq \ell$, akkor a két függvény diszjunkt tartójú, azaz $\text{supp}\{h_{nk}\} \cap \text{supp}\{h_{m\ell}\} = \emptyset$, és így az előbb részletezett módon kaphatjuk, hogy a skaláris szorzat 0.

ii) Ha $n \neq m$, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy

$$n > m \Rightarrow 2^n > 2^m \Rightarrow 2^{-n} < 2^{-m}.$$

Ekkor a szóban forgó függvények tartói vagy diszjunktak, vagy tartalmazzák egymást.

a) Ha a két függvény diszjunkt tartójú, akkor az előbbieket alapján a skaláris szorzat 0.

b) Ha a h_j függvény tartója tartalmazza a h_i függvény tartóját, azaz

$$\text{supp}\{h_{nk}\} \subset \text{supp}\{h_{m\ell}\},$$

akkor

$$\langle h_i, h_j \rangle = \int_0^1 h_{2^n+k}(x) h_{2^m+\ell}(x) dx.$$

A $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$ intervallumon a $h_{m\ell}$ függvény állandó, legyen ez c ($c \in \{-2^{\frac{m}{2}}, 2^{\frac{m}{2}}\}$), ezért a fenti integrál az alábbi módon bontható szét:

$$\begin{aligned}
 \langle h_i, h_j \rangle &= \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} h_{2^n+k}(x) h_{2^m+l}(x) dx = \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} h_{2^n+k}(x) h_{2^m+l}(x) dx + \int_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^n}} h_{2^n+k}(x) h_{2^m+l}(x) dx = \\
 &= \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} c \cdot 2^{\frac{n}{2}} dx - \int_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^n}} c \cdot 2^{\frac{n}{2}} dx = c \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}} - c \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}} = 0.
 \end{aligned}$$

Összegezve, a $\langle h_i, h_j \rangle$ skaláris szorzat pontosan akkor 1, ha $i = j$, minden más esetben pedig 0.

□

4.1.30. Tétel. A Haar-rendszer teljes az $L^2_{[0,1]}$ térben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ négyzetesen integrálható függvény, amely a Haar-rendszer minden elemére ortogonális.

Mivel $[0,1]$ véges intervallum, ezért ha f négyzetesen integrálható, akkor integrálható is. Jelölje F a f függvény integrálfüggvényét, azaz

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt \quad (x \in [0,1]).$$

Ekkor $F(0) = 0$, továbbá

$$F(1) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) h_0(t) dt = \langle f, h_0 \rangle = 0.$$

Az f és $h_1 = h_{00}$ függvények ortogonalitását kihasználva

$$0 = \langle f, h_1 \rangle = \int_0^1 f(t) h_1(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = (F(\frac{1}{2}) - F(0)) - (F(1) - F(\frac{1}{2})) = 2F(\frac{1}{2}),$$

ahonnan $F(1) = F(0) = 0$ felhasználásával $F(\frac{1}{2}) = 0$ adódik.

Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $x_{nk} = \frac{k}{2^n}$ ($k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$) osztópontokról beláttuk, hogy $F(x_{nk}) = 0$.

Az f és $h_{2^n+k} = h_{nk}$ függvények ortogonalitását kihasználva

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle f, h_{2^n+k} \rangle = \int_0^1 f(t) h_{2^n+k}(t) dt = 2^{\frac{2k+1}{2}} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} f(t) dt - 2^{\frac{k+1}{2}} \int_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t) dt = \\
 &= (F(\frac{2k+1}{2^{n+1}}) - F(\frac{k}{2^n})) - (F(\frac{k+1}{2^n}) - F(\frac{2k+1}{2^{n+1}})) = 2F(\frac{k+1}{2^n}),
 \end{aligned}$$

ahonnan $F(\frac{2k+1}{2^{n+1}}) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$). Azaz a F integrálfüggvénynek minden $x_{m\ell}$ ($m \in \mathbb{N}, \ell \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$) pont zérushelye. Mivel F integrálfüggvény, ezért folytonos. Az $\{x_{m\ell}, m \in \mathbb{N}, \ell = 0, \dots, 2^m - 1\}$ pontok a $[0,1]$ intervallumon sűrűn helyezkednek el, ezért $F \equiv 0$. Az

integrálfüggvényről tudjuk, hogy majdnem mindenütt differenciálható és $F' = f$ m.m., tehát $f = 0$ m.m. is teljesül. Ezzel beláttuk, hogy a rendszer valóban teljes.

4.1.6 Példa. Legyen $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ és $f(x) = x$ ($x \in [0, 1)$). Írjuk fel a függvény Haar-Fourier-sorát.

Megoldás. Jelölje $(c_m, m \in \mathbb{N})$ a függvény Haar-Fourier-együtthatóinak sorozatát. Ekkor

$$c_0 = \langle f, h_0 \rangle = \int_0^1 f(t) \chi_{[0,1)} dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, ha $m = 2^n + k$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$

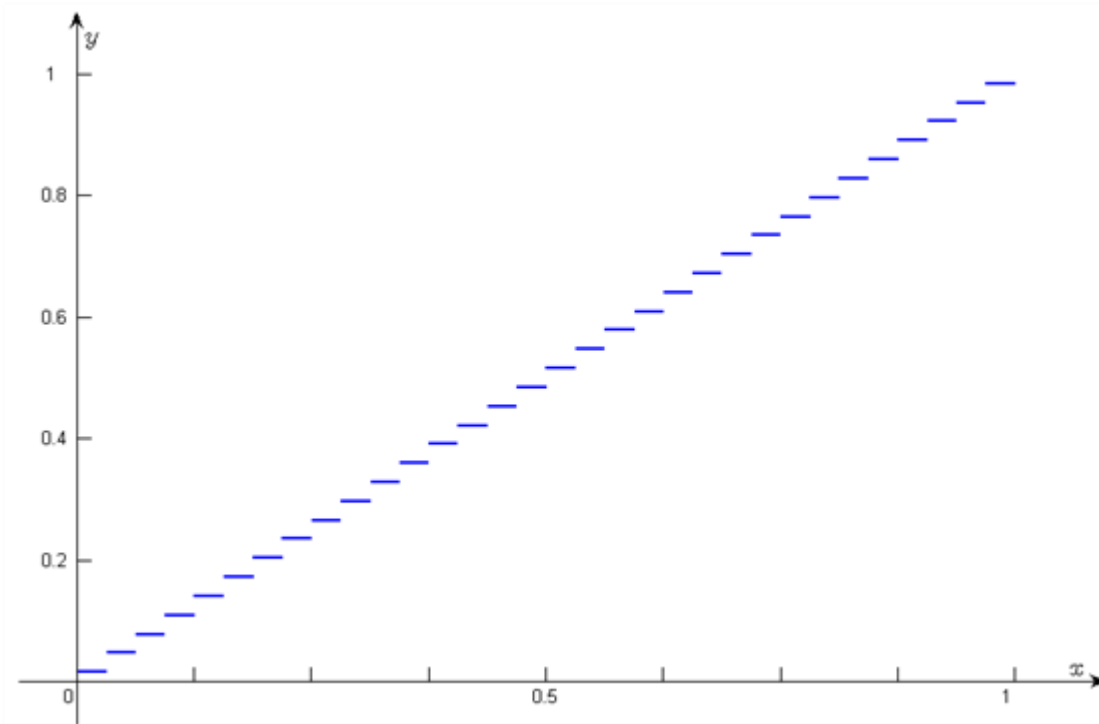
$$\begin{aligned} c_m &= \langle f, h_m \rangle = \int_0^1 f(t) h_m dt = \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t) h_m dt = 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} f(t) dt - 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t) dt = \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} t dt - 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^n}} t dt = 2^{\frac{n}{2}} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} - 2^{\frac{n}{2}} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^n}} = \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} \right)^2 - \left(\frac{k}{2^n} \right)^2 \right) - 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\left(\frac{k+1}{2^n} \right)^2 - \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} \right)^2 \right) = \\ &= 2^{\frac{-3n-6}{2}} (2(2k+1)^2 - 4k^2 - 4(k+1)^2) = -2^{\frac{-3n-4}{2}}. \end{aligned}$$

Így a függvény Haar-Fourier-sora

$$f \sim \frac{1}{2} h_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{\frac{-3n-4}{2}} h_{nk}.$$

A 4.8. ábrán szemléltetjük az f függvény Haar-Fourier-sorának $S_{31}f$ részletösszegének grafikonját.

4.8. ábra - Az f függvény Haar-Fourier-sorának $S_{31}f$ részletösszegének grafikonja



4.1.31. Megjegyzés. Igazolható, hogy a h_{nk} Haar-függvények a $h = h_1 = h_{00}$ alapfüggvényből transláció és dilatació segítségével származtathatók, nevezetesen:

$$h_{nk}(x) = 2^{\frac{n}{2}} h(2^n x - k) \quad (n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^n - 1).$$

1.5. Feladatok

4.1.1. Feladat. Tekintsük a $[-\pi, \pi)$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terét $(L^2_{[-\pi, \pi)})$, és jelölje Y a $\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right\} = \{e_1, e_2\}$ rendszer által kifeszített véges dimenziós alteret. Számítsuk ki az $f(x) = x$ ($x \in [-\pi, \pi)$) függvény ortogonális projekcióját (merőleges vetületét) az Y térre vonatkozóan. *megoldás*

4.1.2. Feladat. Tekintsük a valós számok halmazán négyzetesen integrálható, 1-szerint periodikus függvények terét (L^2_1) , és jelölje Y a Rademacher-rendszer első két eleme, $\{r_0, r_1\}$ által kifeszített véges dimenziós alteret. Legyen f 1-szerint periodikus és $f(x) = x$ ($x \in [0, 1)$). Számítsuk ki az f függvény ortogonális projekcióját (merőleges vetületét) az Y térre vonatkozóan. *megoldás*

4.1.3. Feladat. Tekintsük a $[0, 1)$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terét $(L^2_{[0, 1)})$, és jelölje Y a Haar-rendszer első két eleme, $\{h_0, h_1\}$ által kifeszített véges dimenziós alteret. Számítsuk ki az $f(x) = x$ ($x \in [0, 1)$) függvény ortogonális projekcióját (merőleges vetületét) az Y térre vonatkozóan. *megoldás*

4.1.4. Feladat. Legyen $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ és $f(x) = \frac{1}{4}[4x]$ ($x \in [0, 1)$). Legyen $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ és $f(x) = \frac{1}{4}[4x]$ ($x \in [0, 1)$). Írjuk fel a függvény Haar-Fourier-sorát. *megoldás*

4.1.5. Feladat. Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = e^x$, ha $x \in [-\pi, \pi)$. Írjuk fel a függvény komplex Fourier-sorát. *megoldás*

4.1.6 Feladat. A $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ ik elő az $(a, b) = (-1, 1)$ intervallumon értelmezett $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvényre ortogonális polinomrendszert Gram-Schmidt ortogonalizációval.

megoldás

1.6. Megoldások

4.1.1. Feladat. Tekintsük a $[-\pi, \pi)$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terét $(L^2_{[-\pi, \pi)})$, és jelölje Y a $\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right\} = \{e_1, e_2\}$ rendszer által kifeszített véges dimenziós alteret. Számítsuk ki az $f(x) = x$ ($x \in [-\pi, \pi)$) függvény ortogonális projekcióját (merőleges vetületét) az Y térre vonatkozóan.

Megoldás. Használjuk a 3.2.2. Tételben belátott

$$P_Y f = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2,$$

előállítás. Parciális integrálás segítségével tudjuk kiszámítani az együtthatók értékét:

$$\begin{aligned}\langle f, e_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left([x \sin x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} ([\cos x]_{-\pi}^{\pi}) = 0, \\ \langle f, e_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left([-x \cos x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\pi + [\sin x]_{-\pi}^{\pi}) = 2\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Így

$$P_Y f = \langle f, e_2 \rangle e_2 = 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x = 2 \sin x \quad (x \in [-\pi, \pi)).$$

vissza a feladathoz

4.1.2. Feladat. Tekintsük a valós számok halmazán négyzetesen integrálható, 1-szerint periodikus függvények terét (L^2_1) , és jelölje Y a Rademacher-rendszer első két eleme, $\{r_0, r_1\}$ által kifeszített véges dimenziós alteret. Legyen f 1-szerint periodikus és $f(x) = x$ ($x \in [0, 1)$). Számítsuk ki az f függvény ortogonális projekcióját (merőleges vetületét) az Y térre vonatkozóan.

Megoldás. Használjuk a 3.2.2. Tételben belátott

$$P_Y f = \langle f, r_0 \rangle r_0 + \langle f, r_1 \rangle r_1$$

előállítás. Az együtthatók számolása során felhasználhatjuk, hogy a Rademacher-függvények intervallumként konstans függvények összeragasztásával keletkeztek:

$$\begin{aligned}\langle f, r_0 \rangle &= \int_0^1 x r_0 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{4}, \\ \langle f, r_1 \rangle &= \int_0^{\frac{1}{4}} x dx - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x dx - \int_{\frac{3}{4}}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{4}}^1 = \\ &= \frac{1}{32} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{32} \right) + \left(\frac{9}{32} - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{32} \right) = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Így

$$P_Y f(x) = -\frac{1}{4}r_0(x) - \frac{1}{8}r_1(x) = \begin{cases} -\frac{3}{8}, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{4}), \\ -\frac{1}{8}, & \text{ha } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{8}, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ \frac{3}{8}, & \text{ha } x \in [\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

vissza a feladathoz

4.1.3. Feladat. Tekintsük a $[0,1)$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terét $(L^2_{[0,1)})$, és jelölje Y a Haar-rendszer első két eleme, $\{h_0, h_1\}$ által kifeszített véges dimenziós alteret. Számítsuk ki az $f(x) = x$ ($x \in [0,1)$) függvény ortogonális projekcióját (merőleges vetületét) az Y térre vonatkozóan.

Megoldás. Használjuk a 3.2.2. Tételben belátott

$$P_Y f = \langle f, h_0 \rangle h_0 + \langle f, h_1 \rangle h_1$$

előállítását. Az együtthatókat egyszerű számolással kapjuk, hiszen

$$\begin{aligned} \langle f, h_0 \rangle &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}, \\ \langle f, h_1 \rangle &= \int_0^{\frac{1}{2}} x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Így

$$P_Y f(x) = \frac{1}{2}h_0(x) - \frac{1}{4}h_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4}, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

vissza a feladathoz

4.1.4. Feladat. Legyen $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ és $f(x) = \frac{1}{4}[4x]$ ($x \in [0,1)$). Írjuk fel a függvény Haar-Fourier-sorát.

Megoldás. Vegyük észre, hogy a függvény az $\frac{1}{4}$ hosszúságú diadikus intervallumokon konstans, mégpedig

$$f(x) = \frac{k}{4}, \quad \text{ha } x \in \left[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4} \right), \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Az is nyilvánvaló, hogy a függvény Haar-Fourier együtthatóira $c_{nk} = 0$, ha $n \geq 2$. Így elegendő az első 4 együtthatót kiszámolni:

$$c_0 = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} 0 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2} dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{3}{4} dt = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \frac{k}{4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{3}{8}$$

és hasonlóan

$$c_1 = c_{00} = \int_0^1 f(t) h_1(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^1 \frac{k}{4} - \frac{1}{4} \sum_{k=2}^3 \frac{k}{4} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4} \right) = -\frac{1}{4},$$

$$c_2 = c_{10} = \int_0^1 f(t) h_2(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \frac{1}{4} \left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16},$$

$$c_3 = c_{11} = \int_0^1 f(t) h_3(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(t) dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{16}.$$

Így a Függvény Haar-Fourier-sora az alábbi véges összeget adja:

$$f \sim \sum_{m=0}^3 c_m h_m = \frac{3}{8} h_0 - \frac{1}{4} h_1 - \frac{1}{16} (h_2 + h_3).$$

vissza a feladathoz

4.1.5. Feladat. Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = e^x$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ Írjuk fel a függvény komplex Fourier-sorát.

Megoldás. A komplex Fourier-sor együtthatóit a (4.1.13) formula alapján számoljuk.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cdot e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{(1-in)2\pi} (e^{1-in\pi} - e^{-1-in\pi}) = \frac{1}{(1-in)\pi} (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi}. \end{aligned}$$

A számolás során kihasználtuk, hogy $e^{inx} = e^{-inx} = \cos(n\pi) = (-1)^n$ és a szinuszhiperbolikus függvény alábbi ismert előállítását

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tehát a függvény komplex Fourier-sora:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

vissza a feladathoz

4.1.6. Feladat. Állítsuk elő az $(a, b) = (-1, 1)$ intervallumon értelmezett $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvényre ortogonális $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ polinomrendszert Gram-Schmidt ortogonalizációval.

Megoldás. Használjuk 4.1.15. megjegyzésben leírt konstrukciót. Eszerint legyen $P_0 \equiv 1$.

A konstrukcióban szereplő együtthatók felírásához az alábbi improprius integrálok kiszámítása szükséges:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} [\arcsin x]_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} = \pi, \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_{\varepsilon}}^{t_{\delta}} \sin t \frac{1}{|\cos t|} \cos t dt = \\ &\quad \begin{array}{l} \sin t = x \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right) \quad \Delta t = \cos t dt \\ t_{\varepsilon} = \arcsin(-1+\varepsilon) \quad t_{\delta} = \arcsin(1-\delta) \end{array} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_{\varepsilon}}^{t_{\delta}} \sin t dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} [-\cos t]_{t_{\varepsilon}}^{t_{\delta}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^2 t \frac{1}{|\cos t|} \cos t dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} \sin t = x \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right) \quad dx = \cos t dt \\ t_\varepsilon = \arcsin(-1+\varepsilon) \quad t_\delta = \arcsin(1-\delta) \end{array} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^2 t dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} (1 - \cos 2t) dt = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{t_\varepsilon}^{t_\delta} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^3 t \frac{1}{|\cos t|} \cos t dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} \sin t = x \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right) \quad dx = \cos t dt \\ t_\varepsilon = \arcsin(-1+\varepsilon) \quad t_\delta = \arcsin(1-\delta) \end{array} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^3 t dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} \cos t = u \quad du = -\sin t dt \\ u_\varepsilon = \cos t_\varepsilon \quad u_\delta = \cos t_\delta \end{array} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{u_\varepsilon}^{u_\delta} (u^2 - 1) du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{3} u^3 - u \right]_{u_\varepsilon}^{u_\delta} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^4 t \frac{1}{|\cos t|} \cos t dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} \sin t = x \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right) \quad dx = \cos t dt \\ t_\varepsilon = \arcsin(-1+\varepsilon) \quad t_\delta = \arcsin(1-\delta) \end{array} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^4 t dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{4} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} (1 - \cos 2t)^2 dt = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{4} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \frac{3}{8} - \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 4t}{8} dt = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left[\frac{3}{8} t - \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t \right]_{t_\varepsilon}^{t_\delta} = \frac{3}{8} \pi.
 \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^5 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^5 t \frac{1}{|\cos t|} \cos t dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} \sin t = x \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right) \quad dx = \cos t dt \\ t_\varepsilon = \arcsin(-1+\varepsilon) \quad t_\delta = \arcsin(1-\delta) \end{array} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} \sin^5 t dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{t_\varepsilon}^{t_\delta} (1 - \cos^2 t)^2 \sin t dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} \cos t = u \quad du = -\sin t dt \\ u_\varepsilon = \cos t_\varepsilon \quad u_\delta = \cos t_\delta \end{array} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{u_\varepsilon}^{u_\delta} -u^4 + 2u^2 - 1 du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left[-\frac{1}{5} u^5 + \frac{2}{3} u^3 - u \right]_{u_\varepsilon}^{u_\delta} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

A fenti számolások során kihasználtuk, hogy a $\cos$ függvény a $[-1+\varepsilon, 1-\delta]$ intervallumon pozitív, továbbá,

$$\text{hogy } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} t_\varepsilon = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} t_\delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} u_\varepsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0+} u_\delta = 0.$$

A fenti integrálok alapján

$$\alpha_{01} = \frac{\langle id, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = 0,$$

így $P_1 = x - \alpha_{01}P_0(x) = x$ ($x \in (-1, 1)$), továbbá

$$\alpha_{02} = \frac{\langle id^2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \alpha_{12} = \frac{\langle id^2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = 0,$$

így $P_2(x) = x^2 - \alpha_{02}P_0(x) - \alpha_{12}P_1(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ ($x \in (-1, 1)$).

Mivel

$$\alpha_{03} = \frac{\langle id^3, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = 0, \quad \text{és} \quad \alpha_{13} = \frac{\langle id^3, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{\frac{3}{8}\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4},$$

valamint

$$\alpha_{23} = \frac{\langle id^3, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot (x^2 - \frac{1}{2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{2})^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^5 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 x^4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = 0,$$

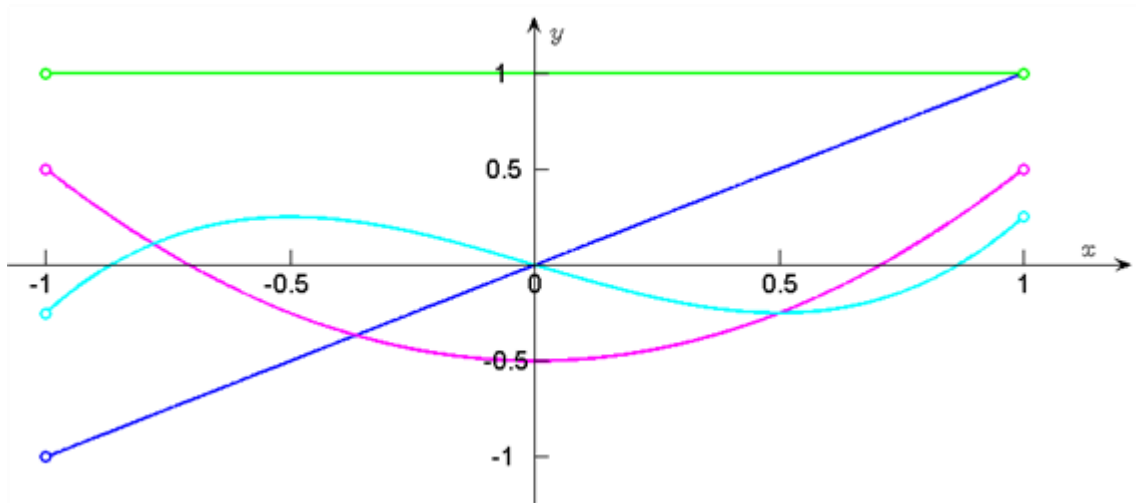
adódik, ezért $P_3(x) = x^3 - \alpha_{03}P_0(x) - \alpha_{13}P_1(x) - \alpha_{23}P_2(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ ($x \in (-1, 1)$).

4.1.32. Megjegyzés. Az eljárást folytatva ortogonális polinom-rendszer konstruálható. Az így kapott polinomokat elsőfajú Csebisev¹⁵ polinomoknak nevezzük.

A 4.9. ábrán szemléltetjük 4.1.4. feladatban szereplő konstrukcióval generált első 4 1-főegyütthatós elsőfajú Csebisev-polinom grafikonját.

4.9. ábra - Az első 4 1-főegyütthatós elsőfajú Csebisev-polinom grafikonja

¹⁵Pafnutyij Lvovics Csebisev (egyes átirások szerint Csebisov) (1821–1894) orosz matematikus.



4.1.33. *Megjegyzés.* Az elsőfajú Csebisev-polinomokat is szokás úgy normálni, hogy minden polinom helyettesítési értéke az 1-ben 1 legyen. Az alábbi rekurzió alapján számolhatók a polinomok:

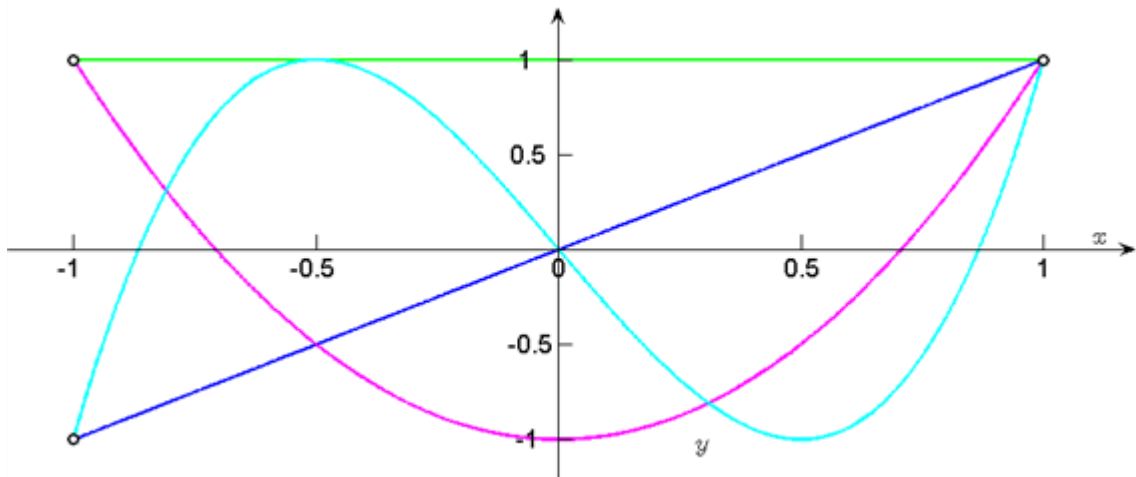
$$T_0 \equiv 1, \quad T_1 = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Az elsőfajú Csebisev-polinomok az alábbi direkt formula alapján is számolhatók:

$$T_n(x) = \cos n \arccos x \quad (x \in (-1, 1), n \in \mathbb{N})$$

A 4.10. ábrán a fenti definíció alapján számolt elsőfajú Csebisev-polinomok grafikonját szemléltetjük.

4.10. ábra - Az első 4 klasszikus elsőfajú Csebisev-polinom grafikonja



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

2. Az L^p függvénytér

A 4.1-es fejezetben bevezettük a négyzetesen integrálható függvények fogalmát. Ebben a fejezetben más hatványon integrálható függvények osztályával fogunk foglalkozni.

4.2.1. Definíció. Legyen (a, b) egy véges vagy nem véges intervallum. Az (a, b) intervallumon értelmezett, Lebesgue-mérhető függvények halmazát, melyek p -edik hatványa integrálható, ahol $0 < p < \infty$, L^p függvényosztálynak nevezzük, azaz

$$L^p = L^p_{(a,b)} := \{f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető és } f^p \in L_{(a,b)}\} \quad (0 < p < \infty).$$

Az L^p függvényosztály bizonyos feltételek mellett szoros kapcsolatban van a lényegében korlátos függvényekkel.

4.2.2. Definíció. Legyen (a,b) egy véges vagy nem véges intervallum. Az (a,b) intervallumon értelmezett, Lebesgue-mérhető függvények halmazát, melyek lényegében korlátosak, L^∞ függvényosztálynak nevezzük, azaz

$$L^\infty = L^\infty_{(a,b)} := \{f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető és lényegébenkorlátos}\}.$$

Az $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény lényegében korlátos, ha létezik egy $K > 0$ szám, melyre $|f| \leq K$ majdnem mindenütt teljesül az (a,b) intervallumon.

Nyilvánvalóan minden (a,b) intervallumon értelmezett mérhető, korlátos függvény lényegében korlátos, ugyanakkor például az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases} \quad (x \in (0,1))$$

függvény nem korlátos, de az L^∞ függvényosztálynak eleme.

Az L^p és L^∞ függvényosztályok esetén is bevezetjük a norma fogalmát:

4.2.3. Definíció. Legyen $0 < p < \infty$. Az $f \in L^p$ függvény L^p -normáján az

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.2.1)$$

integrált értjük, míg az $f \in L^\infty$ normája alatt az

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (4.2.1)$$

ún. lényeges felső határt értjük. A $\operatorname{ess\,sup} |f|$ szám a legkisebb lényeges felső korlátot jelöli.

Felmerül a kérdés, hogy az így definiált normák rendelkeznek-e a szükséges norma-tulajdonságokkal. Mielőtt ezt megvizsgálnánk, az L^p -norma és az L^∞ -norma közötti kapcsolatra mutatunk rá.

4.2.4. Tétel. Ha (a,b) véges intervallum és $f \in L^\infty$, akkor

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

Bizonyítás. Legyen $M := \operatorname{ess\,sup} |f|$. Ekkor nyilván teljesül az

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(M^p (b-a) \right)^{\frac{1}{p}} = M (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

becslés. Továbbá, mivel M a legkisebb lényeges felső korlát, ezért bármilyen $0 < \varepsilon < 1$ esetén

$$H := \{x \in (a,b) : |f(x)| \geq M\varepsilon\}$$

pozitív mértékű halmaz, ezért

$$\|f\|_p = \left| \int_a^b |f(x)|^p dx \right|^{\frac{1}{p}} \geq \left| \int_H |f(x)|^p dx \right|^{\frac{1}{p}} \geq \left| M^p \varepsilon^p m(H) \right|^{\frac{1}{p}} = M \varepsilon (m(H))^{\frac{1}{p}},$$

ahol $m(H)$ a H halmaz Lebesgue-mértékét jelöli. Ezzel a következő egyenlőtlenséget igazoltuk:

$$M \varepsilon (m(H))^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq M (b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

Végrehajtva a $p \rightarrow \infty$ határátmenetet, az

$$M \varepsilon \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq M$$

egyenlőtlenséghez jutunk, hiszen $(m(H))^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$, $(b-a)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$, ha $p \rightarrow \infty$. Mivel ε tetszőleges 0 és 1 közé eső szám, ezért a fenti egyenlőtlenséggel az állításunkat is bebizonyítottuk.

□

A normatulajdonság igazolásához szükségünk van a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség általánosítására.

4.2.5. Tétel (Hölder-féle egyenlőtlenség). Legyen (a, b) véges vagy nem véges intervallum, $f \in L^p$, $g \in L^q$, ahol $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ¹⁶. Ekkor fg Lebesgue-integrálható és

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (4.2.3)$$

Bizonyítás. Ha $p=1$, $q=\infty$ ¹⁷, akkor mivel $|fg| \leq |f| \cdot \sup_{x \in S} |g|$ majdnem mindenütt az (a, b) intervallumon, ezért

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot \sup_{x \in S} |g| dx = \sup_{x \in S} |g| \int_a^b |f(x)| dx = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

Legyen most $1 < p < \infty$. Ekkor nyilván $1 < q < \infty$ is teljesül. Ha $\|f\|_p = 0$, akkor $f=0$ majdnem mindenütt, ezért $fg=0$ m.m. is teljesül, tehát (4.2.3) triviálisan teljesül. Ugyanez a helyzet, ha $\|g\|_q = 0$.

Tegyük fel, hogy $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_q \neq 0$ és vezessük be a következő jelöléseket:

$$F := \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p, \quad G := \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta := 1 - \alpha = \frac{1}{q}.$$

Ekkor nyilván $0 < \alpha < 1$ és $0 < \beta < 1$, továbbá az $F, G: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre

$$F \geq 0, \quad G \geq 0, \quad \int_a^b F(x)dx = 1, \quad \int_a^b G(x)dx = 1. \quad (4.2.4)$$

Az új jelölésekkel ha belátjuk, hogy $F^\alpha G^\beta$ integrálható és

¹⁶Az ∞ művelet alatt nullát értünk.

¹⁷A bizonyítás nyilván ugyanígy működik $p=\infty$, $q=1$ esetben is.

$$\int_a^b F^\alpha(x) G^\beta(x) dx \leq 1. \quad (4.2.5)$$

A (4.2.5) egyenlőtlenségből (4.2.3) következik.

A (4.2.5) bizonyításához felhasználjuk az alábbi elemi egyenlőtlenséget

$$t^\alpha \leq \alpha t + \beta = \alpha t + 1 - \alpha \quad (t \geq 0, 0 < \alpha < 1).$$

Írjunk t helyére $\frac{u}{v}$ -t, ahol $u, v > 0$. Ekkor a v -vel való beszorzás után az

$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v \quad (u, v > 0)$$

egyenlőtlenséghez jutunk, mely nyilván kiterjeszthető az $u, v \geq 0$ esetre is. Ha u helyére F -et, v helyére G -t írunk, akkor

$$F^\alpha(x) G^\beta(x) \leq \alpha F(x) + \beta G(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Mivel $u^\alpha v^\beta ((u, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty))$ az u, v változók folytonos függvénye, ezért $F^\alpha G^\beta$ mérhető függvények, továbbá $\alpha F + \beta G$ egy integrálható majoránsa, ezért $F^\alpha G^\beta$ maga is Lebesgue-integrálható, és (4.24.) alapján

$$\int_a^b F^\alpha(x) G^\beta(x) dx \leq \alpha \int_a^b F(x) dx + \beta \int_a^b G(x) dx = \alpha + \beta = 1,$$

amivel (4.2.5) és ezzel (4.2.3) egyenlőtlenségeket bebizonyítottuk.

□

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás során az is kiderül, hogy a $1 < p < \infty$ esetben az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|f|^p$ és $|g|^q$ majdnem mindenütt csak egy állandó tényezőben különböznek, és f, g majdnem mindenütt állandó előjelű.

A Hölder-egyenlőtlenség segítségével tudjuk a Minkowski-egyenlőtlenséget igazolni.

4.2.6. Tétel (Minkowski-féle egyenlőtlenség). Legyen (a, b) véges vagy nem véges intervallum, $f, g \in L^p$ ($1 \leq p \leq \infty$). Ekkor $f + g \in L^p$ és

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (4.2.6)$$

Bizonyítás. Mivel $|f + g| \leq |f| + |g|$, ezért a $p = 1$ és a $p = \infty$ esetekben az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül.

Legyen $1 < p < \infty$. Mivel f, g mérhető függvények, ezért $f + g$ is mérhető, és mivel t^p ($t \geq 0$) folytonos függvény, ezért mérhető is, és ezért $|f + g|^p$ függvény is mérhető. Az $|f + g|^p$ függvénynek létezik integrálható majoránsa, mert

$$|f + g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p),$$

hiszen bármilyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számra $|\alpha + \beta|^p \leq (2 \max\{|\alpha|, |\beta|\})^p = 2^p \cdot \max\{|\alpha|^p, |\beta|^p\}$.

Legyen $1 < q < \infty$ a p szám duálisa, azaz $1/p + 1/q = 1$. Ekkor $(p-1)q = (p-1) \frac{p}{p-1} = p$, tehát $|f + g|^{p-1} \in L^q$ és

$$\|f + g\|_p^p = \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \|f + g\|_p^p.$$

Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget az L^p -be tartozó $|f|, |g|$ és az L^q -ba tartozó $|f + g|^{p-1}$ függvényekre:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_a^b |f + g|^p \leq \int_a^b (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} = \\ &= \int_a^b |f| \cdot |f + g|^{p-1} + \int_a^b |g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Ha $\|f + g\|_p > 0$, akkor rendezés után a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk, hiszen $p - p/q = p \frac{1}{p} = 1$, ha pedig $\|f + g\|_p = 0$, akkor a Minkowski-egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

□

Megjegyezzük, hogy a Minkowski-egyenlőtlenség nem feltétlenül teljesül $0 < p < 1$ esetén. Legyen például

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ekkor bármilyen $0 < p < 1$ esetén $f, g \in L^p_{(0,1)}$, és

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{-\frac{1}{p}}, \quad \|f + g\|_p = 1.$$

Mivel $0 < p < 1$ esetén $2 \cdot 2^{-\frac{1}{p}} < 1$, ezért az f, g függvényekre nem teljesül a Minkowski-egyenlőtlenség.

Tehát $0 < p < 1$ esetén 4.2.3. Definícióban szereplő norma nem rendelkezik a szükséges normatulajdonságokkal, azaz ebben az esetben L^p nem normált tér. Az eddigi eredményeinket felhasználva már egyszerűen következik az alábbi

4.2.7. Tétel. Legyen (a, b) véges vagy nem véges intervallum. Minden $1 \leq p \leq \infty$ esetén $L^p = L^p_{(a,b)}$ normált lineáris tér a valós számtest felett.

Bizonyítás. A Minkowski-egyenlőtlenségnél bebizonyítottuk, hogy az összeadás nem vezet ki az L^p -térből. Továbbá nyilvánvalóan teljesül, hogy a konstansszoros sem vezet ki a térből, illetve, hogy a lineáris térre vonatkozó műveleti tulajdonságok teljesülnek. Nézzük meg, hogy $\|\cdot\|_p$ rendelkezik-e a szükséges normatulajdonságokkal.

i) Az integrál tulajdonságai alapján minden $f \in L^p$ esetén $\|f\|_p \geq 0$, és $\|f\|_p = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $|f|^p = 0$ majdnem mindenütt, azaz, ha $f = 0$ m.m.

ii) Az integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

iii) A háromszög-egyenlőtlenség megegyezik (4.2.6) Minkowski-egyenlőtlenséggel.

□

Mint azt már korábban beláttuk, $p = 2$ esetén az L^p téren a normát skaláris szorzat indukálja. Ha $p \neq 2$, akkor ez nem teljesül. Viszont a teljességre vonatkozó tétel az általános esetben is érvényes, és a bizonyítás analóg módon elvégezhető az L^2 -re vonatkozó bizonyítás alapján, melyet az olvasóra bízunk.

4.2.8. Tétel (Riesz-Fischer-Tétel.). Az L^p ($1 \leq p \leq \infty$) függvénytér teljes, azaz benne minden Cauchy-sorozat konvergens. Tehát L^p ($1 \leq p \leq \infty$) Banach-tér.

5. fejezet - Trigonometrikus Fourier-sorok konvergenciája

Ebben a fejezetben a trigonometrikus Fourier-sorok alapvető konvergencia-kérdéseivel foglalkozunk. A Riesz-Fischer-tételből következik, hogy ha két függvény Fourier-együtthatói megegyeznek, akkor a függvények majdnem mindenütt egyenlők. Azaz az f függvényt megadhatjuk egy számsorozattal is, nevezetesen a Fourier-együttható-sorozatával. Ezt a folyamatot *Fourier-analízisnek* nevezzük.

A fordított eljárást, amikor a Fourier-együtthatókból rekonstruáljuk a függvényt, *Fourier-szintézisnek* nevezzük. „Rekonstrukció” alatt a következőket érthetjük:

- A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sor pontonként konvergál-e f -hez?
- A függvényt sor egyenletesen konvergál-e f -hez?
- A függvényt sor négyzetintegrálra (L^2 -normában) konvergál-e f -hez?

A harmadik kérdésre könnyen tudunk válaszolni. Mivel a trigonometrikus rendszer teljes, ezért 3.2.7. Tétel érvényes, tehát ha az f függvény négyzetesen integrálható, akkor a Fourier-sora L^2 -normában konvergál az f -hez.

Ebben a fejezetben a másik két kérdéssel foglalkozunk. A függvényt sor pontonkénti, illetve egyenletes konvergenciája mellett az is felvetődik, hogy ha konvergens, akkor az összegfüggvénye f lesz-e, vagy esetleg más.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: Dirichlet-féle magfüggvény, Dirichlet-formula, Gibbs-jelenség.

Szükséges előismeret: 2. fejezet, 3. fejezet, 4. fejezet, korlátos változású függvények.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 6 tanóra + 6 óra önálló munka.

1. Történeti előzmények, motiváció

Már a differenciál- és integrálszámítás XVII. századi kialakulásában is döntő szerepet játszottak bizonyos fizikai problémák. A fizika kulcsszerepe az analízis további fejlődésében is megmaradt. A XVIII. században és a XIX. század elején a fizika több olyan problémát is felvetett, amelyek elősegítették új matematikai elméletek megalkotását. A Fourier-sorok elméletének kialakulásában is két fizikai probléma játszott főszerepet: a rezgő húr problémája, és a hővezetés egyenlete.

A rezgő húr problémája. A XVIII. században vita folyt az akkori kor három vezető matematikusa *d'Alembert*¹, *D. Bernoulli*² és *L. Euler*³ között egy mechanikai probléma, a két végpontjában rögzített, kifeszített rugalmas húr rezgésének matematikai leírásáról. A mechanikai feltételek a matematika nyelvén ún. parciális differenciálegyenlettel írhatók le. D'Alembert 1747-ben megtalálta ennek az egyenletnek az általános megoldását, amely két, lényegében tetszőlegesen választható függvényt tartalmazott. Euler 1748-ban észrevette, hogy a húr mozgását - a fizikai paraméterek mellett - annak indításakor felvett alakja és sebessége határozza meg, és ezzel a két, ún. kezdeti feltételt leíró függvénnyel kifejezte a d'Alembert-féle megoldásban szereplő, addig tetszőlegesnek tekintett függvényeket. Ezzel a problémának egy mai szemmel is korrekt megoldását adta. Röviddel ezután (1753-ban) jelent meg D. Bernoulli egy munkája, melyben a szóban forgó feladatnak egy, az előzőektől formailag lényegesen különböző megoldását adta. Abból, az akkor már ismert fizikai tényből indult ki, hogy a húr által keltett hang az alap- és felhangjaiból tehető össze. Az egységnyi hosszúságú, 0 kezdősebességgel indított húr x helyen és t időpontban $u(x, t)$ -vel jelölt kitérését felírta az ω frekvencia

¹Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) francia matematikus, mérnök, fizikus és filozófus.

²Daniel Bernoulli (1700-1782) orvos, fizikus és matematikus, Johann Bernoulli (a korai analízis egyik felfedezője) fia, és Jakob Bernoulli (aki a valószínűségszámítás alapjait tette le először) unokaöccse.

³Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus és fizikus, Johann Bernoulli tanítványa.

egészszámú többszöröseinek megfelelő $a_n \sin n\pi x \cos n\pi x$ harmonikus rezgések végtelen összegeként. Az együtthatók a húr kezdeti alakját figyelembe véve meghatározhatók. A kezdeti alakot leíró függvényt f -fel jelölve ugyanis fennáll az

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

egyenlőség. Már Euler is észrevette, hogy az együtthatók az f segítségével megadhatók:

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

D. Bernoulli-nak ezt a megoldását Euler és d'Alembert is kétségbe vonta, mert nem tudták elképzelni, hogy a kezdeti feltételt leíró görbe, amelynek egyes darabjait egymástól függetlenül adhatjuk meg, végig ugyanazzal a trigonometrikus sorral fejezhető ki.

Nem törődve a kor kételyeivel J. Fourier⁴ francia matematikus az 1800-as évek elején igen sikeresen alkalmazta a három matematikus által kidolgozott, illetve vitatott módszert a hő terjedésének matematikai leírására. Eredményei annyira meggyőzőek voltak, hogy módszerét egyre többen kezdték el alkalmazni. A módszerrel kapcsolatos kételyek tisztázása pedig jelentős mértékben hozzájárult a matematikai analízis mai eszköz és fogalomrendszerének kialakulásához. Az együtthatókat azóta is az f függvény Fourier-együtthatóinak, az ezekkel képzett trigonometrikus sort pedig az f függvény Fourier-sorának nevezzük.

Korábban már beláttuk, hogy bármilyen, a $(-\pi, \pi)$ intervallumon integrálható függvény esetén az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \in \mathbb{N}), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (5.1.1)$$

Fourier-együtthatók kiszámíthatók, tehát minden ilyen függvényhez a fenti Fourier-együtthatókkal a

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Fourier-sort rendelhetjük.

A Riesz-Fischer-tételből következik, hogy ha két függvény Fourier-együtthatói megegyeznek, akkor a függvények majdnem mindenütt egyenlőek. Azaz az f függvényt megadhatjuk egy számsorozattal is, nevezetesen a Fourier-együttható-sorozatával. Ezt a folyamatot *Fourier-analízisnek* nevezzük.

A fordított eljárást, amikor a Fourier-együtthatókból rekonstruáljuk a függvényt, *Fourier-szintézisnek* nevezzük. „Rekonstrukció” alatt a következőket érthetjük:

- A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sor pontonként konvergál-e f -hez?
- A függvényt sor egyenletesen konvergál-e f -hez?
- A függvényt sor négyzetintegrálra (L^2 -normában) konvergál-e f -hez?

A harmadik kérdésre könnyen tudunk válaszolni. Mivel a trigonometrikus rendszer teljes, ezért 3.2.7. Tétel érvényes, tehát ha az f függvény négyzetesen integrálható, akkor a Fourier-sora L^2 -normában konvergál az f -hez.

Ebben a fejezetben a másik két kérdéssel foglalkozunk. A függvényt sor pontonkénti, illetve egyenletes konvergenciája mellett az is felvetődik, hogy ha konvergens, akkor az összegfüggvénye f lesz-e, vagy esetleg más. Egyenletes konvergencia esetén ez a kérdés könnyen megválaszolható.

⁴Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) francia matematikus és fizikus.

5.1.1. Tétel. Minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének Fourier-sora.

Bizonyítás. Legyenek $(a_n, n \in \mathbb{N})$, $(b_n, n \in \mathbb{N}^*)$ valós számsorozatok, melyekkel, mint együtthatókkal képzett

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en. Az összegfüggvényt jelöljük f -fel. A sort beszorozva a korlátos $\cos kx$ ($k \in \mathbb{N}$) függvényvel, szintén egyenletesen konvergens függvénysort kapunk, melynek összege $f \cos kx$. Mivel a konvergencia egyenletes és a függvénysor minden tagja folytonos, ezért lehet tagonként integrálni:

$$\int_{-x}^x f(x) \cos kx dx = \int_{-x}^x \frac{a_0}{2} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-x}^x \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-x}^x \sin nx \cos kx dx \right).$$

A trigonometrikus rendszer ortogonális, ezért azt kapjuk, hogy

$$\int_{-x}^x f(x) \cos kx dx = \begin{cases} \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0\pi, & \text{ha } k=0, \\ a_k \int_{-x}^x \cos^2 kx dx = a_k \int_{-x}^x \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx = a_k\pi & \text{ha } k \neq 0, \end{cases}$$

azaz az $(a_k, k \in \mathbb{N})$ sorozatra a (5.1.1) előállítás érvényes. Hasonlóan, ha a sort a $\sin k \cdot$ korlátos függvényvel beszorozzuk, integrálás után b_k -ra vonatkozó előállítást kapjuk.

Az egyenletes konvergenciára egy szinte triviális feltételt tudunk rögtön adni:

5.1.2. Lemma. Legyen f 2π szerint periodikus, Lebesgue-integrálható függvény. Ha az (5.1.1) Fourier-együtthatókra

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty,$$

akkor a Fourier sor egyenletesen és abszolút konvergál az f függvényhez $\mathbb{R}$ -en.

Bizonyítás. Mivel minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| \cdot |\cos nx| + |b_n| \cdot |\sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért az 1.2.5. Tétel alapján a Fourier-sor egyenletesen és abszolút konvergál $\mathbb{R}$ -en. Mivel minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének Fourier-sora, ezért A Fourier-sor összege szükségképpen f .

□

A fenti lemma a Fourier-együtthatókra egy igen erős feltételt ad. A fejezet többi részében nem az együtthatókra, hanem az f függvényre keresünk olyan feltételeket, melyekkel a pontonkénti, illetve az egyenletes konvergencia teljesül. Mivel a Fourier-sor minden tagja 2π szerint periodikus függvény, ezért célszerű eleve 2π szerint periodikus függvényekből kiindulni.

A Fourier-szintézissel kapcsolatban már a kezdet kezdetén is számos kérdés vetődött fel, s ezek jelentős mértékben megszabták az elméleti kutatások irányát. Dirichlet⁵ 1829-ben bebizonyította, hogy szakaszonként monoton függvények trigonometrikus Fourier-sora előállítja a függvényt. Ezzel igazolást nyert, hogy egy fontos függvényosztály elemei rekonstruálhatók Fourier-együtthatóikból, ha a végtelen sor összegét a szokásos módon

⁵Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) német matematikus.

(a részletösszegek sorozatának határértékeként) definiáljuk. Ugyanakkor egy másik fontos függvényosztály elemeire, a folytonos függvényekre ez általában már nem mondható el. *Du Bois-Reymond*⁶ 1876-ban olyan folytonos függvényt konstruált, amelynek Fourier-sora egy pontban divergens. *Kolmogorov*⁷ 1926-ban megmutatta, hogy létezik olyan integrálható függvény, amelynek Fourier-sora mindenütt divergens. Folytonos függvényekkel kapcsolatban korábban több olyan konstrukció is született, ahol a Fourier-sor divergenciahalmaza végtelen sok pontból áll, de a halmaz mértéke minden esetben nulla.

Ezekből a tapasztalatokból kiindulva *Luzin*⁸, az orosz függvénytan iskolá megteremtője 1906-ban, doktori disszertációjában megfogalmazta híres sejtését: folytonos függvények esetén a trigonometrikus Fourier-sor legfeljebb egy nullmértékű halmaz pontjait kivéve előállítja a függvényt. Számos matematikus sok gyümölcsöző kutatása után végül 1966-ban *Carleson*⁹ svéd matematikus bebizonyította a Luzin-féle sejtést.

2. Riemann-Lebesgue-féle lemma

5.2.1. Lemma (Riemann-Lebesgue-féle lemma). *Legyen f Lebesgue-integrálható a véges vagy végtelen (a, b) intervallumon és $a \leq \alpha < \beta \leq b$ és $\mu \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \mu x dx = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \mu x dx = 0 \quad (5.2.1)$$

és a konvergencia a határookra nézve egyenletes.

Bizonyítás. A bizonyítást csak a koszinuszra vonatkozó állításra fogjuk elvégezni.

[1. eset.] Egy véges (c, d) , intervallum karakterisztikus függvényének esetére bizonyítjuk az állítást. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (c, d), \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus (c, d), \end{cases}$$

és (γ, δ) az (α, β) és (c, d) intervallum közös része. Ha a közös rész üreshalmaz, akkor (5.2.1) automatikusan teljesül. Különben

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \mu x dx = \int_{\gamma}^{\delta} \cos \mu x dx = \left[\frac{\sin \mu x}{\mu} \right]_{\gamma}^{\delta} = \frac{\sin \mu \delta}{\mu} - \frac{\sin \mu \gamma}{\mu} = \frac{\sin \mu \delta - \sin \mu \gamma}{\mu}.$$

Ezt felhasználva:

$$0 \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \mu x dx \right| \leq \frac{|\sin \mu \delta - \sin \mu \gamma|}{|\mu|} \leq \frac{2}{|\mu|} \rightarrow 0 \quad (\mu \rightarrow \infty),$$

melyből (5.2.1) következik.

Legyen φ tetszőleges lépcsősfüggvény ezen az intervallumon. Ekkor létezik egy olyan véges (c, d) intervallum, amelyen kívül a függvény nulla értéket vesz fel, továbbá a $[c, d]$ intervallumnak létezik egy olyan $\tau \in \mathcal{F}_{[c, d]}$ felosztása, melyre

$$\tau = \{c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d\} \quad \text{és} \quad \varphi(x) = c_i \quad \text{ha} \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \quad (c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n).$$

Legyen (γ, δ) az (α, β) és a (c, d) intervallum közös része. Ha ez nem üreshalmaz, akkor létezik $\bar{\tau} \in \mathcal{F}_{[\gamma, \delta]}$ felosztás, hogy

⁶Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831-1889) német matematikus.

⁷Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) orosz matematikus.

⁸Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950) orosz matematikus.

⁹Lennart Axel Edvard Carleson (1928-) svéd matematikus.

$\bar{\tau} = \{\gamma = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_m = \delta\}$ és $\varphi(x) = \bar{c}_i$, ha $x \in [\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i]$ ($\bar{c}_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$).

Az integrál intervallum szerinti additivitását kihasználva kapjuk, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \cos \mu x dx = \sum_{i=1}^m \int_{\bar{x}_{i-1}}^{\bar{x}_i} \bar{c}_i \cos \mu x dx.$$

Az első eset alapján

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \cos \mu x dx \right| \leq \sum_{i=1}^m \left| \int_{\bar{x}_{i-1}}^{\bar{x}_i} \bar{c}_i \cos \mu x dx \right| \leq \sum_{i=1}^m |\bar{c}_i| \frac{2}{|\mu|} \leq \frac{2}{|\mu|} M \quad (M := \sum_{i=1}^m |\bar{c}_i|)$$

adódik. Mivel $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{2}{|\mu|} M = 0$, ezért az állítás az (a, b) intervallumon lépcsős függvények esetén is teljesül.

Legyen f az (a, b) intervallumon integrálható függvény. Ekkor létezik $f_1, f_2 \in C_1$, hogy $f = f_1 - f_2$. Mivel $f_1, f_2 \in C_1$, ezért léteznek $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ és $(\psi_n, n \in \mathbb{N})$ C_0 -beli monoton növekedő függvényt sorozatok, hogy $\phi_n \rightarrow f_1$ és $\psi_n \rightarrow f_2$ majdnem mindenütt, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor a $(f_1 - \phi_n, n \in \mathbb{N})$ és $(f_2 - \psi_n, n \in \mathbb{N})$ C_1 -beli függvényt sorozatok nemnegatívak, integráljaik alulról korlátosak, és monoton csökkenve majdnem mindenütt nullához tartanak. Beppo Levi tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_1 - \phi_n \rightarrow 0, \quad \text{és} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_2 - \psi_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5.2.2)$$

Legyen $\varphi_n := \phi_n - \psi_n$. Ekkor $\varphi_n \rightarrow f$ majdnem mindenütt, ha $n \rightarrow \infty$, továbbá

$$|f - \varphi_n| = |f_1 - f_2 - (\phi_n - \psi_n)| = |f_1 - \phi_n - (f_2 - \psi_n)| \leq (f_1 - \phi_n) + (f_2 - \psi_n).$$

Ezt és (5.2.2)-t felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f - \varphi_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

ezért bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f - \varphi_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $n > N$ rögzített. A 3 alapján bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $P = P(\varepsilon) > 0$ szám, hogy ha $\mu > P$, akkor

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x) \cos \mu x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \mu x dx \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} ((f(x) - \varphi_n(x)) + \varphi_n(x)) \cos \mu x dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \varphi_n(x)) \cos \mu x dx \right| + \left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x) \cos \mu x dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - \varphi_n(x)| dx + \left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x) \cos \mu x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $\mu > P$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

□

3. Dirichlet-formula

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π szerint periodikus, Lebesgue-integrálható függvény. A függvény trigonometrikus rendszerre vonatkozó

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Fourier-sorának konvergenciájának vizsgálatához az n -edik részletösszegek

$$(S_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R})$$

sorozatának konvergenciáját vizsgáljuk. Célunk egy zárt alak keresése. A Fourier-együtthatók (4.1.9) képleteit beírva az addíciós képletek alapján kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \cos kx + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \sin kx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx - kt) \right) dt. \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \quad (u \in \mathbb{R}) \quad (5.3.1)$$

jelölést. A D_n függvényt n . Dirichlet-féle magfüggvénynek nevezzük. Helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x-\pi} f(x-u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségénél felhasználtuk, hogy az integrandus 2π szerint periodikus, ezért mindegy, hogy melyik 2π hosszúságú intervallumon integrálunk.

A részletösszeg-sorozat további átalakításához vizsgáljuk meg, milyen tulajdonságokkal rendelkezik a Dirichlet-féle magfüggvény. A definícióból a következő tulajdonságok olvashatók le közvetlenül:

(1) D_n 2π szerint periodikus.

(2) D_n páros, azaz minden $u \in \mathbb{R}$ esetén $D_n(-u) = D_n(u)$.

(3) $D_n(0) = \frac{1}{2} + n$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} du + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku du = \pi$.

A paritást kihasználva a Fourier sor n . részletösszegét

$$\begin{aligned}
 (S_n f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^0 f(x-t) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^x f(x-t) D_n(t) dt = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_x^0 f(x+s) D_n(-s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^x f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^x f(x+s) D_n(s) ds + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^x f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^x (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt
 \end{aligned}$$

képlettel tudjuk kiszámolni.

Mivel $\frac{1}{\pi} \int_{-x}^x D_n(t) dt = 1$ és D_n páros, ezért

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x D_n(t) dt = \frac{1}{2}.$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát megszorozva $2f(x)$ -szel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x 2f(x) D_n(t) dt = f(x).$$

Összevetve az $(S_n f)(x)$ -re kapott

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (5.3.2)$$

formulával kapjuk, hogy

$$(S_n f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^x \varphi_n(t) D_n(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (5.3.3)$$

ahol

$$\varphi_n(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \quad (x, t \in \mathbb{R}). \quad (5.3.4)$$

A (5.3.2) és (5.3.3) képleteket felfedezőjükről, *Dirichlet-formuláknak* nevezzük.

A konvergencia-kérdések vizsgálatakor nagyon hasznos lesz, hogy a Dirichlet-féle magfüggvény zárt alakba írható:

5.3.1. Lemma. A Dirichlet-féle magfüggvényre érvényes a

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, n \in \mathbb{N}) \quad (5.3.5)$$

előállítás.

Bizonyítás. Szorozzuk meg a

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$$

egyenlet mindkét oldalát $2 \sin \frac{1}{2}t$ -vel. Ekkor az addíciós képletek alapján

$$\begin{aligned} 2D_n(t) \sin \frac{1}{2}t &= \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \cos kt \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{(2k+1)t}{2} - \sin \frac{(2k-1)t}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{t}{2} + \left(\sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) + \left(\sin \frac{5t}{2} - \sin \frac{3t}{2} \right) + \left(\sin \frac{7t}{2} - \sin \frac{5t}{2} \right) + \dots + \\ &+ \left(\sin \frac{(2n+1)t}{2} - \sin \frac{(2n-1)t}{2} \right) = \sin \frac{(2n+1)t}{2} = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t, \end{aligned}$$

ahonnan az állítás egyenletrendezéssel adódik.

□

A Dirichlet-féle magfüggvény (5.3.5) előállítása lehetőséget ad az alábbi tulajdonság bizonyítására:

5.3.2. Lemma *Tetszőleges pozitív $0 < \delta \leq \pi$ szám esetén*

$$\int_{\delta}^{\pi} D_n(t) dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5.3.6)$$

Bizonyítás. A (5.3.5) előállítást a képletbe beírva kapjuk, hogy

$$\int_{\delta}^{\pi} D_n(t) dt = \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Mivel $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$ ($t \in [\delta, \pi]$) Lebesgue-integrálható a $[\delta, \pi]$ intervallumon, ezért a fenti integrál az 5.2.1. Riemann-Lebesgue lemma értelmében tart 0-hoz, ha $n \rightarrow \infty$.

□

4. Dini-féle és Lipschitz-féle konvergencia-kritériumok

A Fourier-sorok konvergenciájára számos elégséges feltétel ismeretes. Ebben a fejezetben ezek közül kettővel ismerkedünk meg.

5.4.1. Tétel (Dini-féle konvergencia kritérium). *Legyen f 2π szerint periodikus, Lebesgue-integrálható φ_x függvény. Ha valamely $x \in \mathbb{R}$ számra a φ_x függvény Lebesgue-integrálható a $(0, \pi)$ intervallumon $-\varphi_x$ alatt (5.3.4)-ben értelmezett függvényt értjük, akkor $(S_n f)(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$).*

Bizonyítás. A (5.3.3) Dirichlet-formulát és a magfüggvény (5.3.5) előállítását alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt. \end{aligned}$$

Legyen

$$h(t) := \begin{cases} \frac{t}{2}, & \text{ha } t \in (0, \pi] \\ 1, & \text{ha } t = 0. \end{cases}$$

Egyszerűen igazolható, hogy h folytonos a $[0, \pi]$ intervallumon, ezért Riemann-integrálható és korlátos. Mivel minden Riemann-integrálható függvény Lebesgue-integrálható, ezért h Lebesgue-mérhető is. Ezért Lebesgue-tételének következménye alapján mivel $\frac{\varphi_x}{id}$ Lebesgue-integrálható és

$$\left| \frac{\varphi_x(t)}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \right| \leq \left| \frac{\varphi_x(t)}{t} \right| \cdot M \quad (t \in (0, \pi))$$

valamely $M > 0$ számra, a $\frac{\varphi_x(t)}{\sin(t/2)}$ ($t \in (0, \pi)$) függvény Lebesgue-integrálható. Riemann-Lebesgue lemma. Riemann-Lebesgue lemma alapján a fenti integrál értéke nullához tart, így $|(S_n f)(x) - f(x)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

□

A Dini-féle kritérium egyszerű következménye a Lipschitz-féle kritérium:

5.4.2. Következmény (Lipschitz-kritérium). Legyen $f \in \mathcal{D}_f^{2\pi}$ szerint periodikus Lebesgue-integrálható függvény. Ha valamely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén létezik $0 < \alpha \leq 1$ szám, hogy valamely $M > 0$ és $\delta > 0$ számra

$$|\varphi_x(t)| \leq M \cdot t^\alpha \quad (0 < t < \delta), \quad (5.4.1)$$

akkor $(S_n f)(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

Bizonyítás. A (5.4.1) feltételből kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\varphi_x(t)}{t} \right| \leq M \cdot t^{\alpha-1} \quad (0 < t < \delta).$$

Mivel $0 < \alpha \leq 1$, ezért a $\frac{\varphi_x}{id^{\alpha-1}}$ függvény improprius integrálja a $(0, \pi)$ intervallumon abszolút konvergens, tehát Lebesgue-integrálható is. Tehát a $\frac{\varphi_x}{id}$ függvény is Lebesgue-integrálható. A Dini-kritériumot alkalmazva az állításunk következik.

□

Keressünk egyszerűbben ellenőrizhető feltételt $\frac{\varphi_x}{id} \in L_{(0, \pi)}$ teljesülésére!

A $\frac{\varphi_x}{id}$ Lebesgue-integrálhatóságának szükséges feltétele, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_x(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = 0$$

teljesüljön. Ha az $x \in \mathcal{D}_f$ pontban léteznek a véges féloldali határértékek, akkor ehhez az

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (5.4.2)$$

egyenlőségnek kell teljesülnie, ahol $f(x+0)$, $f(x-0)$ az f függvény x pontbeli jobb- és baloldali határértékét jelöli.

Tegyük fel, hogy (5.4.2) teljesül. Ekkor

$$|\varphi_x(t)| = |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| = |f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0)|.$$

A Lipschitz-feltétel $\alpha=1$ esetén a következő alakba írható:

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| \leq M \quad (t \in (0, \delta)), \quad (5.4.3)$$

ahol $\delta > 0$, $M > 0$ konstansok. Ha a

$$f'(x+0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad \text{és} \quad f'(x-0) = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

ún. *féloldali deriváltak* léteznek és végesek, akkor létezik $\mu > 0$ és $\delta > 0$, hogy ha $t \in (0, \delta)$, akkor

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| \leq \mu \quad \text{és} \quad \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| \leq \mu.$$

és ekkor (5.4.3) az $M := 2\mu$ konstanssal teljesül. Ezzel beláttuk a következőt:

5.4.3. Következmény. Legyen f 2π szerint periodikus, Lebesgue-integrálható függvény. Az f függvény Fourier-sora minden olyan x pontban, ahol a függvény féloldali deriváltjai és féloldali határértékei léteznek és végesek, konvergál, méghozzá

$$(S_n f)(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Speciálisan, ha f az x pontban differenciálható, akkor a Fourier-sor összege abban a pontban $f(x)$.

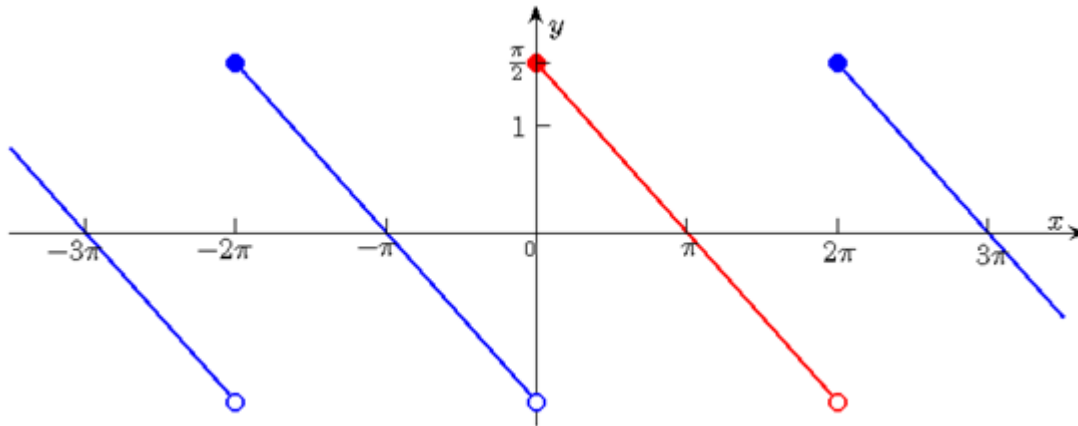
5.4.1. Példa. Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$, ha $0 \leq x < 2\pi$. Hol konvergens f Fourier-sora? Mi a Fourier-sor összege?

Megoldás. A 4.1.2. példában már foglalkoztunk ezzel a függvénnyel. Kiszámoltuk, hogy Fourier-sora:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Kérdés, hogy a Fourier-sor hol konvergens? A 5.1. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.1. ábra - Az f függvény grafikonja



A függvény a $(0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon differenciálható, tehát itt a Fourier-sora konvergens, és összege f :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x) \quad (x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}).$$

A $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban a függvény nem folytonos, de féloldali határértékei léteznek:

$$f(2k\pi - 0) = -\pi, \quad f(2k\pi + 0) = \pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

továbbá f féloldali deriváltjai is léteznek ezekben a pontokban (Mindkét féloldali deriváltja -1), ezért a Fourier-sor ezekben a pontokban is konvergens és összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{f(2k\pi - 0) + f(2k\pi + 0)}{2} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

5.4.4. Megjegyzés.

1) A konvergens Fourier-sorokat numerikus sorok összegének meghatározására is használhatjuk. 5.4.1. példában bármilyen $x \in (0, 2\pi)$ értéket behelyettesítve egy numerikus sor összege meghatározható.

Ha például az $x = \frac{\pi}{2}$ behelyettesítést alkalmazzuk, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

sorösszeg adódik. Ha az $x = 1$ helyettesítést hajtjuk végre, akkor azt kapjuk, hogy

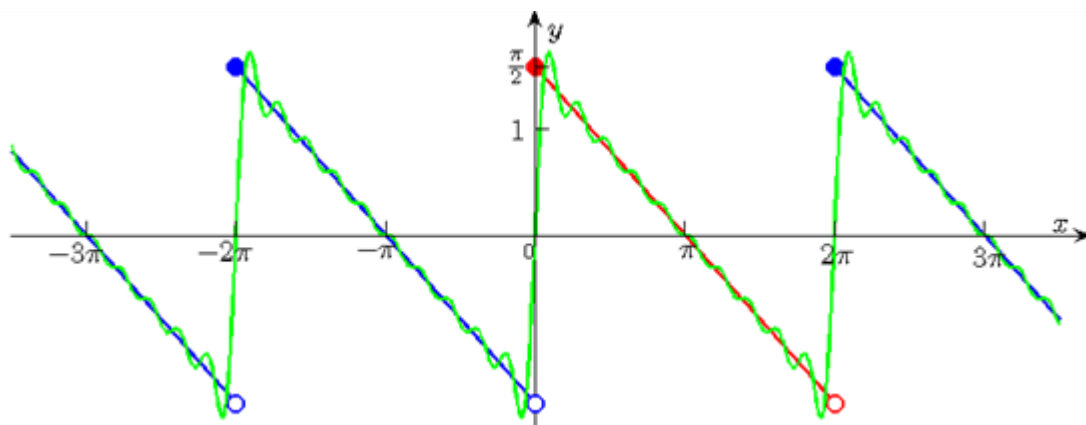
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Az elemi analízis módszereivel az első sor konvergenciája könnyen (Leibniz-kritérium), a második soré nehezebben (Dirichlet-kritérium) határozható meg. A sorösszeg megadása mindkét esetben sokkal hosszadalmasabb a Fourier-sorok elméletének alkalmazása nélkül.

2) Az 5.4.1. példán jól szemléltethető az ún. *Gibbs¹⁰-jelenség*. A 5.2. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonját.

5.2. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja

¹⁰Josiah Willard Gibbs (1839-1903) amerikai tudós (fizikus matematikus, kémikus).



Animáció

Az ábrán is látszik, hogy a közelítés hibája romlik, ha közeledünk a szakadási pont felé, másrészt, a „túllövések” a Fourier-sorban csak a szakadási helyek környezetében fordulnak elő. Ezt hívjuk Gibbs-jelenségnek. Érdekesége, hogy a „túllövés mértéke” közelítőleg ugyanannyi, független attól, hogy hányadik részletösszeget tekintjük. Ugyanakkor az ugrás szélessége csökken a tagok növelésével. (Azaz a Fourier-részletösszegek túlhullámoznak az f függvényen és ezek az oszcillációk nem múlnak el $n \rightarrow \infty$ esetén sem.)

Megnézzük, hogy a legnagyobb eltérés a $(0, 2\pi)$ intervallumon milyen értéknél lesz nagyobb a tagok számától

függetlenül az 5.4.1. példa esetén. A Fourier-sor n . részletösszege $(S_n f)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$, az f függvénytől való eltérése

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin kx}{k} - \frac{\pi - x}{2} \quad (x \in (0, 2\pi)).$$

Keressük g_n szélsőértékét. Deriválással kapjuk, hogy

$$g_n'(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx + \frac{1}{2} = D_n(x) \quad (x \in (0, 2\pi)),$$

ahol D_n az n . Dirichlet-féle magfüggvény. Mivel g_n a $(0, 2\pi)$ intervallumon differenciálható, ezért csak ott lehet szélsőértéke, ahol $g_n' = 0$. A Dirichlet-féle magfüggvény (5.3.5) alapján

$$g_n'(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (x \in (0, 2\pi)).$$

$g_n' = 0$ pontosan akkor nulla a $(0, 2\pi)$ intervallumon, ha

$$x = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}, \frac{2\pi}{n + \frac{1}{2}}, \dots, \frac{2n\pi}{n + \frac{1}{2}}.$$

$$\theta_n = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}$$

A nullához legközelebbi kritikus pont a θ_n . Mivel ebben a pontban g_n' előjelet vált (előtte pozitív, utána negatív), ezért θ_n -ben g_n -nek lokális maximuma van. Mivel a Newton-Leibniz-tétele alapján

$$\int_0^{\theta_n} g'_n(x) dx = [g_n(x)]_{x=0}^{x=\theta_n} = g_n(\theta_n) - g_n(0),$$

ezért

$$g_n(\theta_n) = \int_0^{\theta_n \sin(n + \frac{1}{2})x} \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{\pi}{2}.$$

Hajtsuk végre a $t = (n + \frac{1}{2})x$ helyettesítést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$g_n(\theta_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2 \sin \frac{t}{2n+1}} \cdot \frac{1}{n + \frac{1}{2}} dt - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2n+1}} dt - \frac{\pi}{2}.$$

Mivel $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ és Lebesgue-tétele szerint az integrálás és a határátmenet sorrendje felcserélhető, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\theta_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2}.$$

A fenti integrál közelítő értékének kiszámításához írjuk fel az argumentum Taylor-sorát:

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \frac{t^8}{9!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \quad (t \in (0, \pi)).$$

Mivel a hatványsor a teljes valós számok halmazán abszolút és egyenletesen konvergál, ezért lehet tagonként integrálni. Tehát

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \pi - \frac{\pi^3}{3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7 \cdot 7!} + \frac{\pi^9}{9 \cdot 9!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

Eredményül egy Leibniz-típusú sort kaptunk. A konvergencia-sebességre vonatkozó becslés alapján a részletösszegnek a k . részletösszegtől való eltérése becsülhető a k . tag abszolútértékével. Ha 2 tizedesjegy pontossáig szeretnénk az integrált meghatározni, akkor

$$\frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} < 10^{-2}$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $k=4$ már jó. Számológéppel kiszámítva az integrál értékére 2 tizedesjegynyi pontossággal $1,85$ adódik. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\theta_n) \approx 1,85 - \frac{\pi}{2} \approx 0,28.$$

Ezzel beláttuk, hogy k.b. $0,28$ -cal „lővi” túl a függvényt a nulla közelében a Fourier-sor n . részletösszege, ha n elég nagy.

3) Az 5.4.1. példában szereplő Fourier-sor tehát nem egyenletesen konvergál a valós számok halmazán. A részletösszegek sorozat viszont *egyenletesen korlátos*. Először csak a $(0, \pi]$ intervallumon vizsgáljuk az

$S_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ részletösszeg-sorozatot. Legyen $x \in (0, \pi]$ tetszőleges és $\ell := [1/x]$ az $1/x$ egész része. Ha $\ell \geq n$, akkor mivel $|\sin t| \leq |t|$ ($t \in \mathbb{R}$), ezért

$$|\mathcal{S}_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{kx}{k} = nx \leq \ell x \leq \frac{1}{x} x = 1.$$

Ha $\ell < n$, akkor a sorozatot két részre bontjuk:

$$\mathcal{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\sin kx}{k} + \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Az első tag abszolút értéke szintén 1-nél kisebb lesz, mert

$$\left| \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \ell x \leq \frac{1}{x} x = 1.$$

A második tag abszolút értékének becslésénél kihasználjuk, hogy az $(\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*)$ sorozat monoton csökken, illetve, hogy $\sin \frac{x}{2} \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| &= \left| \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\sin \frac{x}{2} \sin kx}{k} \right| = \left| \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x}{k} \right| = \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} \\ &= \left| \frac{\cos \left(\ell + \frac{1}{2} \right) x}{\ell + 1} - \frac{\cos \left(\ell + \frac{3}{2} \right) x}{\ell + 1} + \frac{\cos \left(\ell + \frac{3}{2} \right) x}{\ell + 2} - \frac{\cos \left(\ell + \frac{5}{2} \right) x}{\ell + 2} + \dots + \frac{\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{n} - \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{n} \right| = \\ &= \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} \left| \frac{\cos \left(\ell + \frac{1}{2} \right) x}{\ell + 1} + \sum_{k=\ell+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x - \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{n} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} \left(\frac{1}{\ell + 1} + \sum_{k=\ell+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\ell + 1} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \cdot \frac{1}{\ell + 1}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$, ha $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ kapjuk, hogy

$$\left| \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \cdot \frac{1}{\ell + 1} \leq \frac{1}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\ell + 1} = \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1}{\ell + 1} < \pi.$$

A két becslést összevetve az

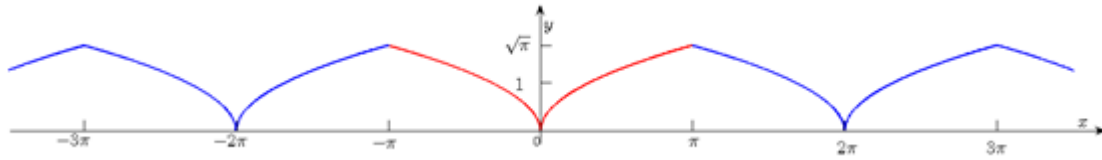
$$|\mathcal{S}_n(x)| \leq 1 + \pi =: K$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel $K > 1$, ezért $|\mathcal{S}_n| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ -ra teljesül a $(0, \pi]$ intervallumon. A függvény páratlan és nullában minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén nulla az értéke, ezért az egyenlőtlenség a valós számok halmazán is igaz, azaz a részletösszeg-sorozat valóban egyenletesen korlátos.

5.4.2. Példa. Legyen f 2π szerint periodikus függvény, és $f(x) = \sqrt{|x|}$, ha $x \in [-\pi, \pi]$. Hol konvergens f Fourier-sora? Mi az összege?

Megoldás. A 5.3. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.3. ábra - Az f függvény grafikonja



Az f függvény Fourier-együtthatóit csak numerikus módszerekkel lehetne kiszámolni. A Fourier-sor konvergenciáját viszont el tudjuk dönteni az együtthatók megállapítása nélkül is.

A függvény differenciálható a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \setminus \{0\}$ ($k \in \mathbb{Z}$) halmazokon a műveleti tulajdonságok alapján, tehát ezeken a halmazokon a Fourier-sor konvergencia és összege f .

Az $x_k = -\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban nem differenciálható a függvény, de féloldali deriváltjai léteznek és végesek:

$$f'_+(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k+} \frac{f(x) - f(x_k + 0)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow -\pi+} \frac{\sqrt{-x} - \sqrt{\pi}}{x + \pi} = (\sqrt{-x}) \Big|_{x=-\pi} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

$$f'_-(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k-} \frac{f(x) - f(x_k - 0)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow -\pi-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}{x - \pi} = (\sqrt{x}) \Big|_{x=-\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

ezért ezekben is konvergál a függvény Fourier-sora. Mivel f folytonos is ezekben a pontokban, ezért a Fourier-sor összege jelen esetben is f .

Az $\bar{x}_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban f nem differenciálható, sőt a féloldali deriváltak sem léteznek. Nézzük meg a Lipschitz-kritérium feltételei teljesülnek-e.

$$|\varphi_{\bar{x}_k}(t)| = |f(\bar{x}_k + t) + f(\bar{x}_k - t) - 2f(\bar{x}_k)| = |\sqrt{|t|} + \sqrt{|-t|}| = 2|t|^{\frac{1}{2}} \quad (t \in (-\pi, \pi)),$$

tehát a Lipschitz-kritérium $M=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$ paraméterekkel teljesül. Mivel f ezekben a pontokban is folytonos, ezért a Fourier-sor összege itt is f .

Összegezve: f Fourier-sora mindenütt konvergens, és összege f .

5. Dirichlet-Jordan-féle Tétel.

A Fourier-sorok elméletében az első mély, teljes szigorúsággal bebizonyított eredmény Dirichlet-tétele volt 1829-ből, amely véges sok monoton darabból álló függvények Fourier-sorának konvergenciájáról szól. Jordan Dirichlet-tételét kiterjesztette korlátos változású függvények¹¹ esetére 1881-ben.

5.5.1 Tétel. Legyen a 2π szerint periodikus, integrálható f függvény az $[a, b]$ intervallumon korlátos változású. Ekkor

i) az (a, b) intervallum minden x pontjában

$$(S_n f)(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (n \rightarrow \infty);$$

ii) ha f folytonos az (a, b) intervallumon, akkor minden $0 < \delta < (b-a)/2$ szám esetén a Fourier-sor részletösszeg-sorozata egyenletesen konvergál az f függvényhez az $[a+\delta, b-\delta]$ intervallumon, azaz

$$S_n f \rightrightarrows f \quad (n \rightarrow \infty).$$

¹¹A korlátos változású függvények fogalma, monoton függvényekkel való kapcsolata megtalálható a Függelék 10.3. fejezetében.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $b-a < \pi$ mivel f korlátos változású, ezért felbontható két monoton növekedő függvény különbségére, melyek az (a, b) intervallum minden olyan pontjában folytonosak, ahol f is folytonos. Ezért elég a tételt monoton növekedő függvények esetére bizonyítani.

Legyen x az (a, b) intervallum egy rögzített pontja. A függvény monotonitásából következik, hogy a féloldali $f(x+0)$, $f(x-0)$ határértékek léteznek. Az (5.3.2) Dirichlet-formula alapján

$$(S_n f)(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)) D_n(t) dt, \quad (5.5.1)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{\pi}{2}$. Célunk belátni, hogy az (5.5.1) integrál határértéke nulla, ha $n \rightarrow \infty$. Legyen $0 < \eta < \pi$ olyan szám, melyre $x \pm \eta$ pontok is az (a, b) intervallumba esnek. Bontsuk fel az (5.5.1)-ben szereplő integrált két részre:

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi} = I + J.$$

Először az I integrállal foglalkozunk:

$$I = \int_0^{\eta} (f(x+t) - f(x+0)) D_n(t) dt - \int_0^{\eta} (f(x-0) - f(x-t)) D_n(t) dt =: I_+ - I_-.$$

Az $f(x+t) - f(x+0)$ ($t \in (0, \eta)$) függvény t -nek monoton növekedő függvénye, és $\lim_{t \rightarrow 0+} (f(x+t) - f(x+0)) = 0$, ezért az integrálszámítás 2. középértéktétele¹² szerint létezik olyan $0 \leq \xi \leq \eta$ szám, melyre

$$I_+ = (f(x+\eta) - f(x+0)) \int_{\xi}^{\eta} D_n(t) dt.$$

A Dirichlet-féle magfüggvény (5.3.1) előállítására alapján

$$\int_{\xi}^{\eta} D_n(t) dt = \int_{\xi}^{\eta} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = \frac{\eta - \xi}{2} + \left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} \right]_{\xi}^{\eta}.$$

Az 5.4.4./3)-ban beláttuk, hogy $\sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{k}$ sorozat egyenletesen korlátos. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} D_n(t) dt \right| \leq \eta - \xi + 2K \leq \frac{\pi}{2} + 2K =: K_1.$$

Ezt a becslést felhasználva kapjuk, hogy

$$|I_+| \leq K_1 (f(x+\eta) - f(x+0)).$$

Analóg módon bizonyítható, hogy

$$|I_-| \leq K_1 (f(x-0) - f(x-\eta)).$$

¹²**Tétel 145 (Integrálszámítás 2. középértéktétele)** Legyen $[a, b]$ véges intervallum. Ha $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Lebesgue-integrálható függvény, akkor van olyan $\xi \in [a, b]$ pont, melyre $\int_a^b \alpha(x) f(x) dx = \alpha(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + \alpha(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$.
A bizonyítás megtalálható [13] könyvben.

Mindkét becslés jobb oldala nullához tart, ha $\eta \rightarrow 0$. Válasszuk η -t olyan picinek, hogy teljesüljön $|I| \leq |I_+| + |I_-| < \pi \frac{\varepsilon}{2}$.

Ezt az η -t rögzítsük, és tekintsük a J integrált.

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi} (f(x+0) + f(x-0)) D_n(t) dt$$

A második integrál nullához tart (5.3.6) alapján, ha $n \rightarrow \infty$. Az első integrál is nullába tart¹³, ha $n \rightarrow \infty$. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor $|J| < \pi \frac{\varepsilon}{2}$.

Eredményeinket összevetve kapjuk, hogy minden $n > N$ esetén

$$\left| (S_n f)(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| < \varepsilon$$

amivel a tétel ⁱ⁾ részét bebizonyítottuk.

A ⁱⁱ⁾ állítás bizonyítása. Ha f folytonos az (a, b) intervallumon, akkor az $[a + \delta, b - \delta]$ részintervallumon egyenletesen folytonos és korlátos. Emiatt az ⁱ⁾ rész bizonyításában szereplő I_+, I_- integrálok abszolút értékei az x választásától függetlenül válnak kicsivé, ha η elég kicsi. Rögzített η esetén a J integrál értéke is egyenletesen tart nullába, ha x az $[a + \delta, b - \delta]$ intervallumba esik.

Ezzel a tételt $b - a < 2\pi$ esetén bebizonyítottuk. A $b - a \geq 2\pi$ esetben az intervallumot szétbontjuk véges sok egymásba nyúló, 2π -nél rövidebb összhosszúságú intervallumra, és ezekre alkalmazzuk az ⁱ⁾ esetet.

5.5.4. Következmény. Ha f 2π szerint periodikus, mindenütt folytonos, és bármely véges intervallumon korlátos változású függvény, akkor f Fourier-sora egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$ -en és összege f .

5.5.5. Megjegyzés. Az 5.4.2. Példában szereplő függvény mindenütt folytonos, korlátos változású bármely véges intervallumon (egy periódusban felbontható a függvény két monoton növekedő függvény különbségére), ezért az 5.5.4. Következmény alapján a Fourier sor egyenletesen konvergál f -hez a valós számok halmazán.

6. Feladatok

5.6.1. Feladat. Írjuk fel a következő függvények Fourier-sorát! Vizsgáljuk meg, hol konvergens a Fourier-sor és adjuk meg az összegét! Határozzuk meg a Parseval-képlet segítségével adódó sorösszeget is!

a) Az f függvény 2π -szerint periodikus és $f(x) = x^2$, ha $-\pi \leq x < \pi$. *megoldás*

b) Az f függvény 2π -szerint periodikus és

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

megoldás

¹³Ervényes ugyanis a következő lemma: **Lemma 146** Minden 2π szerint periodikus, integrálható f függvényre és minden rögzített δ száma ($0 < \delta \leq \pi$), az $\int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$ integrál az x összes értékeire nézve egyenletesen tart nullához, ha $n \rightarrow \infty$. A bizonyítás megtalálható [13] könyvben.

c) Az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi, \\ A, & \text{ha } x = \frac{\pi}{2}, \\ B, & \text{ha } x = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Hogyan válasszuk meg A és B értékét, hogy a függvény Fourier-sora a függvényhez konvergáljon $\mathbb{R}$ -en? *megoldás*

d) Az f függvény páratlan, 2π -szerint periodikus, továbbá $f(x) = e^x$, ha $0 < x < \pi$ és $f(0) = 0$. A $[-\pi, \pi]$ intervallum végpontjaiban úgy válasszuk a függvényértékeket, hogy ott a függvény jobbról folytonos legyen. *megoldás*

e) Az f függvény 2π -szerint periodikus, és *megoldás*

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ \sin x, & \text{ha } 0 < |x| < \pi. \end{cases}$$

f) Az f függvény 2π -szerint periodikus, és *megoldás*

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

g) $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$). *megoldás*

h) Az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, ha $-\pi \leq x < \pi$. *megoldás*

i) $f(x) = \sin^2 x$ ($x \in \mathbb{R}$). *megoldás*

j) Az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, ha $-\pi \leq x < \pi$. *megoldás*

5.6.2. Feladat. Mit mondhatunk az f függvény Fourier-együtthatóiról, ha tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $f(x + \pi) = f(x)$? *megoldás*

5.6.3. Feladat. Mit mondhatunk az f függvény Fourier-együtthatóiról, ha tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $f(x + \pi) = -f(x)$? *megoldás*

5.6.4. Feladat Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e következő függvények Fourier-sora! Ha konvergens, mi az összege?

a) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} p(x), & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ q(x), & \text{ha } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

ahol p, q polinomok. *megoldás*

b) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus és $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ ($x \in [-\pi, \pi]$). *megoldás*

c) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus és

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad (x \in [-\pi, \pi)).$$

megoldás

d) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus és

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad (x \in [-\pi, \pi)).$$

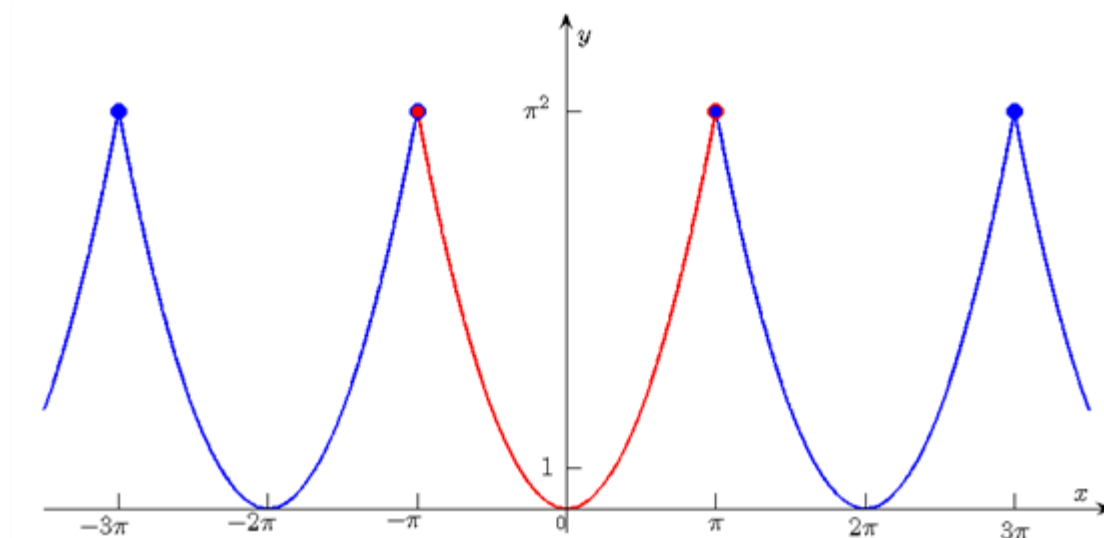
megoldás

7. Megoldások

5.6.1. Feladat. a) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = x^2$, ha $-\pi \leq x < \pi$. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. A 5.4. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.4. ábra - Az f függvény grafikonja



Mivel f páros, ezért $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), továbbá

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3} \pi^2$$

és ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt \, dt = \left[\frac{1}{\pi} t^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{\sin nt}{n} \, dt = \\
 &\quad \begin{array}{l} u(t)=t^2 \quad v(t)=\cos nt \\ u'(t)=2t \quad v(t)=\frac{\sin nt}{n} \end{array} \quad \begin{array}{l} u(t)=\frac{2}{n}t \quad v(t)=\sin nt \\ u'(t)=\frac{2}{n} \quad v(t)=-\frac{\cos nt}{n} \end{array} \\
 &= \left[\frac{1}{\pi} t^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{1}{\pi} \frac{2}{n} t \frac{\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt = \\
 &= \left[\frac{1}{\pi} t^2 \frac{\sin nt}{n} + \frac{1}{\pi} \frac{2}{n} t \frac{\cos nt}{n} + \frac{1}{\pi} \frac{2}{n^3} \sin nt \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Az f függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel a függvény mindenütt folytonos, korlátos változású bármely véges intervallumon (egy periódusban felbontható a függvény két monoton növekedő függvény különbségére), ezért 5.5.4. Következmény alapján a Fourier sor egyenletesen konvergál f -hez a valós számok halmazán.

Az f függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért teljesül a (4.1.11) Parseval-formula:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

A függvény norma-négyzete:

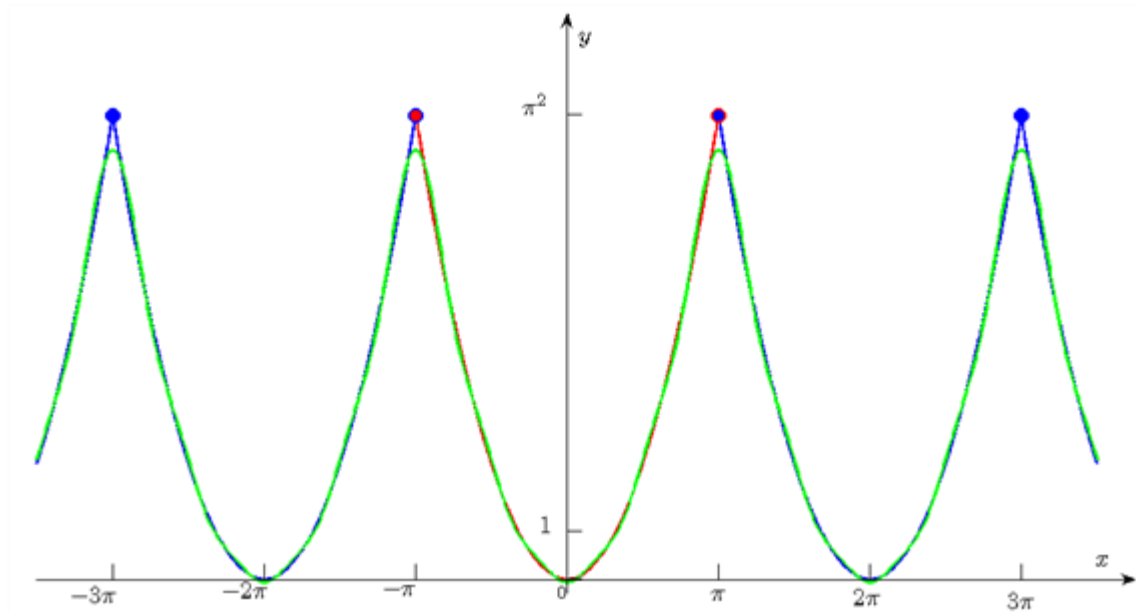
$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^4 \, dt = \frac{2}{5} \pi^5,$$

így a következő sorösszeg adódik:

$$\frac{2}{5} \pi^4 = \frac{2}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Leftrightarrow \frac{8}{45} \pi^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Leftrightarrow \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

A 5.5. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonját.

5.5. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonja



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

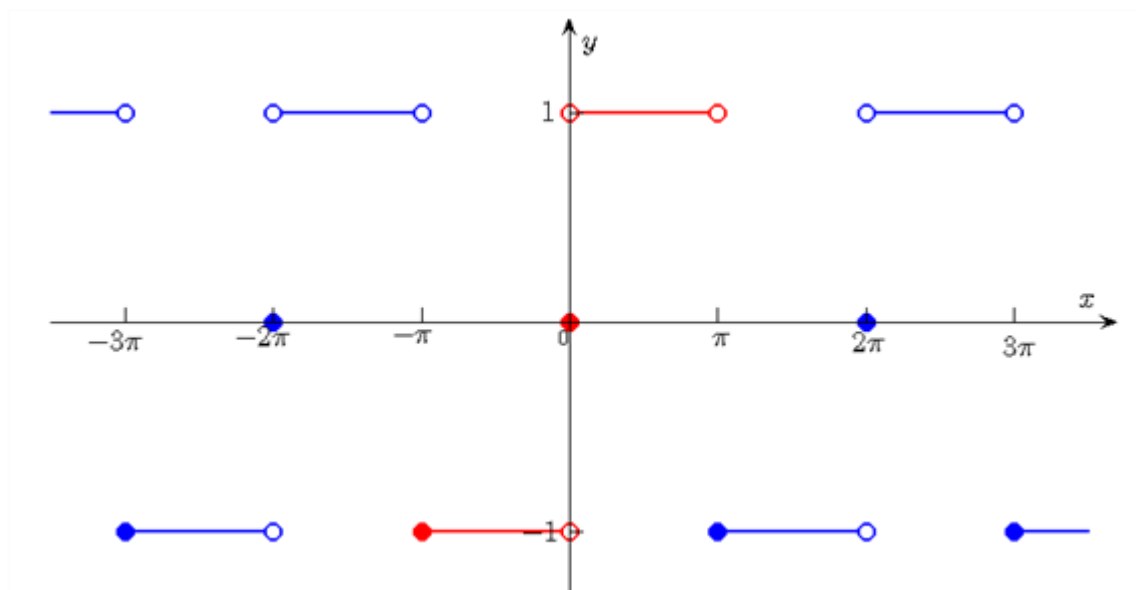
5.6.1. Feladat. b) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. A 5.6. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.6. ábra - Az f függvény grafikonja



Mivel f páratlan, ezért $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), továbbá minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n} \cos n\pi + \frac{2}{\pi n} \cos 0 = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n).$$

A fenti integrálás során kihasználtuk, hogy az integrandus két páratlan függvény szorzata, azaz páros és az integrálási tartomány az origóra szimmetrikus.

Az f függvény Fourier-sora tehát:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin nx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az f függvény monoton a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon, ezért 5.5.1. Dirichlet-Jordan-féle tétel értelmében a Fourier-sor konvergens.

Mivel f folytonos az $x_k = 2k\pi$ pont kivételével a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ intervallum minden pontjában, és $f(x_k) = \frac{f(x_k + 0) + f(x_k - 0)}{2}$, ezért a Fourier-sor összege az intervallumon f .

Az $\bar{x}_k = -\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban f -nek léteznek a féloldali deriváltjai (Mindkét féloldali derivált nulla) és a féloldali határértékei, ezért a Fourier-sor ezekben a pontokban is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(\bar{x}_k) = \frac{f(\bar{x}_k + 0) + f(\bar{x}_k - 0)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Az f függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért teljesül a (4.1.11) Parseval-formula:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

A függvény norma-négyzete:

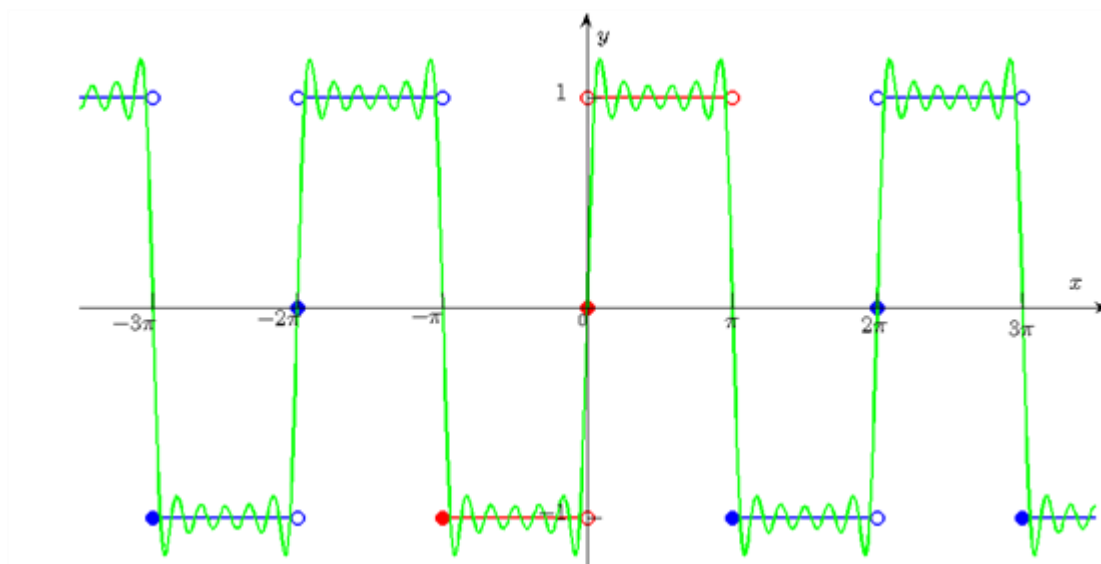
$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt = 2\pi,$$

így a következő sorösszeg adódik:

$$2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^2}{\pi^2 (2k+1)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

A 5.7. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_{11}f$ részletösszegének grafikonját.

5.7. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_{11}f$ részletösszegének grafikonja



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

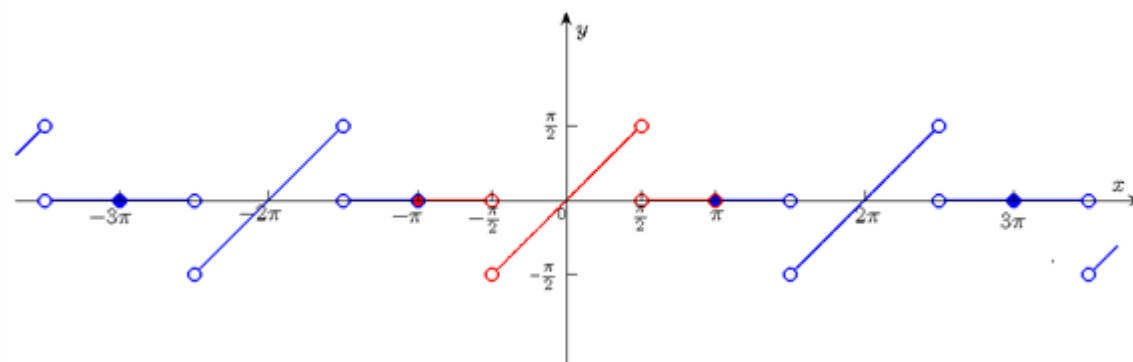
5.6.1. Feladat. c) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi, \\ A, & \text{ha } x = \frac{\pi}{2}, \\ B, & \text{ha } x = -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hogyan válasszuk meg A és B értékét, hogy a függvény Fourier-sora a függvényhez konvergáljon $\mathbb{R}$ -en? Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. A 5.8. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.8. ábra - Az f függvény grafikonja



Az f függvény a $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontok kivételével mindenhol differenciálható és az említett $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

léteznek véges egyoldali deriváltak, ezért a függvény Fourier-sora konvergens. Mivel a pontok kivételével f mindenhol folytonos is, ezért a kérdéses pontok kivételével mindenhol igaz, hogy a Fourier-sor összege éppen az f függvény.

Az $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban a Fourier-sor összege:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x_k) = \frac{f(x_k + 0) + f(x_k - 0)}{2} = \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

ezért $A = \frac{\pi}{4}$ választás mellett a Fourier-sor ebben a pontban is a függvényértékhez konvergál.

Az $\bar{x}_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban a Fourier-sor összege:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(\bar{x}_k) = \frac{f(\bar{x}_k + 0) + f(\bar{x}_k - 0)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + 0}{2} = -\frac{\pi}{4},$$

ezért a Fourier-sor akkor fog ebben a pontban is a függvényértékhez konvergálni, ha $B = -\frac{\pi}{4}$.

Mivel f páratlan, ezért $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), továbbá minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t \cos nt}{n} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nt \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t \cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n^2 \pi} = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{2k}, & \text{ha } n = 2k, \\ (-1)^k \frac{2}{(2k+1)^2 \pi}, & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Az f függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért teljesül a (4.1.11) Parseval-formula:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

A függvény norma-négyzete:

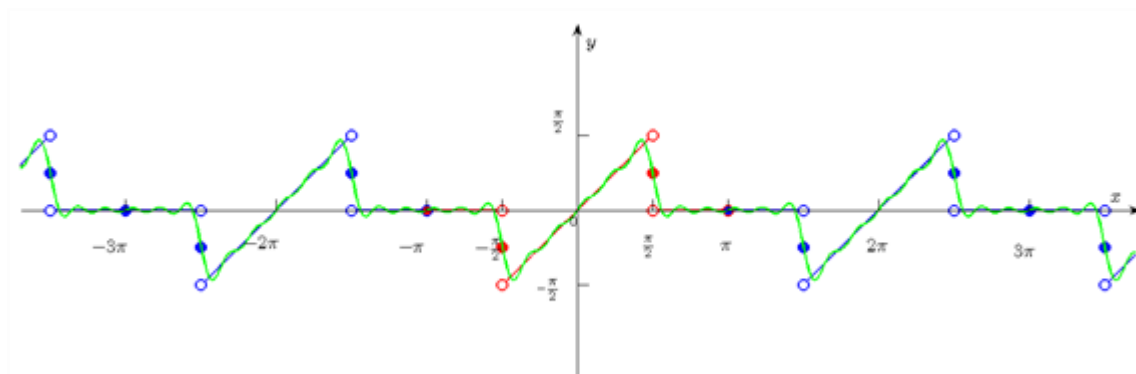
$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \pi,$$

így a következő sorösszeg adódik:

$$1 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

A 5.9. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonját.

5.9. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja



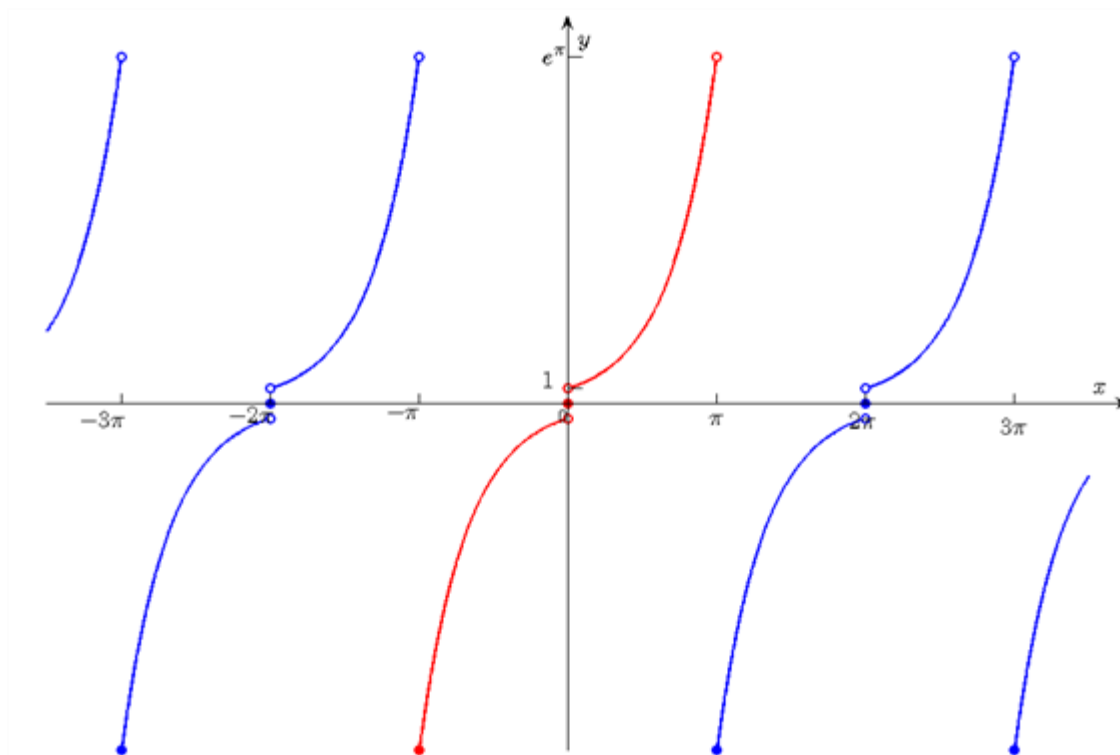
Animáció

[vissza a feladathoz](#)

5.6.1. Feladat. d) Legyen az f páratlan, 2π -szerint periodikus függvény, továbbá $f(x) = e^x$, ha $0 < x < \pi$ és $f(0) = 0$. A $[-\pi, \pi]$ intervallum végpontjaiban úgy válasszuk a függvényértékeket, hogy ott a függvény jobbról folytonos legyen. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. A 5.10.ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.10. ábra - Az f függvény grafikonja



Mivel f páratlan, ezért $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), továbbá minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad (5.7.1)$$

mivel $f \sin n \cdot$ páros függvény. A függvény primitív függvénye parciális integrálással határozható meg:

$$\int e^t \sin nt \, dt = \frac{-e^t \cos nt}{n} + \frac{1}{n} \int e^t \cos nt \, dt = \frac{-e^t \cos nt}{n} + \frac{e^t \sin nt}{n^2} - \frac{1}{n^2} \int e^t \sin nt \, dt,$$

$$\begin{array}{ll} u(t)=e^t & v(t)=\sin nt \\ u'(t)=e^t & v'(t)=\cos nt \end{array} \quad \begin{array}{ll} u(t)=e^t & v(t)=\cos nt \\ u'(t)=e^t & v'(t)=-\sin nt \end{array}$$

ahonnan

$$\int e^t \sin nt \, dt = \frac{e^t \sin nt - ne^t \cos nt}{n^2 + 1}.$$

A fenti primitív függvényt (5.7.1) egyenletbe visszaírva kapjuk, hogy

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^t \sin nt - ne^t \cos nt}{n^2 + 1} \right]_0^\pi = \frac{2n}{\pi(n^2 + 1)} (1 - (-1)^n e^\pi).$$

A függvény Fourier-sora tehát:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + 1)\pi} (1 - (-1)^n e^\pi) \sin nx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az f függvény monoton a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon, ezért korlátos változású és 5.5.1. Dirichlet-Jordan-féle tétel értelmében a Fourier-sor konvergens. Mivel f folytonos a $2k\pi$ pont kivételével a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ intervallum minden pontjában, és $f(2k\pi) = \frac{f(2k\pi + 0) + f(2k\pi - 0)}{2}$ ezért a Fourier-sor összege az intervallumon f .

Az $x_k = -\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban nem differenciálható a függvény, de féloldali deriváltjai léteznek és végesek:

$$f'_+(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k + 0)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{-e^{-x} + e^{-\pi}}{x + \pi} = (-e^{-x}) \Big|_{x=-\pi} = e^\pi,$$

$$f'_-(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k - 0)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{e^x - e^\pi}{x - \pi} = (e^x) \Big|_{x=\pi} = e^\pi,$$

ezért ezekben a pontokban is konvergál a függvény Fourier-sora féloldali határértékek számtani közepéhez, ami jelen esetben 0.

Az f függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért teljesül a (4.1.11) Parseval-formula:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

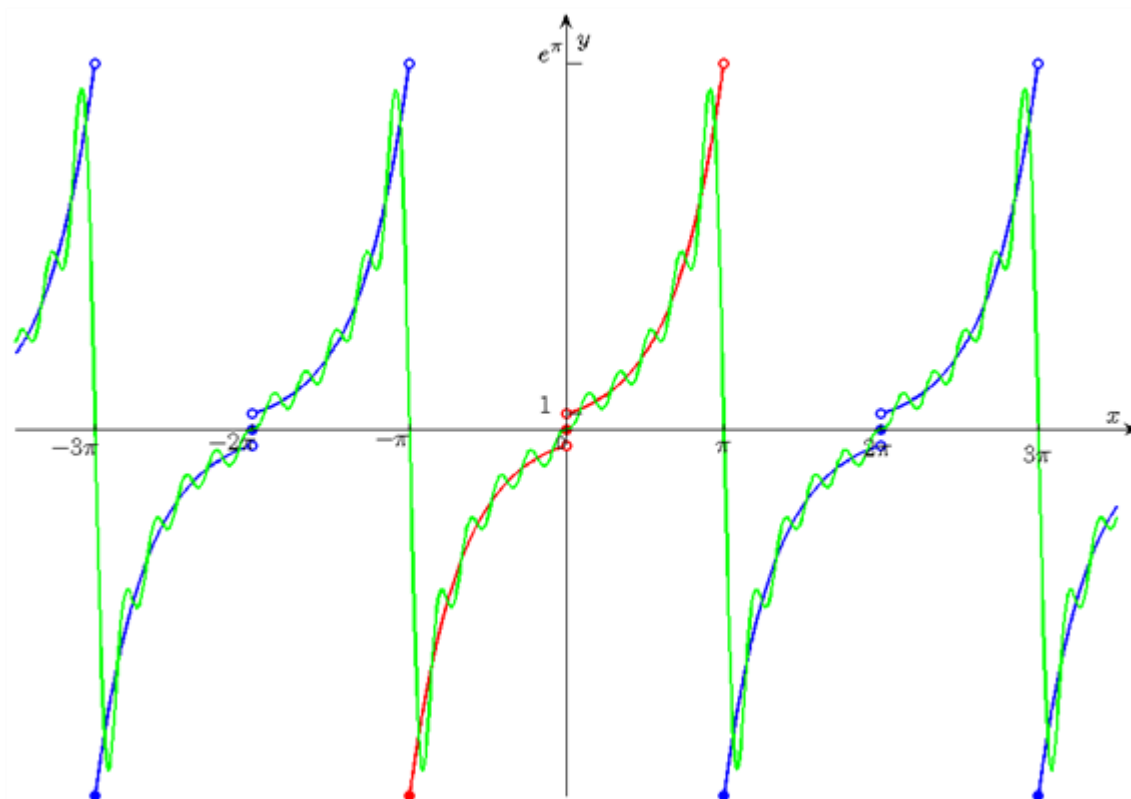
A függvény norma-négyzete:

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt = 2 \int_0^{\pi} e^{2t} \, dt = 2 \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^{\pi} = e^{2\pi} - 1,$$

így a következő sorösszeg adódik:

$$\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{(n^2 + 1)^2 \pi^2} (1 - (-1)^n e^\pi)^2.$$

5.11. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_{10}f$ részletösszegének grafikonja



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

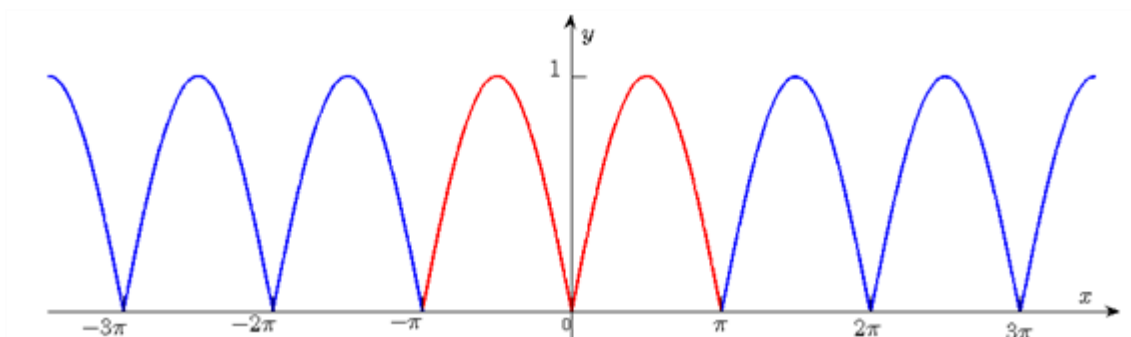
5.6.1. Feladat. e) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ \sin x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. A 5.12. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.12. ábra - Az f függvény grafikonja



Mivel f páros, ezért $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), továbbá

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

és

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \, dt = 0.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$, akkor

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(1+n)t + \sin(1-n)t}{2} \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(1+n)t + \sin(1-n)t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(1+n)t}{n+1} - \frac{\cos(1-n)t}{1-n} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1 - \cos(1-n)\pi}{1-n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} (1 - (-1)^{n+1}) + \frac{1}{1-n} (1 - (-1)^{1-n}) \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{1-n} \right), & \text{ha } n = 2k, \\ 0, & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & \text{ha } n = 2k, \\ 0, & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

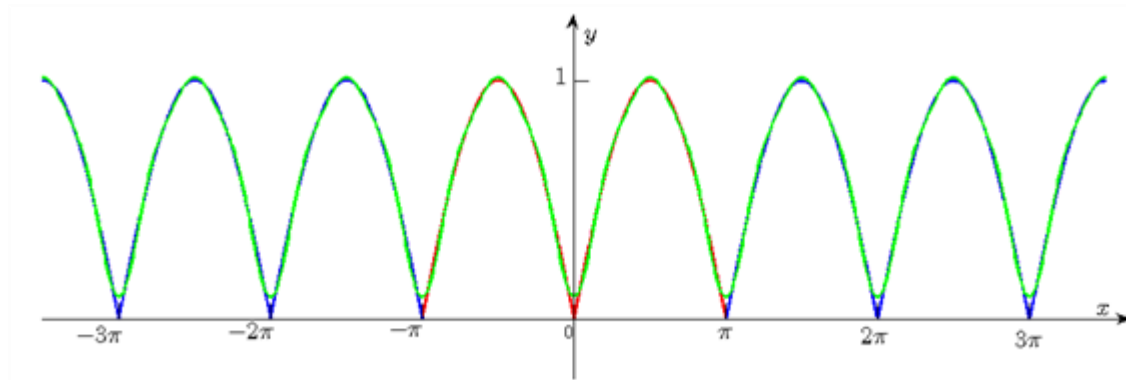
Az f függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-(2k)^2)} \cos 2kx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel a függvény mindenütt folytonos, korlátos változása bármely véges intervallumon (egy periódusban felbontható a függvény két monoton növekedő függvény különbségére), ezért 5.5.4. Következmény alapján a Fourier sor egyenletesen konvergál f -hez a valós számok halmazán.

A 5.13. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f 2π -szerint periodikus függvény és Fourier-sorának $S_6 f$ részletösszegének grafikonját.

5.13. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_6 f$ részletösszegének grafikonja



Animáció

Az f függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért teljesül a (4.1.11) Parseval-formula:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

A függvény norma-négyzete:

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt = 2 \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

így a következő sorösszeg adódik:

$$1 = \frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2} = \frac{\pi^2}{16} - 1.$$

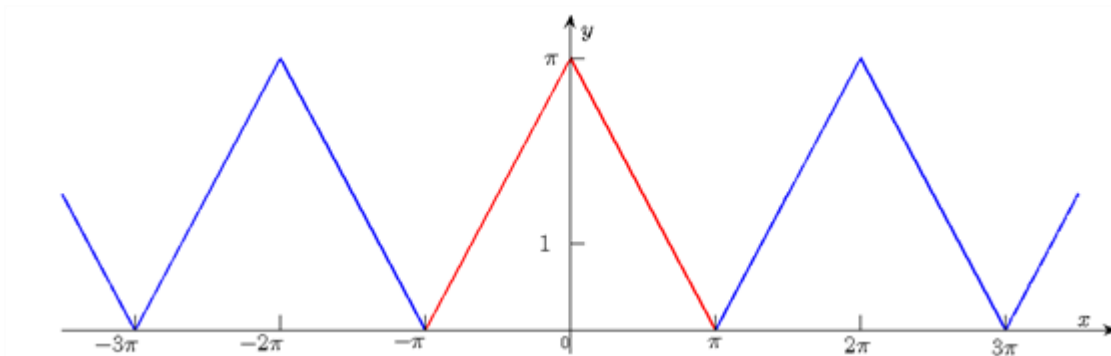
vissza a feladathoz

5.6.1. Feladat. f) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Megoldás. Az 5.14. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.14. ábra - Az f függvény grafikonja



Mivel f páros, ezért $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), továbbá

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) dt = \frac{2}{\pi} \left[\pi t - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\pi} = \pi.$$

és ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left[(\pi - t) \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nt dt = \\ &\quad \begin{matrix} u(t) = \pi - t & v(t) = \cos nt \\ u'(t) = -1 & v(t) = \frac{\sin nt}{n} \end{matrix} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[(\pi - t) \frac{\sin nt}{n} - \frac{1}{n^2} \cos nt \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k, \\ \frac{4}{n^2 \pi}, & \text{ha } n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Az f függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi} (1 - (-1)^n) \cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \cos(2k+1)x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel a függvény mindenütt folytonos, korlátos változású bármely véges intervallumon (egy periódusban felbontható a függvény két monoton növekedő függvény különbségére), ezért 5.5.4. Következmény alapján a Fourier sor egyenletesen konvergál f -hez a valós számok halmazán.

Az f függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért teljesül a (4.1.11) Parseval-formula:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

A függvény norma-négyzete:

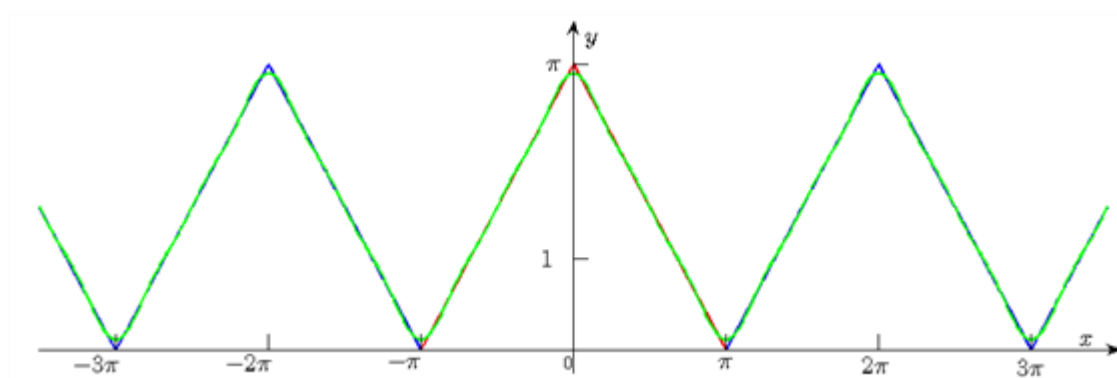
$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = 2 \int_0^{\pi} (\pi-t)^2 dt = 2 \left[\frac{(\pi-t)^3}{-3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3,$$

így a következő sorösszeg adódik:

$$\frac{2}{3} \pi^3 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2n+1)^4} \Leftrightarrow \frac{\pi^4}{16 \cdot 6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Az 5.15. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonját.

5.15. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonja



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

5.6.1. Feladat. g) Legyen az $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$). Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

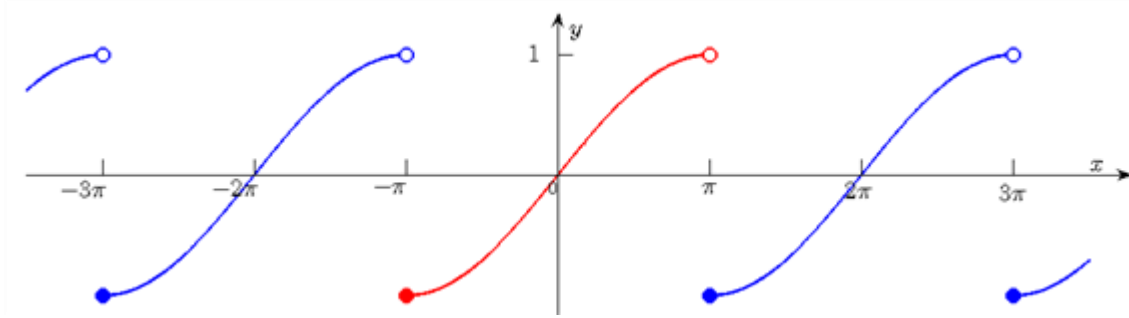
Megoldás. Mivel f egy trigonometrikus polinom, ami egy speciális trigonometrikus sor (egy kivételével az összes együtthatója nulla), és minden konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének Fourier-sora, ezért a Fourier-sor maga a függvény. A (4.1.11) Parseval-formula most nem ad numerikus sorokra vonatkozó érdekes azonosságot.

[vissza a feladathoz](#)

5.6.1. Feladat. h) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, ha $-\pi \leq x < \pi$. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. Az 5.16. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.16. ábra - Az f függvény grafikonja



Mivel f páratlan, ezért $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), továbbá minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{t}{2} \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n - \frac{1}{2})t - \cos(n + \frac{1}{2})t}{2} \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(2n-1)\frac{t}{2}}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2n+1} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{8}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{n}{(2n+1)(2n-1)}. \end{aligned}$$

Az f függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{n}{(2n+1)(2n-1)} \sin nx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az f függvény folytonos, monoton a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon, ezért korlátos változású és az 5.5.1. Dirichlet-Jordan-féle tétel értelmében a Fourier-sor konvergens és összege f ezeken az intervallumokon.

Az $x_k = -\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban nem differenciálható a függvény, de féloldali deriváltjai léteznek és végesek:

$$f'_+(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k+} \frac{f(x) - f(x_k+0)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow -\pi+} \frac{\sin \frac{x}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})}{x + \pi} = \left(\sin \frac{x}{2} \right) \Big|_{x=-\pi} = \frac{1}{2} \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0,$$

$$f'_-(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k-} \frac{f(x) - f(x_k-0)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow -\pi-} \frac{\sin \frac{x}{2} - \sin \frac{\pi}{2}}{x - \pi} = \left(\sin \frac{x}{2} \right) \Big|_{x=\pi} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

ezért ezekben a pontokban is konvergál a függvény Fourier-sora féloldali határértékek számtani közepéhez, ami jelen esetben 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x_k) = \frac{f(x_k+0) + f(x_k-0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Az f függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, ezért teljesül a (4.1.11) Parseval-formula:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

A függvény norma-négyzete:

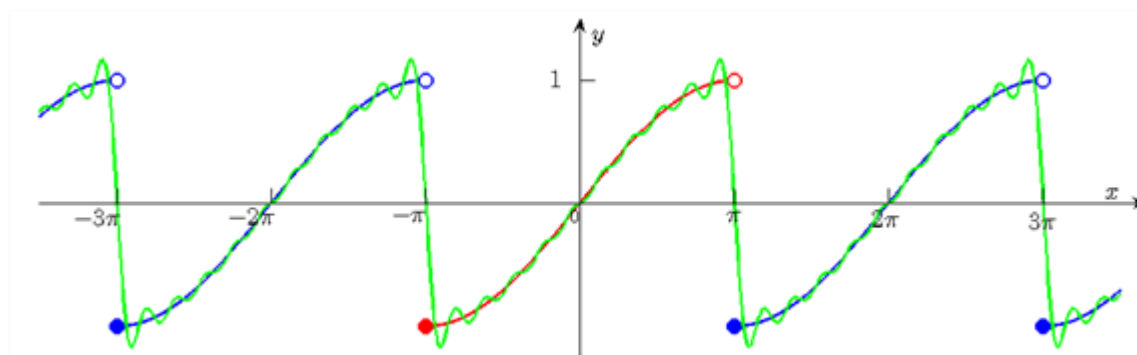
$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos t}{2} dt = \frac{1}{2} [t - \sin t]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

így a következő sorösszeg adódik:

$$1 = \frac{64}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2(2n-1)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{64} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2(2n-1)^2}.$$

Az 5.17. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonját.

5.17. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonja



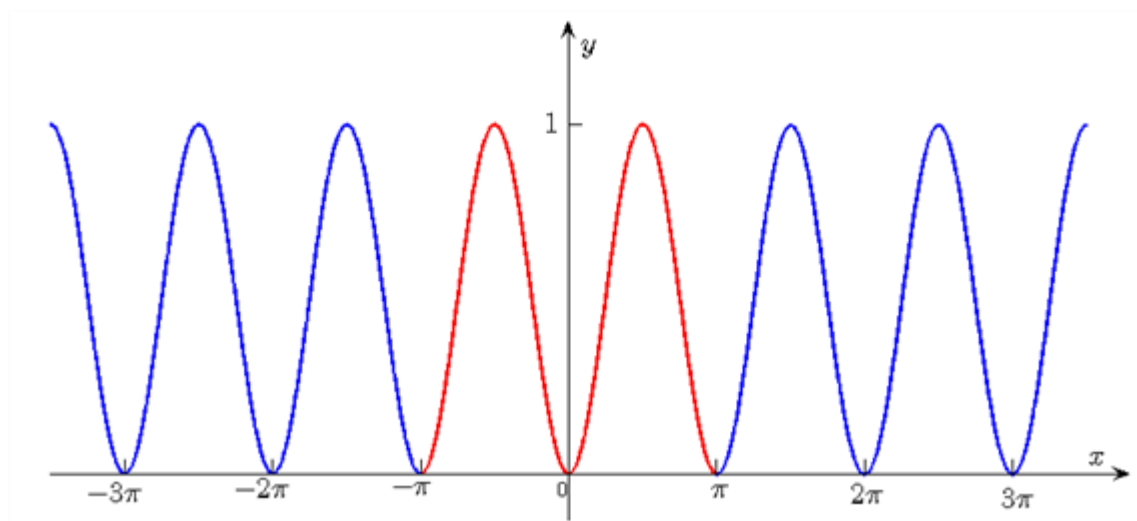
Animáció

[vissza a feladathoz](#)

5.6.1. Feladat. i) Legyen az $f(x) = \sin^2 x$ ($x \in \mathbb{R}$). Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. Az 5.18. ábrán az f függvény grafikonja látható.

5.18. ábra - Az f függvény grafikonja



Vegyük észre, hogy

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

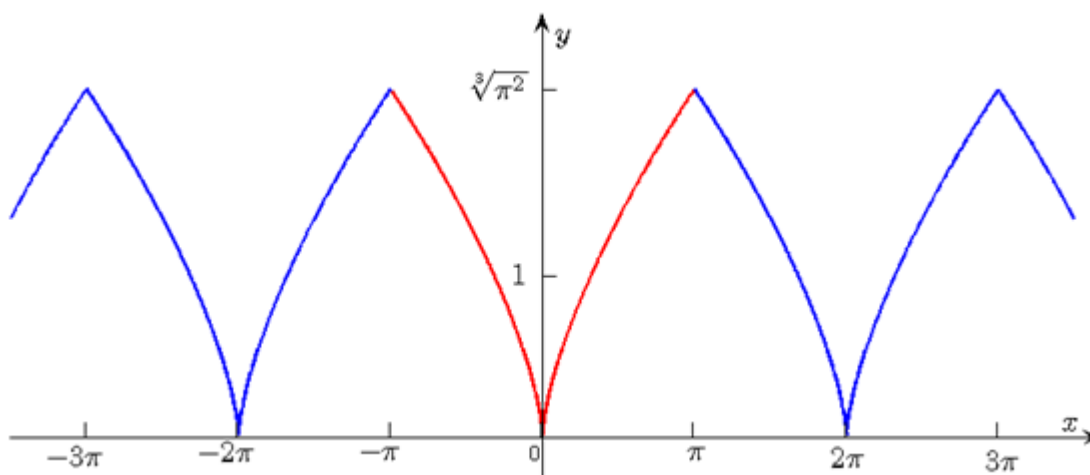
Mivel f egy trigonometrikus polinom, ami egy speciális trigonometrikus sor (kettő kivételével az összes együtthatója nulla), és minden konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének Fourier-sora, ezért a Fourier-sor maga a függvény. A (4.1.11) Parseval-formula most nem ad numerikus sorokra vonatkozó érdekes azonosságot.

vissza a feladathoz

5.6.1. Feladat. j) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, ha $-\pi \leq x < \pi$. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát! Hol konvergens a függvény Fourier-sora? Adjuk meg a Fourier-sor összegét! Határozzuk meg a Parseval képlet segítségével adódó sorösszeget.

Megoldás. Az 5.19. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.19. ábra - Az f függvény grafikonja



Mivel f páros, ezért $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), továbbá

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt[3]{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{3}{5} t^{5/3} \right]_0^{\pi} = \frac{6}{5} \sqrt[3]{\pi^2}$$

Az a_n együtthatók kiszámításához szükséges

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{t^2} \cos nt dt$$

integrálok úgynevezett Fresnel-integrálok, melyek elemi függvényekkel nem írhatók fel zárt analitikus alakban, így a Fourier-együtthatók meghatározását numerikus módszerekkel végezzük. A 2. táblázatban szereplő együtthatókat Simpson-formulával számoltuk.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	2,5740	-0,7787	-0,0850	-0,1118	-0,0313	-0,0456	-0,0171	-0,0253	-0,0110

Table 2: Az f Fourier-sorának néhány, numerikusan számolt együtthatója

Az f függvény felbontható két monoton növekvő függvény különbségként. Valóban, legyen

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x^2}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x^2}, & \text{ha } x \leq 0, \\ 0, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

Ekkor $f = g - h$ a $[-\pi, \pi]$ intervallum minden pontjában, így az f korlátos változású függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, azaz 5.5.1. Dirichlet-Jordan-féle tétel értelmében a Fourier-sora minden pontban konvergens. Mivel a függvény mindenütt folytonos, korlátos változású bármely véges intervallumon, ezért 5.5.4. Következmény alapján a Fourier sor egyenletesen konvergál f -hez a valós számok halmazán.

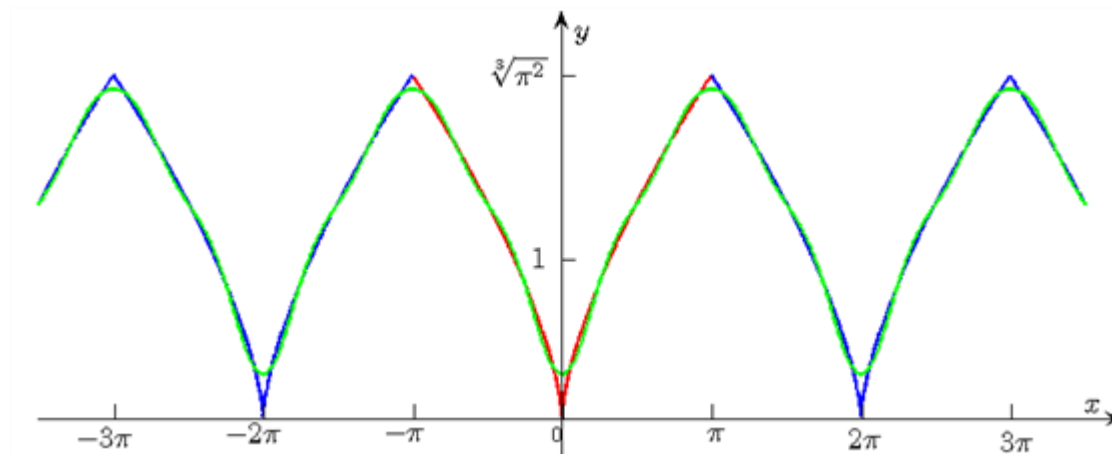
Az összes Fourier-együttható numerikus meghatározása természetesen nem lehetséges, így a Fourier-sor helyett az n -edik részletösszegét írjuk fel:

$$f_n(x) \approx S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx,$$

ahol az $(a_k, k = 0, \dots, n)$ együtthatók a Fourier-együtthatók numerikus közelítései.

Az 5.20. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonját.

5.20. ábra - Az f függvény és Fourier-sorának $S_5 f$ részletösszegének grafikonja



Animáció

[vissza a feladathoz](#)

5.6.2. Feladat. Mit mondhatunk az f függvény Fourier-együtthatóiról, ha tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $f(x + \pi) = f(x)$?

Megoldás. Helyettesítéssel integrálást alkalmazva az a_n Fourier-együtthatókra az alábbi összefüggés adódik minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} f(y+\pi) \cos n(y+\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) (\cos ny \cos n\pi - \sin ny \sin n\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= (-1)^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) \cos ny \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = ((-1)^n + 1) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).
 \end{aligned}$$

A fenti számolás során kihasználtuk, hogy mivel az $f \cos n \cdot$ függvény 2π -szerint periodikus, ezért az integrál értéke nem változik, ha az integrálási tartományt 2π -vel eltoljuk. A b_n együtthatókat hasonló számolással kaphatjuk:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} f(y+\pi) \sin n(y+\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) (\cos ny \sin n\pi + \sin ny \cos n\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= (-1)^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) \sin ny \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = ((-1)^n + 1) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).
 \end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy mivel $f \sin n \cdot$ függvény 2π -szerint periodikus, ezért az integrálási tartomány most is eltolható 2π -vel, anélkül, hogy az integrál értéke megváltozna.

Tehát a feltételnek megfelelő függvények esetén a páratlan Fourier-együtthatók eltűnnek.

vissza a feladathoz

5.6.3. Feladat. Mit mondhatunk az f függvény Fourier-együtthatóiról, ha tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $f(x+\pi) = -f(x)$?

Megoldás. Helyettesítéssel integrálást alkalmazva az a_n Fourier-együtthatókra az alábbi összefüggés adódik minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} f(y+\pi) \cos n(y+\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) (\cos ny \cos n\pi - \sin ny \sin n\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) \cos ny \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = (1 - (-1)^n) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})
 \end{aligned}$$

A fenti számolás során kihasználtuk, hogy mivel az $f \cos n \cdot$ függvény 2π -szerint periodikus, ezért az integrál értéke nem változik, ha az integrálási tartományt 2π -vel eltoljuk. A b_n együtthatókat hasonló számolással kaphatjuk:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} f(y+\pi) \sin n(y+\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) (\cos ny \sin n\pi + \sin ny \cos n\pi) \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(y) \sin ny \, dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = (1 - (-1)^n) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).
 \end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy mivel $f \sin n \cdot$ függvény 2π -szerint periodikus, ezért az integrálási tartomány most is eltolható 2π -vel, anélkül, hogy az integrál értéke megváltozna.

Tehát a feltételnek megfelelő függvények esetén a páros Fourier-együtthatók eltűnnek.

vissza a feladathoz

5.6.4. Feladat. a) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus, és

$$f(x) = \begin{cases} p(x), & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ q(x), & \text{ha } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

ahol p, q polinomok. Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e a függvény Fourier-sora! Ha konvergens, mi az összege?

Megoldás. Mivel az f függvény a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon két polinom összeragasztásával keletkezett, ezért az $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontok kivételével a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumok minden pontjában differenciálható. $x_k = 2k\pi$ -ban léteznek a véges egyoldali deriváltak, ugyanis:

$$f'_+(x_k) = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0+0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{q(x) - q(0)}{x - 0} = q'(0),$$

és

$$f'_-(x_0) = f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0-0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{p(x) - p(0-0)}{x - 0} = p'(0).$$

Hasonlóan igazolható, hogy az intervallum végpontjaiban is végesek az egyoldali deriváltak és az egyoldali határértékek, így 5.4.3. Következmény értelmében a Fourier-sor konvergens. Tehát az f függvény Fourier-sora minden pontban konvergens.

Mivel a függvény az $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontok kivételével minden pontban folytonos, ezért az említett pontok kivételével a Fourier-sor mindenhol elő is állítja a függvényt.

Az f függvény pontosan akkor folytonos az $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban, ha $p(0) = q(0)$, ezért ha $p(0) = q(0)$, akkor a Fourier-sor az intervallumok minden belső pontjában előállítja a függvényt. Ha $p(0) \neq q(0)$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(0) = \frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{p(0) + q(0)}{2}.$$

Hasonlóan vizsgálható az $\bar{x}_k = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban a Fourier-sor összege, azaz ha $p(-\pi) = q(\pi)$, akkor a függvény ezekben a pontokban folytonos és a Fourier-sor előállítja a függvényt, ha $p(-\pi) \neq q(\pi)$, akkor

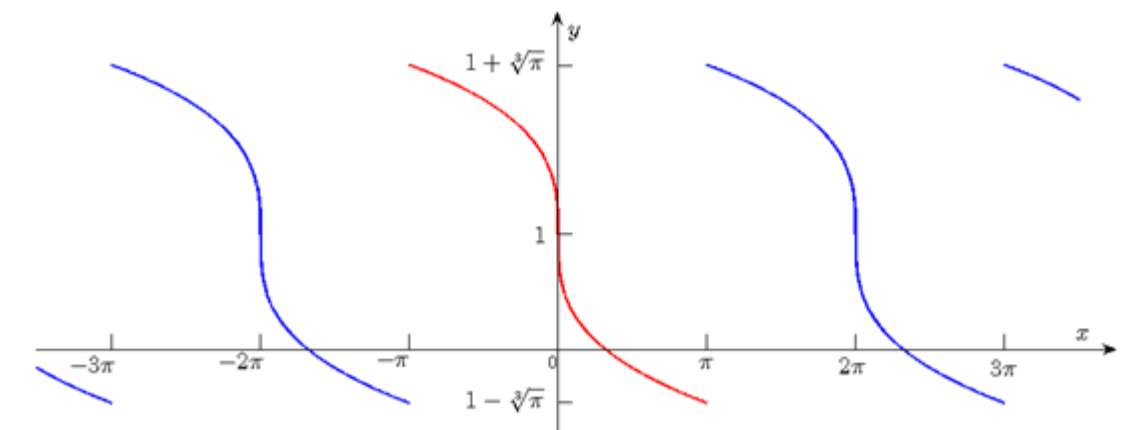
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(\bar{x}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{p(-\pi) + q(\pi)}{2}.$$

vissza a feladathoz

5.6.4. Feladat. b) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus és $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ $x \in [-\pi, \pi)$. Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e a függvény Fourier-sora, ha konvergens, adjuk meg az összegét.

Megoldás. Az 5.21. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.21. ábra - Az f függvény grafikonja



Az f függvény folytonos, monoton a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon, ezért korlátos változású és 5.5.1. Dirichlet-Jordan-féle tétel értelmében a Fourier-sor konvergens és összege f ezeken az intervallumokon.

Az intervallumok $x_k = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) végpontjaiban a függvény nem differenciálható, de végesek az egyoldali deriváltak:

$$f'_+(x_k) = f'_+(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi+} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi+} \frac{(1 - \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{-\pi})}{x + \pi} = \left(-\sqrt[3]{x} \right) \Big|_{x=-\pi} = -\frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}}$$

$$f'_-(x_k) = f'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{(1 - \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{\pi})}{x - \pi} = \left(-\sqrt[3]{x} \right) \Big|_{x=\pi} = -\frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}},$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{(1 - \sqrt[3]{-\pi}) + (1 - \sqrt[3]{\pi})}{2} = 1.$$

vissza a feladathoz

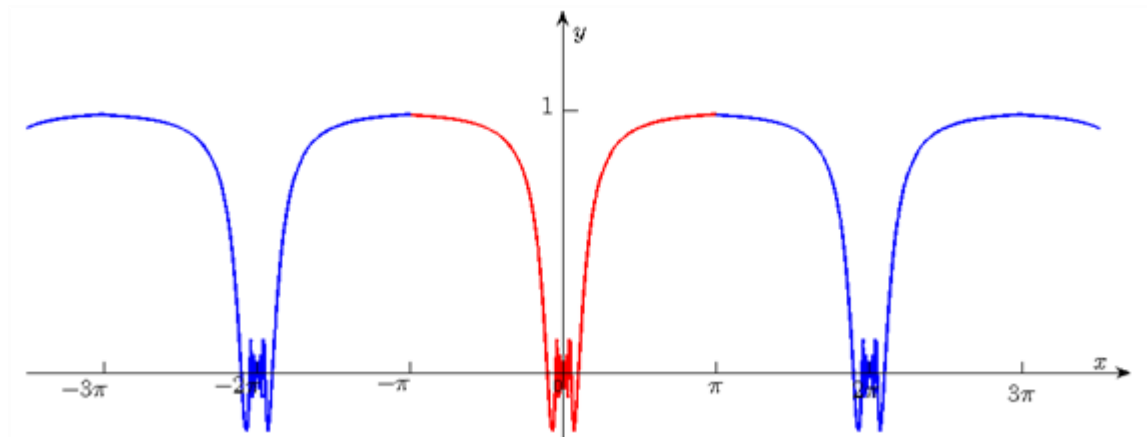
5.6.4. Feladat. c) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus és

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi).$$

Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e a függvény Fourier-sora! Ha konvergens, határozzuk meg az összegét.

Megoldás. Az 5.22. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.22. ábra - Az f függvény grafikonja



Az f függvény az $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontok kivételével a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ intervallumok minden pontjában differenciálható a műveleti tulajdonságok alapján. Az $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

határérték nem létezik, ezért a függvény ezeken a helyeken nem differenciálható, sőt a féloldali deriváltak sem léteznek. Ezért 5.4.2. Lipschitz-kritérium alapján vizsgáljuk a konvergenciát. Mivel

$$|\varphi_{x_k}(t)| = |\varphi_0(t)| = |f(t) + f(-t) - 2f(0)| = \left| t \sin \frac{1}{t} - t \sin \left(-\frac{1}{t} \right) - 0 \right| = |2t \sin \frac{1}{t}| \leq 2|t| = 2|t|^1 \quad (t \in (-\pi, \pi)),$$

ezért a függvény Fourier-sora konvergens ezekben a pontokban.

Az intervallumok $\bar{x}_k = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) végpontjaiban nem differenciálható a függvény, ugyanakkor végesek az egyoldali deriváltak, ugyanis az $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$ függvény a műveleti tulajdonságok alapján értelmezési

tartományának minden pontjában, így π -ben és $-\pi$ -ben is, differenciálható. Mivel f a h függvény levágásával és periodizálásával keletkezett, ezért

$$f'_+(\bar{x}_k) = h'(-\pi) = \sin(-\frac{1}{\pi}) + \frac{1}{\pi} \cos(-\frac{1}{\pi}) = \frac{1}{\pi} \cos \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi},$$

$$f'_-(\bar{x}_k) = h'(\pi) = \sin \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \frac{1}{\pi}.$$

A Fourier-sor tehát minden pontban konvergens. A függvény az $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban folytonos:

$$f(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

mert egy nullához tartó függvényt egy korlátos függvénnyel szoroztunk meg. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}_k+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}_k-} f(x) = f(\bar{x}_k) = f(\pi),$$

ezért f az $\bar{x}_k = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban is folytonos. A folytonosság a többi helyen a műveleti tulajdonságok alapján teljesül, ezért a Fourier-sor mindenhol előállítja a függvényt.

vissza a feladathoz

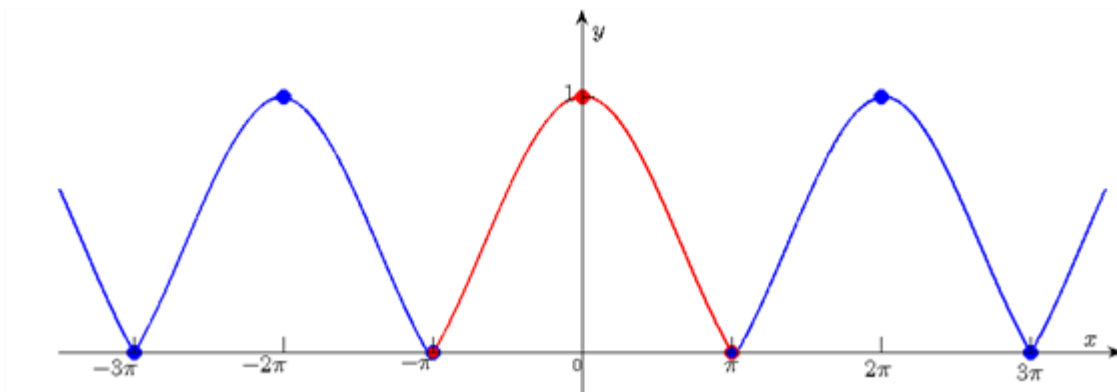
5.6.4. Feladat. d) Legyen az f függvény 2π -szerint periodikus és

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e a függvény Fourier-sora, ha igen, határozzuk meg az összegét.

Megoldás. Az 5.23. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő f függvény grafikonját.

5.23. ábra - Az f függvény grafikonja



Az f függvény az $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontok kivételével a $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ intervallumok minden pontjában differenciálható.

Az $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban a differenciálhatóságot definíció alapján ellenőrizzük:

$$f'(x_k) = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$$

$h(x) = \sin x / x$ és $\bar{x}_k = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) végpontjaiban is végesek az egyoldali deriváltak, ugyanis $\hat{x}^z$ $-\pi$ függvény a műveleti tulajdonságok alapján értelmezési tartományának minden pontjában, így $-$ ben és $-$ ben is, differenciálható. Mivel a függvény levágásával és periodizálásával keletkezett, ezért

$$f'_+(\bar{x}_k) = h'(-\pi) = -\frac{1}{\pi} \cos(-\pi) - \frac{1}{\pi^2} \sin(-\pi) = -\frac{1}{\pi} \cos \pi + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi,$$

$$f'_-(\bar{x}_k) = h'(\pi) = \frac{1}{\pi} \cos \pi - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi.$$

A Fourier-sor tehát minden pontban konvergens.

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}_k+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}_k-} f(x) = f(\bar{x}_k) = f(\pi),$$

ezért f az $\bar{x}_k = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban folytonos. A folytonosság a többi helyen a műveleti tulajdonságok miatt teljesül, ezért a Fourier-sor mindenhol előállítja a függvényt.¹⁴

vissza a feladathoz

¹⁴Igazolható, hogy a függvény folytonosan differenciálható, ezért korlátos változású bármely véges intervallumon, ezért Dirichlet. Következésképpen a Fourier sor egyenletesen konvergál f -hez a valós számok halmazan.

6. fejezet - Szummációs eljárások

Mint, azt elemi analízisben bebizonyítottuk, a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

végtelen sor divergens, hiszen részletösszege sorozata

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{hazpáratlan,} \\ 1, & \text{hazpáros} \end{cases}$$

divergens.

Ennek a sornak a konvergencia-kérdése sokáig megoldatlan volt. Leibniz például tulajdonított neki összeget: $1/2$.

Felmerül a kérdés, hogy új konvergenciafogalmak bevezetésével el lehet-e érni, hogy a fenti sor konvergens legyen?

Hasonló kérdéseket a Fourier-sorokkal kapcsolatban is felvethetünk. Ismeretes, hogy van olyan folytonos függvény, melynek trigonometrikus Fourier-sora divergens. Felvetődik a kérdés, hogy hogyan lehet ezen javítani?

Korábban már mutattunk példát olyan teljes ortonormált rendszerre, mely szerinti Fourier-sor már konvergál folytonos függvények esetén (Haar-rendszer).

Kérdés, hogy meg lehet-e a konvergencia-definíciót úgy változtatni, hogy folytonos függvények trigonometrikus Fourier-sora az új definíció értelmében konvergáljon? Ebben a fejezetben erre a kérdésre keressük a választ.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: Cesàro-összeg, Abel-összeg, Fejér-féle magfüggvény.

Szükséges előismeret: 2. fejezet, 5. fejezet, végtelen sorok, hatványsorok.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 3 tanóra + 3 óra önálló munka.

1. Végtelen sorok szummációja

1.1. Cesàro-összeg

6.1.1. Definíció. Legyen $a = (a_n, n \in \mathbb{N})$ egy valós számsorozat. Jelöljük S_n -nel a $\sum_{k=0}^n a_k$ végtelen sor n . részletösszeg-sorozatát, azaz

$$S_n := \sum_{k=0}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor **Cesàro összegezhető**, ha a

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (6.1.1)$$

sorozat konvergens. σ_n -et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor **Cesàro közepének**, az

$$s_c := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

határértéket a **Cesàro összegének** nevezzük.

6.1.2. Tétel. Legyen $(a_n, n \in \mathbb{N})$ egy valós számsorozat. Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sor konvergens, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$$

konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Cesàro összegezzhető, és

$$s_c = s.$$

Bizonyítás. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, ezért a sorozatokra vonatkozó konvergencia-definíció alapján

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}, \quad \text{hogyn} \quad n > N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon_1 \quad (6.1.2)$$

teljesül. Be szeretnénk látni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$, azaz hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{N} = \bar{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{hogyn} \quad n > \bar{N} \Rightarrow |\sigma_n - s| < \varepsilon \quad (6.1.3)$$

is teljesül. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy

$$s = \frac{\overbrace{s + s + \dots + s}^{n+1\text{darab}}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s,$$

ezért a háromszög-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k - s \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s \right| = \\ &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (s_k - s) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |s_k - s|. \end{aligned}$$

Ha $n > N$, akkor a

$$K := K(N, a) := \sum_{k=0}^N |s_k - s|$$

(csak N -től és $a = (a_n, n \in \mathbb{N})$ sorozattól függő konstans) jelölést bevezetve (6.1.2) definíció alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N |s_k - s| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^n |s_k - s| \stackrel{(6.1.2)}{<} \frac{1}{n+1} K + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^n \varepsilon_1 \leq \\ &\leq \frac{K}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varepsilon_1 = \frac{K}{n+1} + \varepsilon_1 < \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{ha } \varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } \frac{K}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Tehát}$$

$$\bar{N} := \max \left\{ N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \left\lceil \frac{2K}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$$

választása esetén teljesül (6.1.3).

□

6.1.3. *Megjegyzés.* A Cesàro közép másképp is felírható:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (n-i+1) a_i = \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) a_i.$$

1.2. Abel-összeg

6.1.4. Definíció. Legyen $a = (a_n, n \in \mathbb{N})$ egy valós számsorozat. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor **Abel-összegezhető**, ha létezik a véges

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k =: s_A \quad (6.1.4)$$

határérték. Az s_A határértéket a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor **Abel-összegének** nevezzük.

6.1.5. Tétel. Legyen $(a_n, n \in \mathbb{N})$ egy valós számsorozat. Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sor konvergens, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: s \in \mathbb{R}$$

konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-összegezhető, és

$$s_A = s.$$

Bizonyítás. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, ezért a sorozatokra vonatkozó konvergencia-definíció alapján

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy } n > N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon_1 \quad (6.1.5)$$

teljesül. Be szeretnénk látni, hogy $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s$, azaz hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \text{hogy } 0 < 1 - r < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s \right| < \varepsilon \quad (6.1.6)$$

is teljesül. Ennek igazolásához az $s_{-1} := 0$ bevezetésével először végrehajtjuk az ún. Abel-féle átrendezést, azaz

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_{n-1} r^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - r \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - r \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

A fenti átrendezés során felhasználtuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot r^n$ hatványsor konvergens. Ennek igazolásához konvergens majoránst keresünk. Mivel $(s_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens, ezért korlátos, azaz létezik $M \in \mathbb{R}^+$, hogy

¹Niels Henrik Abel (1802–1829) norvég matematikus. Róla nevezték el az Abel-díjat.

$$|\varepsilon_n| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt, valamint a mértani sor konvergenciáját felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n \cdot r^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot r^n = \frac{M}{1-r} \quad (r \in (0, 1)).$$

A majoráns kritérium alapján a sor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

Továbbá a mértani sor ismert konvergencia-tulajdonsága alapján

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad (0 < r < 1),$$

és ezért

$$\frac{s}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} s r^n \quad (0 < r < 1) \Rightarrow s = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s r^n \quad (0 < r < 1). \quad (6.1.8)$$

Felhasználva (6.1.7) és (6.1.8) átalakításokat, továbbá a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy minden $r \in (0, 1)$ esetén

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s \right| &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s r^n \right| = \\ &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) r^n \right| \leq (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} |s_n - s| r^n. \end{aligned}$$

Ha $n > N$, akkor a

$$K := K(N, \alpha) := \sum_{k=0}^N |s_k - s|$$

(csak N -től és $\alpha = (\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ sorozattól függő konstans) jelölést bevezetve (6.1.5) definíció alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s \right| &\stackrel{(6.5)}{\leq} (1-r) \sum_{n=0}^N |s_n - s| r^n + (1-r) \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_n - s| r^n < \\ &< (1-r) \sum_{n=0}^N |s_n - s| 1^n + (1-r) \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_1 r^n \leq \\ &\leq (1-r)K + \varepsilon_1 (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r)K + \varepsilon_1 < \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{ha } \varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } (1-r)K < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Tehát}$$

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2K}\right\}$$

választása esetén teljesül (6.1.6).

□

1.3. Kapcsolat a két szummációs eljárás között

6.1.6. Tétel. Frobenius ² Tétéle. Legyen $a = (a_n, n \in \mathbb{N})$ egy valós számsorozat. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Cesàro összegezzethető, akkor Abel-összegezzethető, és

$$s_A = s_c.$$

Bizonyítás. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s_c$, ezért a sorozatokra vonatkozó konvergencia-definíció alapján

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy } n > N \Rightarrow |\sigma_n - s_c| < \varepsilon_1 \quad (6.1.9)$$

teljesül. Be szeretnénk látni, hogy $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s_c$, azaz hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \text{hogy } 0 < 1 - r < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s_c \right| < \varepsilon \quad (6.1.10)$$

is teljesül.

Ennek belátásához szükségünk van néhány átalakításra. Az előző tételben Abel-átalakítással beláttuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \cdot r^n \quad r \in (0, 1). \quad (6.1.11)$$

Legyen $s_{-1} = 0$. Az $s_n = (n+1) \cdot \sigma_n - n \cdot \sigma_{n-1}$ előállítással az új sorra is alkalmazzuk az Abel-átalakítást:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} n\sigma_{n-1} r^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n - r \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n = (1-r) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n. \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Összevetve (6.1.11) -et és (6.1.12) -t kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n \quad r \in (0, 1). \quad (6.1.13)$$

Az Abel átalakítás csak akkor hajtható végre, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n$ hatványsor konvergens. Ennek igazolásához konvergens majoránst keresünk. Mivel $(\sigma_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens, ezért korlátos, azaz létezik $M \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$|\sigma_n| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(n+1)\sigma_n r^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M(n+1)r^n < \infty \quad (r \in (0, 1)).$$

A majoráns kritérium alapján a sor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

Felhasználtuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^n$ sor konvergens, ha $r \in (0, 1)$. A sor konvergenciája a gyökkritérium alapján rögtön látható, de az összegét is meg tudjuk határozni, hiszen a mértani sor ismert konvergencia-tulajdonsága alapján

²Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917) német matematikus.

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad (0 < r < 1),$$

és a hatványsorok differenciálhatóságára vonatkozó tételből

$$\left(\frac{1}{1-r} \right)' = \frac{1}{(1-r)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n \quad (0 < r < 1).$$

Ezt az összeget felhasználva egy másik hasznos átalakításhoz jutunk. Nevezetesen minden $r \in (0,1)$ esetén

$$\frac{s_c}{(1-r)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_c (n+1) r^n \Rightarrow s_c = (1-r)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_c (n+1) r^n. \quad (6.1.14)$$

(6.1.13) és (6.1.14) segítségével már becsülhető az (6.1.10) definícióban lévő egyenlőtlenség. Minden $r \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s_c \right| &= \left| (1-r)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n (n+1) r^n - (1-r)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_c (n+1) r^n \right| = \\ &= \left| (1-r)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n - s_c) (n+1) r^n \right| \leq (1-r)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n - s_c| (n+1) r^n. \end{aligned}$$

Ha $n > N$, akkor a

$$K := K(N, a) := \sum_{n=0}^N |\sigma_n - s_c| \cdot (n+1)$$

(csak N -től és $a = (a_n, n \in \mathbb{N})$ sorozattól függő konstans) jelölést bevezetve (6.1.5) definíció alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s_c \right| &\leq (1-r)^2 \sum_{n=0}^N (n+1) |\sigma_n - s_c| r^n + (1-r)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1) |\sigma_n - s_c| r^n \stackrel{(6.1.9)}{<} \\ &< (1-r)^2 \sum_{n=0}^N (n+1) |\sigma_n - s_c| \cdot 1^n + (1-r)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1) \varepsilon_1 r^n \leq \\ &\leq (1-r)^2 K + \varepsilon_1 (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n = (1-r)^2 K + \varepsilon_1 < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2}$ és $(1-r)^2 K < \frac{\varepsilon}{2}$. Tehát

$$\delta := \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2K}} \right\}$$

választása esetén teljesül (6.1.6).

□

6.1.7. Megjegyzés. Egyik tétel sem megfordítható.

Bizonyítás.

1.) $A \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ végtelen sor divergens, összeget nem tudunk neki tulajdonítani, de Cesàro összegezhető. Mivel

$$s_{2n} = 1 \quad s_{2n+1} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\begin{aligned}\sigma_{2n} &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} s_k = \frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \\ \sigma_{2n+1} &= \frac{1}{2n+2} \sum_{k=0}^{2n+1} s_k = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

azaz a sor valóban Cesàro összegezhető, és Cesàro összege $\frac{1}{2}$.

2.) *Belátjuk, hogy a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n$$

végtelen sor divergens, nem Cesàro összegezhető, de Abel-összegezhető.

A részletösszeg-sorozat divergens, mert

$$\begin{aligned}s_{2n} &= \overbrace{1-2}^{-1} + \overbrace{3-4}^{-1} + \overbrace{5-6}^{-1} + \dots + \overbrace{(2n-1)-2n}^{-1} = -n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty) \\ s_{2n+1} &= 1 - \overbrace{2-3}^1 + \overbrace{4-5}^1 - 6 + \dots + (2n-1) - \overbrace{2n+(2n+1)}^1 = n+1 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

A sor nem Cesàro összegezhető, mert a páros és páratlan indexű Cesàro-közep határértékei különböznek:

$$\begin{aligned}\sigma_{2n} &= \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{2n-1} + s_{2n}}{2n+1} = \frac{0+1-1+\dots+n-n}{2n+1} = 0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \sigma_{2n+1} &= \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{2n-1} + s_{2n} + s_{2n+1}}{2n+2} = \frac{0+1-1+\dots+n-n+(n+1)}{2n+2} = \\ &= \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

Az Abel-összegezhetőség vizsgálatához tekintsük a következő konvergens mértani sort:

$$\frac{1}{1+r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-r)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n \quad | -r | < 1,$$

melyből a hatványsorok differenciálhatóságára vonatkozó tétel alapján

$$-\frac{1}{(1+r)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n r^{n-1} \quad | r | < 1.$$

Mindkét oldalt $(-r)$ -rel beszorozva kapjuk, hogy

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n r^n = \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{r}{(1+r)^2} = \frac{1}{4} = s_A,$$

tehát a sor Abel-összegezhető.

□

2. Fourier-sorok összegzése

A Fourier-szintézissel kapcsolatos nehézségek áthidalására már a XX. század elején több, később alapvetőnek bizonyult eljárást vezettek be, amelyek azóta az analízis egy-egy önálló ágává váltak. Ezek közül három irány kidolgozásában a magyar matematikusoknak döntő szerepük volt. Az egyik irány Pécs város világhírű szülöttjének, Fejér Lipótnak a munkásságával indult el, aki bebizonyította, hogy a Fourier-sor részletösszegei helyett azok számtani közepét véve egy, a kifejtett függvényhez konvergáló sorozatot kapunk. Ez számos

közelítő eljárás alapjául szolgált, melyek vizsgálata az approximációelmélet, az analízis egy napjainkban is fejlődő ágának témakörébe tartozik. Ebben a Fejezetben ezzel az összegzéssel foglalkozunk.

2.1. Fejér Tétele

2.1.1. Fejér-féle magfüggvény

Legyen $f \in C^2(\mathbb{R})$ szerint periodikus, folytonos függvény. A függvény trigonometrikus rendszerre vonatkozó

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Fourier-sora nem feltétlenül konvergens. A sor Cesàro-összegezhetőségét fogjuk vizsgálni. Az n -edik részletösszegekre vonatkozó

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

Dirichlet-formulája alapján a számtani közepekre

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{(S_0 f)(x) + \dots + (S_n f)(x)}{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \frac{D_0(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} dt.$$

A $(\sigma_n f, n \in \mathbb{N})$ sorozat elemeit a függvény *Fejér-közepeinek* nevezzük. Vezessük be a

$$K_n(t) = \frac{D_0(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} \quad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \quad (6.2.1)$$

jelölést. A K_n függvényt *n. Fejér-féle magfüggvénynek* nevezzük.

A Dirichlet-magfüggvényhez hasonlóan a Fejér-féle magfüggvényt is zárt alakba tudjuk írni:

6.2.1. Lemma. A Fejér-féle magfüggvényre érvényes a

$$K_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{1}{2} t} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, n \in \mathbb{N}) \quad (6.2.2)$$

előállítás.

Bizonyítás. A Dirichlet-féle magfüggvény zárt alakját beírva a Fejér-féle magfüggvény definíciójába és az

egyenlet mindkét oldalát $4 \sin^2 \frac{1}{2} t$ -vel megszorozva kapjuk, hogy. Ekkor az addíciós képletek alapján

$$\begin{aligned} 4K_n(t) \sin^2 \frac{1}{2} t &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t} 4 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cos kt - \cos(k+1)t = \\ &= \frac{1}{n+1} (\cos 0 - \cos t) + (\cos t - \cos 2t) + (\cos 2t - \cos 3t) + \dots + \\ &\quad + (\cos nt - \cos(n+1)t) = \frac{1}{n+1} (1 - \cos(n+1)t) = \frac{2 \sin^2 \frac{n+1}{2} t}{n+1}, \end{aligned}$$

ahonnan az állítás egyenletrendezéssel adódik.

□

A zárt alakból illetve az értelmezésből azonnal leolvashatók az alábbi tulajdonságai a Fejér-közepeknek:

(1) $K_n(t) \geq 0$ ($t \in \mathbb{R}$). (E tulajdonsága miatt a Fejér-féle magfüggvény sokkal kezelhetőbb a Dirichlet-félénél. Ezen a tulajdonságon múlik, hogy a részletösszegek számtani közepeivel való összegzés a Fourier-sorok esetében sokkal hatékonyabb a közönséges összegzésnél.)

$$(2) \int_0^\pi K_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_0^\pi D_k(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$(3) K_n(0) = \frac{n+1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(4) Minden $0 < \delta < \pi$ esetén

$$M_n(\delta) = \max_{\delta \leq t \leq \pi} K_n(t) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (6.2.3)$$

A (2) tulajdonság alapján kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\sigma_n f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_n(t) K_n(t) dt, \quad (6.2.4)$$

ahol

$$\varphi_n(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \quad (x, t \in \mathbb{R}).$$

2.1.2. Fejér-Tétele

Az előbb vizsgált tulajdonságok felhasználásával be tudjuk látni az alábbi tételt.

6.2.2. Tétel (Fejér-Tétele). *Legyen $f \in L^1$ szerint periodikus, integrálható függvény.*

i) Minden olyan x pontban, ahol f bal- és jobboldali véges határértékei léteznek,

$$(\sigma_n f)(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

ii) Ha f valamely $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos, amibe beleértjük, hogy az a pontban balról, a b pontban jobbról is folytonos, akkor ezen az intervallumon a Fejér-közepek egyenletesen konvergálnak az f függvényhez, azaz

$$\sigma_n f \rightrightarrows f \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás.

i) Tekintsünk egy olyan x pontot, amelyben $f(x+0)$ és $f(x-0)$ is létezik. Feltehetjük, hogy

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

ugyanis f Fourier-sora nem változik, ha a függvényértéket egyetlen pontban megváltoztatjuk. Ekkor

$$\varphi_n(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0),$$

ezért bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy ε -tól és x -től függő $0 < \delta \leq \pi$ szám, melyre

$$|\varphi_x(t)| \leq \varepsilon, \quad \text{ha } |t| < \delta.$$

A (6.2.4) Fejér-formula alapján

$$(\sigma_n f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \varphi_x(t) K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt,$$

melyből a háromszög-egyenlőtlenséget, a magfüggvény nemnegativitását, továbbá a magfüggvény (2) integrálját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |(\sigma_n f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon |\varphi_x(t)| K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^\pi |\varphi_x(t)| K_n(t) dt < \\ &< \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \varepsilon K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^\pi |\varphi_x(t)| K_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\varepsilon K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} M_n(\delta) \int_\varepsilon^\pi |\varphi_x(t)| dt = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\pi} M_n(\delta) \int_\varepsilon^\pi |\varphi_x(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\pi} M_n(\delta) \int_0^\pi |\varphi_x(t)| dt. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Mivel (6.2.3) alapján $M_n(\delta) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor

$$|(\sigma_n f)(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk.³

ii) Mivel f folytonos a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, ezért ott egyenletesen is folytonos, továbbá mivel az a pontban balról, a b pontban jobbról folytonos, ezért bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan δ -tól függő $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha } x' \in [a, b], \text{ és } |x' - x| < \delta, \text{ akkor } |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$|\varphi_x(t)| \leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha } x \in [a, b] \text{ és } t \in [0, \delta).$$

Mivel f 2π szerint periodikus függvény, ezért

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\varphi_x(t)| dt &\leq \int_0^\pi |f(x+t)| dt + \int_0^\pi |f(x-t)| dt + 2 \int_0^\pi |f(x)| dt = \\ &\stackrel{x+t=u \Rightarrow dt=du}{\stackrel{x-t=u \Rightarrow -dt=du}{=}} \int_x^{x+\pi} |f(u)| du - \int_x^{x-\pi} |f(u)| du + 2\pi |f(x)| = \int_{x-\pi}^{x+\pi} |f(u)| du + 2\pi |f(x)| \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^\pi |f(u)| du + 2\pi M, \end{aligned}$$

ahol $M = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.⁴ A kapott két eredményünket a tétel ⁱ⁾ részének bizonyításánál használt (6.2.5) becslésénél alkalmazzuk. Ekkor egy x -től független N küszöbindexet találunk, melyre $|(\sigma_n f)(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$ és $x \in [a, b]$, tehát az egyenletes konvergencia valóban teljesül.

Ezzel Fejér tételének bizonyítását befejeztük.

³Az N küszöbindex a δ -tól való függősége miatt x -től is függ.

⁴Az f függvény folytonos a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, ezért Weierstrass-tétele alapján a maximum létezik

□

Fejér tételéből néhány fontos következmény azonnal adódik:

6.2.3. Következmény. Legyen f a valós számok halmazán értelmezett, 2π szerint periodikus, integrálható függvény.

a) Ha az f függvény Fourier-sora egy olyan x_0 pontban konvergál, melyben $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$ féloldali határértékek léteznek, akkor a Fourier-sor összege szükségképpen $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$ értékkel egyezik meg.

b) Ha f folytonos függvény, akkor

i) tetszőleges pontossággal egyenletesen megközelíthető Fourier-sora részletösszegeinek számtani közepeivel ⁵;

ii) tetszőleges pontossággal egyenletesen megközelíthető trigonometrikus polinommal. ⁶

c) Ha léteznek m, M valós számok, melyekkel minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \mathbb{R}$ -re $m \leq f(x) \leq M$, akkor

$$m \leq \sigma_n(x) \leq M \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás.

a) Ha f Fourier-sora az x_0 pontban konvergál az $\alpha \in \mathbb{R}$ számhoz, akkor 6.1.2. Tétel alapján a Fejér-közepek is konvergálnak, és határértékük szintén α . Fejér tétele alapján viszont a Fejér-közepek $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

hez tartanak, tehát szükségképpen $\alpha = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$.

b)

i) Mivel f a teljes számegyenesen folytonos, ezért Fejér tétele alapján az egyenletes konvergencia a teljes számegyenesen teljesül.

ii) A Cesáro közép 6.1.3. Megjegyzésben mutatott előállítása alapján

$$(\sigma_n f)(x) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}),$$

azaz az n . Fejér-összeg egy n -edrendű trigonometrikus polinom.

c) A Fejér-féle magfüggvény (1), (2) és az integrál tulajdonsága alapján:

$$m = m \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt \leq (\sigma_n f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = M.$$

□

6.2.4. Megjegyzés. Nem sokkal azután, hogy Fejér az eredményét közzétette (1900), Lebesgue-nak sikerült a tételt továbbfejlesztenie (1905)⁷:

⁵Ezt a tételt **Fejér-féle approximáció-tételnek** nevezzük.

⁶Ezt a tételt **Weierstrass második approximáció-tételnek** nevezzük.

⁷A bizonyítás megtalálható [13] 357. oldalán.

6.2.5. Tétel (Lebesgue-Tétele). Mind f 2π szerint periodikus, Lebesgue-integrálható f függvényre a σ_n Fejér-féle közepek majdnem mindenütt az f függvényhez tartanak. Speciálisan minden olyan pontban konvergencia van, ahol

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^k |\varphi_x(t)| dt = 0 \quad (6.2.6)$$

feltétel teljesül.

2.2. Fourier-sorok Abel-összegzése

A Fourier-sorok elméletében az Abel-féle összegzéssel már Fourier kortársa, Poisson⁸ foglalkozott. Poisson a róla elnevezett

$$f(r, x) = \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-x)+r^2} dt \quad (r \in (0,1), f \in L_{2\pi}, x \in \mathbb{R})$$

integrálnak a határértékét vizsgálta abban az esetben, ha r monoton növe 1-hez tart. Bebizonyítható (lásd [13] 361. oldal), hogy ez az integrál megegyezik az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

végtelen sor összegével, ahol a_n ($n \in \mathbb{N}$), b_n ($n \in \mathbb{N}^*$) számok az f Függvény Fourier-együtthatói, így a probléma valóban a Fourier-sorok Abel-összegzésével ekvivalens.

Felhasználva a Fourier-sorok számtani közepeinek konvergenciájára vonatkozó 6.2.2. és 6.2.5. tételeket, Frobenius 6.1.6. tétele alapján az Abel-közepekre vonatkozó alábbi konvergencia-tételek azonnal következnek.

6.2.6. Tétel. Legyen f 2π szerint periodikus, integrálható függvény.

i) Minden olyan x pontban, ahol f bal- és jobboldali véges határértékei léteznek,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

ii) Ha f valamely $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos, amibe beleértjük, hogy az a pontban balról, a b pontban jobbról is folytonos, akkor ezen az intervallumon az Abel-közepek egyenletesen konvergálnak az f függvényhez ($f(r, x) \Rightarrow f$ ($r \rightarrow 1, r < 1$)), azaz minden pozitív ε számhoz létezik $r_0 < 1$ szám, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén

$$|f(r, x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha } r < r_0 < 1.$$

iii) Majdnem minden $x \in [a, b]$ esetén

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r, x) = f(x),$$

speciálisan minden olyan pontban, ahol (6.2.6) feltétel teljesül.

⁸Siméon Denis Poisson (1781–1842) francia matematikus, fizikus.

7. fejezet - Fourier-transzformált

Ebben a fejezetben a Fourier-transzformáltat és inverzét fogjuk bevezetni. A Fourier-transzformáltat úgy is fel lehet fogni, mint a Fourier-sorok folytonos változatát. A Fourier-sor a jelet (függvényt) a $[-\pi, \pi]$ intervallumon egész frekvenciával rendelkező jelek $(\sin(x), \cos(x))$ szuperpozíciójaként állítja elő, melyek egész frekvenciával rendelkeznek. A Fourier-transzformált egy nem véges intervallumon érkező jelet (egy nem véges intervallumon értelmezett függvényt) bont fel ugyanazon az intervallumon értelmezett jelekre, melyek frekvenciája tetszőleges valós, vagy komplex szám lehet. A Fourier-transzformálnak nagy jelentősége van a wavelet-konstrukciókban.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: Fourier-transzformált, transláció operátor, dilatáció operátor, moduláció operátor.

Szükséges előismeret: 2. fejezet, 4. fejezet.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 3 tanóra + 3 óra önálló munka.

1. Formális határátmenet Fourier-sorból

A 4.1.4. fejezetben láttuk, hogy bármely valós vagy komplex értékű $(-\pi, \pi)$ intervallumon értelmezett, négyzetesen integrálható $(f \in L^2)$ függvény komplex Fourier-sorba fejthető:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (x \in (-\pi, \pi)),$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A Fourier-sor L^2 -normában előállítja az f függvényt és érvényes a Parseval-formula:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Tekintsük a $(-\pi, \pi)$ intervallum helyett a $(-\omega, \omega)$ intervallumot, ahol $0 < \omega < \infty$, és ezen az intervallumon négyzetesen integrálható f függvényt. Lineáris függvény-transzformáció alapján kapjuk, hogy az $f_1(\xi) = f\left(\frac{\omega}{\pi}\xi\right)$ ($\xi \in (-\pi, \pi)$) függvény a $(-\pi, \pi)$ intervallumon négyzetesen integrálható. Alkalmazzuk f_1 -re a

fenti összefüggéseket, majd írjuk be a $\xi = \frac{\pi}{\omega}x$ helyettesítést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{\omega}x} \quad (x \in (-\omega, \omega)),$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(t) e^{-ik\frac{\pi}{\omega}t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A Fourier-sor L^2 -normában előállítja az f függvényt és a Parseval-formula az

$$\int_{-\omega}^{\omega} |f(x)|^2 dx = 2\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

alakot ölti.

Vezessük be a

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \quad (u \in \mathbb{R}) \quad (7.1.1)$$

jelölést. Ekkor

$$c_k = \frac{1}{2\omega} \sqrt{2\pi} g\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{\omega} g\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

és az előbbi összefüggések a következő alakba írhatók: A

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega} g\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) e^{ik \frac{\pi}{\omega} x} \quad (x \in (-\omega, \omega)) \quad (7.1.2)$$

végtelen sor L^2 -normában előállítja f -et és

$$\int_{-\omega}^{\omega} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega} \left| g\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) \right|^2. \quad (7.1.3)$$

Tekintsünk most egy, az egész számegyenesen négyzetesen integrálható f függvényt. Minthogy ez minden véges intervallumon is négyzetesen integrálható, ezért az előző összefüggések érvényesek lesznek minden $(-\omega, \omega)$ intervallumon. Kérdés, hogy nyerhetünk-e ezekből az összefüggésekből $\omega \rightarrow \infty$ határátmenettel olyan összefüggéseket, melyek az egész számegyenesre vonatkoznak?

A (7.1.2) és (7.1.3) képletekben

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta G(k\delta) \quad (\delta = \pi / \omega) \quad (7.1.4)$$

összegek állnak, melyek $\delta \rightarrow 0$ esetén formálisan a

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(u) du$$

integrálhoz tartanak.

Ez alapján $\omega \rightarrow \infty$ határátmenettel az összefüggéseink *formálisan* a következőkbe mennek át:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \quad (u \in \mathbb{R}), \quad (7.1.5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux} du \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (7.1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du. \quad (7.1.7)$$

Hangsúlyozzuk, hogy az eljárásunk tisztán formális volt, bizonyító erővel nem bír. Nem vettük ugyanis figyelembe, hogy (7.1.1) alapján g maga is függ ω -tól, ezért (7.1.4)-ben olyan összegek szerepelnek, ahol G is függ δ -tól. Ezen kívül nem vettük figyelembe azt sem, hogy a (7.1.2) végtelen sor nem pontonként, hanem négyzetintegrálra konvergens.

A (7.1.5) és (7.1.6) képletek az i előjelétől eltekintve az f és a g függvényekre nézve teljesen szimmetrikusak, ezeket *Fourier-féle* inverziós képleteknek nevezzük. Fourier jutott ugyanis először ezekre az eredményekre, szintén formális határátmenettel a hővezetésről szóló nevezetes vizsgálataiban (1822).

A képleteknek az ad jelentőséget, hogy nem periodikus függvények (jelek) is kifejezhetők egész menetükben az e^{iu} és ezzel együtt a $\cos u$, $\sin u$ függvények „szuperpozíciójaként”, ahol $u \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

Fourier óta a fenti Fourier-integrálokat is sokat vizsgálták a matematikusok. Ha (7.1.5) és (7.1.6) képletek jobb oldalán álló integrálokat, mint „improprius” integrálokat értelmezzük, azaz mint a $(-a_1, a_2)$ véges intervallumon vett integrálok határértékeit, ha $a_1, a_2 \rightarrow \infty$, akkor bizonyos nagyon szabályos f függvények esetén sikerült a képletek érvényességét bebizonyítani. Akármilyen, négyzetesen integrálható f függvény esetén a részintegrálok viszont nem konvergensek a közönséges pontonkénti konvergencia értelmében. Ez persze nem is várható, hiszen Fourier-sorok esetén is csak a négyzetintegrálra való konvergenciát tudjuk ilyenkor garantálni, a pontonkéntit nem.

Ha a képletekben szereplő integrálokat a részlet-integrálok átlagos integráljaként tekintjük, akkor az összefüggések minden négyzetesen integrálható függvény esetén érvényesek lesznek. Ezt *Plancherel*¹ bizonyította 1910-ben. A bizonyítás megtalálható [13]-ben.

2. Integrálható függvények Fourier-transzformációja

Ebben a fejezetben a számegegyenesen Lebesgue-integrálható függvények esetén bevezetjük a Fourier-transzformáltat és megvizsgáljuk milyen tulajdonságokkal rendelkezik.

7.2.1. Definíció. Legyen f a valós számok halmazán értelmezett, Lebesgue-integrálható függvény ($f \in L_{(-\infty, \infty)} = L$). Az f függvény Fourier-transzformáltja alatt az

$$(\mathcal{F}f)(x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (7.2.1)$$

függvényt értjük.

A (7.2.1) definícióban szereplő integrál valóban létezik, mert $f(t)e^{-itx}$ ($t \in \mathbb{R}$) mérhető, és mivel $|f(t)e^{-itx}| = |f(t)|$, továbbá $|f|$ is Lebesgue-integrálható, ezért $f(t)e^{-itx}$ ($t \in \mathbb{R}$) is integrálható $\mathbb{R}$ -en.

A Fourier-transzformáció néhány egyszerű tulajdonságát foglalja a következő

7.2.2. Tétel.

i) A Fourier transzformáció egy lineáris leképezés, azaz

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g), \quad (f, g \in L)$$

$$\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda(\mathcal{F}f) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, f \in L).$$

ii) Az $\mathcal{F}f = \hat{f}$ függvény folytonos.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\mathcal{F}f)(x) = 0.$$

Bizonyítás.

i) Az integrálra vonatkozó műveleti tulajdonságok miatt triviálisan teljesül.

ii) Az exponenciális függvény folytonossága miatt

¹Michel Plancherel (1885-1967) svájci matematikus.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t) e^{-it(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} f(t) e^{-itx} e^{-ith} = f(t) e^{-itx}, \quad \text{és} \quad |f(t) e^{-it(x+h)}| = |f(t)| \quad (x, t \in \mathbb{R}),$$

továbbá $f \in L$, tehát a Lebesgue-féle konvergencia-tétel alapján a határátmenet és az integrálás sorrendje felcserélhető, tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\mathcal{F}f)(x+h) \rightarrow (\mathcal{F}f)(x) \quad (h \rightarrow 0),$$

azaz $\mathcal{F}f$ valóban folytonos.

iii) Mivel $e^{-itx} = \cos tx - i \sin tx$, ezért az 5.2.1. Riemann-Lebesgue lemma alapján $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\mathcal{F}f)(x) = 0$ is teljesül.

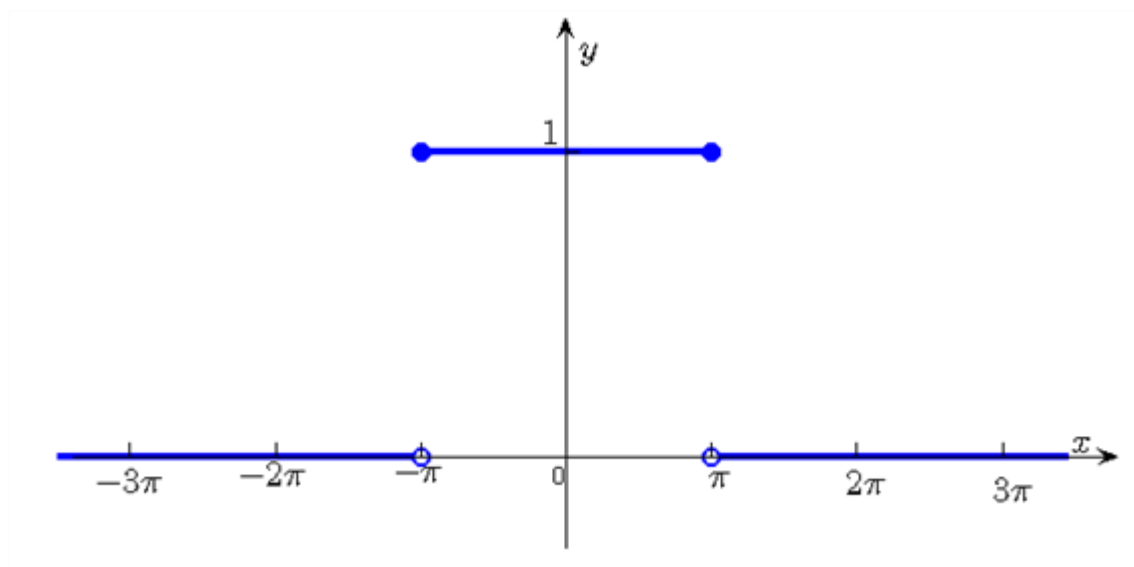
□

A $[-\pi, \pi]$ intervallumon értelmezett Lebesgue-integrálható f függvény trigonometrikus Fourier-sora esetén a c_k ($k \in \mathbb{Z}$) Fourier-együtthatók az f függvény k frekvenciájú komponensét (e^{ikx} , $x \in [-\pi, \pi]$) mérik. Hasonlóan a valós számok halmazán értelmezett Lebesgue-integrálható f függvény esetén $\hat{f}(\lambda)$ f λ frekvenciájú komponensét méri, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Tehát, ha f véges intervallumon értelmezett függvény, akkor az ő Fourier-sora nem más, mint f felbontása megszámlálható sok frekvenciájú függvény összegére. Ha f nem véges intervallumon van értelmezve, akkor f -et kontinuumnyi frekvenciájú komponensre bontjuk. Ezt szemlélteti az alábbi példa is.

7.2.1. Példa. Határozzuk meg a $[-\pi, \pi]$ intervallum karakterisztikus függvényének ($f := \chi_{[-\pi, \pi]}$) Fourier-transzformáltját.

Megoldás. A 7.1. ábrán szemléltetjük az $f = \chi_{[-\pi, \pi]}$ függvény grafikonját.

7.1. ábra - A $\chi_{[-\pi, \pi]}$ függvény grafikonja



A Fourier-transzformált definíciója alapján

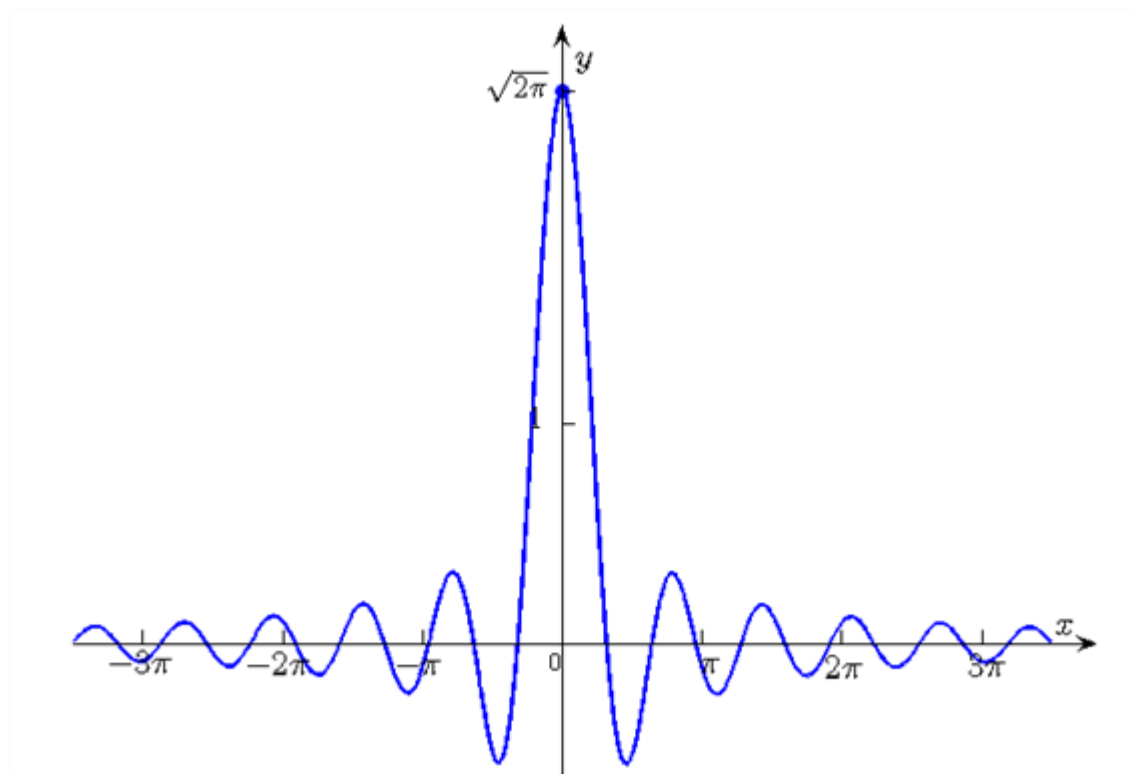
$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-itx}}{-ix} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ix\pi} - e^{-ix\pi}}{ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \pi x}{x},$$

ha $x \neq 0$, és

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \sqrt{2\pi}.$$

Az f függvény $\hat{f}$ Fourier-transzformáltjának grafikonját láthatjuk a 7.2. ábrán. Mivel f szakaszonként konstans függvény, és a konstans függvény nulla frekvenciájú, ezért várható volt, hogy $\hat{f}$ legnagyobb értékét $\lambda = 0$ -ban veszi fel.

7.2. ábra - Az $\hat{f}$ függvény grafikonja



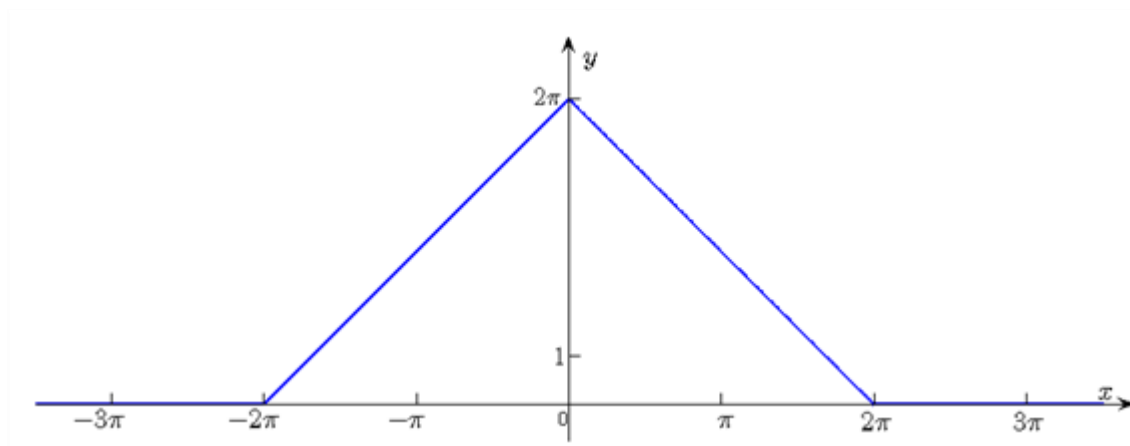
7.2.2. Példa. Határozzuk meg a

$$B(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -2\pi \text{ vagy } x \geq 2\pi, \\ x + 2\pi, & \text{ha } x \in [-2\pi, 0), \\ 2\pi - x, & \text{ha } x \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. A 7.3. ábrán szemléltetjük a B függvény grafikonját.

7.3. ábra - A B függvény grafikonja



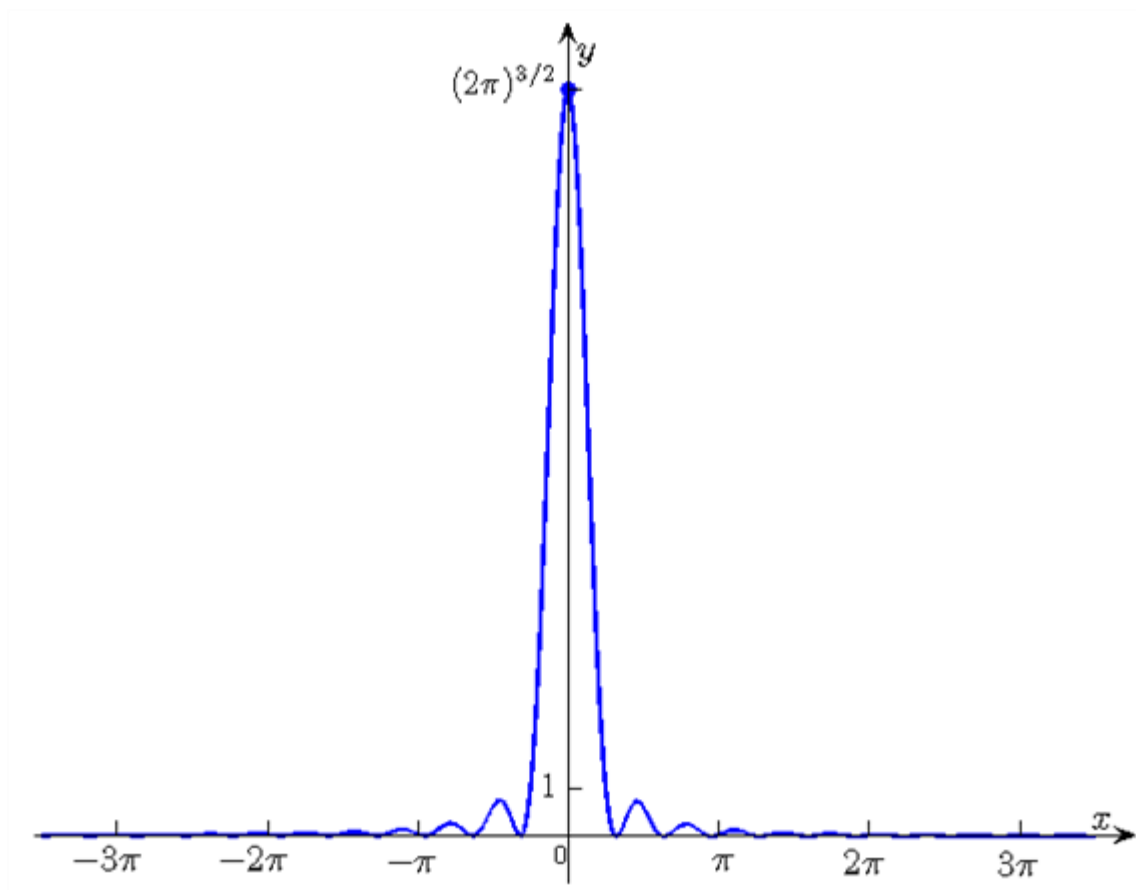
A Fourier-transzformált definíciója alapján parciális integrálással kapjuk, hogy ha $x \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}
 \hat{B}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(t) \cdot e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2x}^0 (2\pi+t) e^{-ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2x} (2\pi-t) e^{-ixt} dt = \\
 &\quad \begin{array}{cc} u(t)=2x+t & v(t)=e^{-ixt} \\ u'(t)=1 & v(t)=\frac{e^{-ixt}}{-ix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} u(t)=2x-t & v(t)=e^{-ixt} \\ u'(t)=-1 & v(t)=\frac{e^{-ixt}}{-ix} \end{array} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{(2\pi+t)e^{-ixt}}{-ix} \right]_{-2x}^0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ix} \int_{-2x}^0 e^{-ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{(2\pi-t)e^{-ixt}}{-ix} \right]_0^{2x} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ix} \int_0^{2x} e^{-ixt} dt = \\
 &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{ix} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}ix} \left[\frac{e^{-ixt}}{-ix} \right]_{-2x}^0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{ix} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}ix} \left[\frac{e^{-ixt}}{-ix} \right]_0^{2x} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2} (1 - e^{-2\pi ix}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2} (e^{-2\pi ix} - 1) = \sqrt{2\pi} \left(-\frac{1}{2\pi x^2} (e^{2\pi ix} - 2 + e^{-2\pi ix}) \right) = \\
 &= \sqrt{2\pi} \frac{2}{\pi x^2} \left(\frac{e^{2\pi ix} - e^{-2\pi ix}}{2i} \right) = \sqrt{2\pi} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \pi x}{x} \right)^2.
 \end{aligned}$$

továbbá $\hat{B}_1(0) = (2\pi)^{3/2}$.

A B függvény $\hat{B}$ Fourier-transzformáltjának grafikonját láthatjuk a 7.4. ábrán.

7.4. ábra - Az $\hat{B}$ függvény grafikonja



Az előző példával összevetve azt kapjuk, hogy $\hat{B} = \sqrt{2\pi} \hat{f}^2$. A két függvény kapcsolatára még később visszatérünk.

A továbbiakban többször fogjuk használni az alábbi függvény-transzformációs operátorokat:

7.2.3. Definíció. Legyen f a valós számok halmazán Lebesgue-integrálható tetszőleges függvény. Ekkor a

- τ_s *transzláció operátor*: $(\tau_s f)(t) := f(t+s)$, $(s, t \in \mathbb{R})$
- δ_s *dilatáció operátor*: $(\delta_s f)(t) := f(ts)$ $(s > 0, t \in \mathbb{R})$
- ν_s *moduláció operátor* $(\nu_s f)(t) := \varepsilon_s(t) f(t)$ $(s, t \in \mathbb{R})$, ahol $\varepsilon_s(t) = e^{ist}$

A Fourier transzformált és az előbb definiált operátorok kapcsolatát írja le a következő

7.2.4. Tétel. Minden $f \in X$ függvényre

i) $\mathcal{F}(\tau_s f) = \nu_s \mathcal{F} f$, azaz $\mathcal{F} \circ \tau_s = \nu_s \circ \mathcal{F}$ $(s \in \mathbb{R})$,

ii) $\mathcal{F}(\nu_s f) = \tau_{-s} \mathcal{F} f$, azaz $\mathcal{F} \circ \nu_s = \tau_{-s} \circ \mathcal{F}$ $(s \in \mathbb{R})$,

iii) $\mathcal{F}(\delta_s f) = \frac{1}{s} \delta_{\frac{1}{s}} \mathcal{F} f$, azaz $\mathcal{F} \circ \delta_s = \frac{1}{s} \delta_{\frac{1}{s}} \circ \mathcal{F}$ $(s \in \mathbb{R}^+)$.

Bizonyítás.

i) Helyettesítéssel integrálással kapjuk, hogy minden $x, s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\tau_s f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_s f)(t) \cdot e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s+t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ix(u-s)} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixs} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ixu} du = e^{ixs} (\mathcal{F}f)(x) = (\nu_s(\mathcal{F}f))(x).\end{aligned}$$

ii) A Fourier-transzformált definíciója alapján minden $x, s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(\nu_s f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ist} \cdot e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(x-s)t} dt = (\mathcal{F}f)(x-s) = (\tau_{-s} \mathcal{F}f)(x).$$

iii) Helyettesítéssel integrálással kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és minden $s > 0$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\delta_s f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_s f)(t) \cdot e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(st) e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ix \frac{u}{s}} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i \frac{x}{s} u} du = \frac{1}{s} \left(\left(\delta_{\frac{1}{s}} \mathcal{F} \right) f \right)(x).\end{aligned}$$

□

7.2.5. Definíció. Legyen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-integrálható függvények. A két függvény konvolúcióján értjük a

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (7.2.2)$$

függvényt.

Alkalmazva Fubini-tételét² kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) g(x-y)| dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) g(x-y)| dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)| dx dy = \|f\| \cdot \|g\|,\end{aligned}$$

tehát $f * g$ is Lebesgue-integrálható, és érvényes az

$$\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (f, g \in L) \quad (7.2.3)$$

becslés.

A Fourier-transzformáció és a konvolúció szoros kapcsolatban van egymással:

7.2.6. Tétel. Ha $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-integrálható függvények, akkor

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f \mathcal{F}g.$$

Bizonyítás. A helyettesítéssel integrálást, Fubini-tételét alkalmazva kapjuk, hogy minden $z \in \mathbb{R}$ esetén

²Fubini-tétele megtalálható a Függelékben (10.6 fejezet).

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}(f * g))(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-izx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-izx} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) e^{-izx} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) e^{-i(x-y)z} e^{-iyz} dx dy = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iyz} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) e^{-i(x-y)z} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iyz} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-izx} dx dy = \\
 &= \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}f)(z) (\mathcal{F}g)(z).
 \end{aligned}$$

□

Megjegyezzük, hogy a tételben bizonyított kapcsolatot szemléltetik 7.2.1. és 7.2.2. példák, hiszen a $[-\pi, \pi]$ intervallum karakterisztikus függvényének önmagával vett konvolúciója éppen a $\mathcal{B}$ függvény.

3. Inverziós formula

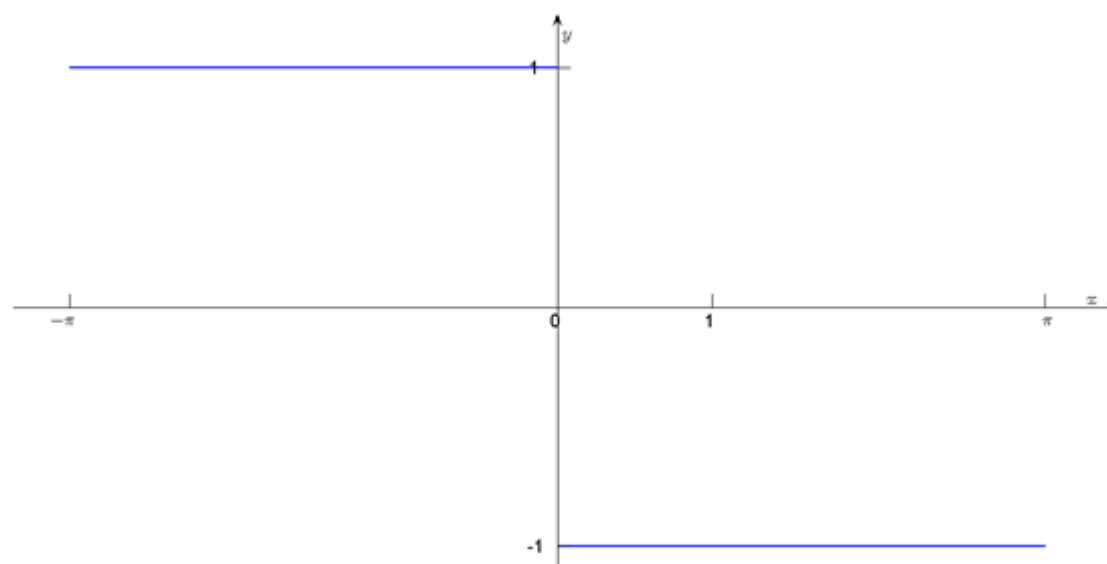
Ebben a pontban avval a problémával foglalkozunk, hogy hogyan lehet az integrálható függvényeket Fourier-transzformáltjukból visszaállítani. Ez a harmonikus analízis egyik legfontosabb, sokat vizsgált része, melynek mi csak egy igen speciális esetével foglalkozunk. Nevezetesen olyan integrálható függvényekből indulunk ki, melyek Fourier-transzformáltja is integrálható, azaz $f, \hat{f} \in L_{\mathbb{R}}$ is teljesül.

Az f függvény integrálhatóságából nem feltétlenül következik $\hat{f}$ integrálhatósága. Erre mutat rá a következő

7.3.1. Példa. Határozzuk meg az $f := \chi_{[-\pi, 0]} - \chi_{[0, \pi]}$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. A 7.5. ábrán szemléltetjük az f függvény grafikonját.

7.5. ábra - Az f függvény grafikonja



A Fourier-transzformált definíciója alapján

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 e^{-ixt} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} e^{-ixt} dt =$$

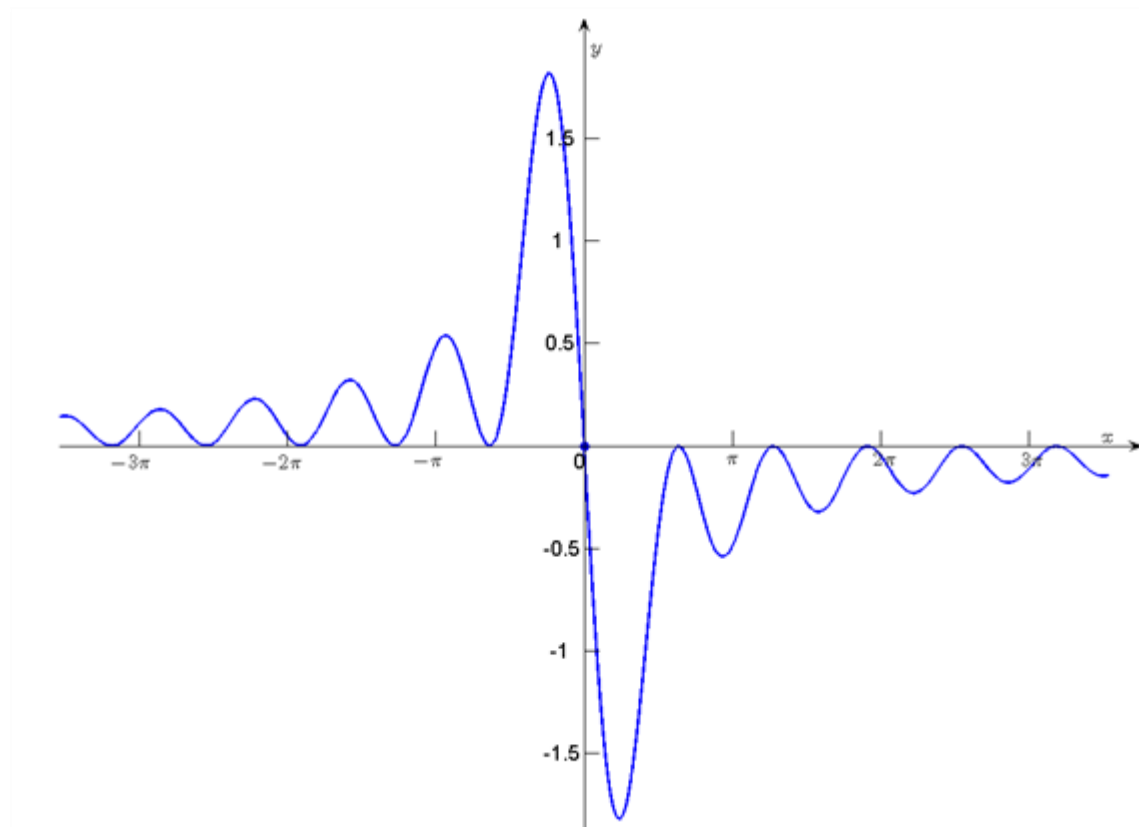
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ix}}{-ix} \right]_{-x}^0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ix}}{-ix} \right]_0^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ix} + e^{-ix} - 2}{ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \pi x - 1}{x},$$

ha $x \neq 0$, és

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^0 1 dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x 1 dt = 0.$$

Az f függvény $\hat{f}$ Fourier-transzformáltjának grafikonját láthatjuk 7.6. ábrán. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\hat{f}$ nem integrálható $\mathbb{R}$ -en.

7.6. ábra - Az $\hat{f}$ függvény grafikonja



Az alábbi inverziós tétel bizonyítása megtalálható [7]-ben.

7.3.1. Tétel (Inverziós tétel). Ha $f, \hat{f}$ is a valós számok halmazán integrálható függvények ($f, \hat{f} \in L_1$), akkor majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

Megjegyezzük, hogy a tétel analógját trigonometrikus sorok esetén már bebizonyítottuk (5.1.2. tétel). Nevezetesen, ha a 2π szerint periodikus, integrálható f függvény trigonometrikus Fourier-együtthatói abszolút értékeiből képzett numerikus sor konvergens, azaz ℓ^1 -beli, akkor a Fourier-sor összege az f függvény.

8. fejezet - Diszkrét Fourier-analízis

A Fourier-transzformált és a Fourier-sorok hasznosak a folytonos függvények elemzésénél, sok alkalmazás esetén azonban a vizsgálandó jelek diszkrét adathalmazok. A diszkrét Fourier-transzformált segítségével diszkrét jeleket vizsgálhatunk.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: diszkrét skaláris szorzat, diszkrét komplex trigonometrikus rendszer, diszkrét Fourier-transzformált, konvolúció.

Szükséges előismeret: 7. fejezet, komplex függvénytan alapjai, numerikus integrálás, mátrix- és vektor-műveletek. Nem nélkülözhetetlen a témakör megértéséhez, de előnyt jelent a MatLab-programcsomag ismerete.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 2 tanóra + 2 óra önálló munka.

1. Diszkrét Fourier-transzformált

Tekintsük az $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvényt, és osszuk fel a $[0, 2\pi]$ intervallumot n ($n \in \mathbb{N}^*$) egyenlő részre. Ekkor két egymást követő osztópont közti távolság $\frac{2\pi}{n}$, az osztópontok halmaza pedig

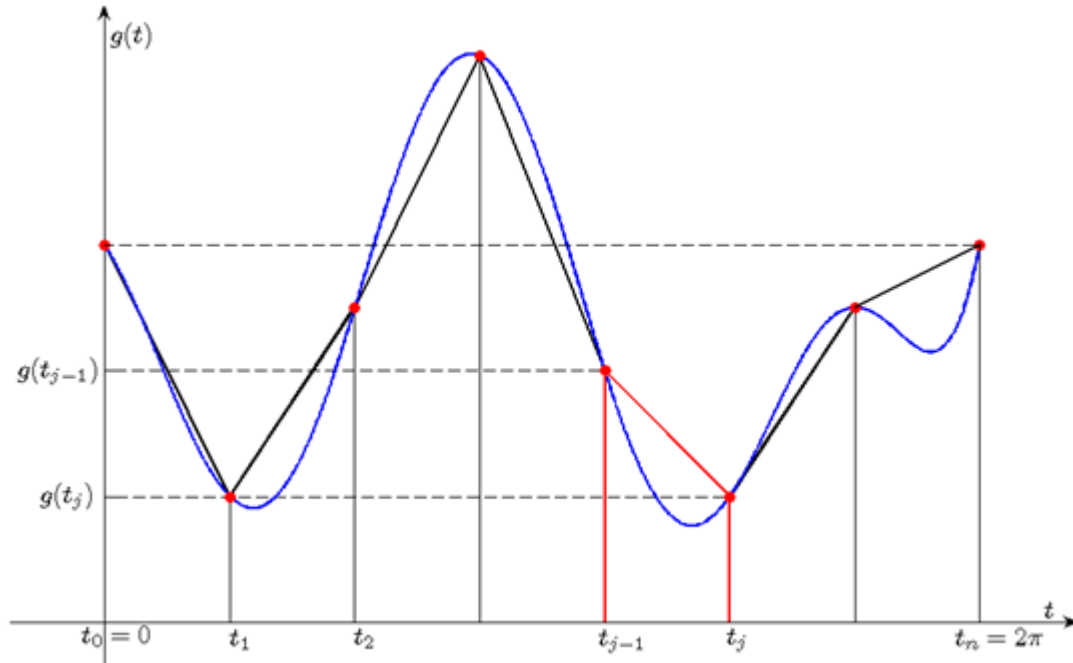
$$\tau = \left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{2\pi}{n}, \dots, t_j = \frac{2\pi j}{n}, \dots, t_n = 2\pi \right\}.$$

A g függvény folytonossága miatt a $[0, 2\pi]$ intervallumon vett integrálját tudjuk az

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt \approx \sum_{j=1}^n \frac{g(t_j) + g(t_{j-1})}{2} \cdot (t_j - t_{j-1}) = \frac{2\pi}{n} \left(\frac{g(t_0)}{2} + g(t_1) + \dots + g(t_{n-1}) + \frac{g(t_n)}{2} \right) \quad (8.1.1)$$

összeggel közelíteni, melyet *trapéz-formulának* nevezünk. Az elnevezés oka, hogy ha g nemnegatív valós értékű függvény, akkor az integrál geometria jelentése alapján $\int_0^{2\pi} g(t) dt$ a görbe alatti síkrész területével egyenlő, a 8.1. ábrán feltüntetett trapézok területének összege pedig éppen a (3.1.7. Tétel/iii)) formulát adja.

8.1. ábra - A trapéz-formula során használt trapézok



Ha a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény 2π -szerint periodikus, akkor $g(0) = g(2\pi)$ és a (3.1.7. Tétel/iii)) összefüggés a következő, egyszerűbb alakban írható:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j). \quad (8.1.2)$$

Legyen f 2π szerint periodikus, valós értékű folytonos függvény. Alkalmazzuk a (8.2) trapéz-formulát $\int$ (4.1.13) komplex Fourier-együtthatóinak közelítésére, továbbá használjuk ki, hogy az integrálást az integrandus periodicitása miatt bármely 2π hosszúságú intervallumon végezhetjük:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{-i \frac{2\pi j k}{n}} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (8.1.3)$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $y_j := f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, és $\omega := e^{i \frac{2\pi}{n}}$. Ekkor

$$c_k \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \omega^{-jk} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (8.1.4)$$

Ha ismerjük f helyettesítési értékét a $t_j = \frac{2\pi j}{n}$ ($j \in \{0, \dots, n-1\}$) pontokban, akkor a (8.1.3) összefüggés alapján ki tudjuk számítani a k -adik Fourier-együttható közelítő értékét. A következőkben a (8.1.4) összefüggés jobb oldalán szereplő összeg segítségével fogjuk értelmezni egy periodikus jel diszkrét Fourier-együtthatóit.

Vegyük észre, hogy ha a (8.1.4) jobb oldalán k helyett $k+n$ -et írunk, akkor az összeg értéke változatlan marad.

$$\omega^{-n} = \left(e^{i \frac{2\pi}{n}} \right)^{-n} = e^{-2\pi i} = 1$$

Valóban, felhasználva az összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \omega^{-j(k+n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \omega^{-jk} \omega^{-jn} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \omega^{-jk} \cdot \frac{\omega^{-n}}{=1} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \omega^{-jk}.$$

Ebből következik, hogy az

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot \bar{\omega}^{jk}$$

összeg nem approximálja c_k -t, ha $k \geq n$, mivel $(c_k, k \in \mathbb{Z})$ n -szerint nem periodikus sorozat. Valójában ez a kifejezés csak akkor közelíti jól c_k -t valamely k -ra, ha k elég kicsi n -hez képest, mert a trapéz-formula akkor biztosít pontos közelítést, ha a lépésköz $2\pi/n$ elég kicsi a k frekvenciához képest.

1.1. A diszkrét komplex trigonometrikus rendszer

A $z^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) egyenlet megoldásait n -edrendű egységgyököknek nevezzük. (Számuk éppen n .) Az n -edrendű egységgyökök trigonometrikus alakja:

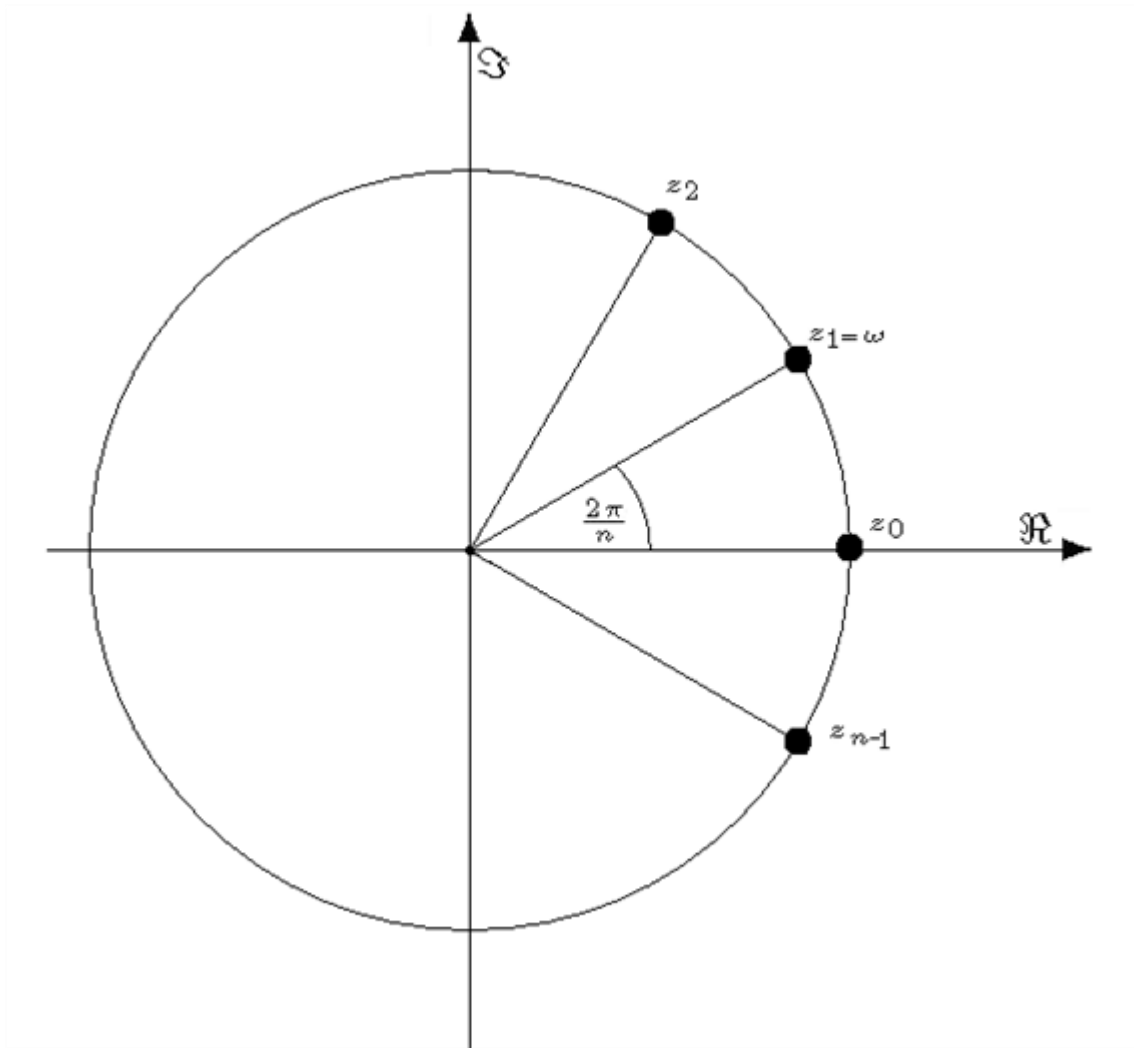
$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\}).$$

A Moivre-képlet alapján a gyökök kifejezhetők az $\omega = z_1 = e^{i \frac{2\pi}{n}}$ hatványainak segítségével. Így

$$\omega^k = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\}).$$

Az egységgyökök képei a komplex-számsíkon az egységkörbe írt n -oldalú szabályos sokszög csúcsai lesznek.

8.2. ábra - n -edik egységgyökök



Az egységgyököket úgy is felfoghatjuk, mint az

$$\varepsilon(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (t \in [0, 2\pi])$$

függvény

$$M_n := \left\{ 0, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2k\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n} \right\}$$

halmaz pontjaiban felvett helyettesítési értékeit.

Képzeld el, hogy a jelet nem az egész $[0, 2\pi]$ intervallumon ismerjük, hanem csak az M_n halmaz pontjaiban tudjuk mérni. Az ilyen jeleket *diszkrét jelek*nek nevezzük. Ezek rekonstruálására használjuk a diszkrét trigonometrikus rendszert.

Az $M_n \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) függvények nyilván lineáris teret alkotnak a szokásos függvény-összeadással és konstanssal való szorzással. A téren értelmezhető skaláris szorzat is:

8.1.1. Definíció. Az M_n halmazon értelmezett függvények skaláris szorzatát a következőképpen értelmezzük: Legyen $f, g: M_n \rightarrow \mathbb{K}$, ekkor

$$\langle f, g \rangle_{M_n} := \frac{1}{n} \sum_{t \in M_n} f(t) \overline{g(t)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \overline{g\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}. \quad (8.1.5)$$

A $\mathbb{K}^n$ téren hasonlóan értelmezett skaláris szorzat alapján (8.1.5) valóban rendelkezik a skaláris szorzatnál megkívánt tulajdonságokkal. Keresünk a téren egy teljes ortonormált rendszert.

8.1.2. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ rögzített szám és M_n az előbb definiált halmaz. Ekkor az

$$\{\varepsilon_n^\ell(t) = e^{i\ell t}, \ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}, t \in M_n\} \quad (8.1.6)$$

rendszert *diszkrét komplex trigonometrikus rendszernek* nevezzük.

8.1.3. Tétel. A diszkrét komplex trigonometrikus rendszer ortonormált a (8.5) formulával definiált skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle \varepsilon_n^\ell, \varepsilon_n^j \rangle_{M_n} = \delta_{\ell j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ell = j, \\ 0, & \text{ha } \ell \neq j \end{cases} \quad (\ell, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}). \quad (8.1.7)$$

Bizonyítás. A bizonyítás során felhasználjuk az n . egységgyökök tulajdonságait:

$$\langle \varepsilon_n^\ell, \varepsilon_n^j \rangle_{M_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\ell\pi}{n}} \cdot e^{-i\frac{2kj\pi}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k\ell} \cdot \bar{\omega}^{jk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{\ell-j})^k.$$

Ekkor ℓ és j értékei alapján a következő két lehetőség fordulhat elő.

• Ha $\ell = j$, akkor

$$\langle \varepsilon_n^\ell, \varepsilon_n^\ell \rangle_{M_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = 1.$$

• Ha $\ell \neq j$, akkor felhasználva a mértani sorozat első n elemének összegképletét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\langle \varepsilon_n^\ell, \varepsilon_n^j \rangle_{M_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(\omega^{\ell-j})^n - 1}{\omega^{\ell-j} - 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(\omega^n)^{\ell-j} - 1}{\omega^{\ell-j} - 1} = 0,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\omega^n = 1$.

□

Mivel a tér n dimenziós, és a diszkrét trigonometrikus rendszer n elemből áll, ezért a teljesség triviálisan teljesül.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a rögzített n esetén a diszkrét trigonometrikus rendszer úgynevezett n -periodikus jelek közelítésére alkalmas.

1.2. Diszkrét Fourier-transzformált értelmezése

Jelöljük S_n -nel az n -periodikus komplex sorozatok (jelek) halmazát:

$$S_n := \{y = (y_j, j \in \mathbb{Z}) : y_{j+n} = y_j, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Két S_n -beli elem összegét és skalárszorosát a következőképpen értelmezzük. Legyen $x, y \in S_n$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$x + y := (x_j + y_j, j \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad \lambda x := (\lambda x_j, j \in \mathbb{Z})$$

szintén S_n -beli sorozatok. Belátható, hogy S_n az így értelmezett műveletekkel lineáris teret alkot.

8.1.4. Definíció. Az $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}_n$ sorozat diszkrét Fourier-transzformáltja az az $\mathcal{F}_n(\mathcal{Y}) = \hat{\mathcal{Y}}$ sorozat lesz, amelynek k -adik indexű elemét a következőképpen számítjuk ki:

$$\hat{\mathcal{Y}}_k := \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{Y}_j \cdot \overline{\omega}^{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{Y}_j \cdot e^{-i \frac{2\pi jk}{n}} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (8.1.8)$$

A diszkrét Fourier-transzformált képlete a folytonos függvények k -adik Fourier-együtthatóinak analogonja. Az integrálás helyett itt összeadás szerepel. Ha f egy folytonos jel, és $\mathcal{Y}_j = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$ ($j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) méréssel kapott értékek, akkor

$$\hat{\mathcal{Y}}_k := \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \cdot e^{-i \frac{2\pi jk}{n}} = \sum_{t \in M_n} f(t) \cdot \overline{\varepsilon_n^k(t)} = n \langle f, \varepsilon_n^k \rangle_{M_n}, \quad (8.1.9)$$

és (8.1.4) alapján a k -adik Fourier együttható a k -adik diszkrét együtthatóval a következőképpen approximálható:

$$c_k \approx \frac{1}{n} \hat{\mathcal{Y}}_k,$$

ha k elég kicsi n -hez képest. Belátjuk, hogy a diszkrét Fourier-transzformált nem vezet ki az $\mathcal{S}_n$ halmazból:

8.1.5. Tétel. Ha $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}_n$, akkor $\mathcal{F}_n(\mathcal{Y}) \in \mathcal{S}_n$.

Bizonyítás. Írjuk fel az $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}_n$ sorozat diszkrét Fourier-transzformáltját:

$$\hat{\mathcal{Y}}_{k+n} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{Y}_j \cdot \overline{\omega}^{j(k+n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{Y}_j \cdot \overline{\omega}^{jk} \cdot \overline{\omega}^{jn} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{Y}_j \cdot \overline{\omega}^{jk} = \hat{\mathcal{Y}}_k,$$

tehát $\mathcal{F}_n(\mathcal{Y}) \in \mathcal{S}_n$ valóban teljesül.

□

A periodicitás miatt $\mathcal{S}_n$ -et azonosíthatjuk az n dimenziós vektorok halmazával, nevezetesen minden $\mathcal{Y} \in \mathcal{S}_n$ esetén az $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{n-1})$ vektort tekintjük az $\mathcal{Y}$ sorozat helyett. Ez alapján a diszkrét Fourier-transzformáltat mátrix-szorzás segítségével is fel lehet írni. Vezessük be következő jelöléseket:

$$(\mathcal{Y}) = (\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{n-1})^T; \quad (\hat{\mathcal{Y}}) = (\hat{\mathcal{Y}}_0, \hat{\mathcal{Y}}_1, \dots, \hat{\mathcal{Y}}_{n-1})^T,$$

legyen továbbá

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

A könnyebb írásmód kedvéért jelölje $(F_n)_k$ a fenti mátrix k -adik oszlopát és mivel F_n szimmetrikus mátrix jogos a következő jelölés is, mely szerint $(F_n)_j^T$ jelölje az F_n mátrix j -edik sorát.

Ekkor

$$\mathcal{F}_n(y) = \hat{y} = \overline{F}_n \cdot (y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (8.1.10)$$

Valóban, hiszen a mátrix-szorzás definíciója alapján az $(\hat{y})$ vektor k -adik koordinátája a következőképpen számolható:

$$(\hat{y})_k = \langle \overline{F}_n^T, (y) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot \overline{\omega}^{jk} = \hat{y}_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

ami a definícióval megegyezik.

1.3. A diszkrét Fourier-transzformált tulajdonságai

Az alábbiakban belátjuk a diszkrét Fourier-transzformált legfontosabb tulajdonságait.

8.1.6. Tétel. $\mathcal{F}_n : S_n \rightarrow S_n$ lineáris operátor, azaz

a) $\mathcal{F}_n(x + y) = \mathcal{F}_n(x) + \mathcal{F}_n(y) \quad (x, y \in S_n)$

b) $\mathcal{F}_n(\lambda x) = \lambda \mathcal{F}_n(x) \quad (x \in S_n, \lambda \in \mathbb{K})$.

Bizonyítás. A (8.1.10) előállítás alapján,

a) $\mathcal{F}_n(x + y) = \overline{F}_n \cdot (x + y) = \overline{F}_n \cdot (x) + \overline{F}_n \cdot (y) = \mathcal{F}_n(x) + \mathcal{F}_n(y)$,

b) $\mathcal{F}_n(\lambda x) = \overline{F}_n \cdot (\lambda x) = \lambda \overline{F}_n \cdot (x) = \lambda \mathcal{F}_n(x)$.

Mindkét állítás igazolásának kulcsa az volt, hogy a mátrix-szorzás lineáris operáció.

□

8.1.7. Definíció. Az $y, z \in S_n$ komplex, n -periodikus sorozatok konvolúcióján azt az $y^*z \in S_n$ szintén komplex, n -periodikus sorozatot értjük, melynek elemeire

$$[y^*z]_k := \sum_{j=0}^{n-1} y_j z_{k-j} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

8.1.8. Tétel. Legyen $y, z \in S_n$ komplex, n -periodikus sorozat. Ekkor igazak a következő tulajdonságok.

a) Ha z az y egy eltoltja, azaz $z_k = y_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z})$, akkor $[\mathcal{F}(z)]_j = \omega^j [\mathcal{F}(y)]_j$, ahol $\omega = e^{2\pi i/n}$.

b) Tetszőleges $y, z \in S_n$ komplex, n -periodikus sorozatok esetén az y^*z konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak koordinátánkénti szorzata, azaz

$$[\mathcal{F}(y^*z)]_k = [\mathcal{F}(y)]_k \cdot [\mathcal{F}(z)]_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

c) Ha $y \in S_n$ sorozat minden eleme valós, akkor

$$[\mathcal{F}(y)]_k = \overline{[\mathcal{F}(y)]_{n-k}} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Bizonyítás.

a) Legyen D egy diagonális mátrix, melynek főátlójában rendre az $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ elemek állnak, azaz $D = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$. Ekkor

$$D \cdot F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} & 1 \\ \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} & 1 \end{pmatrix},$$

és így

$$\overline{D \cdot F_n} \cdot (z) = \overline{F_n} \cdot (y) = \mathcal{F}(y),$$

továbbá minden $x \in \mathcal{S}_n$ esetén

$$\left[\overline{D \cdot F_n} \cdot (x) \right]_j = \left[\overline{D \cdot (F_n \cdot (x))} \right]_j = \omega^{-j} \left[\overline{F_n \cdot (x)} \right]_j = \omega^{-j} [\mathcal{F}(x)]_j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

így

$$\overline{D \cdot F_n} \cdot (z) = \omega^{-j} \mathcal{F}(z),$$

ahonnan az állítás következik.

b) Vizsgáljuk az igazolandó egyenlőség bal oldalát. Az szorzat vektor k -adik koordinátája az F_n mátrix k -adik sorának az $(y^* z)$ vektorral vett skaláris szorzataként számolható, azaz minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(y^* z)]_k &= \left(\overline{F_n} \right)_k^T \cdot (y^* z) = \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{-lk} \cdot [y^* z]_l = \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{-lk} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} y_j z_{l-j} = \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-lk} \cdot y_j z_{l-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{-lk} \cdot y_j z_{l-j}. \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

A jobb oldalon szereplő kifejezést kifejtve minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(y)]_k \cdot [\mathcal{F}(z)]_k &= [F_n(y)]_k \cdot [F_n(z)]_k = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} \cdot y_j \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{lk} \cdot z_l \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\omega^{jk} \cdot y_j \cdot \omega^{lk} \cdot z_l \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(j+l)k} \cdot y_j z_l = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=j}^{n-1} \omega^{(j+l)k} \cdot y_j z_{l-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(j+l)k} \cdot y_j z_{l-j}. \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

A (8.1.12) számolás utolsó lépésében azt használtuk fel, hogy az összegben szereplő kifejezések n -periodikusak, azaz bármely n -darab egymástáni tag összege megegyezik.

A (8.1.11) és (8.1.12) egyenletek összevetéséből az állítás következik.

c) A $k=0$ esetben az állítás nyilvánvalóan igaz, hiszen a periodicitás miatt a Fourier-transzformált 0 . és n -edik koordinátája megegyezik és mivel ezen koordináták valóságok, ezért az igazolandó összefüggés fennáll. Így elegendő megmutatnunk, hogy az F_n mátrix soraira

$$(F_n)_k^T = (\overline{F_n})_{n-k}^T \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

Legyen $\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ekkor a k -adik sor ℓ -edik eleme

$$(F_n)_{k\ell} = \omega^{k\ell}$$

az $n-k$ -adik sor ℓ -edik elemének komplex konjugáltja pedig

$$(\overline{F_n})_{(n-k)\ell} = \overline{\omega^{(n-k)\ell}} = \overline{\omega^{n\ell-k\ell}} = \omega^{k\ell}.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

□

8.1.9. Megjegyzés. A számolás során 8.1.8. Tétel c) pontjának felhasználásával a műveletigény jelentősen lecsökkenthető, hiszen a diszkrét Fourier-transzformált együttthatói közül elegendő az

$$\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

koordinátákat kiszámolni (itt $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ az $n/2$ szám egész részét jelöli), a vektor többi eleme komplex konjugálással származtatható. A transzformációs mátrix szimmetria-tulajdonságainak kihasználásán alapul az ún. gyors Fourier-transzformáció algoritmus (FFT), mellyel a transzformáció $\mathcal{O}(n^2)$ -es műveletigényét $\mathcal{O}(n \log n)$ -re lehet csökkenteni. Az FFT algoritmus leírása megtalálható [2] könyvben.

A diszkrét Fourier-transzformált esetén is érdekes, hogy a Fourier-szintézis milyen feltételekkel és hogyan alkalmazható. Erre vonatkozik a következő tétel.

8.1.10. Tétel. Tegyük fel, hogy $y \in S_n$. Legyen $\mathcal{F}_n(y) = \hat{y}$ az y diszkrét Fourier-transzformáltja, azaz

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot \omega^{jk} \Leftrightarrow (\hat{y}) = \overline{F_n} \cdot (y).$$

Ekkor $y = \mathcal{F}_n^{-1}(\hat{y})$ a következőképpen adható meg:

$$y_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k \cdot \omega^{jk} \Leftrightarrow (y) = \frac{1}{n} F_n \cdot (\hat{y}).$$

Bizonyítás. Elegendő megmutatnunk, hogy $\frac{1}{n} \cdot F_n \cdot \overline{F_n} = I_n$, ahol I_n az $\mathbb{R}^{n \times n}$ -beli egységmátrix, hiszen ekkor

$$\frac{1}{n} \cdot F_n \cdot (\hat{y}) = \frac{1}{n} \cdot F_n \cdot \overline{F_n} \cdot (y) = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot F_n \cdot \overline{F_n}}_{=I_n} \cdot (y) = (y).$$

A kérdéses mátrix-szorzatot kifejtve:

$$\left(\frac{1}{n} \cdot F_n \cdot \overline{F_n} \right)_{j\ell} = \frac{1}{n} \cdot \langle (F_n)_j^T, (\overline{F_n})_\ell \rangle_{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{jk} \cdot \overline{\omega^{k\ell}} = \langle \varepsilon_n^j, \varepsilon_n^\ell \rangle_{M_n} = \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = \ell, \\ 0, & \text{ha } j \neq \ell. \end{cases}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

□

8.1.1. Példa. Osszuk a $[0, 2\pi]$ intervallumot 8 egyenlő részre, majd adjuk meg az alábbi, 2π -szerint periodikus függvények diszkrét Fourier-transzformáltját:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad \text{és} \quad f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ -1 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (x \in [0, 2\pi)).$$

Megoldás. A F mátrix előállítását elegendő egyszer elvégezni. Mivel $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, így

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

A numerikus számításokat MatLab programcsomag segítségével végeztük, az alábbi utasítással:

```
n=8;
omega=exp(i*2*pi/n)
for k=1:n
for l=1:n
F(k,l)=omega^((k-1)*(l-1));
end
end
x=linspace(0,2*pi,n);
y1=x;
y2=sin(x);
y3=ones(1,n);
for k=floor(n/2):n
y3(k)=-1;
end
Fy1=conj(F)*y1'
Fy2=conj(F)*y2'
Fy3=conj(F)*y3'
```

Ügyelni kell arra, hogy a mátrixok és vektorok indexezését a MatLab mindig 1-től indítja, így a programkódban szereplő index mindig eggyel nagyobb, mint a valóságos index. Így a Fourier-transzformáltakra a következő eredményt kaptuk:

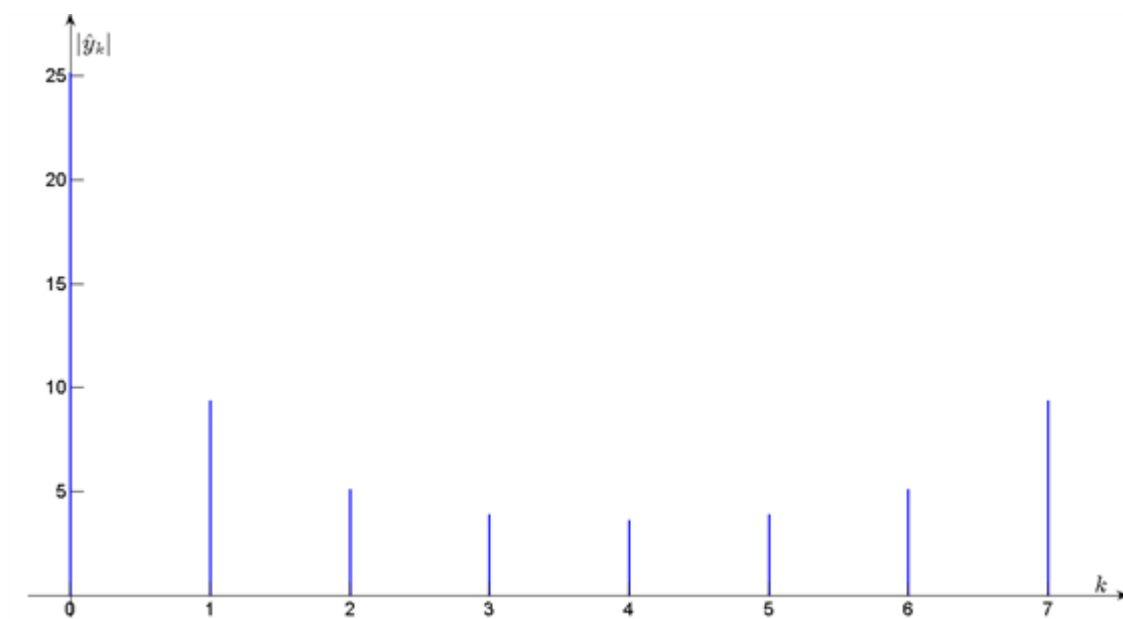
$$\hat{f}_1 = [25.13, -3.59 + 8.67i, -3.59 + 3.59i, -3.59 + 1.49i, -3.59, -3.59 - 1.49i, -3.59 - 3.59i, -3.59 - 8.67i]^T,$$

$$\hat{f}_2 = [0, 1.37 - 3.31i, -0.63 + 0.63i, -0.5 + 0.21i, -0.48, -0.5 - 0.21i, -0.63 - 0.63i, 1.37 + 3.31i]^T$$

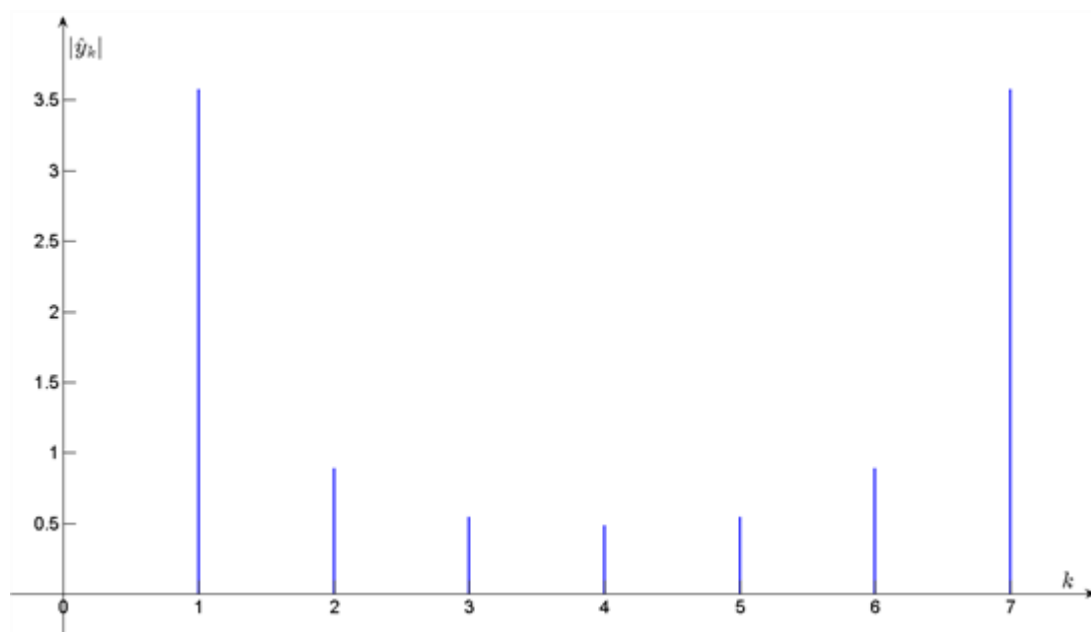
$$\hat{f}_3 = [-2, 3.41 - 3.41i, -2i, 0.59 + 0.59i, 2, 0.59 - 0.59i, 2i, 3.41 + 3.41i]^T.$$

a 8.3. ábrákon szemléltetjük a feladatban szereplő három függvény diszkrét Fourier-együtthatóinak abszolút értékét. Jól látható az ábrákon a 8.1.8. Tétel c) pontjából következő szimmetria-tulajdonság.

8.3. ábra - A feladatban szereplő függvények diszkrét Fourier-együtthatóinak abszolút értéke

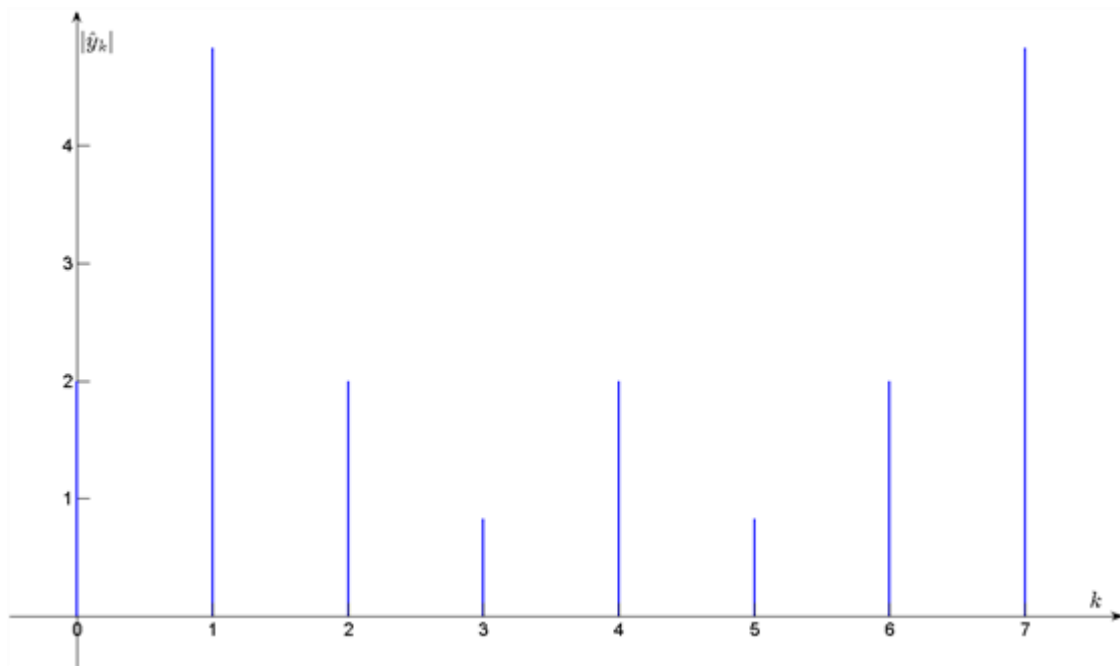


$|\hat{f}_1|$



$|\hat{f}_2|$

[



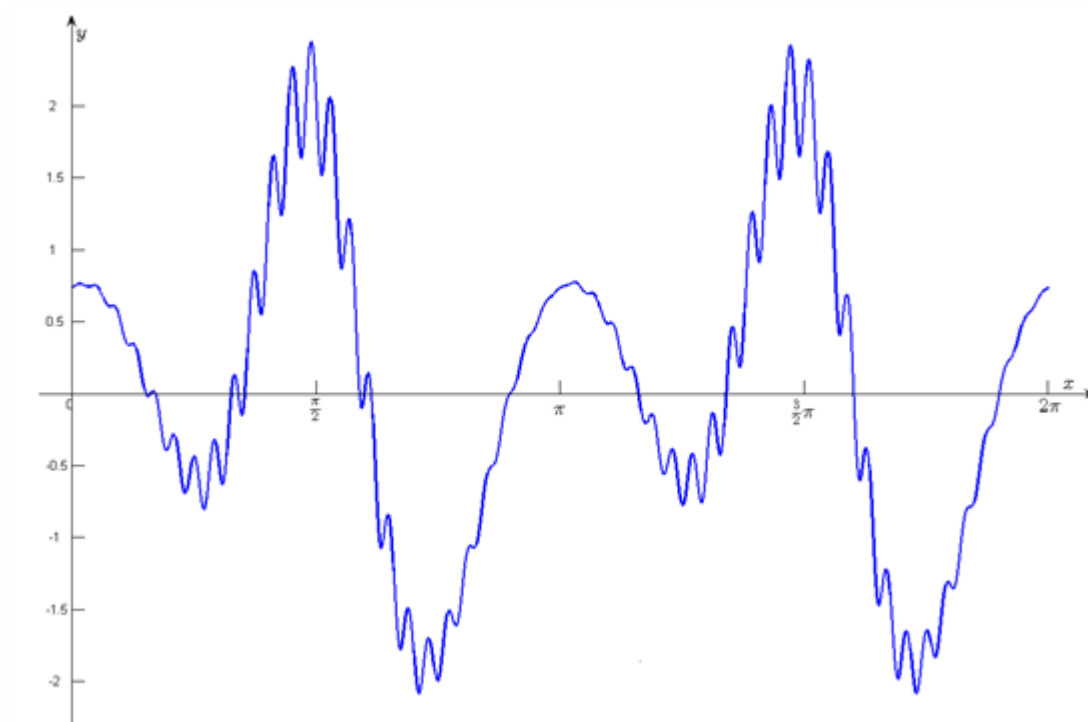
$[|\hat{f}_3|]$

8.1.2. Példa. Tekintsük az

$$f(t) = e^{-\cos^2 t} (\sin 2t + 2 \cos 4t + 0,4 \sin t \sin 50t) \quad (t \in [0, 2\pi))$$

utasítással adott, a 8.4. ábrán látható függvényt. Szeretnénk úgy szűrni, hogy a jelet megszabadítsuk a magasfrekvenciás zajtól. Alkalmazzunk ehhez megfelelő paraméterű diszkrét-Fourier-transzformáltat.

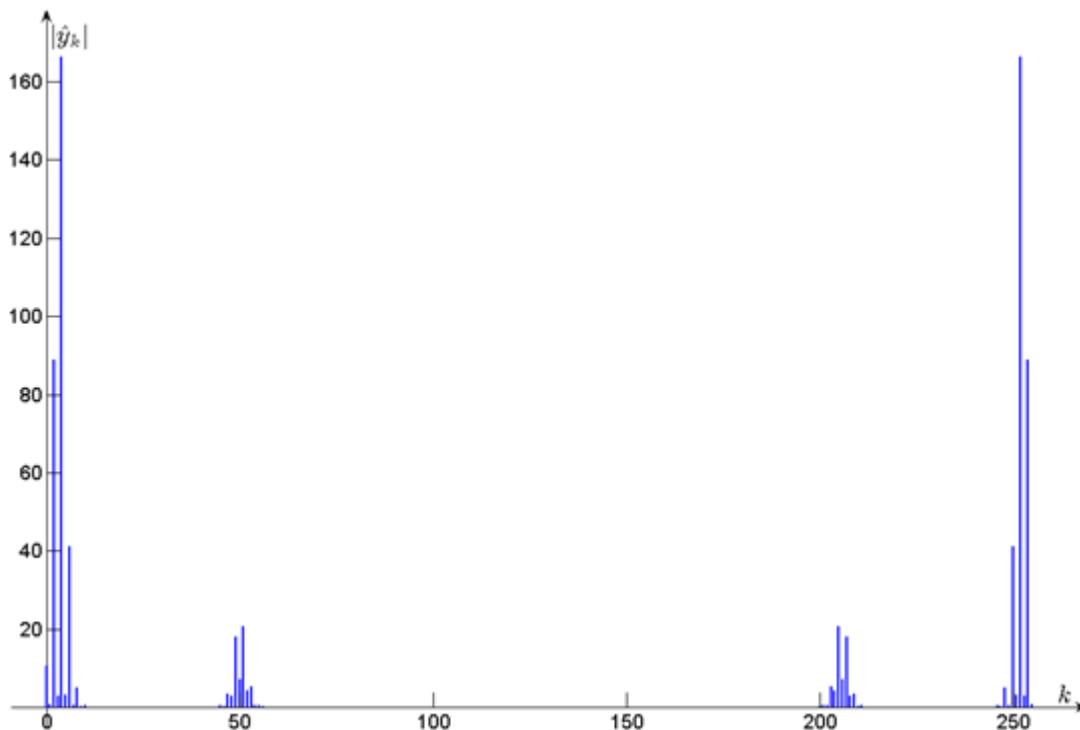
8.4. ábra - Az f függvény grafikonja



Megoldás. A jel diszkrétizálás $[0, 2\pi)^{0, 2\pi)}$ intervallum $n = 256$ részre osztásával végezzük. Mivel a zaj frekvenciája olyan $n_k = 0, 1, \dots, 5$ intervallum 5-nél több teljes periódust tartalmaz, ezért az első 6 diszkrét Fourier-együtthatót () nem befolyásolja a zaj, a jel értékes információinak viszont nagy részét tartalmazzák ezek az együtthatók. A függvény diszkrét Fourier-együtthatóinak abszolút értékét a 8.5. ábrán szemléltetjük, a grafikonról számos információ leolvasható.

- Mivel f valós értékű függvény, ezért 8.1.8. Tétel c) pontjával összhangban az együtthatók abszolút értékei szimmetrikusak.
- Az első néhány (és a szimmetria miatt az utolsó néhány) diszkrét Fourier-együttható abszolút értékben lényegesen nagyobb, mint a többi együttható ($|\hat{y}_k| \gg |\hat{y}_l|$, ha $0 \leq k \leq 5$ és $5 < l \leq 128$).
- Az 50 illetve 210 körüli csúcs, melynek maximuma 20 körüli, feltehetően a zajokból származik. Mivel jelen esetben ismerjük a függvény hozzárendelési szabályát, ez valóban összhangban van az zaj frekvenciájával.

8.5. ábra - Az f függvény diszkrét Fourier-együtthatóinak abszolút értéke



Így miután kiszámítottuk a diszkrét Fourier-együtthatókat, az 5-nél nagyobb indexűeket elhagyjuk. ($\hat{y}_k := 0$, ha $5 < k \leq 128$), a vektor többi koordinátáját 8.1.8. Tétel c) pontjának felhasználásával származtatjuk. Az így kapott együtthatókból rekonstruáljuk a függvényt. A számításokat most is a MatLab programcsomaggal végeztük.

```
n=256;
x=linspace(0,2*pi,n);
omega=exp(i*2*pi/n);
for k=1:n
    for l=1:n
        F(k,l)=omega^((k-1)*(l-1));
    end
```

```

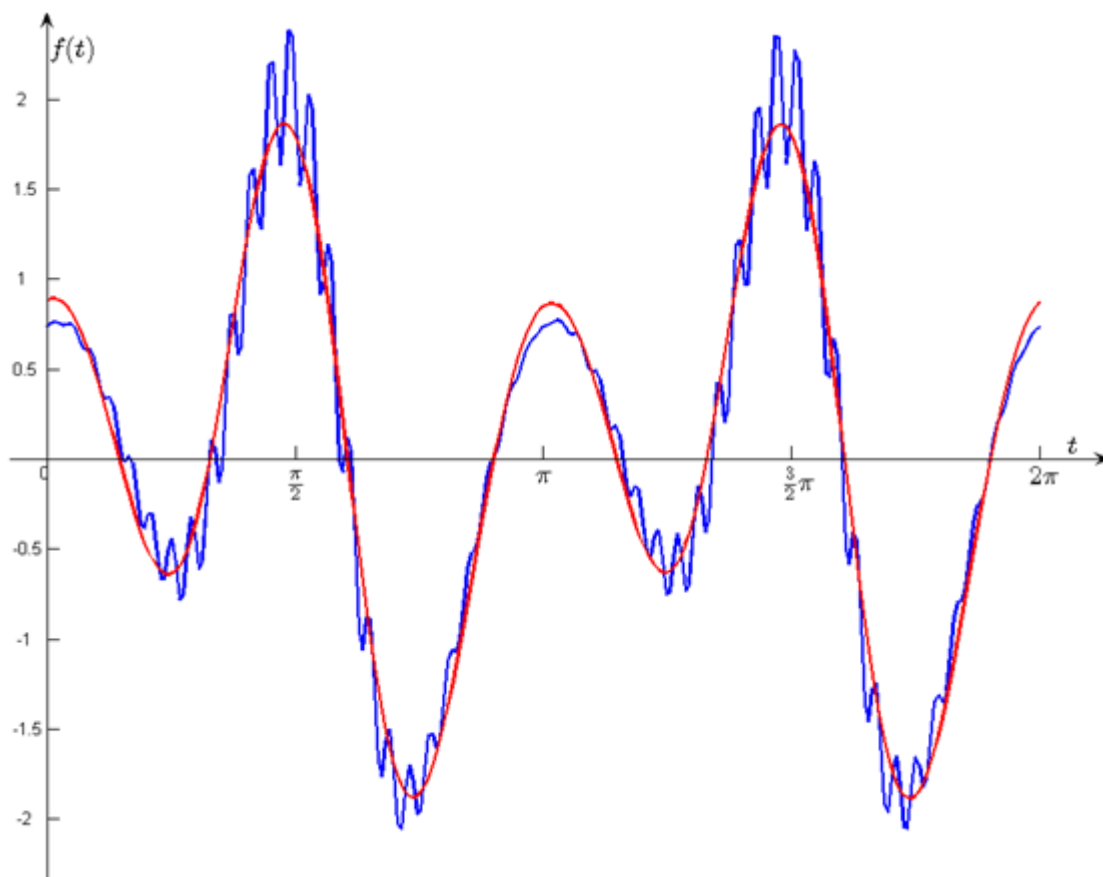
end
y=exp(-(cos(x)).^2).*(sin(2*x)+2*cos(4*x)+0.4*sin(x).*sin(50*x));
plot(x,y,'b')
hold on
Fy=conj(F)*y';
for k=7:n-6
Fy(k)=0;
end
y2=1/n*F*Fy;
y2=real(y2);
plot(x,y2,'r')

```

Bár valós függvényértékek esetén a szűrés után valós függvényértékeket kapnánk, az esetleges kerekítési hibák miatt szükséges, hogy a kapott eredmény valós részét vegyük. ($y2=\text{real}(y2)$; utasítás)

A 8.6. ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő szűrt és szűretlen jelet.

8.6. ábra - A szűrt (piros) és a szűretlen (kék) jel grafikonja



9. fejezet - Haar Wavelet analízis

Ebben a fejezetben a wavelet-konstrukció alapjaival ismerkedünk meg a legegyszerűbb waveleten, a Haar-rendszeren keresztül.

A fejezetben előkerülő új fogalmak: affín wavelet, anyawavelet, Haar skálázási függvény (apawavelet), Haar-wavelet, Haar-dekompozíció, Haar-rekonstrukció.

Szükséges előismeret: 4. fejezet. Nem nélkülözhetetlen a témakör megértéséhez, de előnyt jelent a MatLab-programcsomag ismerete.

A fejezet elsajátításához szükséges idő: 2 tanóra + 2 óra önálló munka.

1. Waveletek

Hilbert a trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-szintézis problémáival összefüggésben feltette a kérdést, hogy egyáltalán létezik-e olyan teljes ortogonális rendszer, mely szerinti Fourier-sorfejtés minden folytonos függvény esetében konvergens. Haar Alfréd 1909-ben igenlő választ adott erre a kérdésre. Az általa konstruált rendszerről csak jóval később derült ki, hogy milyen kitüntetett szerepe van az ortogonális rendszerek között, hiszen a napjainkban kiteljesedő és széles körben felhasználásra kerülő wavelet sorfejtéseknek a kiindulópontja.

A Haar-rendszert véve mintául az 1980-as évektől kezdve többen is konstruáltak a jelfeldolgozásban fontos szerepet játszó ortogonális rendszereket. Ebben a témakörben nélkülözhetetlen ötletek fűződnek Daubechies¹ és Gábor Dénes² nevéhez is.

9.1.1. Definíció. Az L^2 -tér szokásos

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

skaláris szorzatára nézve ortonormált rendszereket, melyeket egyetlen $\psi \in L^2$ alapfüggvényből, az úgynevezett anyawavelethől transzláció és dilatáció segítségével származtathatunk *affin waveletek*nek nevezzük, azaz legyen

$$\psi_k^n(x) := 2^{n/2} \psi(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z})$$

akkor

$$\langle \psi_k^n, \psi_l^m \rangle = \delta_{kl} \delta_{nm}$$

9.1.2. Megjegyzés. A legegyszerűbb affínwavelet 4.1.4. alfejezetben bemutatott Haar-rendszer. Könnyen látható az is, hogy ha az anyawavelet normált, azaz

$$\|\psi\| = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)dx = 1,$$

akkor $\|\psi_k^n\| = 1$ is teljesül minden k és n esetén.

2. A Haar skálázási függvény és tulajdonságai

Mint azt már 4.1.3.1. Megjegyzésben említettük a Haar-rendszer a

¹Ingrid Daubechies (1954-) belga matematikus és fizikus.

²Gábor Dénes (született Günszberg Dénes; 1900-1979) Nobel-díjas magyar fizikus, gépészmérnök, villamosmérnök, a holográfia feltalálója.

$$\psi(x) = h_{00}(x) = h_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

függvényből, mint anyawaveletből származtatható.

Szintén fontos szerepe van a waveletanalízisben az úgynevezett skálázási függvény, amelyet szokás apa-waveletnek is nevezni. A Haar-rendszer esetében ez a függvény az úgynevezett Haar skálázási függvény:

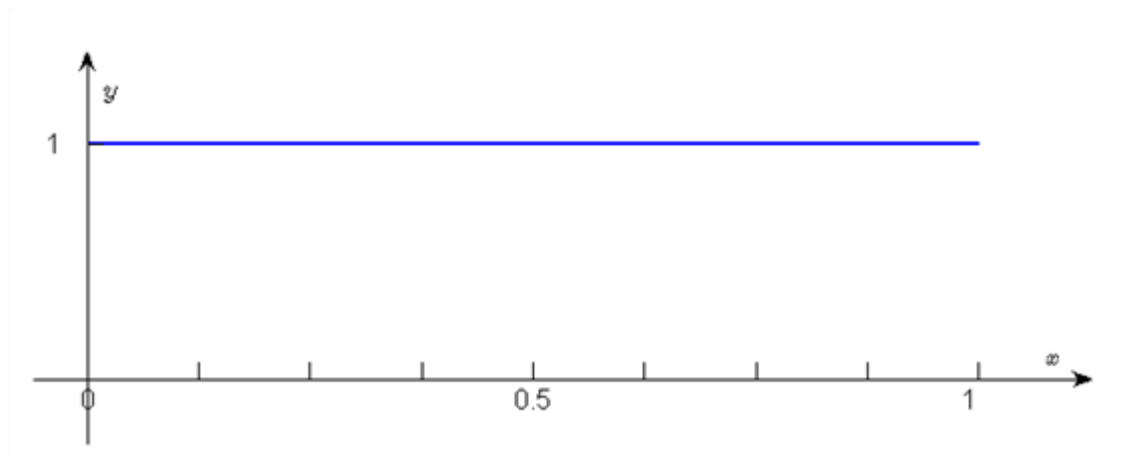
9.2.1. Definíció. A

$$\phi(x) = h_0(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

függvényt *Haar skálázási függvénynek* nevezzük.

A 9.1. ábrán szemléltettük a Haar skálázási függvény grafikonját.

9.1. ábra - A Haar skálázási függvény grafikonja



Legyen $Z \subset \mathbb{Z}$ egész számok egy véges halmaza. A

$$V_0 := \left\{ f \in L^2 : f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \phi(x - k), a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz elemei olyan kompakt, vagy véges tartójú szakaszonként konstans függvények, melyek szakadásai csak egész helyeken lehetnek.

Hasonlóan legyen

$$V_1 := \left\{ f \in L^2 : f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k), a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

A V_1 halmaz elemei a fél-egész helyeken lehetséges szakadásokkal rendelkező, véges tartójú, szakaszonként konstans függvények.

A fenti konstrukciót folytatva a következő általános definícióhoz juthatunk.

9.2.2. Definíció. Legyen $j \in \mathbb{N}$. A

$$V_j := \text{span}\{\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$$

halmazt a $\frac{k}{2^j}$ ($k \in \mathbb{Z}$) helyeken lehetséges szakadásokkal rendelkező, véges tartójú, szakaszonként konstans függvények terének nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a V_j halmazok között az alábbi tartalmazási reláció áll fent:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset \dots$$

Az is triviális, hogy a tartalmazás mindig szigorú, hiszen például $\phi(2x) \in V_1$, de $\phi(2x) \notin V_0$, ugyanis a szakadása $x = \frac{1}{2}$ -ben van. Ezt a tartalmazási relációt biztosítottuk azzal, hogy a dilatációs együtthatónak 2 hatványokat választottunk.

9.2.3. Tétel.

• Az f függvény pontosan akkor V_0 -beli, ha a $\delta_{2^j} f$ dilatáltja V_j -beli.

• Az f függvény pontosan akkor V_j -beli, ha a $\delta_{2^{-j}} f$ dilatáltja V_0 -beli.

Bizonyítás. Az első állítás igazolásához tegyük fel, hogy az f függvény V_0 -beli, ekkor f előáll a $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{-k}\phi\}$ függvények lineáris kombinációjaként. Ekkor a $\delta_{2^j} f$ függvény nyilvánvalóan a $\{\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi\}$ függvények lineáris kombinációjaként kapható, ami azt jelenti, hogy $\delta_{2^j} f$ függvény V_j -beli.

A második állítás hasonlóan igazolható.

□

9.2.4. Tétel. A $\{2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi, k \in \mathbb{Z}\}$ függvényrendszer a V_j tér ortonormált bázisa.

Bizonyítás. Elegendő megmutatnunk, hogy $\{\tau_{-k}\phi, k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormált és hogy $\|2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi\| = 1$ minden $k \in \mathbb{Z}$ és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén, ugyanis ekkor a $\{2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi, k \in \mathbb{Z}\}$ rendszer ortogonalitása a lineáris transzformáció nyilvánvaló következménye.

A $\tau_{-k}\phi \in L^2$ függvények egységnormájúak, hiszen

$$\|\tau_{-k}\phi\| = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - k) dx = \int_k^{k+1} 1 dx = 1$$

és ortogonálisak, azaz ha $k \neq \ell$, akkor

$$\langle \tau_{-k}\phi, \tau_{-\ell}\phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - k) \phi(x - \ell) dx = 0,$$

hiszen $\tau_{-k}\phi$ függvény tartója a $[k, k+1)$ intervallum, a $\tau_{-\ell}\phi$ függvényé pedig az $[\ell, \ell+1)$ intervallum, azaz a függvények diszjunkt tartójúak, így a $\phi(x - k)\phi(x - \ell)$ szorzat minden $x \in \mathbb{R}$ esetén 0.

Legyen $j \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{Z}$, számoljuk ki a $2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi$ függvény normáját

$$\|2^{j/2} \tau_{-k} \delta_{2^j} \phi\| = \int_{-\infty}^{\infty} (2^{j/2} \phi(2^j x - k))^2 dx = 2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 1 dx = 1.$$

Ezzel az állítást igazoltuk, hiszen a $\{2^{j/2} \tau_{-k} \delta_{2^j} \phi, k \in \mathbb{Z}\}$ rendszer definíció szerint a V_j tér generátor rendszere és most már az is nyilvánvaló, hogy lineárisan független (ugyanis bármely két különböző eleme ortogonális).

□

3. A Haar wavelet és tulajdonságai

Legyen $j \in \mathbb{N}$ rögzített. Az előzőek alapján V_j halmaz a V_{j-1} halmaz minden elemét tartalmazza. Keressük V_j azon elemeit, amelyek nem tartoznak V_{j-1} halmazhoz, ehhez a V_j halmazt a V_{j-1} halmaz és a komplementerének ortogonális összegére bontjuk.

Legyen $j=1$. Keressük a V_0 halmaz V_1 -re vonatkozó komplementer halmazát. A komplementer teret egy ψ függvény és eltoljtjai által szeretnénk generálni, ekkor a következő két tulajdonság együttes teljesülése szükséges:

- Mivel $\psi \in V_1$, ezért előáll

$$\psi(x) = \sum_{\ell} a_{\ell} \phi(2x - \ell) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $a_{\ell} \in \mathbb{R}$ együtthatók között csak véges sok nem nulla együttható van.

- A ψ függvény – mint az általa és az eltoljtjai által generált komplementer tér bármely eleme – ortogonális V_0 -ra, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\langle \psi, \tau_{-k} \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi(x - k) dx = 0$$

minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén.

A legegyszerűbb függvény, amely mindkét fenti feltételt kielégíti a

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2(x - \frac{1}{2})) = \phi(2x) - \phi(2x - 1), \quad (x \in \mathbb{R})$$

ugyanis az előállítás alapján nyilvánvalóan $\psi \in V_1$ és

$$\langle \psi, \tau_{-k} \phi \rangle = 0,$$

mivel $k \neq 0$ esetén ψ és $\tau_{-k} \phi$ függvények tartói diszjunktak, így a skaláris szorzat által definiált integrál triviálisan 0. A $k=0$ esetben pedig a

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx = 0$$

egyenlőség adódik. Hasonló módon igazolható, hogy a ψ függvény $\tau_{-\ell} \psi$ eltoljtjai ugyanilyen tulajdonsággal rendelkeznek, azaz

$$\langle \tau_{-\ell} \psi, \tau_{-k} \phi \rangle = 0 \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

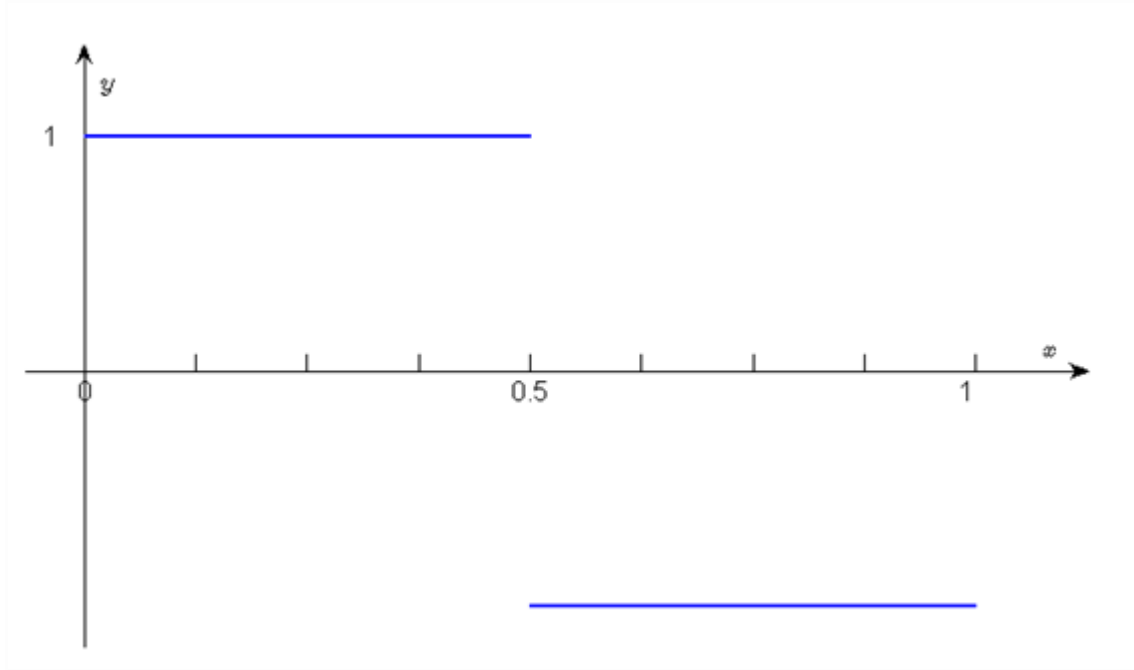
9.3.1. Definíció. A $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(x) := \phi(2x) - \phi(2x-1), \quad (x \in \mathbb{R})$$

utastással értelmezett függvényt *Haar waveletnek* nevezzük.

A 9.2. ábrán szemléltettük a Haar wavelet grafikonját.

9.2. ábra - A Haar wavelet grafikonja



9.3.2. Lemma Az

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \quad x \in \mathbb{R}$$

V_1 -beli függvény pontosan akkor ortogonális a V_0 térre, – azaz minden $\tau_{-l}\phi$ $l \in \mathbb{Z}$ függvényre – ha $a_{2m} = -a_{2m+1}$, ha $2m \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. Ha a feltétel teljesül, akkor

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} (\phi(2x - 2k) - \phi(2x - 2k - 1)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \psi(x - k) \quad x \in \mathbb{R}$$

Az előzőek alapján $\langle \tau_{-k}\psi, \tau_{-l}\phi \rangle = 0$ minden $k, l \in \mathbb{Z}$ esetén, így

$$\langle f, \tau_{-l}\phi \rangle = 0.$$

Ha a feltétel nem teljesül, azaz létezik olyan $2m \in \mathbb{Z}$ index, hogy $a_{2m} \neq -a_{2m+1}$, akkor

$$\begin{aligned} \langle f, \tau_{-m}\phi \rangle &= a_{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - 2m) \phi(x - m) dx + a_{2m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - 2m - 1) \phi(x - m) dx = \\ &= a_{2m} \int_m^{m+\frac{1}{2}} 1 dx + a_{2m+1} \int_{m+\frac{1}{2}}^{m+1} 1 dx = \frac{a_{2m} + a_{2m+1}}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

□

Jelölje $\mathcal{W}_0$ azon függvények összességét, amelyek előállnak

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \psi(x-k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol az α_k együtthatók között legfeljebb véges sok nem nulla együttható szerepel. Az előbbieket alapján $\mathcal{W}_0$ a V_0 halmaz V_1 -re vonatkozó ortogonális komplementere és $V_1 = V_0 \oplus \mathcal{W}_0$.

Hasonló módon igazolható a következő általános állítás.

9.3.3. Tétel. Legyen $j \in \mathbb{N}$ rögzített. Jelölje $\mathcal{W}_j$ azon függvények összességét, amelyek előállnak

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \psi(2^j x - k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol az α_k együtthatók között legfeljebb véges sok nem nulla szerepel. Ekkor a $\mathcal{W}_j$ halmaz a V_j halmaz V_{j+1} -re vonatkozó ortogonális komplementere és

$$V_{j+1} = V_j \oplus \mathcal{W}_j.$$

Bizonyítás. A tétel igazolásához az alábbi két állítás belátása szükséges:

- 1.) Bármely $\mathcal{W}_j$ -beli függvény ortogonális bármely V_j -beli függvényre.
- 2.) Minden olyan V_{j+1} -beli függvény amely ortogonális V_j -re szükségszerűen $\mathcal{W}_j$ -beli.

Az első állítás igazolásához tegyük fel, hogy g függvény $\mathcal{W}_j$ -beli, azaz

$$g(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \psi(2^j x - k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

legyen továbbá $f \in V_j$. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor

$$\langle g, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{f(x)} dx = 0.$$

Mivel $f \in V_j$, ezért 9.2.3. Tétel alapján $\delta_{2^{-j}} f \in V_0$. Így $\langle \delta_{2^{-j}} f, \tau_{-k} \psi \rangle = 0$, azaz

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \psi(x-k) \overline{f(2^{-j}x)} dx = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \psi(2^j y - k) \overline{f(y)} dy = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \overline{f(y)} dy,$$

$y = 2^{-j}x, \quad dx = 2^j dy$

azaz a g függvény ortogonális minden V_j -beli f függvényre.

A második állítás igazolását $j=0$ esetre a bevezetőben elvégeztük. Az általános bizonyítás teljesen hasonlóan végezhető, ennek meggondolását az olvasóra bizzuk.

□

Az előző tétel szerint ha $j \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor V_j tér felbontható az alábbi módon:

$$V_j = \mathcal{W}_{j-1} \oplus V_{j-1} = \mathcal{W}_{j-1} \oplus \mathcal{W}_{j-2} \oplus V_{j-2} = \dots = \mathcal{W}_{j-1} \oplus \mathcal{W}_{j-2} \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_0 \oplus V_0,$$

azaz minden $f \in V_j$ -beli függvény egyértelműen felbontható

$$f = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0$$

összegre, ahol $w_\ell \in W_\ell$ ($0 \leq \ell < j$) és $f_0 \in V_0$.

A fenti gondolatmenetet $j \rightarrow \infty$ határátmenet alkalmazásával folytatva az alábbi tétel nyerhető, melyet bizonyítás nélkül közlünk.

9.3.4. Tétel. Az L^2 függvényter felbontható kompakt tartójú lépcsős függvények tereinek végtelen ortogonális direkt összegére

$$L^2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \dots$$

azaz minden $f \in L^2$ függvény egyértelműen írható fel

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j$$

alakban, ahol $f_0 \in V_0$ és $w_\ell \in W_\ell$ minden $\ell \in \mathbb{N}$ esetén.

4. Haar dekompozíció és rekonstrukció

4.1. Haar dekompozíció

Az L^2 -beli f függvény 9.3.4. Tétel szerinti felbontásának előállításánál először a függvényt egy

$$f_j(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_\ell \phi(2^j x - \ell) \quad (9.4.1)$$

alakú lépcsős függvénnyel approximáljuk, ahol j elegendően nagy.

A dekompozíciós algoritmus alapját a következő lemma szolgáltatja.

9.4.1. Lemma Minden $x \in \mathbb{R}$ helyen és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén igazak a következő összefüggések

$$\phi(2^j x) = (\phi(2^{j-1} x) + \psi(2^{j-1} x)) / 2, \quad (9.4.2)$$

$$\phi(2^j x - 1) = (\phi(2^{j-1} x) - \psi(2^{j-1} x)) / 2. \quad (9.4.3)$$

Bizonyítás. A $j=1$ esetben az igazolandó állítások

$$\phi(2x) = (\phi(x) + \psi(x)) / 2, \quad (9.4.4)$$

$$\phi(2x - 1) = (\phi(x) - \psi(x)) / 2 \quad (9.4.5)$$

alakúak, melyek a ϕ és ψ függvények definíciója alapján nyilvánvalóan teljesülnek.

Az összefüggések általános alakja azonnal nyerhető, ha (9.4.4) és (9.4.5) egyenletekben x helyére $2^{j-1}x$ -et írunk.

Válasszuk külön a (9.4.1) összeg páros és páratlan indexű tagjait

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \phi(2^j x - 2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} \phi(2^j x - 2k - 1). \quad (9.4.6)$$

A (9.4.2) és (9.4.3) összefüggéseket x helyett $x - k2^{1-j}$ -re felírva a

$$\phi(2^j x - 2k) = (\phi(2^{j-1} x - k) + \psi(2^{j-1} x - k)) / 2, \quad (9.4.7)$$

$$\phi(2^j x - 1) = (\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)) / 2 \quad (9.4.8)$$

egyenleteket nyerhetjük. Ezen eredményeket az (9.4.6) egyenletbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} (\phi(2^{j-1} x - k) + \psi(2^{j-1} x - k)) / 2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} (\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)) / 2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{2} \psi(2^{j-1} x - k) + \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \phi(2^{j-1} x - k) = w_{j-1} + f_{j-1}, \end{aligned}$$

ahol $w_{j-1} \in W_{j-1} = \text{span}\{\tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \psi, k \in \mathbb{Z}\}$ és $f_{j-1} \in V_{j-1} = \text{span}\{\tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \phi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Az előző tapasztalatokat foglaljuk össze a következő tételben.

9.4.2. Tétel (Haar dekompozíció). Az

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(j)} \tau_{-k} \delta_{2^j} \phi$$

V_j -beli függvény egyértelműen felbontható egy W_{j-1} -beli w_{j-1} és egy V_{j-1} -beli f_{j-1} függvény összegére, ahol

$$\begin{aligned} f_{j-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(j-1)} \tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \phi \\ w_{j-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(j-1)} \tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \psi \end{aligned}$$

az együttthatókra pedig

$$a_k^{(j-1)} = \frac{a_{2k}^{(j)} + a_{2k+1}^{(j)}}{2} \quad \text{és} \quad b_k^{(j-1)} = \frac{a_{2k}^{(j)} - a_{2k+1}^{(j)}}{2}.$$

Az eljárás folytatható és így f_{j-1} felbontható W_{j-2} -beli w_{j-2} és egy V_{j-2} -beli f_{j-2} függvény összegére és így tovább egészen addig, míg az

$$f_j = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0$$

előállításához nem jutunk.

4.2. Haar rekonstrukció

Tegyük fel, hogy ismerjük az f függvény felbontását V_0 és W_ℓ , $0 \leq \ell < j$ halmazbeli elemek összegére, azaz

$$f = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0,$$

ahol

$$f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(0)} \tau_{-k} \phi$$

és

$$w_\ell = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(\ell)} \tau_{-k} \delta_{2^\ell} \psi \quad (0 \leq \ell < j).$$

Kérdés, hogyan tudjuk előállítani az $\{a_k^{(0)}, k \in \mathbb{Z}\}$ és $\{b_k^{(\ell)}, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \ell < j\}$ együttthatók ismeretében az f függvény

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^{(j)} \tau_{-m} \delta_{2^j} \phi$$

alakját.

A rekonstrukciós algoritmus alapját a következő lemma szolgáltatja.

9.4.3. Lemma. Minden $x \in \mathbb{R}$ helyen és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén igazak a következő összefüggések

$$\phi(2^{j-1}x) = (\phi(2^jx) + \phi(2^jx - 1)) / 2, \quad (9.4.9)$$

$$\psi(2^{j-1}x) = (\phi(2^jx) - \phi(2^jx - 1)) / 2. \quad (9.4.10)$$

Bizonyítás. A $j=1$ esetben az igazolandó állítások

$$\phi(x) = (\phi(2x) + \phi(2x - 1)) / 2, \quad (9.4.11)$$

$$\psi(x) = (\phi(2x) - \phi(2x - 1)) / 2 \quad (9.4.12)$$

alakúak, melyek a ϕ és ψ függvények definíciója alapján nyilvánvalóan teljesülnek.

Az összefüggések általános alakja azonnal nyerhető, ha (9.4.11) és (9.4.12) egyenletekben x helyére $2^{j-1}x$ -et írunk.

□

Az f_0 függvény előállítását felírva és abban a (9.4.11) eredményt x helyett $x-k$ -ra alkalmazva minden $x \in \mathbb{R}$ helyen a következő összefüggésre jutunk:

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(0)} \phi(x-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(0)} (\phi(2x-2k) + \phi(2x-2k-1)) / 2.$$

Így f_0 minden $x \in \mathbb{R}$ helyen felírható az alábbi alakban

$$f_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{a}_\ell^{(1)} \phi(2x-\ell),$$

ahol

$$\hat{a}_\ell^{(1)} = \begin{cases} a_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ a_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

Hasonlóan a w_0 függvény előállítását és a (9.4.12) egyenlet x helyett $x-k$ -ra felírt alakját összevetve minden $x \in \mathbb{R}$ helyen a következő összefüggés kapható:

$$w_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(0)} \psi(x-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(0)} (\phi(2x-2k) - \phi(2x-2k-1)) / 2.$$

Így w_0 minden $x \in \mathbb{R}$ helyen felírható az alábbi alakban

$$w_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{b}_\ell^{(1)} \phi(2x-\ell),$$

ahol

$$\hat{b}_\ell^{(1)} = \begin{cases} b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ -b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

A kapott két eredményt összeadva

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \alpha_{\ell}^{(1)} \phi(2x - \ell) \quad (x \in \mathbb{R})$$

kapható, ahol

$$\alpha_{\ell}^{(1)} = \hat{\alpha}_{\ell}^{(1)} + \hat{\beta}_{\ell}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_k^{(0)} + b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ \alpha_k^{(0)} - b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

Az eljárás következő lépésben az előzőekhez hasonlóan $f_0 + w_0$ összeg (9.4.9) felhasználásával

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{\ell}^{(2)} \phi(4x - \ell), \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban írható, ahol

$$\hat{\alpha}_{\ell}^{(2)} = \begin{cases} \alpha_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ \alpha_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

és a w_1 függvény (9.4.10) felhasználásával

$$w_1(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}_{\ell}^{(2)} \phi(4x - \ell), \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban írható, ahol

$$\hat{\beta}_{\ell}^{(2)} = \begin{cases} b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ -b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

A két eredmény összevetve

$$f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \alpha_{\ell}^{(2)} \phi(2^2 x - \ell) \quad (x \in \mathbb{R})$$

kapható, ahol

$$\alpha_{\ell}^{(2)} = \hat{\alpha}_{\ell}^{(1)} + \hat{\beta}_{\ell}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_k^{(1)} + b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ \alpha_k^{(1)} - b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

A fenti eljárást folytatva az $\alpha_{\ell}^{(m)}$ ($1 \leq m \leq j$) együtthatók számolására egy rekurzív algoritmus definiálható. Ezt a tapasztalatot foglaljuk össze a következő tételben:

9.4.4. Tétel (Haar rekonstrukció). *Tegyük fel, hogy adott az*

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + \dots + w_{j-1}$$

előállítás, ahol

$$f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^{(0)} \tau_{-k} \phi$$

és

$$w_{\ell} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(\ell)} \tau_{-k} \delta_{2^{\ell}} \psi \quad (0 \leq \ell < j).$$

Ekkor

$$f = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \alpha_{\ell}^{(j)} \tau_{-k} \delta_{2^j} \phi$$

alakban írható, ahol az $\alpha_i^{(j)}$ együtthatók az alábbi rekurzív utasítás alapján számolhatók minden $1 \leq m \leq j$ index esetén:

$$\alpha_i^{(m)} := \begin{cases} \alpha_k^{(m-1)} + \beta_k^{(m-1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ \alpha_k^{(m-1)} - \beta_k^{(m-1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

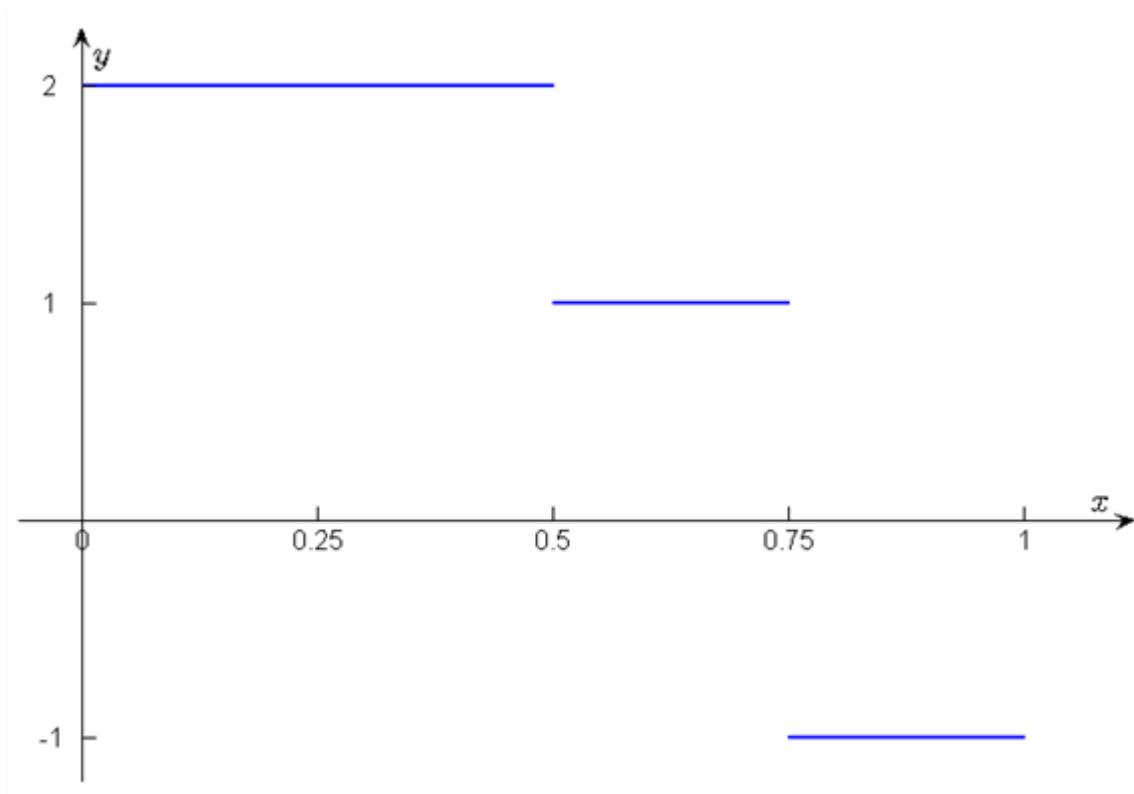
9.4.1. Példa. Tekintsük az

$$f(x) = 2\phi(4x) + 2\phi(4x-1) + \phi(4x-2) - \phi(4x-3) \quad (x \in \mathbb{R})$$

lépcsős függvényt. Bontsuk fel az f függvényt V_0, W_0 és W_1 -beli komponensek összegére.

Megoldás. A példában szereplő f függvény grafikonját a 9.3. ábrán szemléltettük.

9.3. ábra - A Haar wavelet grafikonja



A 9.4.2. tétel jelöléseit használva $j=2$ és

$$\alpha_0^{(2)} = 2, \alpha_1^{(2)} = 2, \alpha_2^{(2)} = 1, \alpha_3^{(2)} = -1,$$

a többi együttható pedig 0.

A 9.4.2. tétel utasítása alapján számolva

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)}}{2} = 2,$$

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)}}{2} = 0,$$

$$\beta_0^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(2)} - \alpha_1^{(2)}}{2} = 0,$$

$$\beta_1^{(1)} = \frac{\alpha_2^{(2)} - \alpha_3^{(2)}}{2} = 1.$$

A többi együttható a szinten 0. A kiszámított együtthatók segítségével w_1 máris felírható:

$$w_1(x) = \beta_0^{(1)}\psi(2x) + \beta_1^{(1)}\psi(2x-1) = \psi(2x-1).$$

Az eljárást folytatva a hiányzó együtthatók kiszámíthatók:

$$\alpha_0^{(0)} = \frac{\alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}}{2} = 1,$$

$$\beta_0^{(0)} = \frac{\alpha_0^{(1)} - \alpha_1^{(1)}}{2} = 1.$$

A többi együttható a szinten 0. Az együtthatók segítségével w_0 és f_0 is felírható:

$$w_0(x) = \beta_0^{(0)}\psi(x) = \psi(x), \quad \text{és} \quad f_0(x) = \alpha_0^{(0)}\phi(x) = \phi(x),$$

így

$$f(x) = \phi(x) + \psi(x) + \psi(2x-1).$$

Az alábbi MatLab program alkalmas a Haar-dekompozíció megvalósítására. Ezenkívül azt is demonstrálja, hogy a probléma egy úgynevezett *helybenjáró algoritmus*³ segítségével is megoldható.

N=2;

f=[2 2 1 -1];

n=length(f);

for k=0:N-1

for i=0:2^(k+1):n-2

A=(f(i+1)+f(i+2^(k+1)))/2;

B=(f(i+1)-f(i+2^(k+1)))/2;

f(i+1)=A;

f(i+2^(k+1))=B;

end;

end;

A fenti eljárás eredményeként

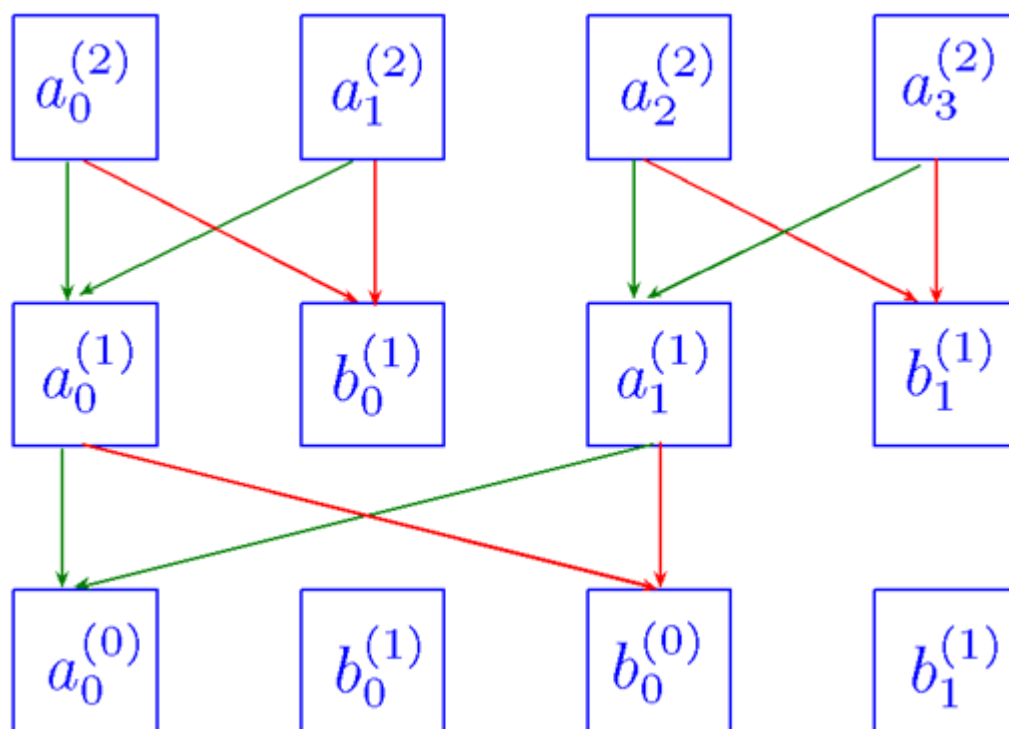
f =

³Az ilyen algoritmusok során az eredmény a bemenő adatok helyén jelenik meg és az újonnan számolt értékekkel a régi adatokat felülírjuk. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus tárhelyigénye gyakorlatilag ideális.

1 0 1 1

adódik. Ügyeljünk az adatok kiolvasási sorrendjére. Az eljárás során végzett számításokat és adattárolásokat szemléltettük a 9.4. ábrán. Az ábra minden egyes sora megfelel az algoritmus egy lépése során előállított vektornak. A legfelső sorban az induló adatok vektora, a legalsó sorban pedig az eredményvektor látható. A számításokat nyilakkal jelöltük, zöld nyíllal az összeadást és pirossal a kivonást. (Például a $b_0^{(1)}$ elemhez piros nyilak érkeznek az $a_0^{(2)}$ és $a_1^{(2)}$ elemektől, ez a $b_0^{(1)} = \frac{a_0^{(2)} - a_1^{(2)}}{2}$ számolási utasításnak felel meg.)

9.4. ábra - A Haar wavelet dekompozíció számolási sémája



9.4.2 Példa. Legyen az f egy lépcsős függvény. Tegyük fel, hogy ismerjük a függvény előállítását V_0, W_0 és W_1 -beli komponensek összegeként:

$$f(x) = \phi(x) + \psi(x) + 0 \cdot \psi(2x) + \psi(2x-1).$$

Írjuk fel a függvényt a V_2 tér bázis függvényeinek lineáris kombinációjaként.

Megoldás. 9.4.4. tétel jelöléseit használva

$$a_0^{(0)} = 1, b_0^{(0)} = 1, b_0^{(1)} = 0, b_1^{(1)} = 1,$$

a többi együttható pedig 0. Esetleg fel is ismerhetjük, hogy a 9.4.1. Példa megoldásában ugyanezt az előállítást kaptuk, így azt várjuk, hogy a függvény rekonstrukció során visszkapjuk a példában szereplő f függvényt. Most ettől az észrevételtől eltekintve oldjuk meg a feladatot.

A 9.4.4. tétel rekurzióját használva szeretnénk kiszámítani az $a_k^{(2)}$ együtthatókat ($k = 0, 1, 2, 3$).

$$a_0^{(1)} = a_0^{(0)} + b_0^{(0)} = 2,$$

$$a_1^{(1)} = a_0^{(0)} - b_0^{(0)} = 0$$

és

$$\begin{aligned}a_0^{(2)} &= a_0^{(1)} + b_0^{(1)} = 2, \\a_1^{(2)} &= a_0^{(1)} - b_0^{(1)} = 2, \\a_2^{(2)} &= a_1^{(1)} + b_1^{(1)} = 1, \\a_3^{(2)} &= a_1^{(1)} - b_1^{(1)} = -1.\end{aligned}$$

A függvény keresett előállítása tehát

$$f(x) = 2\phi(2^2 x) + 2\phi(2^2 x - 1) + \phi(2^2 x - 2) - \phi(2^2 x - 3) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

10. fejezet - Függelék

1. Folytonos függvények

10.1.1. Definíció. Egy $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvény az $\alpha \in H$ pontban folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan α -tól és ε -tól függő pozitív δ , ($\delta(\varepsilon, \alpha) > 0$) szám, hogy $\forall x \in H$ esetén, amelyre $|x - \alpha| < \delta$, teljesül, hogy $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Nyilvánvaló, hogy ha x_0 a H halmaznak pontja és torlódási pontja is, akkor x_0 pontban az f függvény pontosan akkor folytonos, ha léteznek a féloldali véges határértékek és

$$f(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0).$$

10.1.2. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szakaszonként folytonos, ha létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ felosztása, melyre

- i) f az (x_i, x_{i+1}) részintervallumokon folytonos minden $0 \leq i < n$ esetén,
- ii) f -nek minden x_i , ($i = 1, \dots, n$) osztópontban létezik a $f(x_i - 0)$ és $f(x_i + 0)$ véges egyoldali határértéke.
- iii) A végpontokban létezik a $f(a + 0)$ és $f(b - 0)$ véges egyoldali határérték.

10.1.3. Tétel. Legyen az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon és $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ a definícióban szereplő felosztás. Ekkor f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

10.1.4. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H$ pontban szakadása van, ha f nem folytonos az a pontban. Ha léteznek a véges egyoldali határértékek a -ban, akkor elsőfajú szakadásról beszélünk. Ha $f(a - 0) = f(a + 0) = A$ (de $f(a) \neq A$), akkor f -nek a -ban megszüntethető szakadása van, ha $f(a - 0) \neq f(a + 0)$, akkor ugrása van. Minden egyéb szakadási típust másodfajú szakadásnak nevezünk.

2. Monoton függvények

Monoton függvények esetén egyszerűen igazolható az alábbi tétel:

10.2.1. Tétel. Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, ($I \subset \mathbb{R}$) monoton függvény, akkor minden $a \in I$ pontra f folytonos a -ban, vagy f -nek ugrása van a -ban.

Érvényes továbbá az alábbi

10.2.2. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény és legyen f -nek szakadása az $a \in I$ és $b \in I$ pontokban, ahol $a < b$. Ekkor

$$f(a - 0) \leq f(a) \leq f(a + 0) \leq f(b - 0) \leq f(b) \leq f(b + 0).$$

Bizonyítás. Mivel f monoton nő, ezért

$$f(b - 0) = \sup\{f(x) \mid x < b\} \quad \text{és} \quad f(a + 0) = \inf\{f(x) \mid x > a\}.$$

Mivel $f(x) \geq f(a+0)$ egy felső korlát, ezért minden $x < b$ esetén $f(x) \leq f(b-0)$ és hasonlóan minden $x > a$ esetén

Így tetszőleges a és b közötti x esetén ($a < x < b$)

$$f(a+0) \leq f(x) \leq f(b-0),$$

ahonnan az állítás leolvasható.

□

10.2.3. Következmény. Ha $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, akkor $\mathcal{R}_f \subseteq [f(\alpha), f(\beta)]$, ha pedig $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton csökkenő függvény, akkor $\mathcal{R}_f \subseteq [f(\beta), f(\alpha)]$.

Monoton függvények szakadási helyeinek számáról szól az alábbi

10.2.4. Tétel. Monoton függvénynek legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok szakadása lehet.

Bizonyítás. Legyen f monoton függvény. Minden $a \in \mathcal{D}_f$ szakadási helyhez rendeljünk egy racionális számot az $f(a-0)$ és $f(a+0)$ által meghatározott intervallumból. Mivel minden intervallum tartalmaz racionális számot, ezért minden szakadási helyhez tudunk egy ilyen racionális számot rendelni. A 10.2.2. Tétel miatt minden szakadási helyhez különböző racionális számot rendelünk. A racionális számok e részhalmaza és a szakadási helyek között tehát bijektív megfeleltetést létesítünk. Mivel a racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, ezért ennek részhalmaza is biztosan megszámlálható számosságú.

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel nem csak monoton, hanem minden olyan függvényre érvényes, melynek legfeljebb elsőfajú szakadási helye van. (A bizonyítás megtalálható [13] könyvben (79. oldal.))

A monoton függvények folytonossággal való kapcsolatát szemlélteti az alábbi

10.2.5. Tétel. Minden monoton függvény felbontható egy folytonos függvény és egy tiszta ugrófüggvény összegére.

A bizonyításhoz szükséges a következő lemma igazolása.

10.2.6. Lemma. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots, n \in \Gamma^+$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen különböző pontok $\mathbb{R}$ -en, továbbá $u_1', u_2', u_3', \dots, u_n', \dots$ és $u_1'', u_2'', u_3'', \dots, u_n'', \dots$ olyan tetszés szerinti számok, amelyekre

$$u_n' \geq 0, \quad u_n'' \geq 0 \quad (n \in \Gamma) \quad \text{és} \quad \sum_{n \in \Gamma} (u_n' + u_n'') < \infty.$$

Ekkor létezik olyan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos minden $\mathbb{R} \setminus \{\xi_i, i \in \Gamma\}$ pontban, a $\{\xi_i, i \in \Gamma\}$ pontokban pedig elsőfajú szakadása van, és ugrásának nagysága $u_n' + u_n''$ -vel egyezik meg. (u_n' a g függvény baloldali ugrása a ξ_n pontban u_n'' pedig a jobboldali ugrása ugyanebben a pontban)

A legegyszerűbb ilyen tulajdonságú függvény a következő

$$g(x) := \sum_{n \in \Gamma: \xi_n \leq x} u_n' + \sum_{n \in \Gamma: \xi_n < x} u_n''.$$

Ez az adott ξ_n pontokhoz és az ezekben való u_n', u_n'' ugrásokhoz tartozó úgynevezett tiszta ugrófüggvény.

Bizonyítás. A g függvény segédfüggvényekkel is előállítható. Ha

¹ Γ véges vagy megszámlálhatóan végtelen indexhalmazt jelöl.

$$g_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < \xi_n; \\ u_n', & \text{ha } x = \xi_n; \\ u_n' + u_n'', & \text{ha } x > \xi_n, \end{cases} \quad \text{akkor } g(x) = \sum_{n \in \Gamma} g_n(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A g_n függvény mindenütt folytonos a ξ_n pont kivételével. Ebben a pontban ugrása $u_n' + u_n''$ -vel egyezik meg, ezért ha Γ véges, akkor következik, hogy g véges sok pont kivételével mindenütt folytonos.

Ha $\Gamma \in \mathbb{N}^d$, akkor a $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ függvény-sort a $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n' + u_n'') < \infty$ numerikus sor majorálja, ezért az abszolút és egyenletesen konvergens. Ebből következik, hogy a g függvény ott folytonos, ahol minden g_n ($n \in \mathbb{N}^d$) függvény is folytonos, tehát minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_n, n \in \mathbb{N}^d\}$ pontban.

Ugyanebből az okból folytonos a

$$g - g_m = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus m} g_n$$

függvény a ξ_m helyen is. Tehát g -nek ugyanazok az ugrásai a ξ_m helyen balról és jobbról, mint g_m -nek, azaz u_m' és u_m'' .

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

□

A 10.2.5. Tétel bizonyítása.. Legyen f egy monoton függvény, amelynek egy $H \subseteq \mathcal{D}_f$ halmaz pontjai elsőfajú szakadási helyei, és f folytonos minden $\alpha \in \mathcal{D}_f \setminus H$ pontban. Mivel f monoton függvény, ezért a H halmaz megszámlálható.

$$H = \{\xi_i, i \in \Gamma\}.$$

Az f függvény ξ_i pontban lévő

- baloldali ugrása $u_i' = |f(\xi_i) - f(\xi_i - 0)|$,
- jobboldali ugrása $u_i'' = |f(\xi_i) - f(\xi_i + 0)|$.

A 10.2.6. Lemmából következik, hogy létezik olyan g tiszta ugrófüggvény, amely folytonos minden $\alpha \in \mathcal{D}_f \setminus H$ pontban, továbbá minden $\alpha \in H$ pontban ugrása van, és az megegyezik f -nek az α pontbeli ugrásával. Következésképpen az $f - g$ függvény folytonos a teljes értelmezési tartományán. Mivel $f = (f - g) + g$, így f -et felbontottuk egy folytonos és egy tiszta ugrófüggvény összegére.

□

3. Korlátos változású függvények

Két vagy több egyező értelemben monoton függvény összege is ugyanabban az értelemben monoton, míg két monoton függvény különbsége már nem feltétlenül monoton.

Az $[a, b]$ intervallumon monoton függvények különbségével képzett függvények viszont megőrzik a monoton függvényeknek azt a tulajdonságát, hogy tetszőleges $\tau = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ felosztását véve az $[a, b]$

intervallumnak, a $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ összegek egy, a felosztástól független korlát alatt maradnak.

Az ilyen tulajdonságú függvényeket korlátos változású függvényeknek fogjuk hívni.

10.3.1. Definíció. Egy f függvény az $[a, b]$ intervallumon korlátos változású, ha létezik olyan K pozitív valós szám, hogy bármilyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ természetes számra és $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ felosztás esetén

$$t(f, \tau) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq K$$

teljesül.

Az f függvény *totális változása (totális variációja)* az $[a, b]$ intervallumon:

$$T(a, b) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| : \tau \in \mathcal{F}_{[a, b]} \right\}$$

A korlátos változású függvények totális variációja rendelkezik az alábbi additív tulajdonsággal:

10.3.2. Lemma. Legyen $a < c < b$, a, b, c valós számok. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor korlátos változású az $[a, b]$ intervallumon, ha korlátos változású az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon is, és

$$T(a, b) = T(a, c) + T(c, b).$$

Bizonyítás. Mivel egy újabb osztópont hozzávételével a $t(f, \tau)$ összegek nem csökkennek, ezért

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \sup \{ t(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_{[a, b]} \} = \sup \{ t(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_{[a, b]}, c \in \tau \} = \\ &= \sup \{ t(f, \tau_1) + t(f, \tau_2) : \tau_1 \in \mathcal{F}_{[a, c]}, \tau_2 \in \mathcal{F}_{[c, b]} \} = \\ &= \sup \{ t(f, \tau_1) : \tau_1 \in \mathcal{F}_{[a, c]} \} + \sup \{ t(f, \tau_2) : \tau_2 \in \mathcal{F}_{[c, b]} \} = T(a, c) + T(c, b). \end{aligned}$$

□

A korlátos változású függvények halmazába a monoton függvények és azok különbségei is beletartoznak. Jordan megmutatta, hogy az állítás megfordítható, azaz nincs ezeken a függvényeken kívül más függvénytípus a korlátos változású függvények családjában:

10.3.3. Tétel (Jordan-Tétele). Minden korlátos változású függvény előállítható két monoton növekedő függvény különbségeként.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos változású függvény, és

$$T(x) := T(a, x) \quad (x \in [a, b]).$$

Ez a T függvény monoton növekedő, hiszen ha $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in [a, b]$), akkor az előző lemma alapján

$$T(x_2) - T(x_1) = T(a, x_2) - T(a, x_1) = T(a, x_1) + T(x_1, x_2) - T(a, x_1) = T(x_1, x_2) \geq 0,$$

továbbá mivel

$$T(x_2) - T(x_1) = T(x_1, x_2) \geq |f(x_2) - f(x_1)| \geq f(x_2) - f(x_1),$$

ezért

$$T(x_2) - f(x_2) \geq T(x_1) - f(x_1),$$

azaz a $T - f$ függvény is monoton növekedő. Ezzel előállítottuk f -et két monoton növekedő függvény különbségeként ($f = T - (T - f)$).

□

Jordan tételének következménye, hogy monoton függvényekkel együtt minden korlátos változású függvény is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy *legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok szakadási helye van és a szakadási helyei elsőfajúak*.

3.1. Folytonos függvények differenciálhatósága

Emlékeztetőül leírjuk a differenciálhatóság fogalmát.

10.3.1. Definíció. Adott egy $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvény, illetve a , a H halmaz egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az $a \in H$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték, más néven *differenciálhányados* vagy *derivált* az a pontban. Jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Ha az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvény a H halmaz minden pontjában differenciálható, akkor az $x \mapsto f'(x)$ ($x \in H$) hozzárendeléssel megadott függvényt *f derivált függvényének* vagy *deriváltjának* nevezzük.

Arra a kérdésre próbálunk választ adni ebben a fejezetben, hogy a differenciálhatóság milyen kapcsolatban van a folytonossággal.

Egyszerűen igazolható, hogy minden differenciálható függvény folytonos, viszont nem minden folytonos függvény differenciálható.

Felmerül a kérdés, hogy egy folytonos függvény esetén meg tudjuk-e adni, hogy maximum hány olyan pontja van az értelmezési tartománynak, ahol a függvény nem differenciálható.

Könnyen konstruálhatunk olyan függvényeket, amelyek mindenütt folytonosak, de véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok helyen nem differenciálhatóak. A XIX. század elején a matematikusok nagy része úgy gondolta, hogy egy folytonos függvény az értelmezési tartományának nagy részében differenciálható. Ezt az állítást A. M. Ampère bizonyítani is vélte 1806-ban. 1872. július 28-án azonban Karl Weierstrass sokkolta a matematikusok társaságát a berlini akadémián, ugyanis példát közölt egy folytonos, sehol sem differenciálható függvényre. Az eredmény nem örvendett túl szívélyes fogadtatásnak, ez látszik néhány matematikus megnyilatkozásából is:

„Régebben, ha egy új függvényt felfedeztek, ezt valami gyakorlati célból tették; ma kimondottan azért találják fel ezeket, hogy atyáink következtetéseire rácsófoljanak, s soha nem is fogják ezeket másra használni.”

H. Poincaré

Ch. Hermite pedig így fogalmazott T. J. Stieltjeshez írt levelében:

„Rémülettel és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől; függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk!”

Habár K. Weierstrass volt az első matematikus, aki publikálta ebben a témában meglepő eredményeit, nem ő volt az első, aki ilyen tulajdonságú függvényt talált. B. Bolzano prágai matematikus már 1830 körül konstruált ilyen példát, de eredményét nem közölte, mert ebben az időszakban császári parancsra megfosztották a tanítás és publikálás jogától. Az ő példáját utólagosan 1922-ben jelentették meg. 1860 körül egy svájci matematikus, Charles Cellérier is felfedezett egy ilyen függvényt, sajnálatos módon ez is csak 1890-ben került publikálásra. Riemann-nak is voltak próbálkozásai e téren, ő nagyon hasonló példát talált, mint Weierstrass.

A Weierstrass-függvény publikálása után nagyon sok matematikus kezdett el újabb sehol sem differenciálható folytonos függvényt keresni.

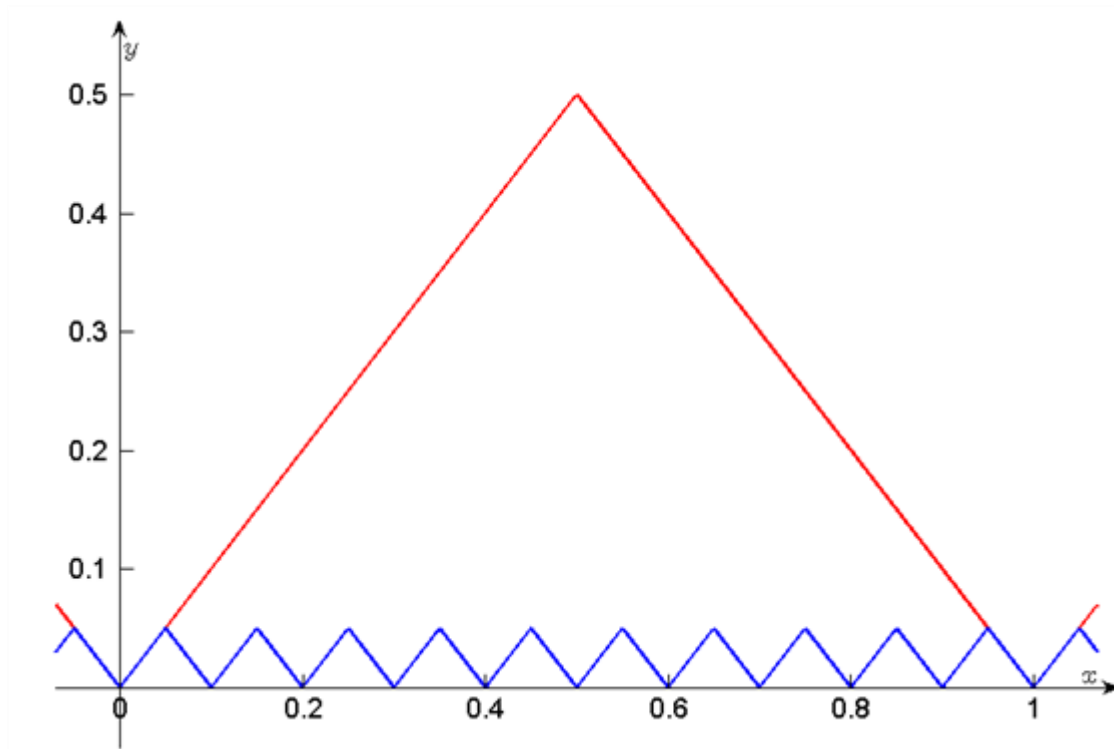
A továbbiakban egy függvényt mutatunk, melyről megmutatjuk, hogy sehol sem differenciálható.

B. L. van der Waerden példája ⁽¹⁹³⁰⁾ . Legyen

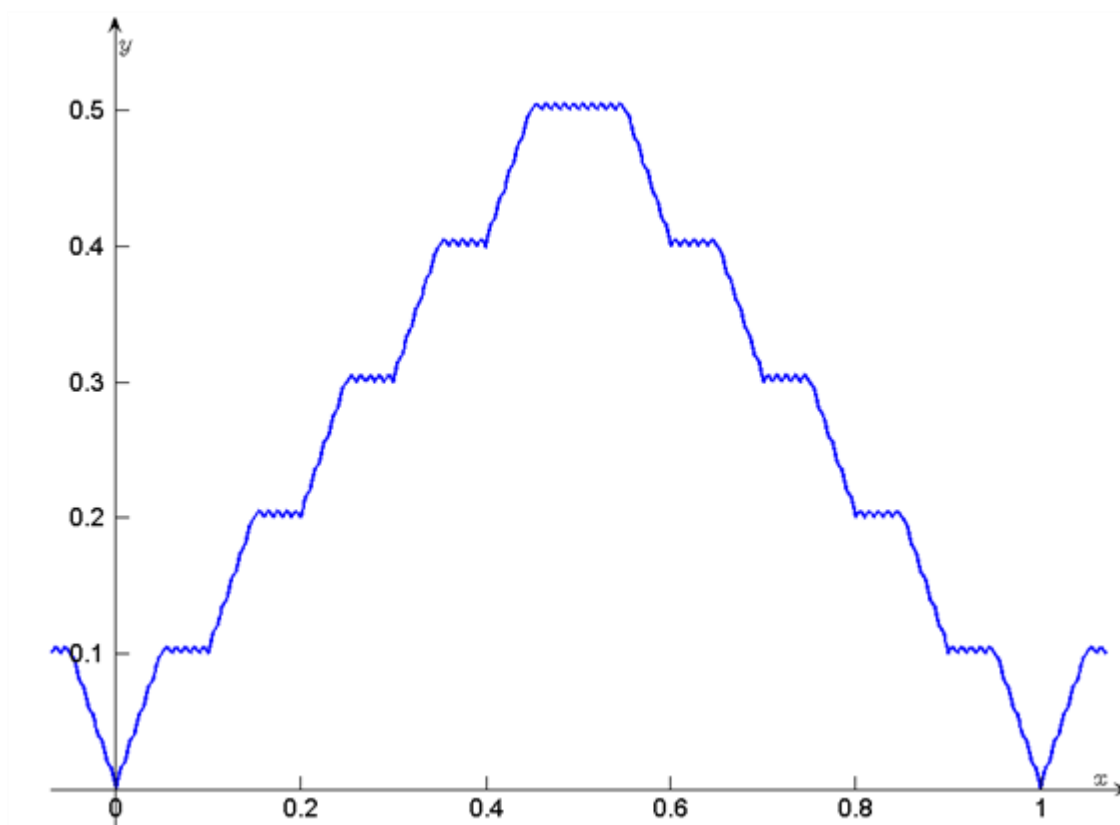
$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $\{x\}$ a valós x -nek a legközelebbi egész számtól való távolsága.

10.1. ábra - B. L. van der Waerden példájában összegzett függvények $n = 0$ és $n = 1$ esetén



10.2. ábra - B. L. van der Waerden példa-függvényének 3. részletösszege



Megmutatjuk, hogy van der Waerden függvénye mindenütt folytonos és sehol sem differenciálható.

Folytonosság. Az $x \mapsto \{x\}$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény, és így a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$ függvénysor minden tagja is folytonos. Mivel ezt a függvénysort a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ numerikus sor majorálja, ezért egyenletesen konvergens, és az összegfüggvénye is folytonos.

Differenciálhatóság. A $[0, 1)$ intervallumban lévő a számok tizedestört alakja a következő:

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$$

Tehát

$$\{10^n a\} = \begin{cases} 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots, & \text{ha } a_{n+1} < 5; \\ 1 - 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots, & \text{ha } a_{n+1} \geq 5. \end{cases}$$

Az f függvény differenciálható az a pontban, ha létezik a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ véges határérték. Ha nem létezik vagy nem véges a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ határérték, akkor f nem differenciálható az a pontban. A továbbiakban az átviteli elvet alkalmazzuk. Megadunk olyan 0-hoz tartó $(h_m, m \in \mathbb{N}^+)$ számsorozatot, amelyre az

$$\frac{f(a+h_m) - f(a)}{h_m}$$

sorozat határértéke nem létezik. A sorozat m -tagja legyen

$$h_m := \begin{cases} \frac{1}{10^{m+1}}, & \text{ha } \alpha_m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8; \\ -\frac{1}{10^{m+1}}, & \text{ha } \alpha_m = 4, 9. \end{cases}$$

Ha így választjuk h_m -et, biztosak lehetünk abban, hogy ha α -hoz hozzáadjuk, akkor α -nak csak az m -edik tizedesjegye változik meg oly módon, hogy vagy 1-gyel nő, vagy 1-gyel csökken. Így adódik a következő:

$$\frac{\{10^n(\alpha + h_m)\} - \{10^n\alpha\}}{10^n} = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \leq n; \\ \pm \frac{1}{10^{m+1}}, & \text{ha } m > n. \end{cases}$$

Tehát

$$\frac{f(\alpha + h_m) - f(\alpha)}{h_m} = \frac{1}{h_m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\{10^n(\alpha + h_m)\} - \{10^n\alpha\}}{10^n} = \pm 10^{m+1} \sum_{n=1}^{m-1} \pm \frac{1}{10^{m+1}} = \pm \sum_{n=1}^{m-1} (\pm 1).$$

Az f függvény differenciáhányadosa tehát páros vagy páratlan egész szám attól függően, hogy m páros vagy páratlan. Így ha $m \rightarrow \infty$, ezeknek a differenciáhányadosoknak a sorozata nem lehet konvergens, tehát az f függvény az α pontban nem differenciálható.

□

4. Monoton folytonos függvények differenciálhatósága

Mint ismeretes, a folytonosságból nem lehet következtetni a differenciálhatóságra. A következő tétel arra mutat rá, hogy a monotonitást hozzátéve a folytonossághoz már sokat megtudhatunk egy függvény differenciálhatóságáról.

10.4.1. Tétel (Lebesgue Tétele).² Minden monoton folytonos függvény majdnem mindenütt differenciálható, azaz a kivételes pontok nullamértékű halmazt alkotnak.

A tétel bizonyítása során a differenciálhatóság vizsgálatához f Dini-féle deriváltszámait alkalmazzuk, amelyeket a következőképpen definiálunk.

10.4.2. Definíció. Egy $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x \in (a, b)$ pontbeli Dini-féle deriváltszámainak nevezzük a D^+, d^+, D^-, d^- számokat, ahol

$$\begin{aligned} D^+ &:= (D^+ f)(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} : \xi \in (x, x + \delta) \right\}; \\ d^+ &:= (d^+ f)(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} : \xi \in (x, x + \delta) \right\}; \\ D^- &:= (D^- f)(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} : \xi \in (x - \delta, x) \right\}; \\ d^- &:= (d^- f)(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} : \xi \in (x - \delta, x) \right\}. \end{aligned}$$

²Lebesgue 1904-ben közölte e tételét, mint az általa felállított integrálmélet egy következményét. A tétel bizonyításához azonban nem feltétlenül szükséges a Lebesgue-féle integrálmélet. Az itt szereplő bizonyítás Riesz Frigyes nevéhez fűződik, melyet 1931-ben publikált.

Nyilvánvaló, hogy a Dini-féle számok minden x pontban egyértelműen értelmezettek, nem csak monoton, hanem tetszőleges függvény esetén is. Értékük vagy egy valós szám, vagy $+\infty$, vagy $-\infty$.

Továbbá a definícióból az is következik, hogy egy függvény ott differenciálható, ahol a négy derivált szám értéke megegyezik és véges, és

$$-\infty \leq d^- \leq D^- \leq +\infty, \quad -\infty \leq d^+ \leq D^+ \leq +\infty.$$

A bizonyítás alapgondolatát adja az alábbi

10.4.3. Lemma. Legyen g az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, E_g pedig legyen azon $x \in [a, b]$ pontok halmaza, amelyekhez létezik $\xi > x$ úgy, hogy $g(\xi) > g(x)$.

Ekkor E_g vagy üres halmaz, vagy megszámlálhatóan sok, páronként diszjunkt, nyílt (a_k, b_k) intervallumból áll, amelyek mindegyikére teljesül, hogy $g(a_k) \leq g(b_k)$.

Bizonyítás. Ha E_g nem üres, akkor nyílt halmaz, mivel a $g(x_0) < g(\xi)$ egyenlőtlenségből a folytonosság miatt következik, hogy a $g < g(\xi)$ egyenlőtlenség teljesül az x_0 pont egy kis környezetében is, tehát E_g minden pontja belső pont. Ebből következik, hogy E_g véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok, páronként diszjunkt nyílt (a_k, b_k) , $(k \in \Gamma)$ intervallum egyesítése.³

Legyen x az egyik intervallum tetszőleges eleme ($x \in (a_k, b_k)$). Ha belátjuk, hogy $g(x) \leq g(b_k)$, akkor a folytonosság miatt $x \rightarrow a_k$ határátmenettel a $g(a_k) \leq g(b_k)$ egyenlőtlenség következik. Legyen

$$M = \max\{g(t) \mid t \in [x, b_k]\}.$$

Ha $M = g(b_k)$, akkor nyilvánvalóan teljesül, hogy $g(x) \leq g(b_k)$. Tegyük fel, hogy $M \neq g(b_k)$. Ekkor két eset lehetséges:

i) $M = g(x_0)$, úgy, hogy $x \leq x_0 < b_k$. Ez nem lehetséges, mert $x_0 \in E_g$, tehát létezik olyan $\xi > x_0$, hogy

$$g(x_0) < g(\xi) \leq g(b_k).$$

ii) $M = g(x_0)$ úgy, hogy $x_0 > b_k$. Ez sem lehetséges, mivel $g(b_k)$ nem lehet kisebb $g(x_0)$ -nál, mert így b_k is beletartozna az E_g halmazba, ami nem teljesül.

Tehát M csak $g(b_k)$ -val lehet egyenlő. Ezzel bizonyítottuk 10.4.3. Lemmát.

□

A 10.4.1. Tétel bizonyítása. Legyen f az $[a, b]$ intervallumon monoton növekedő, folytonos függvény. Mivel a differenciahányados monoton növekedő függvény esetén nemnegatív, a deriváltszámok is mind nemnegatívak. Lebesgue tételének bizonyításához elegendő belátni, hogy monoton növekedő függvények esetén majdnem mindenütt igazak a következők:

$$D^+ f < \infty, \quad (10.4.1)$$

³A számegegyenesen adott intervallumok halmaza biztosan megszámlálható akkor, ha egyik intervallum sem nyúlik a másikba, hanem legfeljebb egyik végpontjuk közös. Mivel a racionális számok halmaza sűrű a valós számok halmazán, ezért a vizsgált intervallumok halmazában mindegyik intervallum tartalmaz racionális számot. Rendezzük sorba a racionális számokat, és minden intervallumhoz rendeljük hozzá azt a racionális számot, amelyik az adott intervallumba eső racionális számok közül a rendezett sorozatban az első. Ekkor az intervallumok halmazát kölcsönösen egyértelmű módon leképeztük a racionális számok egy részhalmazára. Mivel a racionális számok halmaza megszámlálható, és minden megszámlálható halmaz minden részhalmaza is megszámlálható, ezért a vizsgált intervallumok halmaza is megszámlálható.

$$D^+f \leq d^-f. \quad (10.4.2)$$

Ha ugyanis (10.4.2)-t a szintén monoton növekedő $-f(-x)$ függvényre alkalmazzuk valamely $x \in (-b, -a)$ pontban, akkor mivel

$$D^+(-f(-x)) = D^-(f(-x)) \quad \text{és} \quad d^-(-f(-x)) = d^+(f(-x)),$$

és így

$$(D^-f)(-x) \leq (d^+f)(-x),$$

ezért $(D^-f)(x) \leq (d^+f)(x)$ ($x \in (a, b)$) is majdnem mindenütt teljesül. Ezt (10.4.1)-gyel, (10.4.2)-vel, illetve az előbbi definícióval összevetve kapjuk, hogy

$$0 \leq D^+f \leq d^-f \leq D^-f \leq d^+f \leq D^+f < \infty,$$

is következésképpen majdnem mindenütt teljesül, azaz az összes deriváltszámok végesek, és egyenlők egymással, ahogyan korábban azt állítottuk.

(10.4.1) bizonyítása. A továbbiakban alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$$E_\infty := \{x \in (a, b) \mid (D^+f)(x) = +\infty\}$$

$$E_C := \{x \in (a, b) \mid (D^+f)(x) > C\} \quad (C > 0).$$

Az (10.4.1)-es állítás azzal egyenértékű, hogy az E_∞ halmaz nullamértékű.

Ha E_∞ üres, akkor a bizonyítás készen van. Ha E_∞ nem üres, akkor $E_\infty \subseteq E_C$, ahol C tetszőlegesen nagy pozitív szám. Ha azonban egy x pontban $(D^+f)(x) > C$, akkor biztosan létezik $\xi > x$ hely, amelyre

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > C. \quad (10.4.3)$$

A $g(x) := f(x) - Cx$ ($x < \xi$) függvényre a $g(\xi) > g(x)$ egyenlőtlenség teljesül minden $x < \xi$ -re. A (10.4.3) egyenlőtlenség (mivel $\xi > x$) ugyanis ekvivalens a következővel

$$f(\xi) - f(x) > C(\xi - x) \Leftrightarrow f(\xi) - f(x) - C(\xi - x) > 0 \Leftrightarrow g(\xi) - g(x) > 0.$$

Tehát $E_C \subseteq E_g$, ahol E_g 10.4.3. Lemmában definiált halmaz, azaz E_C befoglalható páronként diszjunkt $\{(a_k, b_k) \mid k \in \Gamma\}$ intervallumok rendszerébe úgy, hogy $g(a_k) \leq g(b_k)$, azaz

$$f(a_k) - Ca_k \leq f(b_k) - Cb_k \Leftrightarrow C(b_k - a_k) \leq f(b_k) - f(a_k).$$

Ebből összegzéssel, illetve felhasználva azt, hogy egy monoton függvénynek a teljes intervallumon való növekedése nem lehet kisebb, mint a páronként diszjunkt részintervallumokon való növekedéseinek összege, kapjuk, hogy

$$C \sum_{k \in \Gamma} (b_k - a_k) \leq \sum_{k \in \Gamma} (f(b_k) - f(a_k)) \leq f(b) - f(a). \quad (10.4.4)$$

Az (10.4.4) egyenlőtlenségből látható, hogy az (a_k, b_k) intervallumok összhosszúsága a C szám elég nagyra való választásával tetszőlegesen kicsivé tehető. Tehát az E_∞ halmaz nullamértékű, azaz (10.4.1)-et bizonyítottuk.

⁴ Γ véges vagy végtelen indexhalmazt jelöl.

(10.4.2) bizonyítása. Legyen c, C két adott pozitív szám, úgy, hogy $c < C$, és E_{cC} jelölje az alábbi halmast

$$E_{cC} := \{x \in (a, b) \mid (d^- f)(x) < c < C < (d^+ f)(x)\}.$$

Először bizonyítsuk azt, hogy E_{cC} nullamértékű. Tekintsük először csak a $(d^- f)(x) < c$ feltételt. Ha a 10.4.3. Lemmát a $g(x) = f(-x) + cx$ függvényre a $(-b, -a)$ szakaszon alkalmazzuk, akkor a fentihez hasonló megfontolással kapjuk, hogy a feltételeknek eleget tevő pontok befoglalhatók páronként diszjunkt $\{(a_k, b_k), k \in \Gamma\}$ intervallumoknak olyan megszámlálható rendszerébe, amely intervallumok mindegyikére igaz:

$$f(b_k) - f(a_k) \leq c(b_k - a_k). \quad (10.4.5)$$

Másodszor tekintsük az (a_k, b_k) intervallumokon belül azon pontokat, ahol $d^+ > C$. Legyen $k \in \Gamma$ rögzített index. Alkalmazva a 10.4.3. Lemmát a $g(x) = f(x) - Cx$ függvényre az (a_k, b_k) intervallumon, azt kapjuk, hogy ezek a pontok befoglalhatók páronként diszjunkt $\{(a_{kl}, b_{kl}) \mid l \in \bar{\Gamma}\}$ intervallumok egy megszámlálható rendszerébe, amelyekre

$$C(b_{kl} - a_{kl}) \leq f(b_{kl}) - f(a_{kl}) \quad (l \in \bar{\Gamma}). \quad (10.4.6)$$

F monotonitását kihasználva összegzéssel kapjuk, hogy

$$C \sum_{l \in \bar{\Gamma}} (b_{kl} - a_{kl}) \leq \sum_{l \in \bar{\Gamma}} (f(b_{kl}) - f(a_{kl})) \leq f(b_k) - f(a_k).$$

Ekkor a (10.4.5) és (10.4.6) egyenlőtlenségeket figyelembe véve adódik, hogy

$$C \sum_{k \in \Gamma} \sum_{l \in \bar{\Gamma}} (b_{kl} - a_{kl}) \leq \sum_{k \in \Gamma} (f(b_k) - f(a_k)) \leq \sum_{k \in \Gamma} c(b_k - a_k) = c \sum_{k \in \Gamma} b_k - a_k.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\sum_1 = \{(a_k, b_k), k \in \Gamma\} \quad \text{és} \quad \sum_2 = \{(a_{kl}, b_{kl}), k \in \Gamma, l \in \bar{\Gamma}\} \quad \text{intervallum-rendszerek,}$$

$|\sum_1|$ és $|\sum_2|$ pedig ezen intervallumrendszerek összhosszúságai. Az eddigi gondolatmenet alapján fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$|\sum_2| \leq \frac{c}{C} |\sum_1|.$$

A két eljárást váltakozva ismételve az E_{cC} halmast lefedő intervallumrendszereknek egy

$$\sum_1, \sum_2, \dots, \sum_n, \dots$$

sorozatát kapjuk, amelyek mindegyikére igaz, hogy be van az előzőbe zárva, és

$$|\sum_{2n}| \leq \frac{c}{C} |\sum_{2n-1}| \leq \frac{c}{C} |\sum_{2n-2}|.$$

Így következik, hogy

$$|\sum_{2n}| \leq \left(\frac{c}{C}\right)^n |\sum_1| \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty.$$

Tehát E_{cC} bezárható tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumrendszerbe, azaz E_{cC} nullamértékű.

Futtassuk végig a c és C ($c < C$) számokat a pozitív $\mathbb{E}^*$ racionális számokon. Az ezekhez tartozó $x \in (a, b)$ találhatóan végtelen számú nullamértékű $(d^-f)(x) < (D^+f)(x)$ és $(D^+f)(x) < (d^-f)(x)$ pontba $c, C \in \mathbb{Q}$ teljesül (10.4.2), akkor ott $(d^-f)(x) < c < C < (D^+f)(x)$. Ekkor c és C közé beiktatható két racionális szám, c_1, c_2 , melyekre

$$(d^-f)(x) < c_1 < c_2 < C < (D^+f)(x).$$

Ekkor x része az $\mathbb{E}_{c_1, c_2}$ halmaznak, így $\mathbb{E}^*$ -nak is. Tehát azok a pontok, ahol (10.4.2) nem teljesül, valóban nullamértékű halmazt alkotnak. Ezzel bebizonyítottuk Lebesgue tételét folytonos monoton függvények esetére.

□

5. Monoton függvények differenciálhatósága

Ebben a fejezetben kiderül, hogy Lebesgue tétele akkor is teljesül, ha a folytonosság feltételét elhagyjuk. A monotonitás tehát szorosabb kapcsolatban van a differenciálhatósággal, mint a folytonosság.

Ha Lebesgue tételét nem folytonos monoton függvényekre akarjuk kiterjeszteni, akkor először a 10.4.3. Lemmát kell általánosítanunk. Elegendő olyan $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket tekintenünk, amelyeknél minden pontban léteznek a $g(x-0)$, $g(x+0)$ féloldali határértékek, és végesegek. Ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek az f monoton függvények, továbbá az $f(x) - Cx$ és $f(-x) + Cx$ függvények is. Az adott g függvényből származtassuk a G függvényt a következőképpen:

$$G(x) := \max\{g(x-0), g(x), g(x+0)\} \quad \text{ha } x \in (a, b);$$

$$G(a) := g(a+0);$$

$$G(b) := g(b-0).$$

A G függvényre a 10.4.3. lemma alábbi módosítása teljesül:

10.5.1. Lemma. Az (a, b) intervallumnak azon x pontjai, amelyekhez található olyan ξ , $(a < \xi < b)$ pont, hogy $G(x) < g(\xi)$, egy nyílt E halmazt alkotnak. Ha E nem üres, akkor olyan, megszámlálható sok (a_k, b_k) ($k \in \Gamma$) halmazra esik szét, amelyek mindegyikére

$$g(a_k + 0) \leq G(b_k)$$

teljesül.

Az általánosított lemma bizonyítása hasonlóképpen történik, mint folytonos g esetében, csak itt g maximuma helyett G maximumát kell felhasználnunk, továbbá azt, hogy G zárt intervallumon felveszi maximumát.

10.5.2. Megjegyzés. A tény, hogy az általánosított lemmában a g függvény mellett G függvény is szerepel, a tétel bizonyításában nem okoz lényeges változást. A két függvény a folytonossági pontokban megegyezik egymással. Mivel a szakadási pontok megszámlálhatóan sokan vannak, nullamértékű halmazt alkotnak, így a bizonyításban szereplő halmazokhoz bármikor hozzávehetők, illetve elhagyhatók.

Lebesgue tételének bizonyítása a folytonossági feltétel elhagyásával. A bizonyításban azt használjuk fel, hogy minden monoton növekedő függvény felbontható két növekedő függvény összegére, oly módon, hogy az egyik folytonos, a másik pedig tiszta ugrófüggvény, melyet a 10.2.5. Tételben bizonyítottunk. Tiszta ugrófüggvényre a tétel egyszerűbben bizonyítható.⁵ A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy egy tiszta ugrófüggvény differenciálhányadosa majdnem mindenütt létezik, és 0 -val egyenlő.

⁵Ez a megjegyzés Császár Ákostól származik. Császár Ákos Kossuth-díjas magyar matematikus, egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja. Kutatási területei a valós függvénytan és az általános topológia. A „big five”-nak nevezett öt matematikus egyike, nevéhez fűződik a Császár-féle test megalkotása.

$D^+ > C$ ($C \in \mathbb{R}^+$), ekedő, tiszta ugrófüggvény. Tekintsük azoknak a pontoknak a halmazát, ahol f folytonos, és

Tetszőleges $f = f_1 + f_2$ számhoz található az f_1 függvénynek oly f_2 két növekvő, tiszta ugrófüggvény összegére való felbontása, hogy f -nek véges sok ugrása van, pedig elegendő tesz a következő feltételnek:

$$f_2(b) - f_2(a) < C\varepsilon.$$

Ez abból következik, hogy az f függvény ugrásai konvergens sort alkotnak, ezért létezik ennek a sornak olyan véges részletösszege, amelyre a maradék kisebb, mint $C\varepsilon$.

Mivel véges sok ugrási helyet kivéve f differenciálhányadosa mindenütt 0, ezért a fent értelmezett E_C halmaz része az f_2 függvényhez tartozó E'_C halmaznak. Az általánosított lemmát alkalmazva a $g(x) = f_2(x) - Cx$ ($x \in (a, b)$) függvényre, hasonló megfontolással, mint ami a (10.4.4.) egyenlőtlenséghez vezetett, adódik, hogy E'_C , így E_C is bezárható nyílt (a_k, b_k) intervallumoknak egy olyan rendszerébe, amelyek mindegyikére teljesül, hogy

$$C \sum_{k \in I} (b_k - a_k) \leq f_2(b) - f_2(a) < C\varepsilon.$$

Ennek az intervallumrendszernek az összhosszúsága tehát kisebb, mint ε . Ebből következik, hogy E_C nullamértékű. Ha C -t átfuttatjuk egy 0-hoz tartó számsorozaton, akkor a megfelelő E_C halmazok egyesítése is nullamértékű. Tehát azok a pontok, ahol f folytonos és $D^+ > 0$, nullamértékű halmazzal alkotnak. Tehát majdnem mindenütt $D^+ = 0$, és következésképpen $d^+ = 0$. Mivel $-f(-x)$ is tiszta ugrófüggvény, ezért majdnem mindenütt $d^- = D^- = 0$. Így majdnem mindenütt $f' = 0$, amit igazolni akartunk.

Ezzel bizonyítottuk Lebesgue tételét monoton függvények esetére.

□

10.5.3. Megjegyzés. Mivel minden korlátos változású függvény felírható két monoton növekedő függvény különbségeként, ezért ezzel azt is beláttuk, hogy minden korlátos változású függvény majdnem mindenütt differenciálható.

6. Többváltozós függvények

Az integrálfogalom felépítését csak egyváltozós függvények esetén mutattuk be. Ebben a fejezetben kétváltozós függvényeket tekintünk. A többváltozós eset tárgyalása hasonlóan történik.

Az integrál felépítésében utánozhatjuk az egyváltozós esetre adott értelmezéseket és eljárásokat, csak most kétváltozós lépcsősfüggvényekből indulunk ki. A kétdimenziós intervallumok téglalapok lesznek, melyeket két egydimenziós téglalap Descartes-szorzatából kapunk. A nullamértékű halmaz és a majdnem mindenütt fogalmak szintén a kétdimenzióra vonatkozó értelemben veendők.

Az integrálelmélet felépítése így változás nélkül átmásolható az egyváltozós esetről.

Felmerül a kérdés, hogy az így értelmezett integrál kiszámítható-e az egyes változók szerint való szukcesszív integrálással is, úgy, ahogy azt alapozó kurzusokon folytonos függvények esetén már beláttuk.

Ehhez a kétdimenziós és egydimenziós nullhalmazok viszonyát kell tisztázni:

10.6.1. Tétel. Ha $E \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz nullamértékű, akkor majdnem minden, az $\mathcal{Y}$ tengellyel párhuzamos egyenesnek az E halmazzal vett metszete egydimenziós nullamértékű halmaz. A „majdnem minden” itt azt jelenti, hogy a kivételes egyenesek az $\mathcal{X}$ tengely egy egydimenziós nullamértékű halmazán haladnak keresztül.

Megjegyezzük, hogy a tétel nyilván akkor is teljesül, ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ szerepét felcseréljük.

A tétel bizonyítása megtalálható [13]-ben.

Ennek felhasználásával be tudjuk bizonyítani Fubini-tételt:

10.6.2. Tétel (Fubini-Tétele). Legyen $R = [a, b] \times [c, d]$ véges vagy nem véges téglalap az $\mathbb{R}^2$ térben. Az R téglalapon értelmezett, integrálható f függvény integrálja kiszámítható az egyes változók szerint való szukcesszív integrálással:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Bizonyítás. Az első egyenlőséget fogjuk belátni. A fordított sorrendű integrálás hasonlóan igazolható. Legyen először f C_1 -beli függvény, tehát olyan R -en értelmezett függvény, melyhez van lépcsősfüggvényeknek olyan növekedő $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ bsorozata, mely majdnem mindenütt (azaz egy $E \subseteq \mathbb{R}^2$ nullamértékű halmaz kivételével) f -hez tart, továbbá

$$\iint_R \varphi_n(x, y) dx dy \rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy \quad (n \rightarrow \infty). \quad (10.6.1)$$

A lépcsősfüggvényekre a szukcesszív integrálás szabálya nyilvánvalóan teljesül, tehát

$$\iint_R \varphi_n(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi_n(x, y) dy \right) dx \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (10.6.2)$$

Beppo Levi tételét alkalmazva (10.6.1)-ből és (10.6.2)-ből kapjuk, hogy a

$$\Phi_n(x) = \int_c^d \varphi_n(x, y) dy$$

függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál és

$$\int_a^b \Phi_n(x) dx \rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy \quad (n \rightarrow \infty). \quad (10.6.3)$$

Rögzítsük az x tengely egy olyan ξ pontját, amelyre $\Phi_n(\xi)$ konvergál és amelyre az $x = \xi$ egyenes az E síkbeli nullhalmazt egy lineáris nullhalmazban metszi. Minden ilyen ξ pont esetében tehát

$$\varphi_n(\xi, y) \rightarrow f(\xi, y) \quad (n \rightarrow \infty)$$

majdnem minden y -ra, és az

$$\int_c^d \varphi_n(\xi, y) dy$$

integrálok sorozata konvergens. Beppo Levi tétele szerint ebből következik, hogy $f(\xi, \cdot)$, mint y függvénye integrálható, és

$$\Phi_n(\xi) = \int_c^d \varphi_n(\xi, y) dy \rightarrow \int_c^d f(\xi, y) dy \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beppo Levi tételét ismét alkalmazva (10.6.3) alapján kapjuk, hogy a majdnem minden x -re értelmezett

$$\int_c^d f(x, y) dy$$

függvény x szerint integrálható és integrálja egyenlő $\iint_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy$ -nal.

Míthogy minden integrálható C_2 -beli) függvény két C_1 -beli függvény különbségként állítható elő ebből az eredményből a C_2 -beli állítás azonnal következik.

□

11. fejezet - Irodalomjegyzék

- [1] Bagota Mónika - Németh József - Németh Zoltán: *Analízis II. feladatgyűjtemény*, Polygon, 2004.
- [2] Albert Bogess - Francis J. Narcowich: *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice Hall, 2001.
- [3] Császár Ákos: *Valós analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó 1999.
- [4] Járai Antal: *Modern alkalmazott analízis*, Typotex 2007.
- [5] Andrej N. Kolmogorov - Szergej V. Fomin (Andrei N. Kolmogorov - Sergei V. Fomin): *Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space*, Academic Press, New York, 1961.
- [6] Pál Jenő - Schipp Ferenc - Simon Péter: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- [7] Schipp Ferenc: *Fourier-analízis*, ELTE 2006.
- http://numanal.inf.elte.hu/schipp/FourierAnal/Fourier_Anal.pdf
- [8] Schipp Ferenc: *Fouriertől a komputer tomográfiáig*, Természet Világa 11(114), 1986
- [9] Schipp Ferenc: *Waveletek*, ELTE 2003.
- <http://numanal.inf.elte.hu/schipp/Jegyzetek/Waveletek.pdf>
- [10] Schipp Ferenc - William R. Wade - Simon Péter: *Walsh Series*, Taylor & Francis, 1990.
- [11] Endre Süli - David Mayers: *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2006.
- [12] Stoyan Gisbert - Takó Galina: *Numerikus módszerek I.*, Typotex, 2002.
- [13] Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénytörések*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.