

Laplace- és Fourier-transzformációk

Németh, Zoltán

Szabó, Tamás

Laplace- és Fourier-transzformációk

Németh, Zoltán
Szabó, Tamás

Publication date 2013

Szerzői jog © 2013 Szegedi Tudományegyetem

TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1 MSc Tananyagfejlesztés

Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz

Tartalom

Előszó	v
1. Fourier-sorok	1
1. A trigonometrikus interpoláció	1
2. Skaláris szorzatos terek	4
3. A trigonometrikus Fourier-sor fogalma	6
4. Néhány alapvető formula	10
5. A Fourier-sorfejtés alaptulajdonságai	14
6. A Fourier-sor konvergenciája	17
7. Tagonkénti integrálhatóság	21
8. A Fejér-összegzés	23
2. Feladatok	28
1. Sorfejtések, konvergencia	28
2. További feladatok	39
3. Alkalmazások	42
3. Más ortogonális rendszerek	45
1. A Rademacher- és a Walsh-rendszerek	45
2. A Haar-rendszer	47
3. Ortogonális polinomrendszerek	49
4. A Legendre-polinomok	52
5. A Legendre-Fourier sorfejtés egy alkalmazása	54
4. A Fourier-transzformáció	56
1. Bevezetés	56
2. Improprius integrálok	57
3. A Fourier-transzformált alaptulajdonságai	61
4. Differenciálás és integrálás	64
5. Az inverziós formula	67
6. A Fejér-összegzés	70
7. A Parseval-formula és az L^2 tér	73
5. Feladatok	78
1. Fourier-transzformáció	78
2. További feladatok	83
3. Alkalmazások	85
6. Laplace- transzformáció	89
1. Elemi tulajdonságok	89
2. Feladatok	95
3. Konvergencia	96
4. Feladatok	102
5. Az $F(s)$ transzformált függvény tulajdonságai	103
6. Feladatok	108
7. Az inverz Laplace- transzformáció	108
8. Feladatok	119
9. Derivált, integrálfüggvény, konvolúció és Dirac- delta	119
10. Feladatok	126
7. Alkalmazás	127
1. Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek	127
2. Feladatok	134
3. Polinom együtthatós lineáris differenciálegyenletek	135
4. Feladatok	139
5. Differenciálegyenlet- rendszerek	139
6. Feladatok	142
7. Differenciaegyenletek	143
8. Feladatok	146
9. Integrálegyenletek	147
10. Feladatok	149
11. Parciális differenciálegyenletek	149
12. Feladatok	152

8. Tesztsor	154
1. Teszt	154
2. Teszt	154
3. Teszt	154
4. Teszt	154
5. Teszt	154
6. Teszt	155
7. Teszt	155
8. Teszt	155
9. Teszt	155
10. Teszt	155
11. Teszt	156
12. Teszt	156
13. Javító	156
14. Javító	156
9. Vizsgasor	158
1. Vizsga	158
2. Vizsga	158
3. Vizsga	158
10. Irodalom	160
11. Appendix	161

Előszó

A jelen digitális tananyag a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0025 számú, "Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz" című projekt részeként készült el.

A projekt általános célja a XXI. század igényeinek megfelelő természettudományos felsőoktatás alapjainak a megteremtése. A projekt konkrét célja a természettudományi mesterképzés kompetenciaalapú és módszertani megújítása, mely folyamatosan képes kezelni a társadalmi-gazdasági változásokat, a legújabb tudományos eredményeket, és az info-kommunikációs technológia (IKT) eszköztárát használja.



Ez a tananyag a Fourier-sorok és -transzformáció, valamint a Laplace-transzformáció alapjait tárgyalja.

Az alkalmazott matematikus mesterszakon tipikusan az "alkalmazott analízis", "analízis és alkalmazásai" tárgyakban szerepelnek (más témák mellett) ezek a területek is. Célunk elsősorban az volt, hogy ezekhez a kurzusokhoz készítsünk tananyagot.

Ugyanakkor fenti témakörök előkerülnek a fizikus, informatikus, mérnök informatikus képzésekben is, valamint természetesen a matematikus- és esetleg a matematikatanár-képzésben is. Célunk volt az is, hogy tananyagunk az ő számukra is használható legyen.

Tananyagot készítettünk, nem a témakör elméleti monográfiáját vagy az alkalmazások kimerítő ismertetését. Mivel matematika kurzusról van szó, az alkalmazásokat nem tárgyaljuk, csupán néhány feladatban mutatunk rá egy-két alkalmazási lehetőségre, mintegy kedvcsinálóként.

Munkánk során mindvégig szem előtt tartottuk, hogy amennyire ez lehetséges, próbáljuk a terület legfontosabb fogalmait, módszereit és eredményeit azok számára is kiemelni, összefoglalni, akik nem fogják a teljes elméletet részleteiben is elsajátítani.

Legfontosabb célunk az volt, hogy munkánk a témakörrel való ismerkedés kényelmesen használható segédanyaga legyen, remélhetőleg elég részletes ahhoz, hogy hatékonyan segítse az önálló tanulást. Nem törekedtünk feltétlenül a legáltalánosabb megfogalmazásokra, a legelegánsabb bizonyítások ismertetésére.

Jegyzetünk *aktív olvasónak* szól: papírral, ceruzával, (esetleg digitális helyettesítőikkel) felszerelve célszerű olvasni, feldolgozni. Az illusztratív példákat, feladatokat mindenképpen javasoljuk önállóan is megoldani. A közölt mintamegoldások, útmutatások vagy csak végeredmények nagy segítség lehetnek, de az önálló munkát nem pótolják.

Itt jegyezzük meg, hogy az olvasótól nem csak ezt az aktivitást várjuk el, hanem feltételezünk bizonyos előismereteket is. A megcélzott felsőbbéves hallgatók ezekkel általában rendelkeznek; ám szükség lehet fogalmak vagy módszerek felelevenítésére is.

Köszönettel fogadjuk, ha a jegyzet olvasói, használói megtisztelnak észrevételeikkel, javaslataikkal (az szbtmsz@math.u-szeged.hu, znemeth@math.u-szeged.hu címeiken). A www.math.u-szeged.hu/~nemeth internetcímen elérhető lesz az ismert sajtóhibák listája.

Köszönetünket fejezzük ki dr. Lajkó Károlynak gondos lektori munkájáért és értékes javaslataiért; valamint dr. Vajda Róbertnek és Barics Krisztiánnak az ábrák, animációk készítésében, Forróné Szél Ildikónak a nyelvi lektorálásban és Varga Ferencnének a forrásanyag beszerzésében nyújtott segítségéért.

Szeged, 2013. Szabó Tamás, Németh Zoltán

1. fejezet - Fourier-sorok

1. A trigonometrikus interpoláció

1.1.1. Definíció. A

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad a_k, b_k \in \mathbf{R}$$

alakú kifejezéseket n -ed fokú trigonometrikus polinomnak nevezzük. (Pontosan n -edfokú, ha $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$.)

1.1.2. Feladat. Igazoljuk, hogy a trigonometrikus polinomok összege, különbsége és szorzata is trigonometrikus polinom, valamint szorzáskor a fokszámok összeadódnak. Igazoljuk, hogy az n -edfokú trigonometrikus polinomok a $\sin t$ és a $\cos t$ függvényeknek (algebrai értelemben) n -edfokú polinomjai.

Megoldás. A fokszámokról szóló állítás a

$$\cos nt \cos kt = \frac{1}{2}(\cos(n+k)t + \cos(n-k)t),$$

$$\sin nt \sin kt = \frac{1}{2}(\cos(n-k)t - \cos(n+k)t),$$

$$\sin nt \cos kt = \frac{1}{2}(\sin(n+k)t + \sin(n-k)t)$$

azonosságokból következik.

A másik állításhoz elég belátni, hogy

$$\cos nt = n \cos^n t + \alpha_{n-2} \cos^{n-2} t + \alpha_{n-4} \cos^{n-4} t + \dots,$$

$$\sin nt = \sin t (n \cos^{n-1} t + \beta_{n-3} \cos^{n-3} t + \beta_{n-5} \cos^{n-5} t + \dots).$$

Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítások $n = 1$ -re nyilván igazak. Tegyük fel valamely n -re. Ekkor

$$\begin{aligned} \cos(n+1)t &= \cos nt \cos t - \sin nt \sin t \\ &= (n \cos^n t + \alpha_{n-2} \cos^{n-2} t + \dots) \cos t - \sin^2 t (n \cos^{n-1} t + \dots) \\ &= (n \cos^n t + \alpha_{n-2} \cos^{n-2} t + \dots) \cos t - (1 - \cos^2 t)(n \cos^{n-1} t + \dots) \\ &= (n+1) \cos^{n+1} t + \gamma_{n-1} \cos^{n-1} t + \gamma_{n-3} \cos^{n-3} t + \dots, \end{aligned}$$

a sinusos állítás hasonlóan bizonyítható.

A polinomokat pontosan is meghatározhatjuk:

$$\begin{aligned} \cos nt + i \sin nt &= (\cos t + i \sin t)^n \\ &= \cos^n t + \binom{n}{1} \cos^{n-1} t (i \sin t) + \dots + (i \sin t)^n \\ &= \left(\cos^n t - \binom{n}{2} \cos^{n-2} t \sin^2 t + \dots \right) \\ &\quad + i \left(\binom{n}{1} \cos^{n-1} t \sin t - \binom{n}{3} \cos^{n-3} t \sin^3 t + \dots \right) \end{aligned}$$

A részleteket az olvasóra bizzuk.

//

A továbbiakban legyen $p(t)$ egy n -edfokú trigonometrikus polinom; és tekintsük a

$$\theta_k := k \frac{2\pi}{m}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

"alappontokat" a $[0, 2\pi]$ intervallumon, ahol $m \geq n+1$.

1.1.3. Tétel. *A trigonometrikus polinom konstans tagjára*

$$a_0 = \frac{p(\theta_0) + p(\theta_1) + \dots + p(\theta_{m-1})}{m}.$$

Bizonyítás. a) Abban a speciális esetben, ha $p(t) = \sin \ell t$ ($0 \leq \ell \leq n$), az állítás nyilván igaz, hiszen az $\ell\theta_k$ és $\ell\theta_{m-k}$ pontok a $\ell\pi$ -re szimmetrikusan helyezkednek el, így a számlálóban a sinusok összege páronként 0 (ha m páros, a középső tag $\sin \ell\pi = 0$.)

b) Vizsgáljuk a $p(t) = \cos \ell t$ esetet. Az ismert

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

formulában (l. 1.4.5.) legyen $x = 2\ell\pi m$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos \frac{2\ell\pi}{m} + \cos 2\frac{2\ell\pi}{m} + \dots + \cos(m-1)\frac{2\ell\pi}{m} \\ = \frac{\sin(2m-1)\frac{\ell\pi}{m}}{2 \sin \frac{\ell\pi}{m}} = \frac{\sin(2\ell\pi - \frac{\ell\pi}{m})}{2 \sin \frac{\ell\pi}{m}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Láttuk, hogy az állítás igaz külön-külön az $a_0, a_1 \cos 1t, b_1 \sin 1t, \dots, a_n \cos nt, b_n \sin nt$ tagokra; ekkor az összegükre, azaz az általános trigonometrikus polinomra is igaz.

//

1.1.4. Tétel. *Legyen*

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

egy trigonometrikus polinom és legyenek az alappontok

$$\theta_k := k \frac{2\pi}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Ekkor a polinom együtthatóira teljesül, hogy

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_l), \\ a_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_l) \cos k\theta_l, \quad b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_l) \sin k\theta_l. \end{aligned}$$

???

Bizonyítás. Az a_0 -ra vonatkozó állítás az előző tétel, az $m = 2n+1$ választással. Tekintsük a $p(t) \cos kt$ és a $p(t) \sin kt$ polinomokat, ezek foka $n+k$ és konstans tagjuk éppen $\frac{1}{2}a_k$, illetve $\frac{1}{2}b_k$. (Például a $p(t) \cos kt$ szorzást elvégezve és a tagokat rendezve,

$$a_l \cos lt \cos kt = \frac{1}{2} a_l (\cos(l+k)t + \cos(l-k)t),$$

$n + k \leq 2n < 2n + 1 = m$ tagból adódhat.) Ezt észrevéve, tételünk az előző tételből adódik (, tehát a tétel csakugyan alkalmazható).

//

Az együtthatókra kapott kifejezéseket felhasználva, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_l) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_l) \cos k\theta_l \cos kt + \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_k) \sin k\theta_l \sin kl \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_k) \left(1 + 2 \cos(t - \theta_k) + 2 \cos 2(t - \theta_k) + \cdots + 2 \cos n(t - \theta_k) \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_k) \frac{\sin(2n+1) \frac{(t-\theta_k)}{2}}{\sin \frac{(t-\theta_k)}{2}} \end{aligned}$$

(ismét felhasználtuk a 1.4.5. formulát).

Vegyük észre, hogy ez a képlet analóg az algebrai polinomokkal való Lagrange-féle interpolációs képlettel: most a sinusos törtek játsszák az alapfüggvények szerepét.

Bár igazából nincs rá alapunk, de intuitíve indokolt lehet, hogy az alappontok sűrítésével egyfajta határhelyzetben folytonos eredményekhez jussunk.

A $[0, 2\pi]$ intervallumot a θ_k alappontjaink $2n+1$ egyenlőközű részre osztják, $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{2\pi}{2n+1}$, így ha $n \rightarrow \infty$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_l) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{2n} p(\theta_l) (\theta_{k+1} - \theta_k) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) dt, \end{aligned}$$

így

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) dt$$

írható; hasonlóan

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(t) \sin kt dt,$$

valamint

$$p(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{(t-u)}{2}}{\sin \frac{(t-u)}{2}} du.$$

Később látni fogjuk, hogy ezek a képletek csakugyan érvényesek, a trigonometrikus polinomoknál általánosabb függvényosztályokra is.

2. Skaláris szorzatos terek

Legyen V egy vektortér (a valós számok felett), amelyben értelmezve van egy skaláris szorzás és érvényes a Cauchy-kritérium (azaz a tér teljes). (Mi a végtelen dimenziós esetet fogjuk vizsgálni, ezeket a tereket Hilbert-térnek hívják; ilyen az L^2 tér.)

A skaláris szorzat egy kétváltozós művelet, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbf{R}$ az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V : \langle x, y \rangle &\geq 0, \quad " = " \Leftrightarrow x = o, \\ \forall x, y \in V : \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle, \\ \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbf{R} : \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle, \\ \forall x, y, z \in V : \langle x, (y + z) \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

A skaláris szorzat természetes módon definiál egy normát és egy távolságfogalmat:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad d(x, y) := \|x - y\|,$$

ez pedig egy konvergenciafogalmat: $x_n \rightarrow x$ pontosan akkor, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \forall n > \nu : \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Itt nyilván $x_n, x \in V$; ez az úgynevezett *normában vett konvergencia*.

1.2.1. Definíció. A vektortér elemeinek (ϕ_n) rendszerét *ortogonális rendszernek* nevezzük, ha

$$\langle \phi_n, \phi_k \rangle = 0, \quad \text{ha } n \neq k,$$

és *ortonormált rendszernek* nevezzük, ha

$$\langle \phi_n, \phi_k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq k, \\ 1, & \text{ha } n = k. \end{cases}$$

Világos, hogy egy ortogonális rendszer bármely véges részrendszere lineárisan független. (Az $a_1\phi_1 + \dots + a_k\phi_k + \dots + a_n\phi_n = o$ egyenletet skalárisan szorozva ϕ_k -vel, adódik, hogy $a_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).)

Tekintsük valamely (ϕ_n) ortonormált rendszer $\phi_1, \dots, \phi_N$ részrendszerét, ezeknek az összes lineáris kombinációja meghatározza a tér egy altérét. Legyen $f \in V$ rögzített. Vajon az altérnek melyik eleme van f -hez a legközelebb? (Mivel a kifeszített altér zárt halmaz, van ilyen legközelebbi elem; de ez úgyis ki fog derülni.)

Az altér egy eleme és az f különbségének normanégyzetét fölírva és a skaláris szorzás tulajdonságait használva,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f - (d_1\phi_1 + \dots + d_N\phi_N), f - (d_1\phi_1 + \dots + d_N\phi_N) \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{n=1}^N 2\langle f, d_n\phi_n \rangle + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \langle (d_n\phi_n, d_k\phi_k) \rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N 2d_n \langle f, \phi_n \rangle + \sum_{n=1}^N d_n^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 + \sum_{n=1}^N [\langle f, \phi_n \rangle - d_n]^2. \end{aligned}$$

Látható, hogy az utolsó sor pontosan akkor minimális, ha minden n -re

$$d_n = \langle f, \phi_n \rangle.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a kifeszített altérben a "legközelebbi" elem nem más, min az f merőleges vetülete.

1.2.2. Definíció. A továbbiakban legyen $c_n := \langle f, \phi_n \rangle$, és tekintsük az

$$f \sim \sum c_n \phi_n$$

sort. Ez az f elem általános Fourier-sora.

1.2.3. Tétel. Az így definiált Fourier-sor a V térben normában konvergens.

Bizonyítás. Láttuk az előbb, hogy

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 + (\text{nemnegatív tagok}),$$

tehát bármely N értékre

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty;$$

és

$$\left\| \sum_{n=p}^{p+q} c_n \phi_n \right\|^2 \leq \sum_{n=p}^{p+q} c_n^2.$$

Mivel a V térben érvényes a Cauchy-kritérium, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n =: g$$

sor konvergens (a V tér normájában). Az is kiderült, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|^2,$$

ez a Bessel-egyenlőtlenség.

//

1.2.4. Definíció. A (ϕ_n) ortonormált rendszert teljesnek nevezzük, ha nincs rájuk merőleges nemnulla elem, azaz, ha $g \in V$ olyan, hogy $\forall n : \langle g, \phi_n \rangle = 0$, akkor $g = 0$.

1.2.5. Tétel. ??? Legyen (ϕ_n) egy teljes ortonormált rendszer a V teljes skaláris szorzatos térben. Legyen $f \in V$ és $c_n := \langle f, \phi_n \rangle$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n = f$$

a konvergenciát a V normájában értve, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \|f\|^2.$$

A második állítás az ún. Parseval-formula.

Bizonyítás. A sor összege (normában értve) a fentiek szerint létezik, legyen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n = g.$$

Bármely k -ra

$$\langle f - g, \phi_k \rangle = \left\langle f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \phi_k \right\rangle = \langle f, \phi_k \rangle - c_k = 0$$

a rendszer teljessége miatt $g = f$. Ha ezt tudjuk,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \right\rangle \\ &= \sum_{n,k=1}^{\infty} c_n c_k \langle \phi_n, \phi_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \end{aligned}$$

a rendszer ortonormáltsága miatt.

//

3. A trigonometrikus Fourier-sor fogalma

A továbbiakban olyan függvényekről lesz szó, amelyek a valós egyenesen értelmezettek és 2π -periodikusak. Ez ekvivalens azzal, hogy valamely 2π hosszúságú intervallumon (például $[-\pi, \pi)$ -n vagy $[0, 2\pi)$ -n) adjuk meg a függvényt. Egy formális definíció a következő lehet.

Legyen $\mathbf{R}$ a valós számok, $2\pi\mathbf{Z}$ pedig a $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ alakú számok additív csoportja. Jelöljük $\mathbf{T}$ -vel az $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ faktorcsoportot és vizsgáljuk a $\mathbf{T}$ -n értelmezett függvényeket. Ez a $\mathbf{T}$ (az ún. egydimenziós tórusz) természetes módon azonosítható a $[-\pi, \pi)$ intervallummal; és legyen

$$\int_{\mathbf{T}} f(t) dt := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

azaz $\mathbf{T}$ -n a Lebesgue-mérték a számegyenesen vett mérték értelemszerű megszorítása. Az integrálás fontos tulajdonsága az eltolás-invariancia:

$$\int_{\mathbf{T}} f(t) dt = \int_{\mathbf{T}} f(t - \tau) dt, \quad \text{azaz} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) dx.$$

Tekintsük az $L^2(\mathbf{T})$ függvényteret, a

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) g(t) dt$$

skaláris szorzattal és az

$$\|f\| := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt}$$

normával; és tudjuk, hogy ez teljes tér is. (A mérték normálása, azaz az $\frac{1}{2\pi}$ szorzó pusztán kényelmi szerepet játszik.)

Világos, hogy az

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

rendszer ortogonális; a következő szakaszban látjuk majd, hogy teljes is.

1.3.1. Feladat. Igazoljuk, hogy a fenti rendszer csakugyan ortogonális, határozzuk meg az elemek normáit.

Megoldás. Könnyen kiszámolható, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin t dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos t dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cdot \cos nt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)t + \cos(k-n)t \, dt = 0, \quad (k > n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cdot \sin nt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)t - \cos(k+n)t \, dt = 0, \quad (k > n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cdot \cos nt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-n)t + \sin(k+n)t \, dt = 0,$$

valamint

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dt = 1 (= \|\phi_1\|^2),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kt}{2} \, dt = \frac{1}{2} (= \|\phi_{2k}\|^2),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2kt}{2} \, dt = \frac{1}{2} (= \|\phi_{2k+1}\|^2),$$

//

Az ortogonális rendszert normálva, kapjuk a

$$1, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos 2t, \sqrt{2}\sin 2t, \dots, \sqrt{2}\cos nt, \sqrt{2}\sin nt, \dots$$

trigonometrikus rendszert a fenti sorrendben számozva.

Az előző szakaszban látottak szerint, képezzük a Fourier-együtthatókat:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt,$$

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sqrt{2} \cos kt \, dt,$$

$$c_{2k+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sqrt{2} \sin kt \, dt,$$

és a Fourier-sort:

$$f(x) \sim c_1 \cdot 1 + c_2 \sqrt{2} \cos x + c_3 \sqrt{2} \sin x + \dots$$

Mindenesetre ez a sor L^2 -normában az $f(x)$ függvényhez konvergens. Igazából nem ez a szokásos alak; de mielőtt azt felírnánk, vegyük észre, hogy a fenti együtthatók akkor is képezhetők, ha f -ről csak integrálhatóságot teszünk föl, hiszen a trigonometrikus rendszer függvényei mérhetőek és korlátosak (és két integrálható függvény közé eső mérhető függvény maga is integrálható).

Lássuk most már az igazi definíciót.

1.3.2. Definíció. Legyen f a $\mathbf{T}$ -n értelmezett integrálható függvény ($f \in L^1(\mathbf{T})$), és legyenek

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ekkor az

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

sor az f függvény Fourier- $a_n = 0$ nevezzük. ??? Egyszerűen belátható, hogy páros függvény esetében $b_n = 0$, páratlan függvény esetében minden $-re$.

Vegyük észre, hogy minden Fourier-sor egyben trigonometrikus sor is. Ez fordítva nem igaz, bár ez nem nyilvánvaló. Például a $\sum \sin(n!x)$ sor minden racionális x -ben konvergens, mégsem Fourier-sora egyetlen függvénynek sem. Egy más példát látunk majd a 1.7.2. feladatban.

A helyzet egy kicsit hasonló a hatványsor vs. Taylor-sor problémához. A fő kérdés, amit vizsgálni fogunk, most is az, hogy vajon mikor "állítja elő" a Fourier-sora a függvényt? A Fourier-sorok konvergenciája nehéz kérdés. A.N. Kolmogorov mutatta meg, hogy van olyan $f \in L$, amelynek Fourier-sora majdnem mindenütt divergens; Fejér Lipót pedig azt, hogy folytonos függvénynek is lehet a Fourier-sora divergens előre adott pontokban. L. Carleson tétele szerint azonban már $f \in L^2$ esetén a Fourier-sor majdnem mindenütt konvergens. Ezek az eredmények messze túlmutatnak jelen jegyzet keretein.

Az eddigiek alapján világos, hogy ha $f \in L^2$, akkor Fourier-sora a függvényhez az L^2 tér normájában konvergens. Később látni fogjuk, hogy a trigonometrikus rendszer teljes (l. 1.4.3.), így érvényes a Parseval-formula is, amely a normáló tényezők összevonása után az

$$\int_{\mathbf{T}} (f(t))^2 dt = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

alakba írható.

Komplex jelölést használva valamivel szimmetrikusabb formulákat kaphatunk.

1.3.3. Definíció. Legyen f a $\mathbf{T}$ -n értelmezett integrálható függvény, és legyen

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ekkor az

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

sor az f függvény Fourier-sora komplex alakjának nevezzük.

Ebben a definícióban a két irányban végtelen sor összegét az

$$s_n := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

részletösszegek konvergenciája segítségével definiáljuk. A $\phi_k(t) := e^{-ikt}$, $k \in \mathbf{Z}$ függvények ortonormált rendszert alkotnak, ezt is szokás trigonometrikus rendszernek nevezni.

1.3.4. Feladat. Határozzuk meg a kapcsolatot az a_k , b_k , $\widehat{f}(k)$ együtthatók között.

Megoldás. Mivel $e^{-ikt} = \cos kt - i \sin kt$ és $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$, nyilván $\widehat{f}(k) = a_k - ib_k$ és $2a_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)$, $2ib_k = \widehat{f}(-k) - \widehat{f}(k)$.

//

1.3.5. Feladat. Gondoljuk végig, hogyan változnak meg a 1.2. szakasz állításai komplex jelölésrendszerben.

Megoldás. A legfontosabb változások: a skaláris szorzat szimmetriája helyébe $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, s így c_n^2 helyébe $|c_n|^2 = c_n \bar{c}_n$ kerül; továbbá komplex értékű függvények skaláris szorzatát a

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

képlettel értelmezzük.

//

1.3.6. Feladat. ??? Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\pi-t}{2}, & \text{ha } 0 < t \leq \pi, \\ \frac{-\pi-t}{2}, & \text{ha } -\pi \leq t < 0, \\ 0, & \text{ha } t = 0, \end{cases}$$

függvényt.

Megoldás. A függvény páratlan, tehát a cosinus-együtthatók eltűnnek. A sinus-együtthatók

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nt \, dt \quad u = \frac{\pi-x}{2}, v = -\frac{\cos nt}{n} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi-x}{2} \frac{-\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} \, dt \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi-x}{2} \frac{\sin nt}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

tehát a keresett sor

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

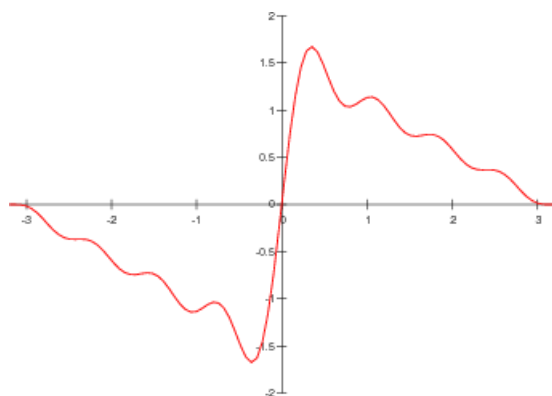
//

A Parseval-formulát fölírva, kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi-t}{2} \right)^2 \, dt = \frac{1}{6} \pi^3 = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right),$$

azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$



Az s_n részletösszeg

A Dirichlet-kritériummal könnyen látható, hogy ez a sor mindenütt konvergens ($\frac{1}{n} \downarrow 0$ és $\sin t + \dots + \sin nt$ korlátos); de vajon mi a határértéke? Az ábra azt sugallja, talán a függvény, de ezt még nem tudjuk. A sor L^2 -

normában közelít a függvényhez, de ez nem jelent pontonkénti konvergenciát. (l. a 1.6.10. feladat megoldását is.)

Dirichlet-kritérium: Ha $a_n \downarrow 0$ monoton csökkenő; továbbá b_n olyan sorozat, hogy $\exists M \forall n : |b_1 + b_2 + \dots + b_n| \leq M$, akkor a $\sum a_n b_n$ sor konvergens.

4. Néhány alapvető formula

1.4.1. Tétel. *Integrálható függvény Fourier-együtthatói 0-hoz tartanak.*

Ez a tétel a későbbiekben annyira fontos lesz, hogy több változatban is bebizonyítjuk. Először a Riemann-integrál fogalomkörén belül, még hozzá azért, mert így mondanivalónk egy fontos része azok számára is érthető marad, akik esetleg nem ismerik az integrálás Lebesgue-féle elméletét.

Bizonyítás. A cosinus-együtthatókra bizonyítunk, a sinusos hasonló. Azt akarjuk belátni, hogy

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \right| \rightarrow 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Osszuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumot k egyenlő részre a $\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ osztópontokkal. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(x_i) + f(x_i)) \cos nt \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(x_i)) \cos nt \, dt \right| \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) \cos nt \, dt \right| =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

A Riemann-integrálnál szokásos jelöléssel minden $x_{i-1} \leq t \leq x_i$ esetén

$$m_i \leq f(t) \leq M_i \quad \text{és} \quad m_i \leq f(x_i) \leq M_i,$$

mivel $|\cos nt| \leq 1$, könnyen látható, hogy az első integrálra

$$I_1 \leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i) \, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

ha az n elég nagy, az oszcillációs kritérium szerint.

Mivel f integrálható, korlátos is. Legyen $|f(x)| \leq M$, ekkor

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) \cos nt \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k |f(x_i)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos nt \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k |f(x_i)| \left| \left[\frac{\sin nt}{n} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \right| \leq \frac{1}{\pi} k M \frac{2}{n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha az n elég nagy.

Beláttuk tehát, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan ν , hogy bármely $n > \nu$ indexre $I_1 + I_2 < 2\varepsilon$, amiből a tétel adódik.

A következő bizonyítás már $f \in L$ esetében is érvényes.

Bizonyítás. Az állítás nyilván igaz trigonometrikus polinomokra, hiszen ezek Fourier-együtthatói elég nagy (a fokszámuknál nagyobb) L -re mindig 0-k. Az általános esetben használjuk fel, hogy a trigonometrikus $\varepsilon > 0$ -ok halmaza sűrű -berp (Ezt pl. Weierstrass $\|f - p\| < \varepsilon$ és tételéből tudjuk.) Ez azt jelenti, hogy adott esetén találhatunk olyan polinomot, amelyre

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - p(t) + p(t)) \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - p(t)) \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos nt \, dt. \end{aligned}$$

Itt a második tag 0-hoz tart, mert trigonometrikus polinom Fourier-együtthatója. Az első tagra pedig

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - p(t)) \cos nt \, dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)| \, dt \leq 2\|f - p\| < \varepsilon.$$

Tehát $0 \leq \limsup |a_n| \leq \varepsilon$, ebből $a_n \rightarrow 0$ adódik. A $b_n \rightarrow 0$ állítás hasonlóan bizonyítható.

A következő tétel, az ún. *Riemann- Lebesgue lemma*, még általánosabb feltételek mellett is igaz.

1.4.2. Tétel. Legyen f integrálható valamely (a, b) -n $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$. Legyen h az egész $\mathbf{R}$ -en korlátos, mérhető függvény, méghozzá olyan, hogy

$$\frac{1}{c} \int_0^c h(x) \, dx \rightarrow 0 \quad (|c| \rightarrow \infty).$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x) h(\omega x) \, dx \rightarrow 0 \quad (|\omega| \rightarrow \infty)$$

(az integrál h korlátossága miatt biztosan létezik). ???

Bizonyítás. Legyen f először egy karakterisztikus függvény, azaz

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\infty \leq a \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq b \leq \infty, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x) h(\omega x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} h(\omega x) \, dx = \int_0^{\beta} - \int_0^{\alpha},$$

és

$$\int_0^{\beta} h(\omega x) \, dx = \int_0^{\omega\beta} h(u) \frac{1}{\omega} \, du = \beta \frac{1}{\beta\omega} \int_0^{\omega\beta} h(u) \, du \rightarrow 0$$

és hasonlóan $\int_0^{\alpha} h(\omega x) \, dx \rightarrow 0$ a h függvényre tett feltételek miatt.

Karakterisztikus függvényekre tehát igaz az állítás, nyilván igaz lépcsősfüggvényekre is (mert azok karakterisztikus függvények véges lineáris kombinációi).

Legyen most már f tetszőleges és $\varepsilon > 0$ adott; (a Lebesgue-integrál felépítéséből következik, hogy) van olyan s lépcsősfüggvény, amelyre

$$\int_a^b |f(x) - s(x)| \, dx < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)h(\omega x) dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - s(x) + s(x))h(\omega x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s(x)|M dx + \left| \int_a^b s(x)h(\omega x) dx \right|, \end{aligned}$$

ahol M a h függvény korlátja. A második tag kicsi, mert s lépcsősfüggvény; az első tag pedig legfeljebb $M\varepsilon$. Így

$$0 \leq \limsup \int_a^b f(x)h(\omega x) dx \leq (M+1)\varepsilon,$$

ha $|\omega| \rightarrow \infty$, s ezzel a tételt beláttuk.

Ebben a tételben h helyébe $\sin x$ -et vagy $\cos x$ -et írva, a h -ra megkövetelt "átlagoló tulajdonság" nyilván teljesül, így adódnak a Fourier-együtthatókról szóló tételek. De vegyük észre, hogy a h függvény lehet más is, lehet akár pozitív (például $1/|x|$, ha $|x| \geq 1$ és 1 , ha $0 \leq |x| \leq 1$).

A következő tételünk a trigonometrikus rendszer teljességét igazolja az L osztályban (mivel $\mathbf{T}$ korlátos, $L^2 \subseteq L$, így a rendszer L^2 -ben is teljes).

1.4.3. Tétel. Legyen $f \in L(\mathbf{T})$ olyan, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Ekkor $f(x) = 0$ majdnem mindenütt. ???

Bizonyítás. Először legyen f folytonos. Ha nem azonosan 0 , van olyan x_0 , hogy $f(x_0) = c \neq 0$. Legyen $g(x) := \frac{1}{c}f(x+x_0)$. Nyilván g is folytonos, és könnyen ellenőrizhető, hogy g is ortogonális a trigonometrikus rendszer elemeire, hiszen például

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx dx &= \frac{1}{c} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x) \cos(kx - kx_0) dx \\ &= \frac{1}{c} \cos kx_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \frac{1}{c} \sin kx_0 \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x) \sin kx dx = 0. \end{aligned}$$

Mivel g folytonos és $g(0) = 1$, van olyan δ , $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, hogy $|x| < \delta$ esetén $g(x) \geq \frac{1}{2}$. Legyen most $T(x) := \cos x - \cos \delta + 1$. Vegyük észre, hogy

$$T^n(x) \begin{cases} \geq 1, & \text{ha } 0 \leq |x| \leq \delta, \\ \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty), & \text{ha } \delta < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Mivel $T^n(x)$ egy n -edfokú trigonometrikus polinom, g ortogonális rá, tehát

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)T^n(x) dx = \int_{0 \leq |x| \leq \delta} + \int_{\delta < |x| \leq \pi} =: I_1 + I_2.$$

Azonban $I_1 \geq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\delta = \delta$; továbbá, Lebesgue majorált konvergencia tétele miatt $I_2 \rightarrow 0$. A kapott ellentmondás igazolja a tételt. Utolsó állításunk azért igaz, mert a $\delta < |x| \leq \pi$ halmazon $|T(x)| < 1$, így az integranduszt a $|g(x)|$ függvény majorálja, másrészt $T^n(x) \rightarrow 0$, tehát $g(x)T^n(x) \rightarrow 0$, és Lebesgue tétele szerint

$$\lim \int_{\delta < |x| \leq \pi} g(x)T^n(x) dx = \int_{\delta < |x| \leq \pi} 0 dx = 0.$$

Legyen most már $f \in L$ tetszőleges, és legyen

$$F_0(x) := \int_0^x f(t) dt, \quad F(x) := F_0(x) - \int_{-\pi}^{\pi} F_0(x) dx,$$

magyarul, F a f -nek az az integrálfüggvénye, amelynek az integrálja a $[-\pi, \pi]$ -n éppen 0. Ez az F függvény 2π -periodikus is, hiszen

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$$

(hiszen f ortogonális az 1-re). Tudjuk, hogy F abszolút folytonos (mert integrálfüggvény); ortogonális az 1-re, és a trigonometrikus rendszer többi elemeire is, hiszen például

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos kt dt = \left[F(t) \frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{n} dt = 0,$$

tehát az előzőek szerint $F'(x) = 0$ mindenütt. Mivel majdnem mindenütt $f(x) = F'(x)$, a tételt beláttuk.

1.4.4. Definíció. Legyen

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$$

az n -edik *Dirichlet-mag*.

1.4.5. Tétel. Ha $0 < |x| < \pi$, akkor

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

$$\text{és } D_n(0) = n + \frac{1}{2} \text{ ???}$$

Bizonyítás. Legyen $0 < x < \pi$. Felhasználva a $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)$ azonosságot, egy teleszkopikus összeget kapunk:

$$\begin{aligned} (2 \sin \frac{1}{2}x) D_n(x) &= \sin \frac{1}{2}x + 2 \sin \frac{1}{2}x \cos x + 2 \sin \frac{1}{2}x \cos 2x + \cdots + 2 \sin \frac{1}{2}x \cos nx \\ &= \sin \frac{1}{2}x + \sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x + \sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x + \cdots \\ &\quad + \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x \\ &= \sin(n + \frac{1}{2})x. \end{aligned}$$

(Hasonló összegek "zárt alakba írására" ez a módszer gyakran beválk.)

Vegyük észre, hogy D_n páros függvény.

1.4.6. Tétel.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás. Az első állítás világos, hiszen tagonként integrálva

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \pi + 0 + \cdots + 0.$$

A második állítás bizonyításához legyenek

$$I_k := \left[\frac{(6k-5)\pi}{6(n+\frac{1}{2})}, \frac{(6k-5)\pi}{6(n+\frac{1}{2})} \right].$$

Ezek az intervallumok 0 és π között vannak, hosszuk $\frac{4\pi}{6(n+\frac{1}{2})} \geq \frac{\pi}{2n}$ és $\forall x \in I_k$ esetén

$$|\sin(n + \frac{1}{2})x| \geq \frac{1}{2}, \quad |2 \sin \frac{1}{2}x| \leq x \leq \frac{(6k-1)\pi}{6n+3} \leq \frac{k}{n}\pi.$$

Ezekből

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx &\geq \sum_{k=1}^n \int_{I_k} |D_n(x)| dx \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{I_k} \frac{1}{2} \frac{k}{n} dx \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{n}{k} \frac{\pi}{2n} \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{I_k} \frac{1}{2} \frac{n}{k} \frac{\pi}{2n} dx \geq \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \frac{\pi}{4} \log n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

5. A Fourier-sorfejtés alaptulajdonságai

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolatok vannak a függvény és Fourier-együtthatóinak tulajdonságai között. Eredményeinket az egyszerűség kedvéért általában az $\widehat{f}(n)$ ($n = \dots, -1, 0, 1, \dots$) "kétirányú" sorozatra fogalmazzuk meg, az a_n, b_n cosinus- illetve sinus-együtthatókra vonatkozó formulák ebből könnyen adódnak.

1.5.1. Tétel. A Fourier-együtthatók képzése lineáris, azaz $f, g \in L^1(\mathbf{T})$ esetén

$$(\widehat{f+g})(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n), \quad (\widehat{\lambda f})(n) = \lambda(\widehat{f}(n)) \quad (\lambda \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}).$$

Igaz továbbá, hogy

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1}.$$

Bizonyítás. Állításaink a definícióból azonnal adódnak, hiszen az integrál lineáris, és mivel

$$|e^{-int}| = |\cos nt + i \sin nt| = (\cos^2 nt + \sin^2 nt)^{1/2} = 1,$$

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)| |e^{-int}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt = \|f\|. \end{aligned}$$

1.5.2. Definíció. Legyenek $f, g \in L^1(\mathbf{T})$. Konvolúciójuk az a $h := f * g$ függvény, amelyre

$$h(x) = (f * g)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(x-t)g(t) dt.$$

A h függvény szintén integrálható, és

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Belátjuk, hogy a definíció korrekt. Világos, hogy $F(x, t) := f(x-t)g(t)$ mint kétváltozós függvény, mérhető. Bármely rögzített t értékre F integrálható is (mint x függvénye, így

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |F(x, t)| dx \right) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(x-t)| dx \right) |g(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \|f\|_{L^1} |g(t)| dt \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Fubini tétele szerint az integrálás sorrendje fölcserélhető ($F(x, t)$ integrálható t szerint is mint egyváltozós függvény, majdnem minden x esetén), így valóban,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |h(x)| dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \left| \int_{\mathbf{T}} F(x, t) dt \right| dx \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} |F(x, t)| dx dt \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.\end{aligned}$$

1.5.3. Feladat. Igazoljuk, hogy a konvolúció kommutatív, asszociatív és az összeadásra disztributív művelet.

Megoldás. Az állítások helyettesítéses integrálással könnyen igazolhatók. Például a kommutativitás esetében legyen $x - t =: u$, ekkor $-dt = du$ és

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbf{T}} f(x - t)g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t) dt \\ &= \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(u)g(x - u)(-du) = \int_{\pi}^{-\pi} f(u)g(x - u)(-du) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x - u) du = \int_{\mathbf{T}} f(u)g(x - u) du = (g * f)(x).\end{aligned}$$

1.5.4. Tétel. Ha $f, g \in L^1$, akkor

$$(\widehat{f * g})(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).$$

Bizonyítás. Legyen, mint fent, $h := f * g$.

$$\begin{aligned}\widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} h(x)e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} f(x - t)g(t)e^{-in(x-t)}e^{-int} dt dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(x - t)e^{-in(x-t)} dx \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} g(t)e^{-int} dt = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).\end{aligned}$$

1.5.5. Definíció. Tekintsük azokat a $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ (komplex) számsorozatokat, amelyekre igaz, hogy

$$c_n \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Az ilyen sorozatok vektortérét c_0 sorozattérnek nevezzük, a

$$\|(c_n)\| := \max_n |c_n|$$

normával.

A konvergencia elemi tulajdonságai miatt a tér nyilván vektortér. A norma létezik (a (c_n) sorozat konvergens, tehát korlátos is), és a normatulajdonságok is könnyen ellenőrizhetők:

$$\begin{aligned}\max_n |c_n| \geq 0, \quad \max_n |c_n| = 0 &\Rightarrow \forall n : c_n = 0, \\ \max_n |\lambda c_n| &= \lambda \max_n |c_n|, \\ \max_n |c_n + d_n| &\leq \max_n (|c_n| + |d_n|) \\ &\leq \max_n ((\max_n |c_n|) + |d_n|) \leq (\max_n |c_n| + \max_n |d_n|).\end{aligned}$$

A Fourier-sorba fejtést fogjuk föl úgy, mint egy leképezést, ami az $f(t)$ függvényhez hozzárendeli az $\widehat{f}(n)$ sorozatot. (Nevezhetjük *diszkrét Fourier-transzformációnak*.) Mit tudunk erről a leképezésről?

Mindenesetre a hozzárendelés $L^1(\mathbf{T})$ függvénytérből a c_0 sorozattérbe képez és lineáris. Később látni fogjuk (lásd 1.7. és 1.8.), hogy *injektív, de nem szürjektív*, továbbá, a leképezés korlátos (abban az értelemben, hogy $\|\widehat{f}\|_{c_0} \leq \|f\|_{L^1}$).

Láttuk, hogy a leképezés függvények konvolúciójához a képek szorzását rendeli.

$\widehat{g}(n) = e^{-in\tau} \cdot \widehat{f}(n)$ gazoljuk, hogy "eltolás képe szorzás", pontosabban, ha $g(t) := f(t - \tau)$, akkor

Megoldás.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t - \tau) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-in\tau} \int_{\mathbf{T}} f(t - \tau) e^{-in(t-\tau)} dt.$$

1.5.7. Definíció. Tekintsük azokat a $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ (komplex) számsorozatokat, amelyekre igaz, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Az ilyen sorozatok vektorterét ℓ^2 sorozattérnek nevezzük, a

$$\|(c_n)\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

normával.

Legyenek $c = (c_n)$, $d = (d_n)_{\ell^2}$ -beli sorozatok. A Cauchy- Bunyakovszkij egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| |d_n| \leq \|c\|_{\ell^2} \|d\|_{\ell^2}.$$

Ebből adódik a tér linearitása és a norma szubadditivitása:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n + d_n|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 + 2|c_n d_n| + |d_n|^2 \leq (\|c\| + \|d\|)^2.$$

A többi tulajdonság is könnyen ellenőrizhető.

Vizsgáljuk most a (diszkrét) Fourier-transzformációt az $L^2(\mathbf{T})$ téren. Láttuk a 1.2. szakaszban, hogy ekkor a transzformáció az $L^2(\mathbf{T})$ függvénytérből a ℓ^2 sorozattérbe képez (hiszen $\sum c_k^2 < \infty$), *injektív és szürjektív is*, továbbá izometria (abban az értelemben, hogy $\|\widehat{f}\|_{\ell^2} = \|f\|_{L^2}$).

Az izometria a Parseval-formulából azonnal adódik (emlékeztetünk arra, hogy a normát az

$$\|f\|_{L^2} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

képlettel értelmeztük), hiszen az $\phi_n(t) := e^{int}$ függvények ortonormált rendszert alkotnak. Hasonlóan, ha

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \phi_n(t) \quad \text{és} \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) \phi_n(t),$$

akkor

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \widehat{g}(k) \phi_n(t) \phi_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \widehat{g}(n),$$

tehát a transzformáció az L^2 -beli skaláris szorzásnak a képek szorzását rendeli.

Ezeket a fontos képleteket megadjuk valós alakban is. Láttuk, hogy

$$\int_{\mathbf{T}} (f(t))^2 dt = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right),$$

ez adódik abból is, hogy $\widehat{f}(k) = a_k - ib_k$, így

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

valamint, ha

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad g \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

akkor

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

6. A Fourier-sor konvergenciája

Pontonkénti konvergenciát fogunk vizsgálni, tehát azt, hogy egy adott x pontban konvergencia-e a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

sor. Ennek részletösszege, felhasználva, hogy az integrál eltolás-invariáns és a Dirichlet-mag páros),

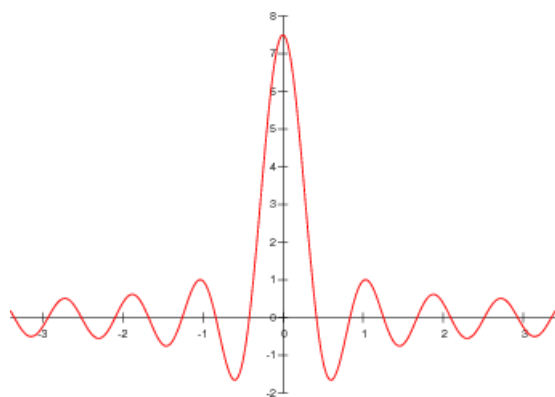
$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt} dt \\ &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} e^{ikx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + \sum_{k=1}^n (e^{-ik(x-t)} + e^{ik(x-t)}) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Mi lehet s_n határértéke? vegyük szemügyre a Dirichlet-magot.

A "görbe alatti terület" mindig π (lásd 1.4.5.), ám a 0-ban a magassága $n + \frac{1}{2}$; ez úgy lehet, ha a mag egy magas és keskeny "tüske", azaz az állandó súlya egyre inkább az origóban összpontosul. Így azt várhatjuk, hogy egy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) D_n(t) dt$$

típusú integrálátlag határértéke $\phi(0)$ lehet.



A D_7 magfüggvény

Természetesen ez nem bizonyító erejű érvelés. (Mielőtt pontosítanánk, vegyük észre a gondolatmenet gyöngé pontját: 1.4.5. szerint a D_n integrálja konstans ugyan, de csak azért, mert a pozitív és negatív részek nagyrészt kiejtik egymást; a $|D_n|$ integrálja ∞ -divergens. Ez heurisztikusan azt jelenti, hogy az origóban levő túske mellett a hullámzó rész nem is biztos, hogy elhanyagolható.)

Mivel a D_n Dirichlet-mag integrálja éppen π ,

$$s_n(x) - \ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \ell \right) D_n(t) dt.$$

Tegyük föl először, hogy f az x -ben folytonos, ekkor $\ell = f(x)$ és legyen

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &:= \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2}, \\ (*) \quad s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{|t| < \delta} + \int_{\delta \leq t \leq \pi} \right) =: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

valamely $\delta > 0$ értékre. A második integrál mindig 0-hoz tart, mert

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq t \leq \pi} \frac{\phi_x(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt,$$

és alkalmazhatjuk a Riemann- Lebesgue lemmát (lásd 1.4.2.); itt a $\phi_x(t)$ nyilván integrálható, és ezt a nevező sem rontja el, mert korlátos; a $\sin$ játssza a h függvény és $n + \frac{1}{2}$ az ω szerepét.

Itt rögtön kimondhatunk egy érdekes tételt.

1.6.1. Tétel. (Lokalizációs tétel.) Legyenek az $f, g \in L^1$ függvények olyanok, hogy az x hely egy δ sugarú környezetében megegyeznek, azaz $x - \delta < t < x + \delta$ esetén $f(t) = g(t)$. Ekkor f és g Fourier-sorai az x helyen ekvikonvergensnek, azaz egyszerre konvergensnek vagy divergensnek, sőt, ha konvergensnek, összegük megegyezik.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a (*) formulát az $f - g$ függvényre. (A Fourier-együtthatók integrálokkal vannak definiálva, így képzésük lineáris művelet.) Tudjuk, hogy $I_2 \rightarrow 0$, és jelen esetben $I_1 \equiv 0$, tehát $s_n(f - g) = s_n(f) - s_n(g) \rightarrow 0$.

Ez a tétel azért érdekes, mert a Fourier-együtthatók meghatározásához a függvényt az egész intervallumon ismernünk kell, tehát (a tétel feltételei mellett is), a két függvény Fourier-sora különbözhet, konvergenciaviselkedésük mégis azonos.

Térjünk vissza a lokális konvergencia vizsgálatához. A (*) formulából erre is kapunk egy elegendő feltételt.

1.6.2. Tétel. Ha az $f \in L^1$ függvény az x helyen olyan, hogy

$$\int_0^\pi \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt = \int_0^\pi \left(\frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{2t} \right) dt < \infty,$$

akkor $s_n(x) \rightarrow f(x)$, azaz a Fourier-sor x -ben a függvényértékhez konvergál.

Vegyük észre, hogy a tételben $\int_0^\pi$ helyett írhatunk $\int_0^1$ -et vagy akár $\int_0^\delta$ -t is, az integrál viselkedése a 0-ban lényeges (a függvény a -ban "lokálisan integrálható" kell, hogy legyen.)

Bizonyítás. A fentiek szerint $s_n(x) \rightarrow f(x)$ pontosan akkor, ha (*)-ban az I_1 első integrál is 0-hoz tart.

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{|t|<\delta} \phi_x(t) D_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|t|<\delta} \left| \frac{\phi_x(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \sin(n + \frac{1}{2})t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|t|<\delta} \left(\frac{|\phi_x(t)|}{|t|} \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

megint csak a Riemann- Lebesgue lemma (1.4.2.) miatt. Itt a $(\cdot)$ rész az integrálható függvény, hiszen az első tört a tétel feltétele szerint integrálható, és ezt a korlátos második tört sem rontja el; a $\sin$ játssza a h függvény és $n + \frac{1}{2}$ az ω szerepét.

Ezt a tételt kicsit általánosabban is kimondjuk. Most nem tesszük fel az f folytonosságát, de azt igen, hogy léteznek x -ben a

$$f(x+0) := \lim_{h \rightarrow 0, h>0} f(x+h), \quad f(x-0) := \lim_{h \rightarrow 0, h>0} f(x-h)$$

féloldali határértékei. Most legyen

$$\ell := \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad \phi_x(t) := \frac{f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0)}{2}.$$

A (*) formuláig ugyanúgy haladhatunk, mint fent.

1.6.3. Tétel. (Dini-féle kritérium). Ha az $f \in L^1$ függvénynek az x helyen léteznek féloldali határértékei, és

$$\int_0^\pi \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt = \int_0^\pi \left(\frac{|f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)|}{2t} \right) dt < \infty,$$

akkor $s_n(x) \rightarrow \ell$, azaz a Fourier-sor x -ben a féloldali határértékek átlagához konvergál.

Bizonyítás. A fentivel megegyezik.

A Dini-féle feltétel helyett gyakran más, egyszerűbb feltételeket használunk.

1.6.4. Definíció. ??? Az f függvény az x helyen α -rendű (lokális) Lipschitz-feltételnek tesz eleget ($0 < \alpha \leq 1$), ha vannak olyan $\delta > 0$ és $M > 0$ számok, hogy minden $h, |h| \leq \delta$ értékre $|f(x+h) - f(x)| \leq Mh^\alpha$.

Nyilvánvalóan igazak a következők: az x -ben Lipschitz-feltételnek eleget tevő függvény folytonos is x -ben; ha f -re $0 < \alpha \leq 1$ rendű feltétel teljesül, akkor $0 < \beta \leq \alpha$ rendű is; ha f az x -ben differenciálható, akkor $\alpha = 1$ rendű Lipschitz-feltételnek is eleget tesz. (Ha $h \rightarrow 0$, akkor $|f(x+h) - f(x)| \leq Mh^\alpha \rightarrow 0$ miatt $f(x+h) \rightarrow f(x)$. Ha $0 < |h| < 1$, akkor $|h|^\alpha < |h|^\beta$. Végül, ha $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow q$, akkor $|f(x+h) - f(x)| \leq h(|q| + 1)$, ha h elég kicsi.)

1.6.5. Tétel. Ha az $f \in L^1$ függvény az x helyen folytonos és

a) x -ben $0 < \alpha \leq 1$ rendű Lipschitz-feltétel teljesül rá; vagy

b) x -ben differenciálható;

akkor $s_n(x) \rightarrow f(x)$, azaz a Fourier-sor x -ben a függvényértékhez konvergál.

Bizonyítás. Ha f -re x -ben Lipschitz-feltétel teljesül, akkor teljesül a Dini-féle feltétel is, hiszen

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt &\leq \int_0^\delta \frac{|f(x+t) - f(x)f(x-t) - f(x)|}{t} dt \\ &\leq \int_0^\delta \frac{2M|t|^\alpha}{t} dt \leq 2M \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \lim_{h \rightarrow 0} 2M \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} \right]_h^\delta < \infty. \end{aligned}$$

Ha f differenciálható, akkor 1-rendű Lipschitz-feltételnek is eleget tesz x -ben, ekkor még egyszerűbben

$$\int_0^\delta \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt \leq \int_0^\delta 2M = 2M\delta.$$

Ezeket az elégséges feltételeket is megfogalmazhatjuk féloldalas vátozatban is.

1.6.6. Tétel. ??? Ha az $f \in L^1$ függvénynek az x helyen léteznek féloldali határértékei, és mindkét oldalon Lipschitz-feltételnek tesz eleget, azaz

$$|f(x+h) - f(x+0)| \leq Mh^\alpha, \quad |f(x-h) - f(x-0)| \leq Mh^\beta, \quad (0 < h < \delta),$$

akkor a Fourier-sor x -ben a féloldali határértékek átlagához konvergál.

1.6.7. Tétel. (félérintős feltétel) Ha az $f \in L^1$ függvénynek az x helyen léteznek féloldali határértékei, és mindkét oldalon féloldalról differenciálható, azaz

$$\frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \rightarrow q_+, \quad \frac{f(x-h) - f(x-0)}{h} \rightarrow q_-, \quad (h \rightarrow 0),$$

akkor a Fourier-sor x -ben a féloldali határértékek átlagához konvergál.

Bizonyítás. A fenti gondolatmenetet mindkét oldalra meg kell ismételni.

Sok más konvergenciakritérium ismert Fourier-sorok lokális konvergenciájára. Nem célunk ezek tárgyalása, még felsorolásuk sem. Még egy kritériumot azonban bizonyítás nélkül megemlítünk.

1.6.8. Tétel. (Dirichlet- Jordan kritérium) ??? Ha $f \in L^1$ a $\mathbf{T}$ -n korlátos változása, akkor Fourier-sora mindenütt konvergál az $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ átlagértékhez. Ha f emellett folytonos is egy zárt intervallumon, akkor ott a konvergencia egyenletes.

Vegyük észre, hogy ezek mind elegendő feltételek. Említettük már (1.3.2. után), hogy folytonos függvények Fourier-sora lehet divergens; most már azt is látjuk, hogy ez a Dirichlet-mag tulajdonságain múlik. Szükségünk lesz az alábbi tételre.

1.6.9. Tétel. (Banach-Steinhaus tétel.) Legyen X egy Banach-tér, Y egy normált lineáris tér, és $A_n : X \rightarrow Y$ folytonos lineáris leképezések olyan sorozata, amelyre igaz, hogy minden $x \in X$ esetén

$$\sup_n \|A_n(x)\|_Y < \infty.$$

Ekkor az $\|A_n\|$ operátornormák is korlátosak.

Legyen X a 2π -periodikus függvények tere a szokásos maximum-normával, Y a valós számok tere és $A_n(f) := s_n(f, 0)$; ez nyilván folytonos és lineáris. Tegyük fel, hogy minden folytonos f függvény Fourier-sora konvergens a 0-ban, ekkor $|A_n(f)|$ is korlátos sorozat. Azonban, mivel

$$s_n(f, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt,$$

az operátornorma

$$\|A_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \rightarrow \infty,$$

(lásd 1.4.5.) ami ellentmondás: tehát van folytonos függvény, melynek a Fourier-sora a 0-ban divergens.

1.6.10. Feladat. ??? Hol konvergens a

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\pi-t}{2}, & \text{ha } 0 < t \leq \pi, \\ \frac{-\pi-t}{2}, & \text{ha } -\pi \leq t < 0, \\ 0, & \text{ha } t = 0, \end{cases}$$

függvény Fourier-sora? Hova konvergál?

Megoldás. Tudjuk, hogy a Fourier-sor

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}.$$

A függvény folytonos és differenciálható is, kivéve az origót; az origóban is léteznek a féloldali határértékek ($f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(+0) = \frac{\pi}{2}$), és a függvény az origóban mindkét oldalról differenciálható ($f'_-(0) = f'_+(0) = -1$); tehát a Fourier-sor mindenütt konvergens, és $f(t)$ -hez konvergál. (Ezért volt célszerű a 0-ban éppen így definiálni.)

A részletösszegek viselkedése

Figyeljük meg a konvergenciát a 0 körül. A sinus-sor a 0-ban nyilván 0-hoz tart, és láttuk, hogy $t > 0$ esetén a $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ értékhez; azonban a részletösszegek maximuma határozottan az egyenes fölött marad (miközben a maximum helye balra csúszik a 0 felé). Ez az ún. Gibbs-jelenség mindig fellép ott, ahol egy szakaszonként differenciálható függvénynek ugrása van.

7. Tagonkénti integrálhatóság

Szabad-e tagonként integrálni egy Fourier-sort? Ha a sor *egyenletesen* konvergens (például, ha van konvergens numerikus majoránsa), akkor igen, de ez általában nincs így. Érvényes azonban a következő tétel.

1.7.1. Tétel. Legyen az $f \in L^1(-\pi, \pi)$ 2π -periodikus függvény Fourier-sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Ekkor

a) A sinus-együtthatókra teljesül, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

sor konvergens.

b) Az $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ függvény Fourier-sora tagonkénti integrálással kapható, azaz

$$\frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right)$$

és ez a sor mindenütt konvergens.

c) Ha azt is fölteszük, hogy $f \in L^2(-\pi, \pi)$, akkor a sor egyenletesen konvergál az egész számegyenesen.

A tétel feltételei mellett nyilván az is igaz, hogy bármely véges $[a, b]$ intervallumra

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}(\sin nb - \sin na) - \frac{b_n}{n}(\cos nb - \cos na) \right).$$

Vegyük észre, hogy az f Fourier-soráról nem tettük fel, hogy konvergens lenne.

Bizonyítás. Az F függvény f -nek integrálfüggvénye, tehát korlátos változású, tehát integrálható is. Tudjuk azt is, hogy majdnem mindenütt $F'(t) = f(t)$. Legyen

$$G(x) := F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt.$$

Ez a függvény is integrálható, és 2π -periodikus is, hiszen

$$G(x+2\pi) - G(x) = \int_0^{2\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = 0.$$

Tudjuk, hogy az abszolút folytonos függvények majdnem mindenütt differenciálhatók és érvényes rájuk a parciális integrálás formulája. Ezt felhasználva meghatározhatjuk G Fourier-sorát. A cosinus-együtthatók

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \cos nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[G(t) \frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) \frac{\sin nt}{n} dt = 0 - \frac{b_n}{n} \quad (n > 0). \end{aligned}$$

Hasonlóan, a sinus-együtthatók

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \sin nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[G(t) \frac{-\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) \frac{-\cos nt}{n} dt = 0 + \frac{a_n}{n}. \end{aligned}$$

A Dirichlet- Jordan tétel (l. 1.6.8.) szerint a

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

sor mindenütt konvergens, összege $G(x)$. Az $x = 0$ értéket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{\alpha_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

ezzel az a) és a b) állításokat igazoltuk.

Nyilván igaz, hogy

$$0 \leq \left(A - \frac{1}{n} \right)^2 = A^2 - \frac{2A}{n} + \frac{1}{n^2},$$

ebből

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b_n|}{n} + \frac{|a_n|}{n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (b_n^2 + a_n^2) + \frac{1}{n^2} \leq \infty,$$

ha $f \in L^2$. Tehát a G függvény Fourier-sorát a $\sum (|\alpha_n| + |\beta_n|)$ konvergens numerikus sor majorálja, így a Fourier-sor egyenletesen és abszolút konvergens.

Az $\widehat{f}$ diszkrét Fourier-transzformáltra áttérve, kicsit pongyolán azt mondhatjuk, hogy ha F az f -nek integrálfüggvénye, akkor

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in} \widehat{f}(n)$$

(feltéve, hogy $\widehat{f}(0) = 0$), hasonlóan,

$$\widehat{f}'(n) = in \cdot \widehat{f}(n)$$

(feltéve, hogy f abszolút folytonos). Ez azt jelenti, hogy a differenciálásnak és az integrálásnak a Fourier-transzformáció algebrai műveleteket, szorzást és osztást feleltet meg.

Vegyük észre azt is, hogy a Riemann- Lebesgue lemma miatt

$$\widehat{f}'(n) \rightarrow 0, \quad \text{azaz} \quad |n \cdot \widehat{f}(n)| \rightarrow 0,$$

tehát ha f differenciálható, a Fourier-együtthatói "gyorsabban" tartanak 0-hoz.

1.7.2. Feladat. ??? Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{\log(n+1)}$$

trigonometrikus sort. Az előző tétel szerint ez nem lehet integrálható függvény Fourier-sora, hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n+1)} = \infty.$$

Igazoljuk, hogy a sor mindenütt konvergens.

Megoldás. A sor a $t = 0$ helyen nyilván konvergens. Ha $0 < |t| \leq \pi$, a Dirichlet-kritériumot alkalmazhatjuk.

$$|\sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt| = \left| \frac{\sin \frac{n+1}{2}t \sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$$

korlátos (n -ben egyenletesen; t -től függhet a korlát). Az $\frac{1}{\log(n+1)}$ sorozat monoton csökkenve tart 0-hoz, tehát a Dirichlet-kritérium szerint a sor konvergens.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log(n+1)}$$

sor viszont Fourier-sor. Általában, ha a_n monoton csökkenve 0-hoz tartó konvex ($2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$) sorozat, akkor $\sum a_n \cos nt$ Fourier-sor. Most igazoltuk, hogy az $f \mapsto \widehat{f}, L^1 \rightarrow c_0$ leképezés csakugyan nem szűrjektív.

8. A Fejér-összegzés

1.8.1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $s_n \rightarrow s$ egy konvergens sorozat, akkor a

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$$

sorozat szintén konvergens és határértéke s .

Megoldás. Az s_n sorozat korlátos, $s_n \leq M$. Legyen ν olyan nagy, hogy ha $n > \nu$, akkor $|s_n - s| < \varepsilon/2$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 |\sigma_n - s| &= \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} - s \\
 &\leq \frac{|s_0 - s| + |s_1 - s| + \dots + |s_n - s|}{n+1} \\
 &\leq \frac{|s_0 - s| + \dots + |s_\nu - s| + |s_{\nu+1} - s| + \dots + |s_n - s|}{n+1} \\
 &\leq \frac{\nu+1}{n+1}M + \frac{n-\nu}{n+1}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\nu+1}{n+1}M + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

ha $n+1 > (\nu+1)M/\varepsilon$. Ezzel az állítást beláttuk. Hasonlóan igazolható, hogy ha $s_n \rightarrow \infty$, akkor $\sigma_n \rightarrow \infty$.

Ez az észrevétel indokolja az alábbi definíciót.

1.8.2. Definíció. Legyen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

egy sor. Azt mondjuk, hogy a sor *Fejér-összegezhető* és összege az s szám, ha a részletösszegeiből képezett

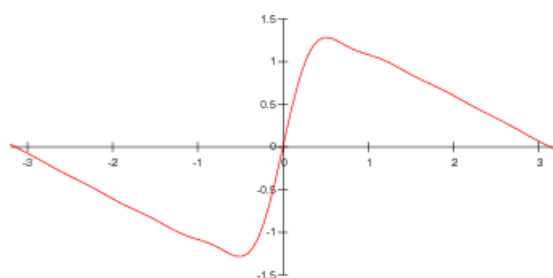
$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n+1-k)a_k = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)a_k$$

sorozat (*Fejér-középek*) s -hez konvergál.

(Más szokásos elnevezések: Fejér-szummálható vagy Cesàro-szummálható, $(C, 1)$ -szummálható.)

Ez a definíció a konvergenciafogalom egy valódi kiterjesztése. Világos ugyanis, hogy ha a sor a hagyományos értelemben konvergens, akkor Fejér-összegezhető is (ugyanoda); ám nem konvergens sorok is lehetnek Fejér-összegezhetőek. (Ilyen például a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ sor, ez divergens, de Fejér-összege $\frac{1}{2}$.) Továbbá, a Fejér-összegzés lineáris művelet.

Látni fogjuk, hogy a Fejér-összegzés a Fourier-sorok esetében nagyon szerencsés fogalomalkotás. Az 1.3.6. feladatban láttuk a $\sum \frac{\sin nt}{n}$ sor s_8 részletösszegét, most ábrázoljuk a s_8 Fejér-középet. A két ábrát összehasonlítva láthatjuk, hogy az átlagolás "simítja" a részletösszegeket.



Az σ_8 közép

Tudjuk, hogy

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt,$$

ebből

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &:= \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} K_n(t) dt,\end{aligned}$$

ahol $K_n(t)$ az n -edik Fejér-mag.

1.8.3. Tétel. Ha $0 < |t| < \pi$, akkor

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} (D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2$$

$$\text{és } K_n(0) = \frac{n+1}{2}.$$

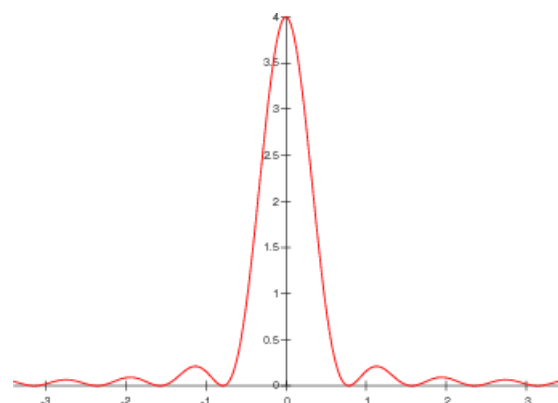
Bizonyítás. Szokásos módszerünkkel

$$\begin{aligned}& \frac{1}{n+1} (D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} \left(\sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{3}{2}t + \dots + \sin(n + \frac{1}{2})t \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)4 \sin^2 \frac{1}{2}t} \left(2 \sin \frac{1}{2}t \sin \frac{1}{2}t + 2 \sin \frac{1}{2}t \sin \frac{3}{2}t + \dots + 2 \sin \frac{1}{2}t \sin(n + \frac{1}{2})t \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)4 \sin^2 \frac{1}{2}t} \left(1 - \cos t + \cos t - \cos 2t + \dots + \cos nt - \cos(n+1)t \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)2 \sin^2 \frac{1}{2}t} \sin^2 \left(\frac{n+1}{2}t \right).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy K_n is páros függvény és

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \pi$$

éppen úgy, mint a Dirichlet-mag esetében; de $K_n(t) \geq 0$ mindenütt.



A K_7 magfüggvény

A Dirichlet-maghoz hasonlóan a "görbe alatti terület" most is mindig π , és a 0-ban a görbe magassága $\frac{n+1}{2}$; ez úgy lehet, ha a mag egy magas és keskeny "tüske", azaz az állandó súlya egyre inkább az origóban összpontosul. Így most is azt várhatjuk, hogy egy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) K_n(t) dt$$

típusú integrálátlag határértéke $\phi(0)$ lehet. A mag pozitivitása miatt a σ -közeppek konvergenciaviselkedése szabályosabb, mint a részletösszegeké.

1.8.4. Tétel. Legyen $f \in L^1(-\pi, \pi)$ és f az x helyen folytonos. Ekkor

$$\sigma_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ha az f függvény folytonos az $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ intervallumon, akkor ott $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ egyenletesen.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} K_n(t) dt - f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2} \right| K_n(t) dt \\ &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{0 \leq |t| \leq \delta} \right| + \left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \right| =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Legyen $\delta > 0$ akkora, hogy $0 \leq |t| \leq \delta$ esetén

$$\left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ilyen van, hiszen a függvény x -ben folytonos). Ekkor az első integrál

$$I_1 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen most $\delta \leq |t| \leq \pi$, ekkor

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2 \frac{1}{2}t} \leq \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

így a második integrál

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2} \right| dt \\ &\leq \frac{M}{n+1} (\|f\|_{L^1} + f(x)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

tehát $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, ha n elég nagy.

Az egyenletesség igazolásához vegyük észre, hogy ha f zárt intervallumon folytonos, akkor egyenletesen is folytonos, így az első integrál becslésében szereplő δ az $[a, b]$ intervallum bármely pontjában ugyanaz lehet.

1.8.5. Tétel. Legyen $f \in L^1(-\pi, \pi)$ és f -nek az x helyen léteznek a féloldali határértékei. Ekkor

$$\sigma_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás. Ismételjük meg az előző bizonyítást $f(x)$ helyett az $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ átlaggal.

1.8.6. Tétel. Legyen $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Ekkor $\sigma_n \rightarrow f$ L^1 -normában, azaz

$$\|\sigma_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

A tételt nem bizonyítjuk, de felsoroljuk néhány fontos következményét:

Az $L^1(\mathbf{T})$ függvényterben a trigonometrikus polinomok mindenütt sűrű halmazt alkotnak. (világos, hogy a σ közepek trigonometrikus polinomok).

Ha két függvény Fourier-sora megegyezik, akkor maguk a függvények is megegyeznek (Lebesgue-értelemben, azaz majdnem mindenütt). Ez az ún. *unicitási tétel*.

Ha egy függvény Fourier-sora konvergens, akkor összege csak a kiindulási függvény lehet (hiszen a Fejér-összegzés megőrzi a konvergenciát).

Bizonyítás nélkül közöljük Lebesgue alábbi tételét is. (A bizonyítás a folytonos esethez hasonló, lásd 4.6.6.)

1.8.7. Tétel. Legyen $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Ekkor

$$\sigma_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{m.m.,}$$

azaz a Fourier-sor majdnem mindenütt Fejér-összegezhető a függvényhez.

2. fejezet - Feladatok

1. Sorfejtések, konvergencia

2.1.1. Feladat. Legyen az $f(t) := t$, ha $-\pi < t \leq \pi$, és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Írjuk fel a Parseval-formulát. Hol konvergens a Fourier-sor? Helyettesítsük az $t = \frac{\pi}{3}$ értéket.

Megoldás. Mivel az f páratlan függvény, az $f(t) \cos nt$ is páratlan, így minden n értékre

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0,$$

mert egy páratlan függvény origóra szimmetrikus integrálja mindig 0. A sinus-együtthatókat parciális integrálással számoljuk,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-t \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \\ &= -\frac{2 \cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

hiszen $\cos n\pi = (-1)^n$.

Tehát a függvény Fourier-sora

$$f(t) \sim 2 \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - + \dots \right).$$

A Parseval-formula szerint

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt &= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right), \\ 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} &= 4\pi \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

ebből

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Mivel a függvény szakaszonként differenciálható, a $k\pi$ szakadási pontokban mindkét féloldalról, a Fourier-sor mindenütt konvergens; határértéke $f(t)$, a $k\pi$ szakadási pontokban pedig 0.

Helyettesítsük be a Fourier-sorba a $t = \frac{\pi}{3}$ értéket. A $\sin nt$ értékei könnyen láthatóan $+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots$ Ebből a

$$\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

sorösszeg adódik.

2.1.2. Feladat. Legyen az $f(t) := t^2$, ha $-\pi \leq t \leq \pi$, és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Írjuk fel a Parseval-formulát. Hol konvergens a Fourier-sor? Helyettesítsük a $t = 0$, $t = \pi$ értékeket.

Megoldás. A függvény páros, tehát minden sinus-együttható eltűnik. A cosinus-együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2}{3} \pi^2,$$

továbbá, ha $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt \, dt.$$

Kétszer parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left[t^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \left[t \cos nt \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát

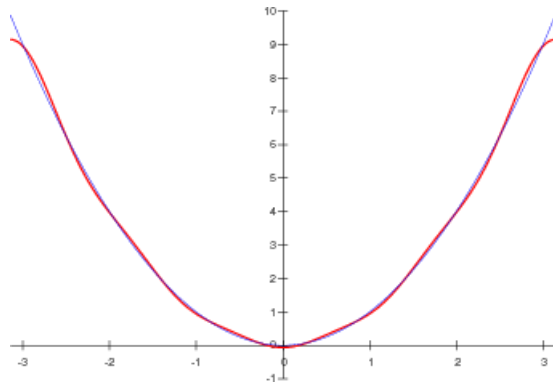
$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos t - \frac{\cos 2t}{4} + \frac{\cos 3t}{9} - \frac{\cos 4t}{16} + \dots \right).$$

A Parseval-formulát fölírva,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t^4 \, dt = \frac{2\pi^5}{5} \\ &= \pi \left(\frac{2\pi^4}{9} + 16 \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \right), \end{aligned}$$

ezt átrendezve

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots.$$



Az S_5 részletösszeg

A Fourier-sor mindenütt konvergens (a függvény differenciálható, illetve a $k\pi$ töréspontokban mindkét oldalról differenciálható), a behelyettesítések

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots.$$

A behelyettesítések azonnal adódnak, hiszen $\cos n \cdot 0 = 1$ és $\cos n\pi = (-1)^n$.

(Természetesen a két összefüggés nem független egymástól, hiszen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots - 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right). \end{aligned}$$

Azonban önmagában is érdekes, hogy ehhez hasonló sorösszegzések gyakran kaphatók Fourier-sorfejtésekből.)

2.1.3. Feladat. ??? Legyen az $f(t) := |t|$, ha $-\pi \leq t \leq \pi$, és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Írjuk fel a Parseval-formulát. Hol konvergens a Fourier-sor? Helyettesítsük az $t = \frac{\pi}{4}$ értéket.

Megoldás. A függvény páros, tehát minden sinus-együttható eltűnik. A cosinus-együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

ha $n \geq 1$, parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nt dt \\ &= 0 + \frac{2}{\pi n^2} [\cos nt]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

ebből $a_{2k} = 0$ és $a_{2k+1} = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}$. A Fourier-sor tehát

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

A Parseval-formulából

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots.$$

A sor mindenütt konvergens $f(t)$ -hez (léteznek a féloldali deriváltak); a behelyettesítésből

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \pi^2 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$$

2.1.4. Feladat. Legyen

$$f(t) := \begin{cases} \pi/4, & \text{ha } 0 < t < \pi, \\ -\pi/4, & \text{ha } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

és f 2π -periodikus. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots, \\ & 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots, \\ & 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots \end{aligned}$$

sorok összegét.

Megoldás. A függvény páratlan, tehát minden cosinus-együttható eltűnik. A sinus-együtthatók

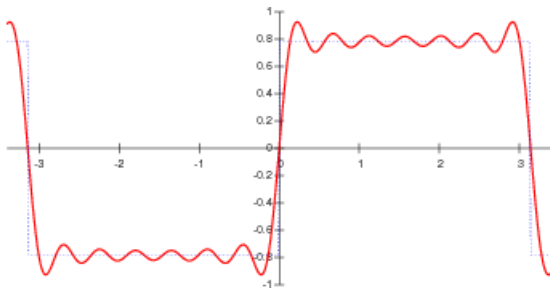
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{1}{2n} [\cos nt]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

A Fourier-sor tehát $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$.

Okoskodhatnánk úgy is, hogy a f függvény (szorzótól eltekintve) a 2.1.3. feladatban szereplő függvény deriváltja, így a sort az ott meghatározott sornak formális deriválásával kaphatjuk. Mivel $g \in L^2$, a 1.7. szakasz indokolja a gondolatmenetet.

A féloldali deriváltak mindenütt léteznek (hiszen a függvény szakaszonként konstans), így a Fourier-sor mindenütt konvergens $f(t)$ -hez, illetve a $k\pi$ szakadási pontokban 0-hoz.



Az s_{13} részletösszeg

Helyettesítsük a sorba a $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{\pi}{6}, t = \frac{\pi}{3}$ értékeket, a sorösszegek rendre $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Például a $t = \frac{\pi}{2}$ esetben $\sin n \frac{\pi}{2} = (-1)^n$, ebből

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Ezt az eredményt ("Gregory-sor") más úton is megkaphattuk volna. Legyen

$$h(x) := x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots;$$

A sor konvergenciasugara a Cauchy- Hadamard tételből 1. Ha $|x| < 1$,

$$h'(x) := 1 - x^2 + x^4 - + \dots = \frac{1}{1+x^2},$$

mivel $h(0) = 0, |x| < 1$ esetén $h(x) = \arctan(x)$. Mivel az 1 pontban a hatványsor konvergens (Leibniz-típusú) és a h folytonos, Abel tétele szerint $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots$.

2.1.5. Feladat. Legyen az $f(t) := t^2$, ha $0 < t \leq 2\pi$, és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a Fourier-sor? Helyettesítsük az $t = 0$ értéket.

Megoldás. A függvényt most a $[0, 2\pi]$ intervallumon adtuk meg; a periodicitás miatt bármelyik 2π hosszú intervallumon megadhatjuk. Az együttthatók

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \, dt = \frac{8}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[t^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} t \sin nt \, dt \\ &= 0 + \frac{2}{\pi n} \left[t \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi n^2} (2\pi - 0) = \frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[t^2 \frac{-\cos nt}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} t \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{4\pi^2(-1)}{n} + \frac{2}{\pi n} \left[t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} \sin nt \, dt = -\frac{4\pi}{n}. \end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát

$$f(t) \sim \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nt - \frac{4\pi}{n} \sin nt \right),$$

és a sor összege t^2 , ha $t \neq 2k\pi$ (itt a függvény differenciálható). A $t = 2k\pi$ szakadási pontokban is léteznek a féloldali deriváltak, így a sor összege a féloldali határértékek átlaga, azaz $2\pi^2$. Ha $t = 0$,

$$\frac{f(+0) + f(-0)}{2} = \frac{0 + 4\pi^2}{2} = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

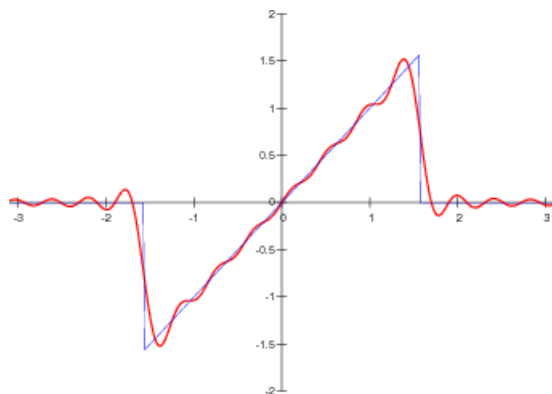
$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2.1.6. Feladat. Legyen $f(t) = \begin{cases} t, & \text{ha } 0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < |t| \leq \pi \end{cases}$ és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás. A Fourier-együtthatók

$$b_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}, \quad b_{2n+1} = (-1)^n \frac{2}{\pi(2n+1)^2}, \quad a_n = 0.$$

Ha $t \neq k\frac{\pi}{2}$, a sor konvergál $f(t)$ -hez; $k\frac{\pi}{2}$ szakadási helyeken is léteznek a félérítők, a határérték váltakozva $\pm \frac{\pi}{4}$.



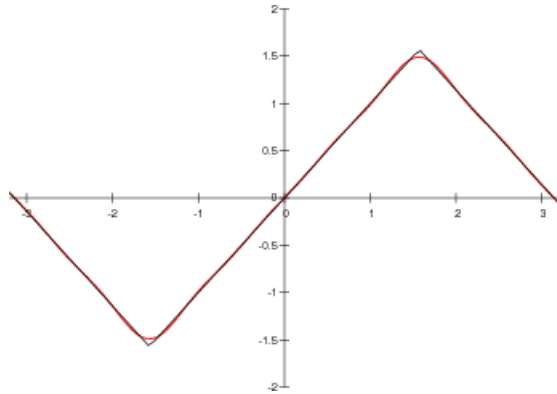
Az s_{14} részletösszeg

2.1.7. Feladat. Legyen $f(t) = \arcsin \sin t$ (ez 2π -periodikus függvény). Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás. Vegyük észre, hogy $f(t) = t$, ha $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, és $f(t) = \pi - t$, ha $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$, továbbá f páratlan. A Fourier-együtthatók könnyen számolhatók, a Fourier-sor

$$\arcsin \sin t = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)t.$$

A sor mindenütt előállítja $f(t)$ -t, mert f -nek mindenütt léteznek a féloldali deriáltjai (arra is hivatkozhatnánk, hogy f mindenütt ($\alpha = 1$ rendű) Lipschitz-feltételnek tesz eleget.)



Az s_4 részletösszeg

2.1.8. Feladat. Legyen $f(t) = \arcsin \cos t$ (ez 2π -periodikus függvény). Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás. A Fourier-sor mindenütt előállítja a függvényt,

$$\arcsin \cos t = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)t.$$

2.1.9. Feladat. Legyen $f(t) = \sin \frac{t}{2}$, ha $-\pi < t < \pi$ és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

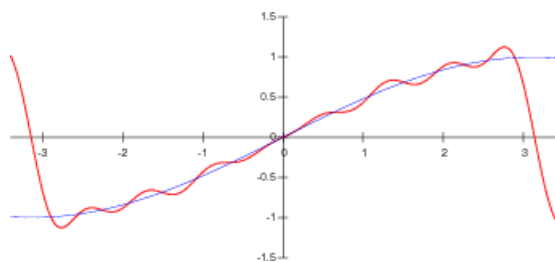
Megoldás. A függvény páratlan, tehát minden cosinus-együttható eltűnik. A sinus-együtthatók

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{t}{2} \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} \sin nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n - \frac{1}{2})t - \cos(n + \frac{1}{2})t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n - \frac{1}{2})t}{n - \frac{1}{2}} - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{2n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \right) = \frac{2}{\pi} (-1)^n \frac{4n}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

tehát a Fourier-sor

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} \sin nt.$$

Az $f(t)$ függvény differenciálható, illetve a $k\pi$ szakadási helyeken is léteznek a féloldali határértékei és deriáltjai. A sor mindenütt konvergens, összege $f(t)$, illetve a szakadási pontokban 0.



Az s_8 részletösszeg

2.1.10. Feladat. Legyen $f(t) = |\sin t|$, ha $-\pi \leq t \leq \pi$ és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás. A függvény páros, így $b_n = 0$; A cosinus-együtthatók

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{4}{\pi},$$

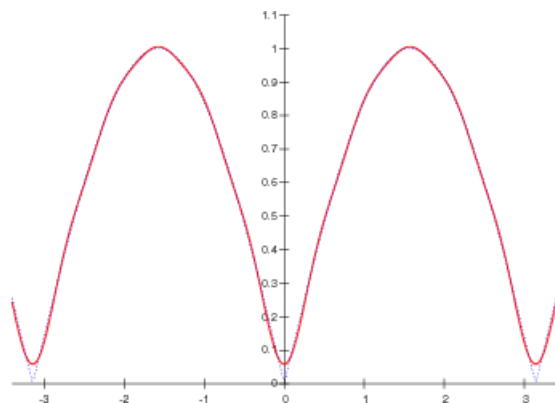
és ha $n > 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t) \, dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2-1}, & \text{ha } n = 2k, \end{cases} \end{aligned}$$

tehát

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2-1},$$

a sor mindenütt konvergens, mert a $k\pi$ töréspontokban is léteznek a féloldali deriváltak.



Az s_{10} részletösszeg

2.1.11. Feladat. Legyen $f(t) = t \sin t$, ha $-\pi \leq t \leq \pi$ és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás. A függvény páros, tehát minden sinus-együttható eltűnik. Ha $n > 1$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t(2 \sin t \cos nt) \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t) \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[t \frac{-\cos(n+1)t}{n+1} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \, dt \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \left[t \frac{-\cos(n-1)t}{n-1} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\pi \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \right) + 0 - \frac{1}{\pi} \left(\pi \frac{(-1)^n}{n-1} \right) - 0 = (-1)^{n-1} \frac{2}{n^2-1}.
 \end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát

$$t \sin t = 1 - \frac{\cos t}{2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nt}{n^2-1},$$

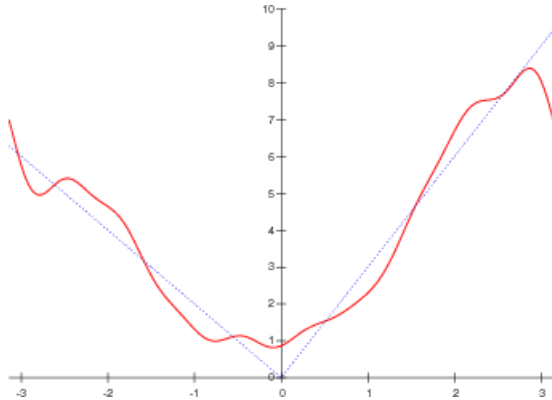
és a sor mindenütt konvergens.

2.1.12. Feladat. Legyen $f(t) := \begin{cases} -2t, & \text{ha } -\pi < t \leq 0, \\ 3t, & \text{ha } 0 \leq t < \pi \end{cases}$, és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás. A Fourier-együtthatók

$$a_0 = \frac{5\pi}{2}, \quad a_n = \frac{10}{\pi} \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

A sor mindenütt konvergens, összege $f(t)$, illetve a $\pm\pi$ szakadási helyeken $\frac{5}{2}\pi$.



Az s_{10} részletösszeg

2.1.13. Feladat. Legyen $f(t) := \begin{cases} -t, & \text{ha } -\pi < t \leq 0, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < \pi \end{cases}$, és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás.

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nt}{n}.$$

A sor mindenütt konvergens, összege $|t| < \pi$ esetén $f(t)$, a $t = \pm\pi$ helyeken $\frac{\pi}{2}$.

2.1.14. Feladat. Legyen $f(t) := e^t$, ha $0 < t < \pi$, f páratlan és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor?

Megoldás. A Fourier-sor

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n e^{\pi}) \frac{n \sin nt}{n^2 + 1}, \quad (t \neq k\pi),$$

A sor mindenütt konvergens, összege $f(t)$, illetve a $k\pi$ szakadási helyeken a sor összege 0.

2.1.15. Feladat. Legyen $f(t) := \cos at$, ha $-\pi < t < \pi$, és 2π -periodikus. Határozzuk meg a függvény Fourier-sorát.

Megoldás. A Fourier-sor

$$f(t) \sim 2 \frac{\sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{a \cos kt}{k^2 - a^2} \right).$$

A sor mindenütt konvergens, összege $f(t)$, illetve a $\pm k\pi$ helyeken $\frac{1}{2}(f(\pi+0) + f(\pi-0))$.

2.1.16. Feladat. Igazoljuk, hogy a $[0, \pi]$ intervallumon az

$$1, \quad \cos t, \quad \cos 2t, \quad \cos 3t, \quad \dots$$

cosinus-rendszer, illetve a

$$\sin t, \quad \sin 2t, \quad \sin 3t, \quad \dots$$

sinus-rendszer is teljes ortogonális rendszer. (Értelemszerűen most a skaláris szorzás $\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t) dt$.)

Megoldás. Legyen $f \in L^2[0, \pi]$. Az f értelmezését kiterjeszthetjük a $[-\pi, \pi]$ intervallumra akár páros, akár páratlan függvényként. Legyen

$$g(t) := \begin{cases} f(t), & \text{ha } 0 \leq t \leq \pi, \\ f(-t), & \text{ha } -\pi \leq t \leq 0, \end{cases} \quad h(t) := \begin{cases} f(t), & \text{ha } 0 < t \leq \pi, \\ -f(-t), & \text{ha } -\pi \leq t < 0, \\ 0, & \text{ha } t = 0. \end{cases}$$

Mind a g , mind a h függvény Fourier-sorba fejthető; és a g sora tiszta cosinus-, míg a h sora tiszta sinus-sor. Végül, ha valamely f ortogonális lenne a $[0, \pi]$ -n (mondjuk) a cosinus-rendszerre, akkor páros kiterjesztése a $[-\pi, \pi]$ -n ortogonális a trigonometrikus rendszerre; mivel az teljes, $f(t) = 0$ majdnem mindenütt (a $[-\pi, \pi]$ -n és így a $[0, \pi]$ -n is).

2.1.17. Feladat. Legyen $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$ Állítsuk elő a függvényt tiszta sinus- és tiszta cosinus-sor összegeként is.

Megoldás. Az f páros kiterjesztése

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi. \end{cases}$$

Ezt Fourier-sorba fejtvé

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nt dt = \frac{2}{\pi n} \sin(n \frac{\pi}{2}),$$

a keresett sor tehát

$$f(t) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n \frac{\pi}{2})}{\pi n} \cos nt = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos t}{1} - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} - + \dots \right), \quad (t \neq \frac{\pi}{2}),$$

a sor összege $f(t)$, kivéve a $\frac{\pi}{2}$ szakadási helyen, ahol $\frac{1}{2}$.

Hasonlóan, a sinus-sor

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\frac{\pi}{2})}{n} \sin nt \right), \quad t \neq 0, \frac{\pi}{2},$$

a sor összege a 0-ban 0, a $\frac{\pi}{2}$ helyen $\frac{1}{2}$.

2.1.18. Feladat. Legyen $f(t) := e^{at}$, ha $0 < t < \pi$. Állítsuk elő a függvényt tiszta sinus- és tiszta cosinus-sor összegeként is.

Megoldás. A keresett sorok

$$e^{at} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n e^{a\pi}) \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nt, \quad 0 < t < \pi$$

(a sor összege $k\pi$ -ben 0); illetve

$$e^{at} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n e^{a\pi} - 1)}{a^2 + n^2} \cos nt, \quad 0 < t < \pi,$$

A sor összege 0-ban 1, π -ben $e^{a\pi}$.

Példaképpen a sinus-együtthatókat számoljuk:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{at} \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{at}}{a} \sin nt \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} e^{at} \cos nt \, dt \\ &= 0 - \frac{2}{\pi a} \left[\frac{e^{at}}{a} \cos nt \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi a^2} \int_0^{\pi} e^{at} \sin nt \, dt, \end{aligned}$$

a szokásos módon az utolsó tagot átvisszük a bal oldalra:

$$(1 + \frac{1}{a^2}) b_n = \frac{2}{\pi a^2} (1 - (-1)^n e^{a\pi}).$$

2.1.19. Feladat. Legyen $f(t) := t(\pi - t)$, ha $0 < t < \pi$. Állítsuk elő a függvényt tiszta sinus-sor összegeként.

Megoldás.

$$t(\pi - t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

2.1.20. Feladat. Legyen $f(t) := \sin \frac{x}{2}$, ha $0 < t < \pi$. Állítsuk elő a függvényt tiszta sinus-sor összegeként.

Megoldás.

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(4n^2 - 1)} \sin nt, \quad 0 \leq t < \pi.$$

2.1.21. Feladat. Legyen $f(t) := \begin{cases} 1 - \frac{t}{2a}, & \text{ha } 0 < t \leq 2a, \\ 0, & \text{ha } 2a < t \leq \pi. \end{cases}$ Állítsuk elő a függvényt tiszta cosinus-sor összegeként.

Megoldás.

$$f(t) = \frac{2a}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin na}{na} \right)^2 \cos nt, \quad 0 < t \leq \pi. \right.$$

2.1.22. Feladat. Legyen $f(t) := t \sin t$, ha $0 \leq t \leq \pi$. Állítsuk elő a függvényt tiszta cosinus-sor összegeként.

Megoldás.

$$t \sin t = 1 - \frac{\cos t}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - 1} \cos nt, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

2.1.23. Feladat. Hogyan változnak a Fourier-sorfejtés képletei, ha nem 2π , hanem $2p$ ($p > 0$) szerint periodikus függvényeket vizsgálunk? ???

Megoldás. A $t \mapsto \frac{\pi}{p}$ lineáris transzformációval a $[-\pi, \pi)$ intervallumról áttérhetünk a $[-p, p)$ intervallumra. A trigonometrikus rendszer:

$$1, \cos \frac{\pi}{p}t, \sin \frac{\pi}{p}t, \cos 2\frac{\pi}{p}t, \sin 2\frac{\pi}{p}t, \cos 3\frac{\pi}{p}t, \sin 3\frac{\pi}{p}t, \dots$$

A Fourier-sor

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{p}t + b_n \sin n \frac{\pi}{p}t \right),$$

$$a_n := \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos n \frac{\pi}{p}t dt, \quad b_n := \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin n \frac{\pi}{p}t dt.$$

2.1.24. Feladat. Fejtsük Fourier-sorba az $f(t) = |t|$, $-1 \leq t \leq 1$ (2-periodikus) függvényt.

Megoldás. A 2.1.23. feladatban felírt képleteket használjuk ($p = 1$). A függvény páros, így $b_n = 0$; a cosinus-egyűthetők

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p |t| \cos n \frac{\pi}{p}t dt = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t dt$$

$$= \left[t \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi t dt$$

$$= 0 + \frac{2}{n\pi} \left[t \frac{\cos n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1),$$

ebből

$$|t| = \frac{1}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi x,$$

a sor mindenütt konvergens.

2.1.25. Feladat. Fejtsük Fourier-sorba az $f(t) = 2t$, $0 < t < 1$ (1-periodikus) függvényt.

Megoldás.

$$a_0 = 2 \int_0^1 2t dt = 2,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 2t \cos 2n\pi t dt = 2 \left[2t \frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi} dt = 0,$$

$$b_n = 2 \int_0^1 2t \sin 2n\pi t dt = \left[2t \frac{-\cos 2n\pi t}{2n\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos 2n\pi t}{n\pi} dt = \frac{2}{2n\pi} (-2 - 0),$$

A keresett Fourier-sor

$$2t = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\pi t, \quad 0 < t < 1,$$

a sor összege a végpontokban $\frac{1}{2}$ ($= \frac{0+2}{2}$).

2.1.26. Feladat. Fejtsük Fourier-sorba az $f(t) = 10 - t, 5 < t < 15$ (10-periodikus) függvényt.

Megoldás.

$$10 - t = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi t}{5}.$$

2.1.27. Feladat. Fejtsük Fourier-sorba az $f(t) = e^t, -a < t < a$ ($2a$ -periodikus) függvényt.

Megoldás.

$$e^t = \sinh a \left(\frac{1}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2 \pi^2} \left(a \cos \frac{n\pi t}{a} - n\pi \sin \frac{n\pi t}{a} \right) \right).$$

2. További feladatok

2.2.1. Feladat. Legyen $f \in L^1$. Igazoljuk, hogy az $\hat{f}(n)$ Fourier-transzformált pontosan akkor valós vagy tiszta képzetes, ha f páros, illetve páratlan.

2.2.2. Feladat. Írjuk át a Fourier-sort

$$\frac{a_0}{2} + \sum A_n \cos(nt + \alpha_n)$$

alakba. Adjuk meg az összefüggéseket az a_n, b_n együtthatók, illetve az A_n amplitúdó és az α_n fázisszög között.

2.2.3. Feladat. Igazoljuk, hogy minden 2π -periodikus f függvény egyértelműen felbontható egy f_e páros és egy f_o páratlan függvény összegére. Igazoljuk, hogy ha $f \in L^2(\mathbf{T})$, akkor f_e és f_o is, és

$$\|f\|^2 = \|f_e\|^2 + \|f_o\|^2.$$

Megoldás.

$$f_e(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_o(t) := \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

Az összes páros, illetve páratlan függvények az L^2 -ben két ortogonális alteret alkotnak, ebből az állítás (a Pithagorasz-tétel analógja) már adódik.

2.2.4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f, g \in L^2(\mathbf{T})$, akkor $fg \in L(\mathbf{T})$ és

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

($a_n, b_n, \alpha_n, \beta_n$ rendre az f és g Fourier-együtthatói). ???

Megoldás. Az integrál létezik, hiszen a Cauchy- Bunyakovszkij- Schwartz egyenlőtlenség szerint

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Tudjuk, hogy az L^2 térben

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n, \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \phi_n$$

(a konvergenciát normában értve), ahol (ϕ_n) a trigonometrikus rendszer és c_n, d_n a függvények Fourier-együtthatói. Ezután képezzük a skalárszorzatot:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n \|\phi_n\|,$$

amiből az állítás adódik.

2.2.5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha f páratlan, akkor Fourier-együtthatóira $|b_n| \leq n|b_1|$; ha pedig f korlátos változású, akkor $|a_n|, |b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \|f\|_{BV}$ (itt $\|f\|_{BV}$ a függvény teljes változását jelöli).

Megoldás. Az első állítás a (teljes indukcióval igazolható) $|\sin nt| \leq n|\sin t|$ egyenlőtlenségből azonnal adódik. A második állítás bizonyításához az intervallumot bontsuk fel olyan szakaszokra, ahol a $\cos nx$ (vagy a $\sin nx$) állandó előjelű, és ezeken a szakaszokon parciálisan integráljunk.

2.2.6. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f(t) := \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & \text{ha } 0 < |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{ha } t = 0 \end{cases}$$

függvény egyenletesen folytonos, de nem korlátos változású.

Megoldás. A függvény egyenletesen folytonos, mert kompakt intervallumon folytonos. Osszuk fel az intervallumot: legyen

$$t_{2k-1} := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}, \quad t_{2k} := \frac{1}{\frac{\pi}{+} (k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Mutassuk meg, hogy az így kapott beosztáson a függvény ingadozása $\log N$ nagyságrendű.

2.2.7. Feladat. Az előző feladatban szereplő függvény Fourier-sora hol konvergens?

Megoldás. Ha $t \neq 0$, a függvény differenciálható; a 0-ban pedig Lipschitz-feltételnek tesz eleget (az $\alpha = 1$ értékkel).

Legyen

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{-\log(t)}, & \text{ha } 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha } -\pi \leq t \leq 0 \text{ vagy } \frac{1}{2} < t \leq \pi. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy ez a függvény korlátos változású (tehát Fourier-sora konvergens), de a 0-ban nem teljesül rá a Dini-feltétel.

Megoldás. A függvény szakaszonként monoton, tehát korlátos változású; és a Dini-feltételben szereplő integrál divergens.

2.2.8. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := \frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3)$ függvény Fourier-sorát. Határozzuk meg az

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - + \dots$$

sor összegét.

Megoldás. A Fourier-sort definíció szerint is meghatározhatnánk, de most más utat választunk. Tudjuk, hogy

$$t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt.$$

Ezt tagonként integrálva (l. 1.7.)

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{2} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt \\ &= 2 \frac{\pi^2}{12} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt,\end{aligned}$$

$$\frac{t^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt.$$

Ismét tagonként integrálva

$$\frac{t^3}{12} = \frac{\pi^2}{12} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nt$$

és ezek a sorok konvergensek. A keresett Fourier-sor tehát

$$\frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nt.$$

Helyettesítsük be a $t = \frac{\pi}{2}$ értéket: $\sin n \frac{\pi}{2} = 0$, ha n páros, és váltakozva ± 1 , ha n páratlan, ebből a sor összege

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - + \dots = \frac{\pi^3}{32}.$$

2.2.9. Feladat. Legyenek

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < t < 0, \\ \sin t, & \text{ha } 0 \leq t < \pi, \end{cases} \quad g(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < t < 0, \\ 1 - \cos t, & \text{ha } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Határozzuk meg az f Fourier-sorát, majd ezt felhasználva g Fourier-sorát is.

Megoldás. Ha már meghatároztuk f sorát, a g Fourier-sora tagonkénti integrálással kapható. A sorok

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}, \\ g(t) &= \frac{t}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{n(4n^2 - 1)},\end{aligned}$$

a sorok konvergensek a függvényekhez a $-\pi \leq t \leq \pi$ intervallumon.

2.2.10. Feladat. Legyen $f(t) := -\ln |2 \sin \frac{t}{2}|$. Igazoljuk, hogy f integrálható. Határozzuk meg a Fourier-sorát.

Megoldás. Az f függvény páros, nemnegatív, és ha $0 < |t| \leq \pi$, differenciálható. A 0-ban $|f(t)| \rightarrow \infty$, tehát az

$$\int_0^{\pi} (-\ln(2 \sin \frac{t}{2})) dt$$

(a 0-ban improprius) integrált kell vizsgálnunk. A L'Hospital szabállyal könnyen igazolható, hogy

$$(\sqrt{t})(-\ln(2 \sin \frac{t}{2})) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0),$$

ezért az improprius integrálnak van integrálható majoránsa (az $\frac{1}{\sqrt{x}}$), így konvergens.

Legyen $z := r(\cos t + i \sin t)$. Tudjuk, hogy

$$\log(1 - z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots, \quad |z| < 1.$$

A Dirichlet-kritériummal igazolható, hogy

$$\cos t + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 3t}{3} + \dots$$

konvergens, ha $0 < t < 2\pi$, és egyenletesen konvergens, ha $0 < \delta \leq t \leq 2\pi - \delta < 2\pi$ ($\delta > 0$); hasonlóan,

$$\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots$$

mindenütt konvergens, és egyenletesen konvergens, ha $0 < \delta \leq t \leq 2\pi - \delta < 2\pi$ ($\delta > 0$), ezért

$$\log(1 - z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots,$$

igaz minden $|z| = 1, z \neq 1$ komplex számra is. Ebből

$$-\ln |2 \sin \frac{t}{2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n}, 0 < t < 2\pi.$$

A $t = \pi$ behelyettesítésével adódik:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Figyeljük meg a sinus- és a cosinus-sorok eltérő karakterét: Láttuk (1.7.2.), hogy $\sum \frac{\sin nt}{n}$ nem Fourier-sor (bár konvergens), $\sum \frac{\cos nt}{n}$ Fourier-sor. Most láttuk, hogy a $\sum \frac{\sin nt}{n}$ és $\sum \frac{\cos nt}{n}$ mindketten Fourier-sorok, ám az egyik korlátos, a másik nem korlátos függvényé.

2.2.11. Feladat. Határozzuk meg az $\ln |2 \cos \frac{t}{2}|$ és az $\ln |\tan \frac{t}{2}|$ függvények sorelőállításait.

Megoldás. Az előző feladat eredményében t helyébe $(\pi - t)$ -t írva, illetve a két sort kivonva

$$\ln |2 \cos \frac{t}{2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nt}{n}, 0 < t < \pi,$$

$$\frac{-1}{2} \ln |\tan \frac{t}{2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}, 0 < t < \pi.$$

Tagonkénti integrálással kapjuk, hogy

$$-\int_0^x \log(2 \sin \frac{t}{2}) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$\int_0^x \log(2 \cos \frac{t}{2}) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nt}{n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

3. Alkalmazások

2.3.1. Feladat. Adott kerületű zárt görbék közül melyik határolja a legnagyobb területet?

Ez az *izoperimetrikus feladat*. Ismert, hogy a megoldás a körvonal. Elemi geometriai megfontolásokból viszonylag egyszerűen adódik, hogy csak a körvonal lehet a keresett görbe. A feladat most azért érdekes, mert egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy a keresett extrémális görbe létezik; ezt fogjuk igazolni.

Megoldás. A keresett síkgörbe kerülete legyen L ; valamely rögzített pontjától mért ívhossza s és legyen a görbe paraméterezése $x = x(t), y = y(t)$, ahol $t = \frac{2\pi}{L}s$. Mivel a görbe zárt, $x(0) = x(2\pi)$ és $y(0) = y(2\pi)$; terjesszük ki az x és y függvényeket 2π periódussal az egész egyenesre.

A görbe bármely húrja rövidebb a megfelelő ívnél, azaz

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \frac{2\pi}{L} |t_1 - t_2|,$$

így az $x(t)$ függvény (és hasonlóan az $y(t)$ is) abszolút folytonos, tehát korlátos változású, tehát majdnem mindenütt differenciálható. Mivel

$$(x'(t))^2 + (x'(t))^2 = (s'(t))^2 = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

x és yL^2 -beli függvények. Legyen

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

$$y(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt),$$

és (l. 1.7.)

$$x'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nt - na_n \sin nt),$$

$$y'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (n\beta_n \cos nt - n\alpha_n \sin nt).$$

A Parseval-formulát (1.2.5.) alkalmazva

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} (x'(t))^2 + (x'(t))^2 dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

A görbe által határolt területet hasonlóan kifejezzük a Parseval-formula segítségével. A 2.2.4. eredménye alapján

$$T = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(\beta_n a_n - \alpha_n b_n).$$

Ezekből elemi átalakításokkal

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi T &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2) + n(\beta_n a_n - \alpha_n b_n) \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left((na_n + \beta_n)^2 + (nb_n - \alpha_n)^2 + (n^2 - 1)(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\frac{L^2}{4\pi} \geq T,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha

$$na_n = -\beta_n; \quad nb_n = \alpha_n; \quad n \geq 2 : \alpha_n = \beta_n = 0,$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t \quad y(t) = \frac{\alpha_0}{2} + b_1 \cos t - a_1 \sin t.$$

Legyen most $r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ és φ az a szög, amire $\cos \varphi = \frac{a_1}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b_1}{r}$. Ezzel a jelöléssel

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + r(\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \sin t) = \frac{a_0}{2} + r \cos(t - \varphi),$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + r(\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \sin t) = \frac{a_0}{2} + r \sin(t - \varphi),$$

tehát a kapott görbe egy körvonal.

2.3.2. Feladat. Egy L hosszúságú (vékony, homogén) huzal két végét állandó 0° hőmérsékleten tartjuk, a többi része el van szigetelve a környezettől. Ismerjük a huzal hőmérséklet-eloszlását a t időpillanatban; határozzuk meg a hőmérséklet-eloszlás időbeli alakulását.

Ez az *hővezetési feladat* egyike volt azoknak a fizikai feladatoknak, amelyeket Fourier oldott meg az általa kidolgozott sorfejtési módszerrel.

Megoldás. Fizikából ismerjük a hővezetés differenciálegyenletét: a vizsgált egydimenziós esetben

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

ahol $U = U(x, t)$ a huzal x koordinátájú pontjában a t időpillanatban mérhető hőmérséklet, κ pedig egy, a huzal anyagára jellemző állandó. Tudjuk, hogy $U(0, t) = U(L, t) = 0$ és $U(x, 0) = f(x)$ ismert függvény.

Keressük a megoldást $U(x, t) = X(x)T(t)$ alakban:

$$\kappa^2 X(x)T'(t) = T(t)X''(x).$$

Feltehetjük, hogy az X és T függvények nem tűnnek el; az egyenletet XT -vel osztva és rendezve

$$\kappa^2 \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Mivel a bal oldal csak x -től, a jobb oldal csak t -től függ, ez csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldal állandó, mondjuk c . A jobb oldali (másodrendű lineáris) egyenlet tehát $X'' = cX$, és a megoldásokról tudjuk, hogy $X(0) = X(L) = 0$. Ez csak úgy lehet, ha $c < 0$, pontosabban, ha $c = -\frac{1}{n}(\frac{\pi}{L})^2$, az ehhez tartozó megoldások a $\sin \frac{\pi}{L}nx$ függvények.

A bal oldali (elsőrendű lineáris) egyenlet megoldásai ezek után

$$T = \exp\left(-\frac{\kappa^2 n \pi^2}{L^2} t\right),$$

A hővezetés differenciálegyenletének keresett megoldását tehát az

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{\kappa^2 n \pi^2}{L^2} t\right) \sin \frac{\pi}{L} nx$$

sor összege adja meg; a b_n együtthatók az f Fourier-együtthatói,

$$U(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi}{L} nx.$$

3. fejezet - Más ortogonális rendszerek

Ebben a fejezetben csak megemlítünk néhány ortogonális rendszert, ezeknek az elméletét még vázlatosan sem kívánjuk tárgyalni. Célunk pusztán annyi, hogy a trigonometrikus rendszer mellett egy kis kitekintést adjunk.

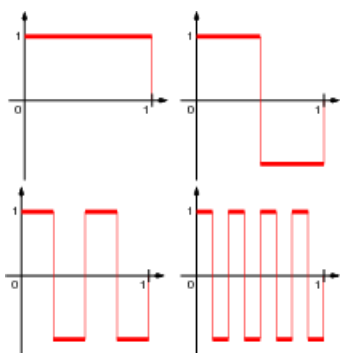
1. A Rademacher- és a Walsh-rendszerek

Ebben a szakaszban a szereplő függvények az $L^2[0, 1]$ tér elemei.

3.1.1. Definíció. Az

$$r_n(x) := \text{sign} \sin(2^n \pi x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

függvényeket *Rademacher-rendszerek* nevezzük.



Az első négy Rademacher-függvény (r_0, r_1, r_2, r_3)

3.1.2. Tétel. A Rademacher-függvények ortonormált, de nem teljes rendszert alkotnak.

Bizonyítás. $\int_0^1 r_n^2(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$, tehát a rendszer normált. Az ortogonalitás bizonyításához tekintsünk egy olyan intervallumot, ahol az n -edik Rademacher-függvény állandó előjelű. Az $(n+p)$ -edik függvényt úgy kapjuk, hogy ezt az intervallumot 2^p (egyenlő) részre osztjuk, és ezeken az intervallumokon az $(n+p)$ -edik Rademacher-függvény felváltva lesz +1 és -1, tehát az $r_n(x)r_{n+p}(x)$ szorzat a +1 és a -1 értékeket egyaránt egy-egy $\frac{1}{2}$ összhosszúságú intervallumrendszeren veszi fel, ezért

$$\int_0^1 r_n(x)r_{n+p}(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Végül, vegyük észre, hogy $n \geq 1$ esetén a Rademacher-függvények az $\frac{1}{2}$ pontra páratlanok, azaz $r_n(x) = -r_n(1-x)$, tehát rájuk bármely, az $\frac{1}{2}$ pontra páros függvény ortogonális. Egy olyan páros függvény, melynek integrálja 0, például az

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}, \\ -1, & \text{ha } \frac{1}{4} < |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

függvény tehát ortogonális minden Rademacher-függvényre.

Legyen $f \in L^2[0, 1]$. A 1.2. szakaszban láttuk, hogy képezhető a Rademacher-rendszer szerinti általános Fourier-sor ("ortogonális sor"):

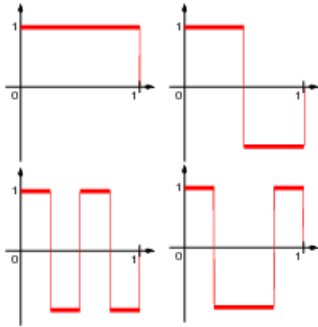
$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n r_n(x), \quad c_n := \int_0^1 f(t) r_n(t) dt$$

$\sum c_n^2 \leq \|f\|_2^2$ -normában konvergens. (Igaz, általában nem az f függvényhez, hiszen a rendszer nem teljes; de teljesül.) A $\sum c_n r_n(x)$ -rendszer érdekes tulajdonsága, hogy ez a sor majdnem mindenütt is konvergens. Általában a $\sum c_n^2$ sor majdnem mindenütt konvergens vagy divergens pontosan akkor, ha a sor konvergens vagy divergens, azaz a Rademacher-sorok esetében a normában vett és a majdnem mindenütt konvergencia egybeesik.

3.1.3. Definíció. A $w_0(x) := 1$;

$$w_n(x) := \prod r_{n_k+1}(x), \quad \text{ha} \quad n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}, \quad n_k \in \mathbf{N}$$

függvényeket *Walsh-rendszernek* nevezzük.



Az első négy Walsh-függvény (w_0, w_1, w_2, w_3)

3.1.4. Tétel. A Walsh-függvények ortonormált, teljes rendszert alkotnak.

Bizonyítás. A Walsh-függvények normáltsága nyilvánvaló; az ortogonalitás ugyanúgy látható be, mint a Rademacher-függvények esetében. Belátjuk, hogy a rendszer teljes. Tegyük fel, hogy $f \in L^2$ ortogonális a Walsh-függvényekre. Legyen az integrálfüggvénye

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Az ortogonalitásból

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_0(t) f(t) dt &= 0 \\ \Rightarrow F(1) - F(0) &= 0 \Rightarrow F(1) = F(0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_1(t) f(t) dt &= 0 \\ \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - (F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)) &= 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_2(t) f(t) dt &= 0 \\ \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) - F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{4}\right) + F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) - F(1) + F\left(\frac{3}{4}\right) &= 0 \\ \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}\right) + F\left(\frac{3}{4}\right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_3(t) f(t) dt &= 0 \\ \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) - F\left(\frac{3}{4}\right) + F\left(\frac{1}{4}\right) + F(1) - F\left(\frac{3}{4}\right) &= 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(\frac{3}{4}\right) = 0, \end{aligned}$$

a két utolsóból $F(\frac{1}{4}) = F(\frac{3}{4}) = 0$, és így tovább... Teljes indukcióval kapjuk, hogy $F(x) = 0$ minden $x \in [0, 1]$ -re. Tehát $F(x) = 0$ minden $x \in [0, 1]$ -re. Mivel $f(x) = F'(x) = 0$ minden $x \in [0, 1]$ -re, így $f(x) = 0$ minden $x \in [0, 1]$ -re, s ezzel az állítást beláttuk.

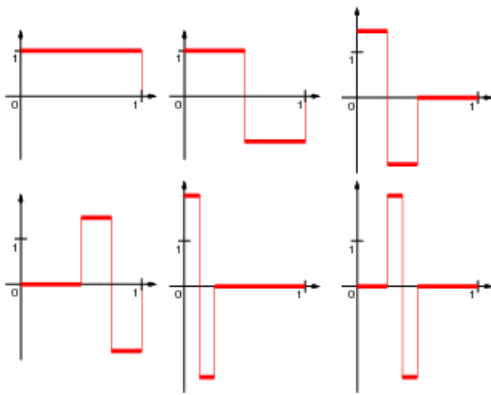
2. A Haar-rendszer

A Haar-függvényeket is a $[0, 1]$ intervallumon értelmezzük.

3.2.1. Definíció. A $\chi_{0,0}(x) = 1$,

$$\chi_{n,k}(x) := \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{ha } \frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k}{2^n}, \\ -\sqrt{2^n}, & \text{ha } \frac{k-1}{2^n} < x \leq \frac{k}{2^n}, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n$$

függvényeket Haar-rendszernek nevezzük.



Az első hat Haar-függvény ($\chi_{00}, \chi_{01}, \chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{21}, \chi_{22}$)

A trigonometrikus rendszer elemei folytonos és egyenletesen korlátos függvények, a Rademacher- és a Walsh-rendszer is (egyenletesen) korlátos, míg a Haar-rendszer nem korlátos és tagjai sem folytonosak, tehát az eddig megismert rendszerek közül a Haar-rendszer tűnik a "legszábatlanabbnak". Látni fogjuk, hogy ennek ellenére (igazából részben éppen ezért) a Haar-sorok konvergenciaviselkedése nagyon "szabályos".

3.2.2. Tétel. A Haar-függvények ortonormált, teljes rendszert alkotnak.

Bizonyítás. A függvények normáltsága világos, hiszen $\chi_{n,k}^2(x) = 2^n$ egy $\frac{1}{2^n}$ hosszú intervallumon és másutt 0. Két különböző Haar-függvény szorzata lehet mindenütt 0; ha nem, akkor most is igaz, hogy ugyanolyan hosszú intervallumokon lesz $+\frac{1}{2^n}$ és $-\frac{1}{2^n}$, így a szorzat integrálja 0. Tegyük most fel, hogy $f \in L^2$ ortogonális az összes Haar-függvényre. Legyen az integrálfüggvénye

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Az ortogonalitásból

$$\int_0^1 \chi_{0,0}(t) f(t) dt = 0 \Rightarrow F(1) - F(0) = 0 \Rightarrow F(1) = F(0) = 0,$$

$$\int_0^1 \chi_{0,1}(t) f(t) dt = 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - F(1) + F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\int_0^1 \chi_{1,1}(t) f(t) dt = 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) - F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

$$\int_0^1 \chi_{1,2}(t)f(t)dt = 0 \Rightarrow F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) - F(1) + F\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow F\left(\frac{3}{4}\right) = 0,$$

és így tovább... Azt kapjuk (teljes indukció!), hogy $F(x) = 0$ minden $x = \frac{k}{2^n}$ alakú "diadikusan racionális" pontban. Mivel F egy integrálfüggvény, abszolút folytonos is, tehát $F(x) = 0$ mindenütt. Tudjuk, hogy majdnem mindenütt $f(x) = F'(x) = 0$, s ezzel az állítást beláttuk.

Legyenek a ϕ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ függvények a Haar-függvények, folytatólagon számozva. Az $f \in L^1[0, 1]$ integrálható függvény Haar- Fourier sora a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad c_n := \int_0^1 f(t) \phi_n(t) dt$$

sor. Az n -edik részletösszeg

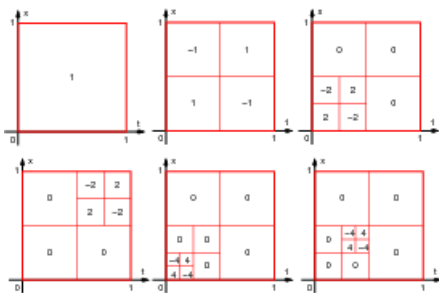
$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x) = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 f(t) \phi_k(t) dt \right) \phi_k(x) \\ &= \int_0^1 f(t) \left(\sum_{k=0}^n \phi_k(t) \phi_k(x) \right) dt = \int_0^1 f(t) D_n(x, t) dt, \end{aligned}$$

ahol

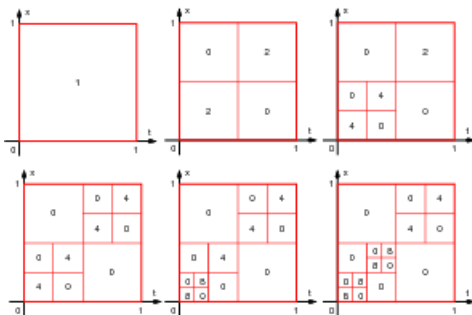
$$D_n(x, t) := \sum_{k=0}^n \phi_k(t) \phi_k(x)$$

az általános Dirichlet-mag.

A Dirichlet-mag viselkedését grafikusán szemléltetjük. Ábrázoljuk először a $\phi_k(t)\phi_k(x)$ függvények értékeit az $n = 0, 1, \dots, 5$ értékekre.



Ezeket sorban összeadva kapjuk a Dirichlet-magokat. Az ábrázolást folytatva:



Az első hat Haar- Dirichlet mag ($D_0(x, t), \dots, D_5(x, t)$)

Teljes indukcióval igazolható, hogy a mag mindig olyan, hogy az egységnyi $D_n(x, t) = 0$ yedeljük, majd a $\frac{1}{2^m}$ átló menti négyzeteket $nD_n(x, t) = 2^n$ ább, és az átlón kívüli négyzetekben, az átlóra eső élű négyzetekben pedig. (A négyzetek közötti szakaszokon a magfüggvény a két szomszédos négyzetben fölött érték átlaga.)

Ennek alapján kimondjuk az alábbi tételt.

3.2.3. Tétel. A Haar-rendszer Dirichlet-magjára igaz, hogy $D_n(x, t) \geq 0$ mindenütt és minden x helyen

$$\int_0^1 D_n(x, t) dt = 1.$$

Igazak az alábbi tételek:

3.2.4. Tétel. Ha $f \in L^1[0, 1]$, akkor Haar- Fourier-sora majdnem mindenütt konvergens és összege $f(x)$.

3.2.5. Tétel. Ha $f \in L^1[0, 1]$ az x helyen folytonos, akkor Haar- Fourier-sora az x helyen $f(x)$ -hez konvergál. Ha f folytonos az $[a, b] \subseteq [0, 1]$ intervallumon, akkor ott a konvergencia egyenletes.

Bizonyítás. Csak a folytonossági pontra vonatkozó állítás bizonyítását vázoljuk. Ha $x \neq \frac{k}{2^m}$ alakú, akkor $K_n(x, t) \neq 0$ csak akkor, ha $t \in I_m$, ahol I_m egy $\frac{1}{2^m}$ hosszú intervallum, és ott $K_n(x, t) = \frac{1}{2^m}$, így

$$\begin{aligned} |s_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{I_m} f(t) K_n(x, t) dt - f(x) \right| \\ &\leq \int_{I_m} |f(t) - f(x)| K_n(x, t) dt \leq \int_{I_m} \varepsilon \cdot 2^m dt \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ha n elég nagy, mert akkor 2^m is nagy, azaz $|x - t|$ kicsi.

Ha $x = \frac{k}{2^m}$ alakú, akkor ugyanígy okoskodhatunk, csak most $K_n(x, t) \neq 0$ akkor teljesül, ha t két (x -ben szomszédos) intervallum valamelyikébe esik, ezek hossza $\frac{1}{2^m}$ és $\frac{1}{2^m}$, vagy $\frac{1}{2^m}$ és $\frac{1}{2^{m+1}}$ lehet.

3. Ortogonális polinomrendszerek

Tekintsük az $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ intervallumot. Legyen $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ egy korlátos, nemnegatív, folytonos függvény, az ún. súlyfüggvény.

3.3.1. Definíció. A ρ súly szerinti L_ρ^2 teret azok a mérhető $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvények alkotják, amelyekre

$$\int_a^b (f(x))^2 \rho(x) dx < \infty.$$

L_ρ^2 vektortér, benne

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx$$

egy skaláris szorzat.

(Valójában a definíció sokkal általánosabban is megfogalmazható a Lebesgue- Stieltjes-integrál fogalma segítségével.)

3.3.2. Feladat. Igazoljuk, hogy L_ρ^2 csakugyan skaláris szorzatos vektortér.

Megoldás. A vektortér és a skaláris szorzat axiómái az integrál általános tulajdonságaiból adódnak. A norma értelemszerűen

$$\|f\| := \left(\int_a^b (f(x))^2 \rho(x) dx \right)^{1/2}.$$

Tudjuk, hogy az $1, x, x^2, \dots$ hatványrendszer $L^2_\rho[a, b]$ nyek lineárisan független rendszert alkotnak a számegeyeses $p_n(x)$ $n = 0, 1, 2, \dots$ Ezt a rendszert az $L^2_\rho[a, b]$ térben ortogonalizálva kapjuk ortogonális polinomok egy rendszerét.

3.3.3. Tétel. (Gram-Schmidt-eljárás) Ha (u_n) lineárisan független vektorrendszer (egy vektortérben), akkor van olyan (v_n) ortogonális vektorrendszer, amely ugyanazt az alteret feszíti ki, és

$$v_n = \alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}u_2 + \dots + \alpha_{nn}u_n.$$

3.3.4. Feladat. Ortogonalizáljuk az $1, x, x^2, \dots$ rendszert a $[-1, 1]$ intervallumon, a $\rho(x) = 1$ súlyfüggvény mellett. ???

Megoldás. Legyen $p_0(x) := 1$. Keressük p_1 -et $p_1(x) = (x - c_{10})p_0(x)$ alakban. Az ortogonalitás miatt

$$\int_{-1}^1 p_0(x)p_1(x)dx = \int_{-1}^1 (x - c_{10})dx = 0,$$

ebből $c_{10} = 0$, $p_1(x) = x$. Legyen $p_2(x) = x^2 - c_{21}p_1(x) - c_{20}p_0(x)$. Az ortogonalitás miatt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p_2(x)p_1(x)dx &= \int_{-1}^1 (x^2 - c_{21}p_1(x) - c_{20}p_0(x))p_1(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2p_1(x) - c_{21}p_1^2(x))dx = \int_{-1}^1 (x^3 - c_{21}x^2)dx = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p_2(x)p_0(x)dx &= \int_{-1}^1 (x^2 - c_{21}p_1(x) - c_{20}p_0(x))p_0(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2p_0(x) - c_{20}p_0^2(x))dx = \int_{-1}^1 (x^2 - c_{20})dx = 0, \end{aligned}$$

ebből $c_{21} = 0$, $c_{20} = \frac{1}{3}$, azaz $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Hasonlóan számolva, $p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. Ezt az eljárást folytatva, ortogonális polinomok egy olyan sorozatát kapjuk, ahol a főegyüttható mindig 1. Természetesen a polinomok normálhatók is.

Az ortonormált polinomrendszerekre mindig érvényes egy rekurzió.

3.3.5. Tétel. Legyen (p_k) egy ortogonális polinomrendszer valamely L^2_ρ térben. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ értékre

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}p_{k+1}(x) = (x - c_k)p_k(x) - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}p_{k-1}(x),$$

ahol α_k a p_k főegyütthatója és c_k egy konstans. ???

Bizonyítás. Legyen

$$xp_k(x) = \sum_{l=0}^{k+1} c_l p_l(x),$$

mert a baloldal $k+1$ -fokú polinom. Szorozzunk rendre a $p_j(x)$ polinomokkal skalárisan (azaz szorozzuk az egyenlőséget és integráljunk a -tól b -ig a súlyfüggvény szerint). A $j = 0, 1, \dots, k-2$ értékekre a baloldalon

$$\int_a^b p_k(x) \cdot xp_j(x) \rho(x) dx = 0$$

(mert $xp_j(x)$ foka legfeljebb $k-1$), a jobboldalon az ortonormáltság miatt csak a c_j marad meg. Tehát

$$xp_k(x) = c_{k-1}p_{k-1}(x) + c_k p_k(x) + c_{k+1}p_{k+1}(x),$$

az x^{k+1} együtthatóját összehasonlítva

$$xp_k(x) = c_{k-1}p_{k-1}(x) + c_k p_k(x) + \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} p_{k+1}(x),$$

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} p_{k+1}(x) = (x - c_k) p_k(x) - c_{k-1} p_{k-1}(x).$$

Most szorozzunk $p_{k-1}(x)$ -szel és integráljunk, az ortonormalitás miatt

$$c_{k-1} = \int_a^b x p_k(x) p_{k-1}(x) \rho(x) dx.$$

Nyilván igaz, hogy

$$x p_{k-1}(x) = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} p_k(x) + q(x),$$

ahol q egy legfeljebb $k - 1$ -edfokú polinom. Ezt beírva

$$\begin{aligned} c_{k-1} &= \int_a^b x p_k(x) p_{k-1}(x) \rho(x) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} p_k(x) + q(x) \right) p_{k-1}(x) \rho(x) dx = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} - 0, \end{aligned}$$

s ezzel az állítást beláttuk.

Írjuk föl a rekurziót az x és a t változókkal is. A két egyenletet egymásból kivonva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} (p_k(x) p_{k+1}(t) - p_k(t) p_{k+1}(x)) \\ = (t - x) p_k(t) p_k(x) - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} p_{k-1}(x) (p_k(t) - p_{k-1}(t) p_k(x)), \end{aligned}$$

és ebből

$$\begin{aligned} (t - x) \sum_{k=0}^n p_k(t) p_k(x) \\ = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} (p_k(x) p_{k+1}(t) - p_k(t) p_{k+1}(x)) \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} (p_{k-1}(x) p_k(t) - p_{k-1}(t) p_k(x)) \right) \\ = \sum_{k=0}^n p_k(x) p_k(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} (p_n(x) p_{n+1}(t) - p_n(t) p_{n+1}(x)), \end{aligned}$$

egyszerűsítve a "teleszkopikus" összeget. Eredményünk az ún. *Christoffel- Darboux formula*:

3.3.6. Tétel. Az ortonormált polinomrendszer általános Dirichlet-magja

$$D_n(x, t) := \sum_{k=0}^n p_k(x) p_k(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{p_n(x) p_{n+1}(t) - p_n(t) p_{n+1}(x)}{t - x}.$$

Vegyük észre, hogy a magfüggvény "hasonlít" a trigonometrikus rendszer Dirichlet-magjára. (A $t = x$ helyen van $\frac{1}{t-x}$ jellegű szingularitása.) Ezért azt várhatjuk, hogy a sorfejtés konvergenciaviselkedése is hasonló.

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt.

3.3.7. Tétel. Legyen $f \in L^2_\rho[a, b]$ az x helyen folytonos és tegyük fel, hogy Dini-típusú feltételnek is eleget tesz. Tegyük fel azt is, x egy környezetében mind a $\rho(t)$ súlyfüggvény, mind a $p_n(t)$ polinomrendszer korlátos. Ekkor a polinomrendszer szerinti Fourier-sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x), \quad c_n := \int_a^b f(t) p_n(t) dt$$

az x helyen konvergencia és összege $f(x)$.

4. A Legendre-polinomok

Tekintsük az

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

differenciálegyenletet és a

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

polinomokat. P_n pontosan n -edfokú, hiszen $2n$ -fokú polinom n -edik deriváltja. Belátjuk, hogy P_n megoldása a differenciálegyenletnek.

legyen $f(x) := (x^2 - 1)^n$, nyilván $f'(x) = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$ és ebből

$$(1-x^2)f'(x) + 2nxf(x) = 0.$$

Ezt az egyenletet $(n+1)$ -szer differenciáljuk a Leibniz-szabály fölhasználásával.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Leibniz-szabály:

Az $(n+1)$ -edik derivált

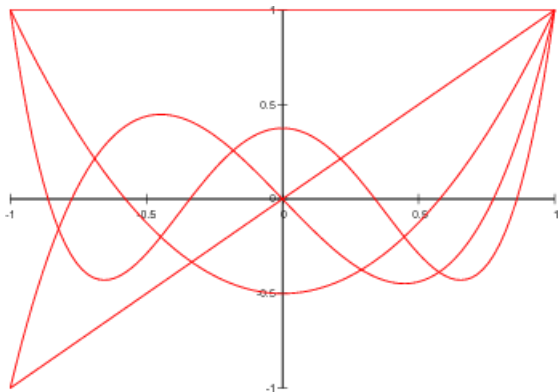
$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1}(-2x)f^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{2}(-2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}2nf^{(n)}(x) = 0,$$

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0,$$

ami (egy szorzótól eltekintve) éppen a bizonyítandó állítás.

3.4.1. Definíció. A fent megadott P_n polinomokat *Legendre-féle* polinomoknak nevezzük. A szokástól eltérően ezek úgy vannak normálva, hogy $P_n(1) = 1$ álljon fent.

Lényegében ezeket a polinomokat határoztuk meg a 3.3.4. feladatban.



Az első öt Legendre-polinom

3.4.2. Feladat. Igazoljuk, hogy a $P_n(x)$ polinomnak az összes gyöke egyszeres és a $[-1, 1]$ intervallumba esik.

Megoldás. Az $f(x) := (x^2 - 1)^n$ függvény a -1 -ben és az 1 -ben is 0 . A középérték-tétel szerint f' -nek van gyöke az intervallum belsejében. De f' a végpontokban is 0 . Így f'' -nak van két (különböző) gyöke az intervallum belsejében. De f'' a végpontokban is 0 ... Ezt n -szer megismételve kapjuk, hogy $f^{(n)}$ -nak van n (különböző) gyöke az intervallum belsejében. Mivel $f^{(n)}$ egy n -edfokú polinom, több gyöke nem is lehet.

3.4.3. Feladat. Igazoljuk, hogy a $P_n(1) = 1$ és $P_n(-1) = (-1)^n$.

Megoldás. A Leibniz-szabály szerint

$$((x^2 - 1)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n(n-1) \cdots (n-k+1)(x-1)^{n-k} n(n-1) \cdots (k+1)(x+1)^k,$$

minden tagban van $(x-1)$ és $(x+1)$ tényező is, kivéve az elsőt és az utolsót. Így

$$((x^2 - 1)^n)^{(n)} \Big|_{x=1} = n!2^n \quad \text{és} \quad ((x^2 - 1)^n)^{(n)} \Big|_{x=-1} = n!(-2)^n,$$

ebből már következik az állítás.

3.4.4. Feladat. Igazoljuk, hogy a $P_n(x)$ polinomok ortogonális rendszert alkotnak a $[-1, 1]$ intervallumon.

Megoldás. Legyen $n \neq k$. Tudjuk, hogy

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0,$$

$$(1 - x^2)P_k'' - 2xP_k' + k(k+1)P_k = 0.$$

Az első egyenletet P_k -val, a másodikat P_n -nel szorozva és az elsőből a másodikat kivonva

$$\left((1 - x^2)(P_n'P_k - P_nP_k') \right)' + (n(n+1) - k(k+1))P_nP_k = 0,$$

ezt integrálva

$$(n - k)(n + k + 1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_k(x) dx = \left[(1 - x^2)(P_n'P_k - P_nP_k') \right]_{-1}^1 = 0.$$

3.4.5. Feladat. Igazoljuk, hogy a $P_n(x)$ polinomokra teljesül a

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

rekurzív formula.

Megoldás. Ugyanúgy igazolható, mint az általános esetben, lásd 3.3.5..

3.4.6. Feladat. Igazoljuk, hogy a Legendre-polinomok normája $\|P_n\| = \frac{2}{\sqrt{2n+1}}$.

Megoldás. A rekurziós formula szerint

$$P_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x).$$

$P_n(x)$ -szel szorozva és integrálva (felhasználva az ortogonalitást)

$$n \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = (2n-1) \int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n-1}(x) dx,$$

hasnolán a

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

formulát $P_n(x)$ -szel szorozva és integrálva (felhasználva az ortogonalitást)

$$(2n+1) \int_{-1}^1 x P_n(x) P_{n-1}(x) dx = n \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx.$$

Ezeket rendezve, a normanégyszetre a

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx$$

rekurziót kapjuk; mivel $\|P_0\|^2 = 2$, az állítás teljes indukcióval adódik.

Ezt felhasználva, egy f függvény Legendre- Fourier sorfejtése

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

ahol az együtthatók

$$c_n := \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt;$$

és a sor konvergencia, ha f az x -ben sima (például folytonos és Dini-feltételnek, vagy Lipschitz-feltételnek tesz eleget, vagy ha deriválható).

5. A Legendre-Fourier sorfejtés egy alkalmazása

A fizikában gyakran előforduló feladat a

$$\Delta U(x, y, z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Laplace-egyenlet megoldása. Például, ha U egy időben állandó elektromos tér potenciálfüggvénye ("feszültség") és a vizsgált térrészben nincsenek jelen töltések, a fenti egyenlet teljesül.

A derékszögű koordináták helyett térbeli polárkoordináta-rendszerben fogunk dolgozni: r az (x, y, z) vektor hossza (origótól mért távolság), ϕ az $(x, y, 0)$ vektornak az $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ vektorral bezárt szöge, θ pedig az (x, y, z) vektornak a $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ vektorral bezárt szöge. Feltesszük azt is, hogy a tér hengersizmetrikus (a z tengely körüli forgatásra), azaz az U függvény nem függ ϕ -től. Ekkor (a részleteket mellőzve) a megoldandó Laplace-egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Keressük a megoldást

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

alakban; ekkor

$$\Theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \partial R \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right).$$

Feltehetjük, hogy az R és Θ függvények nem tűnnek el; az egyenletet $R\Theta$ -val osztva és rendezve

$$\frac{1}{R} (r^2 R'' + 2r R') = -\frac{1}{\Theta} \left(\Theta'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' \right).$$

Mivel a bal oldal csak r -től, a jobb oldal csak θ -től függ, ez csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldal állandó, mondjuk $\nu(\nu+1)$.

A egyenlet bal oldalát egyenlővé téve $\nu(\nu+1)$ -gyel, azt kapjuk, hogy

$$r^2 R'' + 2rR' - \nu(\nu + 1)R = 0,$$

ez jól ismert (Euler-típusú) lineáris egyenlet, két lineárisan független megoldása r^ν és $r^{-\nu+1}$ (feltéve, hogy $\nu \neq -\frac{1}{2}$).

Az egyenlet jobb oldalából pedig azt kapjuk, hogy

$$\Theta'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \nu(\nu + 1)\Theta = 0.$$

Vezessük be az $x = \cos \theta$ új változót. Nyilván $\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$; legyen továbbá $\Theta(\theta) = w(\cos \theta) = w(x)$. A megoldandó egyenlet ekkor

$$(1 - x^2)w'' - 2xw' + \nu(\nu + 1)w = 0,$$

erről már tudjuk, hogy a $\nu = n$ esetben megoldása a $P_n(x)$ polinom.

Tegyük fel (a Laplace-egyenlet mellett) azt is, hogy az $U(r, \theta)$ függvényt ismerjük az egységgömbön, $U(1, \theta) = u(\theta)$. Ekkor az $u(\theta)$ függvényt Legendre- Fourier sorba fejthetjük:

$$u(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta),$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi u(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Az általános megoldást pedig a gömb belsejében az

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n c_n P_n(\cos \theta);$$

a gömbön kívül pedig

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} c_n P_n(\cos \theta)$$

konvergens sorok adják meg. (A két esetet azért különböztettük meg, mert így konvergens mértani sor majoránsok garantálják a konvergenciát, azaz a potenciál korlátos voltát.)

3.5.1. Feladat. Legyen a potenciál az egységgömb felső félgömbjén u_0 , az alsó félgömbön 0. Határozzuk meg a potenciál sorelőállításának első három tagját.

Megoldás. A fenti jelölésekkel

$$u(\theta) = \begin{cases} u_0, & \text{ha } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

A

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi/2} u_0 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = u_0 \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(x) dx$$

együtthatókat kell kiszámolnunk. A gömb belsejében ($0 < r < 1$)

$$U(r, \theta) = u_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} r P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} r^3 P_3(\cos \theta) + \dots \right),$$

a gömbön kívül ($1 < r$)

$$U(r, \theta) = u_0 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{r} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} \frac{1}{r^3} P_3(\cos \theta) + \dots \right).$$

4. fejezet - A Fourier-transzformáció

1. Bevezetés

A komplex Fourier-sor definíciója is megfogalmazható $2p$ -periodikus függvényekre is. A 2.1.23. feladat analógiájára kapjuk, hogy ha f egy $2p$ -periodikus, $[-p, p]$ -n integrálható függvény, akkor Fourier-sora

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in \frac{\pi}{p} t},$$

ahol

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-in \frac{\pi}{p} t} dt;$$

és (a 1.6. fejezet mintájára) beláthatjuk, hogy (bizonyos feltételek teljesülése esetén) a fenti sor a függvényt valamilyen értelemben "előállítja".

Próbáljunk hasonló előállítást keresni nem periodikus függvényekre is. Az alábbiakban vázolunk egy heurisztikus gondolatmenetet. Az alapötlet az lesz, hogy (legalábbis szemléletesen) a $p \rightarrow \infty$ határátmenettel a $2p$ -periodikus függvényből megkapjuk az $\mathbf{R}$ -en értelmezett függvény esetét, tehát

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in \frac{\pi}{p} t} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-in \frac{\pi}{p} t} dt \right) e^{in \frac{\pi}{p} t}.$$

Vezessük be az

$$\omega_n := \frac{n\pi}{p}, \quad \Delta\omega_n := \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{p}, \quad h(\omega) := \int_{-p}^p f(t) e^{-i\omega t} dt$$

jelöléseket. Ezeket a sorba beírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-in \frac{\pi}{p} t} dt \right) e^{in \frac{\pi}{p} t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\omega_n \int_{-p}^p f(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n. \end{aligned}$$

A fenti összeg fölfogható úgy, mint az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

integrál egy (Riemann-típusú) integrálközelítő összege. Ha $n \rightarrow \infty$, $\Delta\omega_n \rightarrow 0$, így azt kaptuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{ahol} \quad h(\omega) := \int_{-p}^p f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

ezek a formulák a Fourier-sorfejtés formuláinak folytonos analógiái.

4.1.1. Definíció. Legyen $f \in L^1(\mathbf{R})$, azaz f a valós egyenesen (Lebesgue-értelemben) integrálható függvény. Ekkor f Fourier-transzformáltja az

$$\mathcal{F}f(\omega) := \widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbf{R})$$

függvény.

A definíció korrekt, hiszen $|e^{-i\omega t}| = 1$, így az integrál (Lebesgue-értelemben véve) létezik. A heurisztikus gondolatmenetünk alapján azt várjuk, hogy valamilyen értelemben

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Az ilyen típusú formulákat szokás a Fourier-transzformáció *inverziós formulájának* nevezni. Vegyük észre, hogy az inverziós formulában megjelenő $\frac{1}{2\pi}$ szorzó átkerülhetne a transzformáció definíciójába is, vagy akár mindkét formulában lehetne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ szimmetrikusan; mindhárom alak előfordul az irodalomban.

4.1.2. Feladat. ??? Alkalmazzuk a fenti gondolatmenetet a Fourier-sor valós alakjára, adjuk meg a transzformációs és az inverziós formulákat.

Megoldás. A legpontosabb analógiát akkor kapjuk, ha

$$h(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \cos \omega(x-t) dt, \quad (\omega \geq 0),$$

akkor

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega x) + b(\omega) \sin(\omega x)) d\omega, \quad (\omega \geq 0),$$

ahol

$$a(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad b(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt;$$

nyilván $\widehat{f}(\omega) = \pi(a(\omega) - ib(\omega))$ és $\widehat{f}(-\omega) = \pi(a(\omega) + ib(\omega))$, ha $\omega > 0$.

A műszaki- fizikai alkalmazásokban gyakran $f(t)$ -ről mint egy, a t időben változó jelről beszélünk; a transzformáció ezt a jelet bontja ω frekvenciájú sinus- és cosinushullámokra, ekkor $\widehat{f}(\omega)$ a hullámok amplitúdója.

4.1.3. Feladat. ??? Határozzuk meg az $\mathbf{1}_{[-a,a]}(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } |t| \leq a, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ egységimpulzus-függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás.

$$\widehat{\mathbf{1}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{i\omega} = 2 \frac{\sin a\omega}{\omega}, \quad \omega \neq 0,$$

és

$$\widehat{\mathbf{1}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(t) dt = 2a.$$

Megjegyezzük, hogy az $\widehat{\mathbf{1}}(\omega)$ függvény az $\mathbf{R}$ -en folytonos, de nem integrálható (l. 4.2.3.).

Az egységimpulzus Fourier-transzformáltja

A példában f "időben korlátozott", transzformáltja viszont nem "sávkorlátozott" (azaz f egy zárt intervallumon kívül 0, míg $\widehat{f}$ nem). Ez általában is igaz a Fourier-transzformációra. Azt is megfigyelhetjük, hogy időben minél jobban kiterjed az f (azaz a növekszik), annál jobban koncentrálódik $\widehat{f}$ a 0 körül.

2. Impropius integrálok

Bár heurisztikus gondolatmenetünk elvezetett az

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

inverziós formulához, de még az sem bizonyos, hogy ez az integrál egyáltalán létezik (ahogy azt megjegyeztük a 4.1.3. feladatban).

Szükségünk lesz az alábbi fogalmakra.

4.2.1. Definíció. Legyen f integrálható bármely $[0, r]$ ($r > 0$) intervallumon. Ekkor

$$\int_0^{\rightarrow \infty} f(t) dt := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(t) dt$$

a szokásos improprius integrál.

4.2.2. Definíció. Legyen f integrálható bármely $[-r, r]$ ($r > 0$) intervallumon. Ekkor

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(t) dt$$

az integrál *Cauchy-féle főértéke*.

A definíciók értelemszerűen megfogalmazhatók más intervallumokra is.

Tudjuk, hogy ha f Lebesgue-értelemben integrálható a $[a, b]$ -n, akkor $|f(t)|$ is integrálható, és ekkor

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt = \text{PV} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt,$$

ám az improprius integrálok akkor is létezhetnek, ha maga az integrál nem.

4.2.3. Feladat. ??? Igazoljuk, hogy a $\frac{\sin t}{t}$ függvény csak improprius értelemben integrálható:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \infty, \quad \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi + \frac{\pi}{6}}^{(k+1)\pi - \frac{\pi}{6}} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi + \frac{\pi}{6}}^{(k+1)\pi - \frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi + \frac{\pi}{6}}^{(k+1)\pi - \frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k+1)\pi} dt \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \approx \frac{1}{3} \log n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ez a bizonyítás ugyanaz, mint a Dirichlet-mag (l. 1.4.5.) esetében.

Igazoljuk a második állítást. Parciálisan integrálva és a Cauchy-kritériumot használva

$$\begin{aligned} \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sin t}{t} dt \right| &= \left| \left[\frac{\cos t}{t} \right]_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \\ &= \left| \left[\frac{\cos t}{t} \right]_{r_1}^{r_2} \right| + \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{t^2} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos r_2}{r_2} \right| + \left| \frac{\cos r_1}{r_1} \right| + \left| \frac{1}{r_2} \right| + \left| \frac{1}{r_1} \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $r_1 < r_2$ elég nagyok, tehát az $\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ integrál létezik; már csak az értékét kell kiszámolnunk.

Legyen $r_n := (m + \frac{1}{2})\pi$.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin t}{t} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{r_n} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad (u := \frac{t}{m+\frac{1}{2}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin(m+\frac{1}{2})u}{u} du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{u}{2}}{u} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{u}{2}}{u} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

hiszen az utolsó integrál nem más, mint a $\frac{\sin \frac{u}{2}}{u}$ függvény Fourier-sorának m -edik részletösszege, ami a függvényhez konvergens, hiszen teljesül a félérintős feltétel.

Megjegyezzük, hogy ezt az integrált általában komplex függvénytan eszközeivel szokás kiszámolni; ezt is, és a Laplace-transzformációt használó számolást is látni fogjuk a 6.2.13. feladatban.

4.2.4. Tétel. A 4.1.3. egységimpulzus-függvényre "főérték-értelemben" érvényes az inverziós formula:

$$1_{[-a,a]}(t) = \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{2 \sin a\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^r + \int_{-r}^0 \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{\sin a\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{\sin a\omega}{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{\sin a\omega \cos t\omega}{\omega} d\omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{\sin(a+t)\omega + \sin(a-t)\omega}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Legyen $c > 0$. Az $u = c\omega$, $du = c d\omega$ helyettesítéssel bármely c -re

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin c\omega}{\omega} d\omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{cr} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin c\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Ezt felhasználva,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{1}(\omega) d\omega &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{\sin(a+t)\omega + \sin(a-t)\omega}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} (\text{sgn}(a+t) \frac{\pi}{2} + \text{sgn}(a-t) \frac{\pi}{2}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 1, & \text{ha } |t| < a, \\ \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = 0, & \text{ha } |t| > a, \\ \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{2} + 0) = \frac{1}{2}, & \text{ha } |t| = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a szakadási helyeken most is az $\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}$ átlagot kapjuk vissza.

Az $\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty}$ típusú főértékek kiszámításában sokszor célszerű komplex integrálokat és a reziduumtételt használni.

Az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek az $a \in \mathbb{C}$ pont izolált szingularitása, ha f differenciálható az $z: |z-a| < \delta$ pontokban, de z_0 -ban nem. Izolált szingularitás körül a függvény Laurent-sorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

A $c_{-1} =: \text{Res}(f, z_0)$ a függvény reziduuma a z_0 -ban.

A reziduum sok esetben egyszerűen kiszámolható. Például elsőrendű pólus esetén, azaz ha f, g holomorf függvények és $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$, akkor

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Legyen C egy egyszerű zárt görbe; f pedig holomorf C pontjaiban és C belsejében is, kivéve véges sok $z_1, z_2, \dots, z_N$ szinguláris pontot. Ekkor

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z), z_n).$$

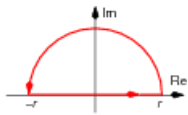
4.2.5. Tétel. ??? Legyen az $f(z)$ komplex függvény holomorf az $\mathbf{R}$ valós egyenesen; holomorf a $\{z : \text{Im } z > 0\}$ felső félsíkon is, kivéve véges sok $z_1, z_2, \dots, z_N$ szinguláris pontot; továbbá olyan, hogy léteznek M és $k > 1$ számok úgy, hogy $\forall z : |z| > r_0$ esetén $|f(z)| \leq M/|z|^k$. Ekkor $\omega > 0$ esetén

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z) e^{iz\omega}, z_n).$$

Ha a feltételeket az alsó félsíkra tesszük fel, az $\omega < 0$ értékekre kapjuk, hogy

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = -2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z) e^{iz\omega}, z_n).$$

Bizonyítás. Csak a felső félsíkra vonatkozó állítást bizonyítjuk.



Legyen a C_r görbe a $[-r, r]$ intervallum és a fölé rajzolt félkör. Legyen r akkora, hogy a félkör tartalmazza az összes szinguláris pontot. A reziduomtétel szerint

$$\int_{C_r} f(z) e^{i\omega z} dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z) e^{iz\omega}, z_n).$$

Másrészt a C_r görbe egy egyenesszakaszból és egy félkörből áll. A egyenesszakasz paraméteres alakja $z = t, -r \leq t \leq r, dz = dt$; a félköré pedig $z = r e^{i\phi}, 0 \leq \phi \leq \pi, dz = r i e^{i\phi} d\phi$, így

$$\int_{C_r} f(z) e^{i\omega z} dz = \int_{-r}^r f(t) e^{i\omega t} dt + \int_0^\pi f(r e^{i\phi}) e^{i\omega r e^{i\phi}} r i e^{i\phi} d\phi.$$

A feltételek szerint $|z| \cdot |f(z)| \rightarrow 0$, tehát $|z| \cdot |f(z)| < \varepsilon$, ha $|z| > r_0$. A második integrált becsüljük (felhasználva az ismert $0 \leq \frac{2}{\pi} \phi \leq \sin \phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ egyenlőtlenséget, amely a sinusfüggvény konkávitásából adódik):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(r e^{i\phi}) e^{i\omega r e^{i\phi}} r i e^{i\phi} d\phi \right| &\leq \int_0^\pi |z| \cdot |f(z)| \cdot e^{-r\omega \sin \phi} d\phi \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon \cdot e^{-r\omega \sin \phi} d\phi \leq 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon \cdot e^{-r\omega \frac{2}{\pi} \phi} d\phi \\ &\leq \pi \varepsilon \frac{1 - e^{-r\omega}}{r\omega} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

tehát

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) e^{i\omega z} dz = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt,$$

s ezzel a tételt beláttuk.

4.2.6. Feladat. ??? Határozzuk meg az $f(t) := (t^2 + a^2)^{-1}$ ($a > 0$) függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. Mivel $f \in L^1(\mathbf{R})$,

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Legyen $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$. A felső félsíkban f egyetlen szingularitása a $z_0 = ia$ pont és

$$\text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, ia) = \frac{e^{i\omega z}}{(z^2 + a^2)'} \Big|_{z=ia} = \frac{e^{-a\omega}}{2ia},$$

továbbá $|f(z)| \leq 2/|z|^2$, ha $|z| > \sqrt{2}a$, tehát használhatjuk a 4.2.5. tételt.

Ha $\omega > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = 2\pi i \left(\frac{e^{-a\omega}}{2ia} \right) = \frac{\pi}{a} e^{-a\omega}$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt} = \frac{\pi}{a} e^{-a\omega}.$$

Ha $\omega = 0$, elemi számolással

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} \right]_{-r}^r = \frac{\pi}{a}.$$

Végül, ha $\omega < 0$, akkor a $-\omega > 0$ értékre alkalmazva a tételt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\pi}{a} e^{a\omega}.$$

Tehát $\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$.

3. A Fourier-transzformált alaptulajdonságai

4.3.1. Tétel. Ha $f \in L^1(\mathbf{R})$, az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált egyenletesen folytonos $\mathbf{R}$ -en és $\widehat{f}(\omega) \rightarrow 0$, ha $|\omega| \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. A Fourier-transzformált 0-hoz tartása a Riemann- Lebesgue-lemmából adódik, hiszen az e^{it} függvénynek megvan az "átlagoló" tulajdonsága:

$$\frac{1}{c} \int_0^c e^{it} dt = \frac{1}{c} \frac{e^{ic} - 1}{i} \rightarrow 0 \quad (|c| \rightarrow \infty).$$

A folytonosság bizonyításához

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\omega + h) - \widehat{f}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (e^{i(\omega+h)t} - e^{i\omega t}) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{i\omega t}| \cdot |e^{iht} - 1| dt. \end{aligned}$$

Ha $h \rightarrow 0$, $e^{iht} \rightarrow 1$, tehát ha h elég kicsi, akkor $|e^{iht} - 1| < \varepsilon$ és

$$|\widehat{f}(\omega + h) - \widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \varepsilon dt \leq \varepsilon \|f\|_{L^1},$$

tehát ha $h \rightarrow 0$, akkor $\widehat{f}(\omega + h) \rightarrow \widehat{f}(\omega)$, az ω -ban egyenletesen.

Jelölje $C_0(\mathbf{R})$ a valós egyenesen értelmezett, a $\pm\infty$ -ben 0-hoz tartó függvények halmazát. Ez a szokásos $\|f\|_C := \sup |f(t)|$ normával Banach-tér. Eredményünk szerint a Fourier-transzformáció az $L^1(\mathbf{R})$ teret a $C_0(\mathbf{R})$ -be képezi; a transzformáció nyilván lineáris az integrál alaptulajdonságai miatt. Látni fogjuk, hogy a transzformáció injektív, de nem szürjektív.

A kompakt tartójú folytonos függvények halmazát (tehát azokat, amelyek egy korlátos zárt intervallumon kívül $f(t) = 0$) C_c -vel jelöljük. (A szokásos terminológia szerint f sávhatárolt, ha $\widehat{f} \in C_c$.) C_c is Banach-tér a supremum-normával. Ismert az is, hogy a C_0 tér a C_c teljessé tétele.

4.3.2. Tétel. A Fourier-transzformáció lineáris, azaz ha f_1, f_2 integrálható függvények és $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, akkor $(\lambda f_1 + \mu f_2)$ Fourier-transzformáltja $\lambda \cdot \widehat{f}_1 + \mu \cdot \widehat{f}_2$.

4.3.3. Tétel. Legyen $f \in L^1(\mathbf{R})$, Fourier-transzformáltja $\widehat{f}$ és legyenek $a, h > 0$ valós számok. Ekkor

$$f(at) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

("skálázás");

$$f(t - h) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad e^{-i\omega h} \widehat{f}(\omega)$$

("eltolás");

$$e^{iat} f(t) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad \widehat{f}(\omega - a)$$

("exponenciális moduláció" vagy "frekvenciaeltolás");

$$(\cos at) f(t) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega - a) + \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega + a)$$

("cosinusos moduláció").

Bizonyítás.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u/a)} du = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - h) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u+h)} du = e^{-i\omega h} \widehat{f}(\omega);$$

hasonlóan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - a)t} dt = \widehat{f}(\omega - a);$$

végül az utolsó állítás ebből és a transzformáció linearitásából adódik (hiszen $\cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$).

4.3.4. Tétel. Legyenek $f, g \in L^1(\mathbf{R})$, ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t) dt.$$

Bizonyítás. Mivel $\widehat{f}$ és $\widehat{g}$ korlátos folytonos függvények, ezek az integrálok léteznek.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)g(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \right)g(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x)e^{-ixt}dtdx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x)e^{-ixt}dxdx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixt}dx \right)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)dt;
 \end{aligned}$$

az integrálás sorrendjét valóban fölcserélhetjük, hiszen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(x)e^{-i\omega t}|d\omega \right)dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty.$$

4.3.5. Definíció. Legyenek $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ integrálható függvények. Konvolúciójuk az az $f * g$ függvény, amelyre

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx.$$

A definíció korrekt, hiszen (1.5.2. mintájára)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)|dtdx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dtdx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \cdot \|f\|_{L^1} dx = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1},
 \end{aligned}$$

azaz $f(t-x)g(x)$ (mint kétváltozós függvény) integrálható $\mathbf{R}^2$ -en. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$$

létezik majdnem mindenütt, és

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(t)|dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx \right|dt \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)|dxdx = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1},
 \end{aligned}$$

tehát $f * g$ is $L^1(\mathbf{R})$ -beli függvény.

4.3.6. Feladat. Igazoljuk, hogy a konvolúció $L^1(\mathbf{R})$ -ben kommutatív, asszociatív és disztributív művelet, azaz L^1 a $*$ szorzással Banach-algebra.

Megoldás. Az állítások a változó helyettesítéseivel azonnal adódnak.

Például a $t-x=u$, $-dx=du$ helyettesítéssel

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du = (g * f)(u).$$

4.3.7. Tétel. Ha $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ integrálható függvények, akkor konvolúciójuk Fourier-transzformáltja a transzformáltak szorzata, azaz $\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. ???

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) g(x) dx \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t-x) dt \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(u+x)} f(u) du \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) du \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} \widehat{f}(\omega) dx = \widehat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega),
\end{aligned}$$

Felcserélhettük az integrációs sorrendet, hiszen az integrálok abszolút konvergensek.

4. Differenciálás és integrálás

4.4.1. Tétel. Legyen az f függvény minden véges zárt intervallumon abszolút folytonos. Tegyük fel, hogy a f és f' deriváltja is L^1 -beli és $\widehat{f}(x), f'(x) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \pm\infty$. Ekkor az f' Fourier-transzformáltja

$$\widehat{f'}(\omega) = (i\omega) \widehat{f}(\omega).$$

Bizonyítás. Mivel f abszolút folytonos, majdnem mindenütt differenciálható. A tétel feltételei mellett alkalmazhatjuk a parciális integrálás formulát:

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} dt = 0 + (i\omega) \widehat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval nyilván az is igazolható, hogy ha

$$f^{(k)} \in L^1(\mathbf{R}), \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

akkor

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Feltettük, hogy f' integrálható, így a Riemann- Lebesgue-lemma miatt

$$\widehat{f'}(\omega) \rightarrow 0 \quad (|\omega| \rightarrow \infty).$$

Ebből

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\omega| \widehat{f}(\omega) \rightarrow 0,$$

illetve, ha f k -szor differenciálható és $f^{(k)} \in L^1$,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\omega|^k \widehat{f}(\omega) \rightarrow 0.$$

Ezt értelmezhetjük úgy, hogy minél simább az f , annál gyorsabban tart 0-hoz a Fourier-transzformáltja.

Ismert, hogy (elég általános feltételek mellett) "be lehet differenciálni az integráljel mögé". Pontosabban, érvényes az alábbi tétel.

4.4.2. Tétel. Legyen a $h(t, \omega)$ függvény, mint t függvénye, integrálható $\mathbf{R}$ -en, ha $\omega \in [a, b]$; az $\mathbf{R} \times [a, b]$ -n létezik a $\frac{\partial h}{\partial \omega}$ parciális derivált, és van integrálható majoránsa, azaz olyan $g \in L^1(\mathbf{R})$ függvény, amelyre

$$\left| \frac{\partial h}{\partial \omega}(t, \omega) \right| \leq g(t), \quad \omega \in [a, b].$$

Ekkor

$$\frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial \omega}(t, \omega) dt.$$

Ezt a tételt alkalmazhatjuk a Fourier-transzformáltra.

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

az integrandusz nyilván differenciálható (ω szerint).

$$\left| \frac{\partial}{\partial \omega} f(t) e^{-i\omega t} \right| = \left| -it f(t) e^{-i\omega t} \right| = |t f(t)|,$$

tehát integrálható majoráns létezik, ha $t f(t) \in L^1$; ez a feltétel elégséges a Fourier-transzformált differenciálhatóságához. Továbbá, ha feltesszük, hogy f inverziós formulával előállítható, azaz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

és $\omega \widehat{f}(\omega) \in L^1(\mathbf{R})$, akkor

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) (i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

4.4.3. Tétel. Legyen $f(t), t f(t) \in L^1$. Ekkor $\widehat{f}$ differenciálható, és

$$t f(t) \text{ Fourier-transzformáltja } i \frac{d}{d\omega} \widehat{f}(\omega).$$

Ha $t^n f(t) \in L^1, n \in \mathbf{N}$,

$$t^n f(t) \text{ Fourier-transzformáltja } i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \widehat{f}(\omega).$$

Bizonyítás. Az előző tételünket alkalmazhatjuk, hiszen $|t f(t)|$ integrálható majoráns.

4.4.4. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t), t f(t) \in L^1$ és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0.$$

Ekkor

$$g(t) := \int_{-\infty}^t f(x) dx \in L^1, \quad \widehat{g}(\omega) = \frac{f(\omega)}{i\omega}, \quad (\omega \neq 0),$$

és

$$\widehat{g}(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |g(t)| dt &= \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^t f(x) dx \right| dt \\
&= \int_0^\infty \left| \int_t^\infty f(x) dx \right| dt \quad (\text{mert } \int_{-\infty}^t f + \int_t^\infty f = \int_{-\infty}^\infty f = 0) \\
&\leq \int_0^\infty \int_t^\infty |f(x)| dx dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^x |f(x)| dt dx = \int_0^\infty x |f(x)| dx < \infty,
\end{aligned}$$

felcserélve az integrálás sorrendjét és felhasználva az $|xf(x)|$ integrálhatóságát. Hasonlóan beláthatjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^0 |g(t)| dt < \infty,$$

tehát $g \in L^1$.

Ha $\omega \neq 0$, parciális integrálással

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^t f(x) dx \right) dt \\
&= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \left(\int_{-\infty}^t f(x) dx \right) \right]_{t=-\infty}^\infty - \frac{1}{-i\omega} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\widehat{f}(\omega)}{i\omega}.
\end{aligned}$$

Végül,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(0) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^t f(x) dx dt \\
&= - \int_0^\infty \int_t^\infty f(x) dx dt + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t f(x) dx dt \\
&= - \int_0^\infty \int_0^x f(x) dt dx + \int_{-\infty}^0 \int_x^0 f(x) dt dx \\
&= - \int_0^\infty x f(x) dx - \int_{-\infty}^0 x f(x) dx = - \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx.
\end{aligned}$$

Tételeink szerint a Fourier-transzformáció az idő szerinti deriválásnak, illetve integrálásnak a frekvenciával való algebrai műveleteket, szorzást, illetve osztást feleltet meg; fordítva, a frekvencia szerinti deriválás és integrálás az idővel vett szorzással, osztással van kapcsolatban. Ez lehetővé teszi azt, hogy differenciálegyenleteket algebrai egyenletekké transzformáljunk.

4.4.5. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) := \begin{cases} 1 - |t|, & \text{ha } 0 \leq |t| \leq 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját. ???

Megoldás. Természetesen definíció szerint is számolhatnánk (l. 5.1.2.); ehelyett a Fourier-transzformáció formális tulajdonságait használjuk.

Vegyük észre, hogy f deriváltja szakaszonként állandó. Tudjuk (l. 4.1.3.), hogy az $\mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}(t) =: g(t)$ egységimpulzus Fourier-transzformáltja

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega}.$$

A 4.3.3. eltolási tétel miatt $g(t \pm \frac{1}{2})$ transzformáltja $e^{\pm i\omega/2} \widehat{g}(\omega)$, tehát a

$$h(t) := g(t + \frac{1}{2}) - g(t - \frac{1}{2})$$

Fourier-transzformáltja

$$e^{i\omega/2} \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} - e^{-i\omega/2} \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} (2i \sin \frac{\omega}{2}) = \frac{4i \sin^2(\omega/2)}{\omega}.$$

Végül, mivel

$$f(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt,$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \frac{4i \sin^2(\omega/2)}{\omega} = \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}.$$

5. Az inverziós formula

Láttuk, hogy ha

$$a(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad b(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt,$$

akkor az inverziós formula alakja

$$f(t) \sim \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega$$

lehet, exponenciális alakban pedig

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} dx;$$

de azt is láttuk, hogy ezek az integrálok nem feltétlenül konvergensek. Azt a kérdést fogjuk vizsgálni, milyen feltételek mellett lesznek konvergensek

$$\int_0^{\infty} \quad , \quad \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty}$$

improprius értelemben?

Hasonlóan dolgozhatunk, mint a Fourier-sorok esetében. A részletösszegek helyébe az improprius integrált (vagy a főértéket) definiáló $s_p(t)$ függvény lép.

Legyen

$$\begin{aligned} s_p(t) &:= \int_0^p (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega \\ &= \int_0^p \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \omega t \cos \omega x + \sin \omega t \sin \omega x) dx d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^p \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx \right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_0^p \cos \omega(t-x) d\omega \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{t-r} + \int_{t-r}^{t+r} + \int_{t+r}^{\infty} \right) f(x) \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dx. \end{aligned}$$

A két szélső integrál 0-hoz tart, ha $p \rightarrow \infty$, hiszen az $|x-t| \geq r > 0$ félegyeneseken

$$\left| \frac{f(x)}{t-x} \right| \leq \frac{|f(x)|}{r},$$

tehát $\frac{f(x)}{t-x}$ is integrálható; és alkalmazhatjuk a Riemann- Lebesgue lemmát (l. 1.4.2.). A középső pedig (a $t-x=u$, $x-t=v$ helyettesítésekkel)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{t-r}^{t+r} (f(x)) \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dx &= \int_{t-r}^0 + \int_0^{t+r} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^r f(t-u) \frac{\sin pu}{u} du + \int_0^r f(t+v) \frac{\sin pv}{v} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{f(t-x) + f(t+x)}{2} \frac{\sin px}{x} dx \end{aligned}$$

Tehát a

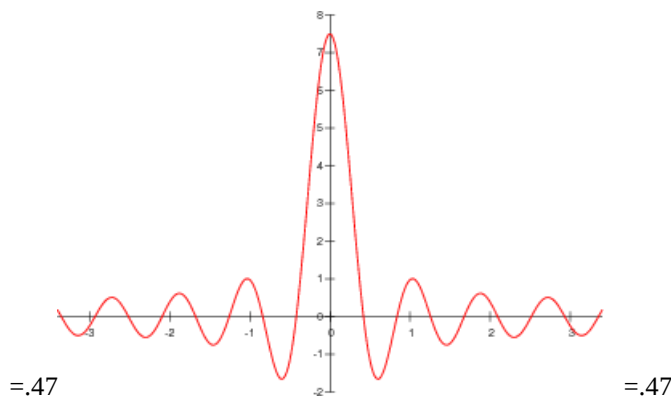
$$\lim_{p \rightarrow \infty} s_p \quad \text{és a} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{f(t-x) + f(t+x)}{2} \frac{\sin px}{x} dx$$

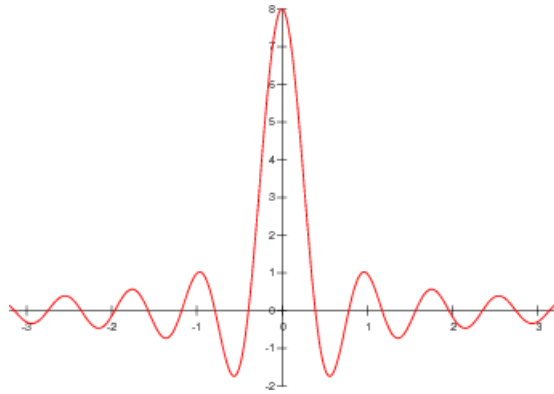
határértékek egyszerre léteznek vagy nem, és ha léteznek, ugyanoda konvergálnak.

Az exponenciális alakból ugyanehhez a formulához jutunk, hiszen

$$\begin{aligned} s_p(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-p}^p e^{i\omega(x-t)} d\omega dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{ip(x-t)} - e^{-ip(x-t)}}{i(x-t)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dx = \dots \end{aligned}$$

A $\frac{\sin px}{x}$ függvény a (folytonos) *Fourier-mag*. Láttuk (l. 4.2.3.), hogy improprius értelemben integrálható, de az abszolút értéke nem; ez pontosan ugyanaz a viselkedés, mint amilyen a Dirichlet-mag volt a diszkrét esetben.





A diszkrét Dirichlet-mag ($n = 7$) és a folytonos Fourier-mag ($p = 8$)

4.5.1. Tétel. Legyen az $f \in L^1(\mathbf{R})$ függvény a t pont egy környezetében olyan, hogy

$$\int_0^r \left| \frac{f(t-x) + f(t+x) - 2c}{2x} \right| dx < \infty.$$

Ekkor

$$c = \int_0^{\rightarrow \infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega,$$

$$c = \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Bizonyítás. Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi,$$

a fenti átalakításokat $(s_p(t) - c)$ -re elvégezve kapjuk, hogy

$$s_p(t) - c = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{t-r} + \int_{t-r}^{t+r} + \int_{t+r}^{\infty} \right) (f(x) - c) \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dx.$$

A két szélső integrál 0-hoz tart, ha $p \rightarrow \infty$, hiszen az $|x-t| \geq r > 0$ félegyeneseiken $\left| \frac{f(x)-c}{t-x} \right| \leq \frac{|f(x)|+|c|}{r}$, tehát alkalmazhatjuk a Riemann- Lebesgue-lemmát. A középső integrált átalakítva

$$\frac{1}{\pi} \int_{t-r}^{t+r} ((f(x) - c)) \frac{\sin p(t-x)}{t-x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{f(t-x) + f(t+x) - 2c}{2} \frac{\sin px}{x} dx.$$

A Dini-feltétel miatt

$$\frac{f(t-x) + f(t+x) - 2c}{2x} \in L^1[0, r],$$

és így ismét a Riemann- Lebesgue-lemma adja, hogy $s_p(t) \rightarrow c$.

Természetesen most is a $c = f(t)$ (folytonossági pontban), illetve a $c = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$ (elsőfajú szakadási pontban) értékek az érdekesek. Ha a függvény valamely t pontban Lipschitz-feltételnek tesz eleget, speciálisan ha differenciálható, a Dini-feltétel is teljesül, így ott az inverziós integrál (improprius értelemben) konvergens. Az is elegendő, ha ezek a feltételek mindkét féloldaltól külön-külön teljesülnek (l. 1.6.4., 1.6.6.).

Bizonyítás nélkül kimondjuk a Dirichlet- Jordan tétel folytonos változatát is.

4.5.2. Tétel. Ha az $f \in L^1(\mathbf{R})$ függvény a t pont valamely $[t-s, t+s]$ ($s > 0$) környezetében korlátos változású is, akkor

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

6. A Fejér-összegzés

A Fourier-sorok esetében a Fejér-összegzés hatékony eljárásnak bizonyult (l.a 1.8. szakaszban). A módszer alapgondolata az, hogy a sor s_n részletösszegei helyett azok σ_n számtani közepeinek konvergenciáját vizsgálja. Egy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

"két irányban végtelen" sor esetén

$$s_n := \sum_{k=-n}^n a_k,$$

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-n}^n a_l = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) a_k.$$

A folytonos esetben az inverziós integrál főértékét, azaz az

$$s_p := \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

határértékét vizsgáltuk. A diszkrét eset analógiájára vizsgáljuk az s_p integrálátlagát.

4.6.1. Definíció. Legyen $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, azaz f integrálható minden $[-r, r]$ véges intervallumon. Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = s$$

integrál *Fejér-értelemben* (vagy $(C, 1)$ -értelemben) létezik, ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r s_p(t) dp = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \left(\int_{-p}^p f(t) dt \right) dp = s.$$

4.6.2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = s$$

Fejér-értelemben pontosan akkor létezik, ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|t|}{r}\right) f(t) dt = s.$$

Megoldás. Az integrálás sorrendjét fölcserélve

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_0^r \int_{-p}^p f(t) dt dp &= \frac{1}{r} \int_{-r}^r \int_{|t|}^r f(t) dp dt \\ &= \frac{1}{r} \int_{-r}^r (r - |t|) f(t) dt = \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|t|}{r}\right) f(t) dt, \end{aligned}$$

ebből $r \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik az állítás.

Nyilván igaz, hogy integrálok Fejér-összegzése is lineáris. Belátjuk, hogy reguláris is (azaz a "hagyományos értelemben" létező integrálok Fejér-értelemben is léteznek).

4.6.3. Tétel. Ha $f \in L^1(\mathbf{R})$ és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = s,$$

akkor az integrál Fejér-értelemben is létezik, azaz

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|t|}{r}\right) f(t) dt = s.$$

Bizonyítás. Legyen

$$f_r(t) := \left(1 - \frac{|t|}{r}\right) f(t) \cdot \mathbf{1}_{[-r,r]}(t).$$

Nyilván mindenütt $f_r(t) \rightarrow f(t)$, ha $r \rightarrow \infty$. Mivel $|f_r(t)| \leq |f(t)|$ és $|f(t)|$ integrálható, alkalmazhatjuk Lebesgue majorált konvergencia tételét, mely szerint a limesképzés és az integrálás fölcserélhető,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|t|}{r}\right) f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

4.6.4. Definíció. Legyen

$$\int_{-r}^r \left(1 - \frac{|\omega|}{r}\right) e^{-i\omega t} d\omega = r \left(\frac{\sin \frac{rt}{2}}{\frac{rt}{2}}\right)^2 =: K_r(t)$$

a folytonos Fejér-mag.

A 4.4.5. feladatban láttuk, hogy a $k(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}$ függvény Fourier-transzformáltja $\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2$. Mivel

$$\left(1 - \frac{|\omega|}{r}\right) \mathbf{1}_{[-r,r]} = k(t/r),$$

a skálázási tétel alapján a definícióban szereplő Fourier-transzformált adódik.

Az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

inverziós integrálra fogjuk alkalmazni a Fejér összegzést.

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|\omega|}{r}\right) e^{i\omega t} \widehat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|\omega|}{r}\right) e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-r}^r \left(1 - \frac{|\omega|}{r}\right) e^{-i\omega(x-t)} d\omega \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) r \left(\frac{\sin \frac{r(x-t)}{2}}{\frac{r(x-t)}{2}} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} (f * K_r)(t). \end{aligned}$$

A kapott konvolúciós előállítás teljesen hasonló a diszkrét esethez, a K_n diszkrét és a K_{r+1} folytonos Fejér-magok is hasonlóak megjelenésükben és tulajdonságaikban is.

4.6.5. Tétel. Legyen

$$K_r(t) := r \left(\frac{\sin \frac{rt}{2}}{\frac{rt}{2}} \right)^2 = \frac{2(1 - \cos rt)}{rt^2}$$

a Fejér-mag. Ekkor

$K_r(t)$ páros függvény;

ha $t \neq 0$, $0 \leq K_r(t) \leq 4/(rt^2)$; ezért $K_r(t) \rightarrow 0$, ha $|t| \rightarrow \infty$, a $[-b, b]$ intervallumon kívül egyenletesen;

$$K_r \in L^1 \text{ és } \int_{-\infty}^{\infty} K_r(t) dt = 2\pi.$$

Bizonyítás. Az első két állítás K_r definíciójából azonnal adódik. Az integrálja, fölhasználva a mag páros voltát, valamint 4.2.3.-et,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} K_r(t) dt &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du \\ &= 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{\cos u - 1}{u} \right]_0^p + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 0 + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi. \end{aligned}$$

A t pont az f függvény Lebesgue-pontja, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t+x) - f(t)| dx = 0.$$

Mindenesetre a folytonossági pontok Lebesgue-pontok; és azt is tudjuk, hogy ha f integrálható, akkor majdnem minden pont Lebesgue-pont.

A következő tétel a Fejér- Lebesgue-féle inverziós formula.

4.6.6. Tétel. Ha $f \in L^1(\mathbf{R})$, akkor minden Lebesgue-pontjában (tehát majdnem mindenütt)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Fejér értelemben, azaz

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{|\omega|}{r}\right) \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} (f * K_r)(t).$$

???

Bizonyítás. Legyen t egy Lebesgue-pont. A szokásos átalakításokkal

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t+x) + f(t-x)) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t+x) + f(t-x)) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx, \\ \sigma_r(t) - f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^b + \frac{1}{\pi} \int_b^{\infty} =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Azt akarjuk belátni, hogy $\sigma_r(t) - f(t) \rightarrow 0$. Mindenesetre a második integrál

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_b^{\infty} (f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_b^{\infty} |f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)| dx \leq \frac{1}{\pi} \|f\|, \end{aligned}$$

mert a $[-b, b]$ intervallumon kívül a Fejér-mag egyenletesen kicsi.

Legyen

$$\Delta f(t, x) := |f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)|, \quad h(x) := \int_0^x \Delta f(t, u) du,$$

a Lebesgue-pontokban $h(x)/x \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow 0$.

Az első integrál

$$|I_1| = \frac{1}{\pi} \int_0^b \Delta f(t, x) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/r} + \frac{1}{\pi} \int_{1/r}^b =: I_{11} + I_{12}.$$

Könnyen ellenőrizhető (pl. Taylor-sorfejtéssel), hogy $1 - \cos rx \leq \frac{r^2 x^2}{2}$. Ebből

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{1/r} \Delta f(t, x) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{r}{2} \int_0^{1/r} \Delta f(t, x) dx = \frac{r}{2\pi} h(1/r) \leq \frac{r}{2\pi} \varepsilon \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{2\pi}, \end{aligned}$$

ha r elég nagy.

Parciálisan integrálva ($h'(x) = \Delta f(t, x)$)

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{1}{\pi} \int_{1/r}^b \Delta f(t, x) \frac{1 - \cos rx}{rx^2} dx \leq \frac{2}{\pi} \int_{1/r}^b \Delta f(t, x) \frac{1}{rx^2} dx \\ &\leq \frac{2}{\pi} \frac{h(b)}{rb^2} - \frac{2}{\pi} \frac{h(1/r)}{r(1/r)^2} + \frac{4}{\pi} \int_{1/r}^b h(x) \frac{1}{rx^2} dx, \end{aligned}$$

mivel $h(x) \leq \varepsilon x$ és $1/r < b$,

$$I_{12} \leq \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{rb} + \frac{4\varepsilon}{\pi} \int_{1/r}^b \frac{1}{rx^2} dx \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{4\varepsilon}{\pi}.$$

Becsléseinket összegyűjtve kapjuk, hogy $\sigma_r(t) - f(t) \rightarrow 0$.

Megjegyezzük, hogy ha a fenti feltételek mellett f folytonos is valamely, a t pontot tartalmazó zárt intervallumban, akkor ott a konvergencia egyenletes.

4.6.7. Tétel. Ha az $f \in L^1(\mathbf{R})$ függvény Fourier-transzformáltja is integrálható, $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, akkor f minden Lebesgue-pontjában (tehát majdnem mindenütt), speciálisan a folytonossági pontokban

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

és ez az integrál létezik (Lebesgue-értelemben).

Bizonyítás. A Fejér-összegzés regularitásából és az előző tételből adódik.

Bizonyítás nélkül említünk egy kritériumot, amely segíthet a tétel alkalmazásában. Legyen $f \in L^1(\mathbf{R})$ olyan, hogy valamely $b, M > 0$ számokra $|f(t)| \leq M$ majdnem minden $t \in [-b, b]$ esetén. Ekkor ha $\widehat{f}$ nem negatív, akkor integrálható is. ???

4.6.8. Feladat. Igazoljuk, hogy a Fourier-transzformáció, mint $L^1 \rightarrow C_0$ leképezés, injektív.

Megoldás. Ha $\widehat{f} = \widehat{g}$, akkor a Fejér- Lebesgue-tétel miatt majdnem mindenütt $f(t) = g(t)$ is adódik.

7. A Parseval-formula és az L^2 tér

A diszkrét esetben fennállt az $L^2(\mathbf{T}) \subset L^1(\mathbf{T})$ tartalmazás, így a négyzetesen integrálható függvények esetében $L^1(\mathbf{R}) \supset L^2(\mathbf{R})$ is automatikusan teljesült. A nem korlátos intervallum (így az $\mathbf{R}$) esetében azonban a két tér, és egyike sem tartalmazza a másikat.

4.7.1. Feladat. Mutassuk meg, hogy $L^1(\mathbf{R}) \setminus L^2(\mathbf{R})$ és $L^2(\mathbf{R}) \setminus L^1(\mathbf{R})$ nem üresek.

Megoldás. Legyen például

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(t), \quad g(t) := \frac{1}{t} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty)}(t).$$

könnyen ellenőrizhető, hogy $f \in L^1(\mathbf{R}) \setminus L^2(\mathbf{R})$ és $g \in L^2(\mathbf{R}) \setminus L^1(\mathbf{R})$.

4.7.2. Tétel. Legyenek $f, g \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Ekkor

$$h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \overline{g(-x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \overline{g(x)} dx$$

korlátos, folytonos, integrálható függvény (itt $\overline{(\cdot)}$ a komplex konjugáltat jelöli).

Bizonyítás. Legyen $u(t) := \overline{g(t)}$; mivel f és $u \in L^1(\mathbf{R})$ -beliek, $h = f * u$ konvolúciójuk is integrálható. A Cauchy- Bunyakovszkij- Schwartz egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) u(x) dx \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2}, \end{aligned}$$

tehát h korlátos. Végül belátjuk, hogy h a t -ben folytonos.

$$\begin{aligned} |h(t+y) - h(t)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t+y+x) - f(t+x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t+y+x) - f(t+x)|^2 dx \right)^{1/2} \|u\|_{L^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy C_c , azaz a kompakt tartójú folytonos függvények halmaza sűrű az $L^2(\mathbf{R})$ térben. Legyen $\phi \in C_c$ olyan, hogy $\|\phi - f\|_{L^2} < \varepsilon$, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x) - f(x)|^2 dx < \varepsilon$$

és $\phi(x) = 0$, ha $|x| > b$. Ekkor

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t+y+x) - f(t+x)|^2 dx \right)^{1/2} &= \|f(x+y) - f(x)\| \\ &\leq \|f(x+y) - \phi(x+y)\| + \|\phi(x+y) - \phi(x)\| + \|\phi(x) - f(x)\| \\ 2\varepsilon + \int_{-b}^b |\phi(x+y) - \phi(x)|^2 dx &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ha y elég kicsi, hiszen ϕ egyenletesen folytonos.

Ezt felhasználva,

$$|h(t+y) - h(t)| \leq 3\varepsilon \cdot \|u\|_{L^2},$$

tehát

$$h(t+y) \rightarrow h(t) \quad (y \rightarrow 0),$$

azaz h valóban folytonos.

4.7.3. Tétel. Ha $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, akkor $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ és

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2.$$

Ha $f, g \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega.$$

Bizonyítás. Csak az első állítás bizonyítását vázoljuk. Legyen $u(t) := \overline{f(-t)}$, nyilván $u \in L^1 \cap L^2$. Az előző tétel szerint $h := f * u$ korlátos és folytonos; a Fourier-transzformáció formális tulajdonságai miatt $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{u}(\omega)$ és $\widehat{u}(\omega) = \widehat{\overline{f(-t)}}(\omega)$, így

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \overline{\widehat{f}(\omega)} = |\widehat{f}(\omega)|^2 \geq 0.$$

A 4.6.7. után említett kritérium szerint, mivel h korlátos és $\widehat{h}$ nemnegatív, $\widehat{h} \in L^1$. A 4.6.6. Fejér- Lebesgue-tétel miatt

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \overline{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

ebből a $t = 0$ helyettesítéssel az állítás adódik.

4.7.4. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega$$

integrált.

Megoldás. Legyen $f(t) := \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ az egységimpulzus-függvény, 4.1.3. szerint

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}.$$

A Parseval-formula szerint

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \|f\|^2 = \int_{-1}^1 1 dt = 2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \pi.$$

Tekintsük most már az általános $f \in L^2(\mathbf{R})$ esetet. Ekkor még az sem biztos, hogy az

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

transzformált létezik, hiszen lehet, hogy f nem integrálható.

Tudjuk, hogy a kompakt tartójú folytonos függvények C_c osztálya sűrű az L^2 -ben; mivel nyilván $C_c \subset L^1 \cap L^2$, az $L^1 \cap L^2$ osztály is sűrű (L^2 -ben). Ez motiválja az alábbi konstrukciót.

Legyen $f \in L^2(\mathbf{R})$ és tekintsük az

$$f_n(t) := f(t) \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

függvénysorozat. Világos, hogy f_n kompakt tartójú (hiszen $|t| > n$ esetén $f_n(t) = 0$), tehát $f_n \in L^1 \cap L^2$. Az is világos, hogy

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_{|t| \geq n} |f(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz f_n normában konvergál f -hez.

4.7.5. Tétel. Erre az (f_n) sorozatra igaz, hogy az $(\widehat{f}_n)$ sorozat az $L^2(\mathbf{R})$ térben konvergens.

Bizonyítás. Mivel $f_n \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, képezhetők a Fourier-transzformáltak. Legyen $\varepsilon > 0$. A Parseval-formula szerint

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|^2 &= \|(\widehat{f}_n - \widehat{f}_m)\|^2 = 2\pi \|f_n - f_m\|^2 \\ &= \int_{m \leq |t| \leq n} |f(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad (n > m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

4.7.6. Definíció. Legyen $f \in L^2(\mathbf{R})$ és legyen $f_n(t) := f(t) \cdot \mathbf{1}_{[-n, n]}(t)$, $n = 1, 2, \dots$. Az f Fourier-transzformáltja

$$\widehat{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n,$$

ahol a limes az L^2 tér normájában vett limes.

Szokás a normában vett limest l.i.m.-mel jelölni. Az így definiált Fourier-transzformáltat Plancherel-transzformáltnak is nevezik.

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy a fogalom jól definált (máshogyan konstruált $g_n \rightarrow f$ sorozatra ugyanazt a transzformáltat kapnánk); és a Fourier-transzformáció alapvető tételei érvényesek maradnak.

4.7.7. Tétel. Legyen $f \in L^2(\mathbf{R})$, illetve $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Ekkor a 4.7.6. definíció értelmében vett Fourier-transzformáltra igazak az alábbiak:

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega.$$

(Parseval-formulák);

$$f(at) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

("skálázás");

$$f(t - h) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad e^{-i\omega h} \widehat{f}(\omega)$$

("eltolás");

$$e^{iat} f(t) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad \widehat{f}(\omega - a)$$

("exponenciális moduláció" vagy "frekvenciaeltolás");

$$(\cos at) f(t) \quad \text{Fourier-transzformáltja} \quad \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega - a) + \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega + a)$$

("cosinusos moduláció");

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t) dt$$

("kalapcsere").

Bár az L^2 térben a definíció bonyolultabbnak tűnhet, most is igaz, hogy az L^2 -beli függvények "szabályosabban" viselkednek, mint az L^1 -beliek.

4.7.8. Tétel. Legyen $f \in L^2(\mathbf{R})$ és legyen $g(\omega) = \widehat{f(\omega)}$. Ekkor

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{g}}(t).$$

Ez a "reciprocitási tétel" tehát azt állítja, hogy kétszer véve a transzformált konjugáltját, lényegében visszkapjuk a kiindulási függvényt.

Bizonyítás. A bizonyítást csak vázoljuk.

$$\begin{aligned} & \left\| f(\omega) - \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{g}}(\omega) \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(\omega) - \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{g}}(\omega) \right) \overline{\left(f(\omega) - \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{g}}(\omega) \right)} d\omega \\ &= \|f\|^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \widehat{\widehat{g}}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\omega) \widehat{\widehat{g}}(\omega)} d\omega + \frac{1}{4\pi^2} \|\widehat{\widehat{g}}\|^2. \end{aligned}$$

A kalapcsere-tételből és a Parseval-formulából

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \widehat{\widehat{g}}(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega)} d\omega = \|\widehat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \widehat{\widehat{g}}(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\omega) \widehat{\widehat{g}}(\omega)} d\omega = 2\pi \|f\|^2. \end{aligned}$$

Végül ismét a Parseval-formulából

$$\|\widehat{\widehat{g}}\|^2 = 2\pi \|g\|^2 = 2\pi \|\widehat{f}\|^2 = 4\pi^2 \|f\|^2,$$

eredményeinket összeszedve

$$\left\| f(\omega) - \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{g}}(\omega) \right\|^2 = 0.$$

A reciprocitási tételből adódik az inverziós formula alábbi alakja is:

4.7.9. Tétel. Ha $f \in L^2(\mathbf{R})$,

$$f(t) = \text{l.i.m.}_n \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{f}(\omega) d\omega.$$

Megállapíthatjuk továbbá, hogy az 4.7.6.-ben definiált Fourier-transzformáció (Plancherel-transzformáció) az $L^2(\mathbf{R})$ teret önmagába képező, folytonos, lineáris bijekció, amely az $L^1 \cap L^2$ térben a szokásos Fourier-transzformációval egybeesik.

5. fejezet - Feladatok

1. Fourier-transzformáció

5.1.1. Feladat. Legyen

$$u(t) = \mathbf{1}_{[0, \infty)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq t, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

az ún. egységugrás-függvény. Határozzuk meg az $u(t)$ és $f(t) := e^{-at}u(t)$ ($a > 0$) függvények Fourier-transzformáltjait.

Megoldás. Az $u(t)$ függvény $\mathbf{R}$ -en nem integrálható, így a transzformáltja nem értelmezett.

Az $f(t)$ függvény integrálható, transzformáltja

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_0^r = \frac{1}{a+i\omega}. \end{aligned}$$

Bár az $u(t)$ függvény nem integrálható, mivel

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2},$$

írhatjuk, hogy

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t\omega}{\omega} d\omega \quad (t \neq 0).$$

5.1.2. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) := (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{ha } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{ha } |t| \geq 1. \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját. ???

Megoldás. Mivel f páros függvény,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-1}^1 f(t)e^{-i\omega t} dt = 2 \int_0^1 (1-t) \cos \omega t dt \\ &= 2 \left[(1-t) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\sin \omega t}{\omega} dt \\ &= 0 + 2 \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega^2} \right]_0^1 = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega) = \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}, \quad (\omega \neq 0), \\ \widehat{f}(0) &= 2 \int_0^1 (1-t) dt = 2. \end{aligned}$$

5.1.3. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := e^{-a|t|}$ ($a > 0$) függvény Fourier-transzformáltját. ???

Megoldás. $\widehat{f}(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$.

5.1.4. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := (1 - t^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. $\widehat{f}(\omega) = \frac{4}{\omega^3} (\sin \omega - \omega \cos \omega)$, ha $\omega \neq 0$; $\widehat{f}(0) = \frac{4}{3}$.

5.1.5. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := e^{2it} \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. $\widehat{f}(\omega) = \frac{2 \sin(\omega-2)}{\omega-2}$, ha $\omega \neq 2$; $\widehat{f}(2) = 2$.

5.1.6. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t < 1, \\ -1, & \text{ha } -1 < t < 0, \\ 0, & \text{ha } |t| > 1 \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. $\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{i\omega}(1 - \cos \omega)$, ha $\omega \neq 0$; $\widehat{f}(0) = 0$.

5.1.7. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := \frac{1}{t^2-2t+2}$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. Tudjuk, hogy az $\frac{1}{t^2+1}$ transzformáltja $\pi e^{-|\omega|}$ (l. 4.2.6.). Ebből az eltolási tétellel kapjuk, hogy $\widehat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}(\cos \omega - i \sin \omega)$.

5.1.8. Feladat. Az $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ egységimpulzus transzformáltjának ismeretében igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi/2, & \text{ha } |t| < 1, \\ \pi/4, & \text{ha } t = \pm 1, \\ 0, & \text{ha } |t| > 1. \end{cases}$$

Megoldás. Az egységimpulzus Fourier-transzformáltja $\frac{2 \sin \omega}{\omega}$ (l. 4.1.3.). Az egységimpulzus korlátos változású függvény, hiszen két monoton függvény különbsége: $\mathbf{1}_{[-1,1]}(t) = u(t+1) - u(t-1)$, itt u az egységugrás, így az inverziós formula szerint

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{1}_{[-1,1]}(t+0) + \mathbf{1}_{[-1,1]}(t-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\rightarrow \infty} 2 \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

mert a transzformált páros. Az $\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ szakasznként konstans,

$$\frac{\mathbf{1}_{[-1,1]}(t+0) + \mathbf{1}_{[-1,1]}(t-0)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t| < 1, \\ 1/2, & \text{ha } t = \pm 1, \\ 0, & \text{ha } |t| > 1, \end{cases}$$

amiből az állítás adódik. (Ugyanígy arra is hivatkozhattunk volna, hogy $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ mindenütt teljesíti a félérítő feltételt.)

5.1.9. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := e^{-t}u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$ függvény Fourier-transzformáltját és az

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\omega \sin \omega t + \cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega$$

impropius integrált.

Megoldás. Mivel f integrálható,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_0^{\rightarrow \infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_0^r = \frac{1}{1+i\omega}.$$

Az inverziós integrál

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-i\omega}{1+\omega^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t + \cos \omega t}{1+\omega^2} + i \frac{-\omega \cos \omega t + \sin \omega t}{1+\omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

A képzetes rész 0, mert páratlan függvényt integrálunk; a valós rész páros függvény integrálja, tehát

$$\frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\omega \sin \omega t + \cos \omega t}{1+\omega^2} d\omega$$

és tudjuk, hogy ez mindenütt konvergens (hivatkozhatunk a korlátos változásra vagy a félérítős feltételre is), a határérték $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$, ebből

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\omega \sin \omega t + \cos \omega t}{1+\omega^2} d\omega = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ \pi/2, & \text{ha } t = 0, \\ \pi e^{-t}, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

Az ilyen esetekben sokszor kényelmesebb a valós $a(\omega)$, $b(\omega)$ transzformáltakkal dolgozni. Parciális integrálással

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\omega^2}$$

és

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} \frac{\omega}{1+\omega^2};$$

az inverziós formula

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \int_0^{\rightarrow\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega.$$

5.1.10. Feladat. Az $f(t) := e^{-a|t|}$ ($a > 0$) függvény transzformáltja ismeretében számoljuk ki az

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega, \quad t > 0$$

improprius integrált.

Megoldás. A transzformáltat a 5.1.3. feladatból ismerjük; az inverziós formulát átrendezve, az integrál értéke $\frac{\pi}{2a} e^{-at}$.

5.1.11. Feladat. Legyen

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at}, & \text{ha } t > 0, \\ -f(-t), & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

Állítsuk elő f -et Fourier-integrállal, és számoljuk ki az

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega, \quad t > 0$$

improprius integrált.

Megoldás. A valós $a(\omega)$, $b(\omega)$ transzformáltakat használjuk. Mivel f páratlan, $a(\omega) = 0$.

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-at} \sin \omega t dt,$$

A szokásos módon kétszer parciálisan integrálva

$$\left(1 + \frac{a^2}{\omega^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-at} \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega}, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

Az inverziós formula szerint

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

ebből átrendezéssel

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-at}, \quad t > 0.$$

5.1.12. Feladat. Igazoljuk, hogy $a, b > 0$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

???

Megoldás. Legyen $f(t) := e^{-a|t|}$, $g(t) := e^{-b|t|}$; tudjuk (l. 5.1.3.), hogy

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}, \quad \widehat{g}(\omega) = \frac{2b}{\omega^2 + b^2}.$$

A 4.3.7. tétel és az inverziós formula szerint

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx,$$

a $t = 0$ helyen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)} &= 2\pi \frac{1}{4ab} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)g(x) dx \\ &= \frac{\pi}{ab} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-bx} dx = \frac{\pi}{ab} \left[\frac{e^{-(a+b)x}}{-(a+b)} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab} \frac{1}{(a+b)}. \end{aligned}$$

5.1.13. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + t^2)^2} dt$$

impropius integrált.

Megoldás. Tudjuk, hogy ha

$$f(t) := \frac{1}{(a^2 + t^2)}, \quad \widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

A Parseval-formula szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{f}(\omega))^2 d\omega,$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + t^2)^2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2a|\omega|} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2a|\omega|} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{a^2} \left[\frac{1}{-2a} e^{-2a|\omega|} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2a^3}.\end{aligned}$$

5.1.14. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := e^{-at^2}$ ($a > 0$) függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. Tudjuk (l. 4.4.), hogy $\frac{df}{d\omega}$ a $-itf(t)$ függvény Fourier-transzformáltja. Ezt felhasználva és parciálisan integrálva

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\omega} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} t e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-at^2}}{-2a} e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{-\omega}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{-\omega}{2a} \widehat{f}(\omega),\end{aligned}$$

tehát $\widehat{f}$ -ra egy (szétválasztható) differenciálegyenletet kaptunk. Ezt megoldva $\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)e^{-\omega^2/(4a)}$. Mivel

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\pi/a},$$

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}.$$

Hasonlítsuk össze a 5.2.1. feladat megoldásával.

5.1.15. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := te^{-t^2}$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. Legyen $g(t) := e^{-t^2}$. Mivel $f(t) = \frac{-1}{2}g'(t)$ és $\widehat{g}$ -ot ismerjük, 4.4. alapján

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{-1}{2} i\omega \sqrt{\pi} \cdot e^{-\omega^2/4}.$$

5.1.16. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := te^{-|t|}$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. Tudjuk, hogy az $e^{-|t|}$ függvény Fourier-transzformáltja $\frac{2}{1+\omega^2}$ (l. 5.1.3.). Ebből idő szerinti deriválással

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

5.1.17. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 \omega}{\omega^4} d\omega = \frac{\pi}{3}.$$

Megoldás. Tudjuk, hogy az $f(t) := (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ Fourier-transzformáltja (l. 5.1.2.)

$$\widehat{f}(\omega) = \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^2.$$

A Parseval-formula szerint

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^4 d\omega = \int_{-1}^1 (1 - |t|)^2 dt = \frac{2}{3},$$

ebből változóhelyettesítéssel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^4 d\omega = \frac{2\pi}{3}.$$

5.1.18. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 \omega}{\omega^3} d\omega = \frac{3\pi}{8}.$$

Megoldás. Legyen $f(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ és $g(t) := (1 - |t/2|)\mathbf{1}_{[-2,2]}(t)$. Az $\widehat{f}, \widehat{g}$ transzformáltakat ismerjük. A Parseval-formula szerint

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t)\overline{g(t)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{2 \sin \omega}{\omega} \frac{2 \sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega &= \int_{-1}^1 (1 - |t/2|)^2 dt = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5.1.19. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{(1 + \omega^2)^2} = \frac{\pi}{4},$$

valamint

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a + b)} \quad (a, b > 0).$$

Megoldás. Írjuk fel az $f(t) := e^{-|t|}$ függvényre és transzformáltjára a Parseval-formulát:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{2}{(1 + \omega^2)^2} d\omega = \int_{-\infty}^\infty e^{-2|t|} dt = 1,$$

amiből az állítás adódik. A másik formulát úgy igazolhatjuk, hogy az $f(t) := e^{-a|t|}, g(t) := e^{-b|t|}$ függvények szorzatára írjuk föl a Parseval-formulát. Egy másik megoldást láttunk a 5.1.12. feladatban.

2. További feladatok

5.2.1. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ függvény Fourier-transzformáltját (f a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye). ???

Megoldás. Az exponenciális függvény Taylor-sora

$$e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

mindenütt konvergens; hatványsor, tehát a $|z| \leq R$ zárt körvonalon egyenletesen is konvergens, ott szabad tagonként integrálni.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i\omega t)^n}{n!} e^{-t^2/2} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i\omega)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2} t^n dt. \end{aligned}$$

Ha n páratlan, $e^{-t^2/2} t^n$ is páratlan függvény, így az origóra szimmetrikus integrálja 0. Ha n páros,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2} t^n dt = \frac{(2m)!}{m! 2^m}, \quad (*)$$

ezt fölhasználva

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^{(2n)} (2n)!}{(2n)! n! 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\omega}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\omega^2/2},$$

azaz a transzformált lényegében az eredeti függvény.

A (*) formula bizonyítása: Legyen

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

a *gammafüggvény*. Ismert, hogy $x > 0$ esetén az integrál konvergens. Parciális integrálással igazolható, hogy $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, speciálisan $\Gamma(n+1) = n!$, tehát a gammafüggvény a faktoriális (folytonos) kiterjesztése.

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \left(\int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt\right)^2 = \quad (u := \sqrt{t}) \\ &= \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \\ &= \int \int_{u,v \geq 0} e^{-u^2-v^2} du dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} 2 \left[\frac{e^{-y}}{-1} \right]_0^{\infty} d\phi = \pi, \end{aligned}$$

ebből $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; (*) bal oldalában $u := \frac{1}{2}t^2$ -et helyettesítve, és a gammafüggvény tulajdonságaiból a (*) állítás adódik.

5.2.2. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := \frac{1}{t^4+1}$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. A 4.2.6. mintájára dolgozunk. Az $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ zérushelyei, az

$$a_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

pontok, mind elsőrendű pólusok, tehát a reziduum számolható a

$$\text{Res}(e^{i\omega z} f(z), a_k) = \frac{e^{i\omega a_k}}{4a_k^3}$$

képlettel. Mivel $\frac{1}{a_1^3} = a_3$ és $\frac{1}{a_2^3} = a_4$, a felső félsíkban a reziduumok összege

$$\frac{-\sqrt{2}i}{4} \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega} \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2}\omega + \cos \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \right),$$

és a transzformált

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|\omega|} \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2}|\omega| + \cos \frac{\sqrt{2}}{2}|\omega| \right).$$

5.2.3. Feladat. Határozzuk meg az $f(t) := \frac{1}{(t^2+1)^2}$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. $\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|} (1 + |\omega|)$.

5.2.4. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) := \frac{\cos bt}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. $\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\omega-b|} + e^{-a|\omega+b|}$.

5.2.5. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) := \frac{1}{\cosh \pi t}$$

függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. f integrálható $\mathbf{R}$ -en, mert pozitív és $e^{-\pi^2 t^2}$ integrálható majoráns. Legyen $g(z) := \frac{e^{-i\omega z}}{\cosh \pi z}$, és integráljuk g -t annak a téglalapnak a kerületén, amelynek csúcsai $-r, r, r+i, -r+i$. A téglalap belsejében az egyetlen szingularitás az $i/2$ -ben van, és

$$\text{Res}(g, \frac{i}{2}) = \frac{e^{\omega/2}}{\pi i}.$$

Ha $r \rightarrow \infty$, a függőleges éleken vett integrálok 0-hoz tartanak és így a reziduomtételből

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{-i\omega t}}{\cosh \pi t} dt + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{-i\omega(t+i)}}{\cosh \pi(t+i)} dt = 2\pi i \frac{e^{\omega/2}}{\pi i}.$$

A második integrált átalakítva

$$\widehat{f}(\omega)(1 + e^{\omega}) = 2e^{\omega/2}, \quad \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\cosh(\omega/2)}.$$

5.2.6. Feladat. Legyen $f \in L^1[0, \infty)$. Igazoljuk, hogy ha f korlátos változású valamely $[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq \infty$) intervallumon, akkor bármely $a < t < b$ értékre

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega t \cos \omega x dx d\omega,$$

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega t \sin \omega x dx d\omega.$$

Megoldás. Terjesszük ki f -et az egész $\mathbf{R}$ -re páros, illetve páratlan módon; határozzuk meg a valós $a(\omega), b(\omega)$ Fourier-transzformáltakat és alkalmazzuk a Dirichlet- Jordan-féle inverziós tételt.

5.2.7. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin \omega \cos t\omega}{\omega} d\omega$$

improprius integrál értékét.

Megoldás. Az $f(t) := \mathbf{1}_{[0,1]}$ függvény cosinus-előállításából

$$a(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega}, \quad \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin \omega \cos t\omega}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi/2, & \text{ha } 0 \leq t < 1, \\ \pi/4, & \text{ha } t = 1, \\ 0, & \text{ha } 1 < t. \end{cases}$$

5.2.8. Feladat. Az $f(t) = e^{-t} \cos t$ ($t > 0$) függvény sinus-előállításából határozzuk meg az

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\omega^3 \sin \omega t}{\omega^4 + 4} d\omega$$

improprius integrál értékét.

Megoldás. $\frac{\pi}{2} e^{-t} \cos t$.

3. Alkalmazások

5.3.1. Feladat. Határozzuk meg egy véges hosszúságú sinushullám sávszélességét.

Megoldás. Először a szükséges fogalmakat definiáljuk. Az T hosszúságú egységimpulzus (az $\mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}(t)$ függvény "amplitúdósűrűsége"

$$a(\omega) = \frac{2 \sin \frac{T}{2} \omega}{\pi \omega},$$

és tudjuk, hogy

$$\mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}(t) = \int_0^\infty T(\omega) \cos(\omega t) d\omega.$$

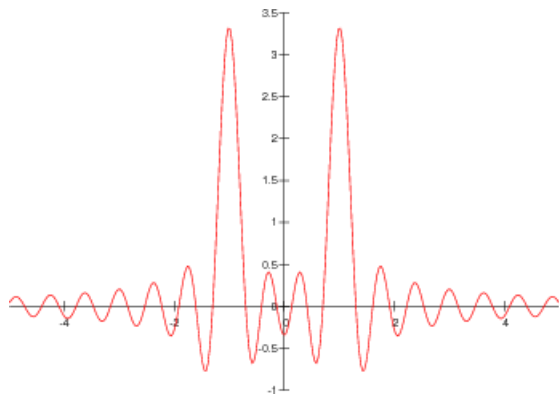
Ezt úgy tekinthetjük, hogy az impulzus különböző ω frekvenciájú cosinushullámok szuperpozíciója ("összege", pontosabban integrálja, hiszen folytonos esetet vizsgálunk). Az $a(\omega)$ amplitúdósűrűség 0-hoz tart; a műszaki gyakorlatban gyakran úgy tekintik, hogy az $a(\omega)$ első zérushelyénél nagyobb frekvenciák amplitúdója már elhanyagolhatóan kicsi. Az első zérushelyre $\frac{T}{2}\omega = \pi$, így a "lényeges" frekvenciatartomány a $[0, \frac{2\pi}{T}]$ intervallum. (Ez azt is jelentheti, hogy ha egy rendszeren át akarunk vinni egy T hosszúságú egységimpulzust minél pontosabban, akkor a rendszer legalábbis a megadott intervallumba eső sinushullámokat pontosan kell, hogy átvigye.)

Tekintsünk most egy T ideig tartó cosinusjelet, azaz legyen

$$f(t) = \cos \omega_0 t \cdot \mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}(t).$$

A függvény páros, tehát most is csak a cosinusos amplitúdósűrűséggel kell számolnunk.

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 t \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{T/2} (\cos(\omega + \omega_0)t + \cos(\omega - \omega_0)t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}}{\omega + \omega_0} + \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}}{\omega - \omega_0}. \end{aligned}$$



Az $a(\omega)$ amplitúdósűrűség ($\omega_0 = 1, T = 20$)

Az

$$f(t) = \int_0^\infty T(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

előállításban csak az $\omega > 0$ rész számít; ez hasonló alakú, mint az impulzusnál, csak most az ω_0 frekvencia környéke a lényeges. A sávszélesség most is a (számlálóban lévő) sinus két szomszédos zérushelye közti rész, tehát $\Delta\omega \cdot \frac{T}{2} = \pi$, $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, a lényeges frekvenciatartomány az $[\omega_0 - \frac{\pi}{T}, \omega_0 + \frac{\pi}{T}]$ intervallum.

Tehát minél hosszabb (időben) a jel, annál inkább válik dominánssá maga az ω_0 alaphfrekvencia. Ha a jel rövid, akkor igen széles sávban tartalmaz "lényeges" frekvenciákat. Extrém esetben, ha T nagyon kicsi, a frekvenciaspektrum annyira széles lehet, hogy még a negatív oldalon lévő csúcs hatásával is számolnunk kell.

5.3.2. Feladat. Igazoljuk, hogy az egységimpulzussal vett konvolúció simítja a függvényt.

Megoldás. Legyen $f \in L^1(\mathbf{R})$ és számoljuk ki az $\mathbf{1}_{[-a,a]}$ függvénnyel vett konvolúcióját.

$$(f * \mathbf{1}_{[-a,a]})(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \mathbf{1}_{[-a,a]}(x) dx = \int_{-a}^a f(t-x) dx = \int_{t-a}^{t+a} f(u) du,$$

ez nem más, mint az $f(t)$ egyfajta integrálátlag.

Tegyük fel, hogy $f(t)$ egy "hasznos" jel, amit valami kisebb "zavarral" (keskeny, nem túl nagy csúcsokkal) terhelt. Képezzük az f Fourier-transzformáltját, majd ezt szorozzuk meg az $\mathbf{1}_{[-a,a]}$ ismert transzformáltjával; erre az inverz transzformációt alkalmazva, az $(f * \mathbf{1}_{[-a,a]})$ konvolúciót kapjuk vissza, ami tehát f -hez hasonló, de annál simább.

Tehát egy (nagyon egyszerű) zavarűrészt valósítottunk meg. A módszer gyakorlatilag is alkalmazható, mert a Fourier-transzformált (numerikusan) hatékonyan számolható; az is előnyös, hogy a transzformáció és inverze lényegében ugyanaz a művelet.

A következő animációban próbálghatjuk, hogyan simítja a függvényt az impulzussal való konvolválás. Természetesen az a növelésével egyre simább eredményt kapunk; ha a túl nagy, az eredeti függvény jellege is elveszhet.

Simítás konvolúcióval

Végül, az alábbi animáció illusztrálja a mozgókép zajszűrését.

Mozgókép zajszűrése

5.3.3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in L^2(\mathbf{R})$ egy folytonos sávhatárolt jel, akkor (megfelelően megválasztott) diszkrét értékei ismeretében rekonstruálható.

Megoldás. A tétel azt állítja, hogy az $f(t)$ függvény értékei meghatározhatók megszámlálható sok értéke ismeretében. Egy síma, periodikus függvény Fourier-sor előállítás, vagy egy analitikus függvény Taylor-sora szintén diszkrét értékekből állítja elő a függvényt; fenti tételünk ezektől abban különbözik, hogy a függvényérték ismeretében történik a rekonstrukció. A gyakorlatban az ilyen előállításokat "mintavételezésnek" nevezik.

Legyen $\widehat{f}(\omega)$ a $[-K, K]$ intervallumon kívül 0; és legyen

$$\widehat{\phi}_n(\omega) = \frac{\pi}{K} e^{-in\pi\omega/K} \cdot \mathbf{1}_{[-K,K]}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \text{l.i.m.} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{\phi}_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^K \frac{\pi}{K} e^{-in\pi\omega/K} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin(Kt - n\pi)}{Kt - n\pi}. \end{aligned}$$

A $\widehat{\phi}_n(\omega)$ függvények ortogonális bázist alkotnak a sávhatárolt Fourier-transzformáltak $L^2[-K, K]$ terében; tehát a $\phi_n(t)$ függvények is ortogonális bázist alkotnak (a sávhatárolt transzformálttal rendelkező $L^2(\mathbf{R})$ -beli függvények terében). Legyen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(t),$$

akkor

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \widehat{\phi}_n(\omega),$$

$$c_n = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K \widehat{f}(\omega) e^{-in\pi\omega/K} d\omega = \frac{\pi}{K} f\left(\frac{n\pi}{K}\right),$$

hiszen az L^2 térben

$$f(t) = \text{l.i.m.}_n \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

majdnem mindenütt; és mivel f folytonos, ez mindenütt is igaz.

Tehát a keregett előállítás

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{K}\right) \frac{\sin(Kt - n\pi)}{Kt - n\pi}.$$

Vegyük észre, hogy a formula hasonlít a 1.1.4. tétel után látott "interpolációs" formulára.

Világos, hogy ha f időben korlátozott, akkor hasonló előállítás igaz a $\widehat{f}$ Fourier-transzformáltra.

A sávhatároltsági feltétel a tételben szükséges. Ha a mintavételezésen alapuló eljárást a gyakorlatban alkalmazzuk, a jelből először ki kell vágni a túl magas frekvenciájú komponenseket (egy aluláteresztő, ún. anti-aliasing szűrővel).

...

6. fejezet - Laplace- transzformáció

A testekből, rugókból és súrlódó elemekből felépített mechanikai rendszerek; vagy ellenállások, kondenzátorok és indukciós tekercsekkel álló elektromos hálózatok törvényeit ugyanolyan másodrendű differenciálegyenletek, vagy elsőrendű integro- differenciálegyenletek írják le. Ezen feladatokban a rendszer ismert nyugalmi állapotára valamilyen gerjesztés hatására megváltozik; például ez történik egy elektromos rendszer bekapcsolásakor. Gyakori, hogy a gerjesztés csak szakaszonként folytonos függvény segítségével adható meg.

A Laplace- transzformáció alkalmazásával az ilyen kezdeti érték problémák hatékonyan kezelhetők. Ugyanis a kiindulási értékek már a számítás elején figyelembe vehetők, a transzformáció után lineáris egyenletet, egyenletrendszert kell megoldani; továbbá bonyolult gerjesztés esetén is használhatóak.

1. Elemi tulajdonságok

Legyen f a valós t (idő) változó valós vagy komplex értékű függvénye, továbbá s rögzített valós vagy komplex szám.

6.1.1. Definíció. Az f függvénynek az s helyen vett Laplace- integrálján a

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t)e^{-st} dt$$

improprius integrált értjük, amennyiben az konvergens. Azon s pontokban, ahol a konvergencia fennáll, az

$$F := L[f(t)](s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

összefüggés egy függvényt definiál, amelyet az $f(t)$ Laplace- transzformáltjának nevezzük. Tehát a Laplace- transzformáció az $f(t)$ valós változós "bemeneteli" függvényhez az $F(s)$ valós vagy komplex változós "kimeneteli" függvényt rendeli hozzá.

6.1.2. Példa. Legyen $f(t) = 1(t \geq 0)$, ekkor

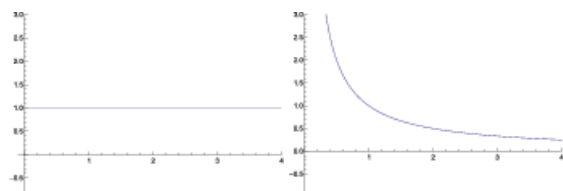
$$F(s) = L[1](s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s},$$

ha $\operatorname{Re} s > 0$.

Az egységugrás- függvény, $h(t)$ nem negatív t - re megegyezik f - fel, ezért

$$L[h(t)](s) = \frac{1}{s}.$$

Ha $s > 0$ valós szám, úgy



A $h(t)$ egységugrás és a transzformáltja

Továbbá tetszőleges $a > 0$ szám esetén a $h(t - a) =: h_a(t)$ eltoltra kapjuk, hogy

$$L[h_a(t)](s) = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s},$$

amennyiben $\operatorname{Re} s > 0$.

Az egységugrás-függvény és a Laplace-transzformáltja, ha $s > 0$ valós.

Az improprius Riemann- integrál tulajdonsága alapján adódik, hogy a Laplace- transzformáció egy lineáris operátor, azaz

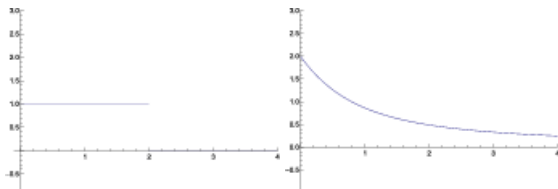
$$\begin{aligned} L[f(t) + g(t)](s) &= L[f(t)](s) + L[g(t)](s), \\ L[cf(t)](s) &= cL[f(t)](s), \quad (c \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

ha létezik $L[f(t)]$ és $L[g(t)]$.

6.1.3. Példa. Így az egységnyi amplitúdójú és a hosszúságú impulzusfüggvény, $d_a(t) := h(t) - h_a(t)$ Laplace- transzformáltja

$$\begin{aligned} L[d_a(t)](s) &= L[h(t) - h_a(t)](s) \\ &= L[h(t)](s) - L[h_a(t)](s) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} \\ &= \frac{1 - e^{-as}}{s}, \quad (\operatorname{Re} s > 0). \end{aligned}$$

Ha $s > 0$ valós szám, akkor



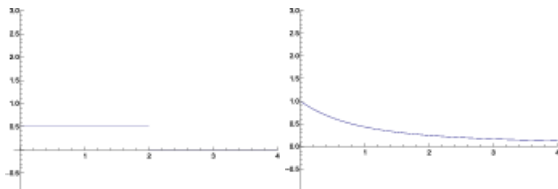
$d_2(t)$ és a transzformáltja

Az egységnyi amplitúdójú és a hosszúságú impulzusfüggvény és a Laplace-transzformáltja, ha $s > 0$ valós.

Továbbá az egységnyi erősségű impulzusfüggvény, $\delta_a(t) := \frac{1}{a}d_a(t)$ transzformáltja

$$L[\delta_a(t)](s) = \frac{1 - e^{-as}}{as}, \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Ha $s > 0$ valós szám, úgy



$\delta_2(t)$ és a transzformáltja

Az egységnyi amplitúdójú és a hosszúságú impulzusfüggvény és a Laplace-transzformáltja, ha $s > 0$ valós.

6.1.4. Példa. Legyen $\omega \in \mathbb{R}$, továbbá $\operatorname{Re} s > 0$, ekkor

$$\begin{aligned} L[e^{i\omega t}](s) &= \int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(i\omega-s)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2+\omega^2} + i \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Így,

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

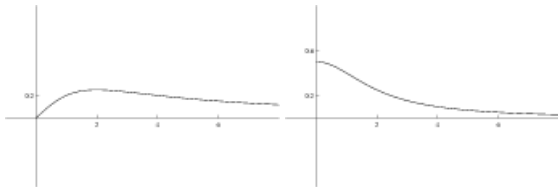
alapján egyszerűen kapjuk, hogy

$$L[\cos \omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad L[\sin \omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

ha $\operatorname{Re} s > 0$.

Erre az eredményre hamarabb is következtethetünk az $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ összefüggés alapján.

Ha $s > 0$ valós szám, úgy



$\cos 2t$ transzformáltja $\sin 2t$ transzformáltja

A $\cos \omega t$ függvény és a Laplace-transzformáltja, ha $s > 0$ valós.

A $\sin \omega t$ függvény és a Laplace-transzformáltja, ha $s > 0$ valós.

A parciális integrálás módszerével kapjuk, hogy

6.1.5. Példa. Ha $\operatorname{Re} s > 0$, akkor

$$L[t](s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \left[\frac{t e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{1}{s^2}.$$

Teljes indukcióval adódik, hogy $\operatorname{Re} s > 0$ esetén

$$L[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Ezt az eredményt pozitív valós s változó esetén a

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad (p > 0)$$

függvény segítségével általánosíthatjuk az $f(t) = t^\alpha (t > 0, \alpha > -1)$ függvényre.

6.1.6. Példa. Legyen $\alpha > -1$ és $s > 0$, ekkor az $u = st$ helyettesítést alkalmazva

$$\begin{aligned} L[t^\alpha](s) &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{u}{s} \right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Speciálisan, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ és $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ alapján

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad \text{illetve} \quad L[\sqrt{t}](s) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}.$$

A t^α függvény és a Laplace-transzformáltja, ha $s > 0$ valós.

A következő eltolási tételek segítségével egyszerűsödik a transzformáltak meghatározása.

6.1.7. Tétel. Legyen $F(s) = L[f(t)](s)$ ($\operatorname{Re} s > 0$). Ekkor bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$L[e^{at}f(t)](s) = F(s-a),$$

amennyiben $\operatorname{Re} s > a$.

Bizonyítás. A $p = s - a$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\operatorname{Re} p > 0$ esetén

$$\begin{aligned} L[e^{at}f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F(p) = F(s-a). \end{aligned} \quad //$$

6.1.8. Tétel. Legyen $F(s) = L[f(t)](s)$ és $a \geq 0$, ekkor

$$L[h_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s).$$

Bizonyítás. Az $u = t - a$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} L[h_a(t)f(t-a)](s) &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du \\ &= e^{-as} \int_0^\infty f(u)e^{-su}du = e^{-as}F(s). \end{aligned} \quad //$$

Azaz a függvénynek exponenciális függvénnyel való szorzása a transzformált eltolását, illetve a függvény eltolása (pontosabban késleltetése) a transzformált exponenciális függvénnyel történő szorzását vonja maga után.

6.1.9. Példa. A sh függvény definíciója, a Laplace- transzformált linearitása, továbbá a 6.1.7. tétel és a 6.1.2. példa adja, hogy

$$\begin{aligned} L[\operatorname{sh} 2t](s) &= L\left[\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right](s) \\ &= \frac{1}{2} (L[e^{2t} \cdot 1](s) - L[e^{-2t} \cdot 1](s)) \\ &= \frac{1}{2} (L[1](s-2) - L[1](s+2)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} \right) \\ &= \frac{2}{s^2 - 4}, \end{aligned}$$

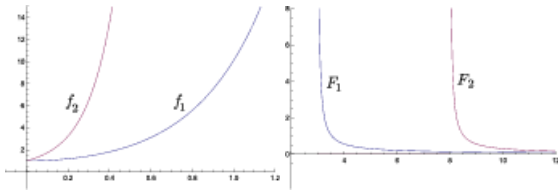
ha $\operatorname{Re} s > 2$.

6.1.10. Példa. Hasonlóan belátható, hogy

$$L[\operatorname{ch} 3t](s) = \frac{s}{s^2 - 9}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} s > 3.$$

6.1.11. Példa. Az előző példa segítségével kapjuk, hogy

$$L[e^{5t} \operatorname{ch} 3t](s) = L[\operatorname{ch} 3t](s - 5) = \frac{s - 5}{(s - 5)^2 - 9}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} s > 8.$$



$f_1 = \operatorname{ch} 3t$, $f_2 = e^{5t} \operatorname{ch} 3t$ az F_1, F_2 transzformáltak, ha $s > 3$, illetve $s > 8$.

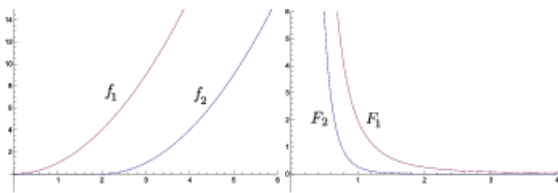
Az $e^{at} \cos 2t$ függvény és a transzformáltja.

6.1.12. Példa. Vegyük az $f(t) = t^2$ ($t \geq 0$) függvénynek a 2 egységgel vett késleltetését, azaz

$$f_2(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 2, \\ (t-2)^2, & \text{ha } t > 2. \end{cases}$$

Ekkor a 6.1.8. tétel és $L[t^2](s) = 2/s^3$ miatt, ha $\operatorname{Re} s > 0$, akkor

$$\begin{aligned} L[f_2(t)](s) &= L[h_2(t)(t-2)^2](s) \\ &= e^{-2s} L[t^2](s) \\ &= \frac{2e^{-2s}}{s^3}. \end{aligned}$$



$f_1 = t^2$, $f_2 = (t-2)^2$ és a transzformáltak, ha $s > 0$.

A függvény késleltetése a transzformált exponenciális függvénnyel történő szorzását vonja maga után.

Az alkalmazásokban igen gyakori, hogy a gerjesztés periodikus függvény. A legegyszerűbb esetben szinuszosan változik, de lehet például a négyszögimpulzus vagy fűrészfogregzés is. Ezen függvények közvetlen transzformálása körülményes, célszerűbb a következő összefüggés alapján meghatározni azt.

6.1.13. Tétel. Tegyük fel, hogy az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}(\text{v. } \mathbb{C})$ periodikus függvény periódusa p (> 0). Ekkor

$$F_p(s) := \int_0^p f(t) e^{-st} dt = L[d_p(t)f(t)](s) = (1 - e^{-ps})F(s),$$

azaz

$$F(s) = \frac{F_p(s)}{1 - e^{-ps}}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} F(s) &= L[f(t)](s) = \int_0^p f(t) e^{-st} dt + \int_p^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= F_p(s) + \int_0^\infty h_p(t) f(t) e^{-st} dt, \end{aligned}$$

ahonnan $f(t) = f(t-p)$ és a 6.1.8. tétel miatt

$$\begin{aligned} F(s) &= F_p(s) + \int_0^{\infty} h_p(t)f(t-p)e^{-st}dt \\ &= F_p(s) + e^{-ps}F(s). \end{aligned} //$$

6.1.14. Példa. A $2a$ (> 0) periódusú

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < t < a, \\ 1, & \text{ha } a < t < 2a, \end{cases}$$

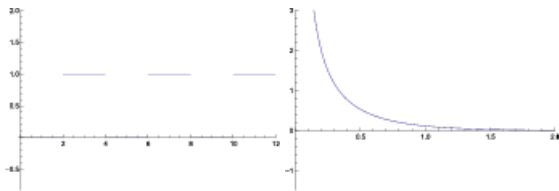
négyszögimpulzus- sorozat Laplace- transzformáltja

$$F_p(s) = \int_a^{2a} e^{-st} dt = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-2as})$$

és a 6.1.12. tétel alapján

$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{-as} - e^{-2as}}{1 - e^{-2as}} = \frac{1}{s(1 + e^{as})}.$$

Ha $s > 0$ valós szám, úgy



A négyszögimpulzus és a transzformáltja

A függvény késleltetése a transzformált exponenciális függvénnyel történő szorzását vonja maga után.

6.1.15. Példa. Legyen $f(t) = |\sin \omega t|$ ($t \geq 0$). Ekkor a periódus $p = \pi/\omega$ és $\operatorname{Re} s > 0$ esetén,

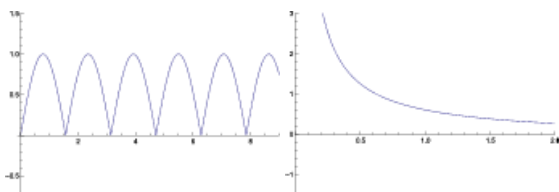
$$\int \sin(\omega t)e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2 + \omega^2}(-s \sin \omega t - \omega \cos \omega t) + C$$

alapján

$$\begin{aligned} F_p(s) &= \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[e^{-st}(-s \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right]_0^{\pi/\omega} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (e^{-\pi s/\omega} + 1). \end{aligned}$$

Így a 6.1.8. tétel szerint

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\pi s/\omega}}{1 - e^{-\pi s/\omega}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega}.$$



$|\sin \omega t|$ és a transzformáltja, ha $s > 0$

$|\sin \omega t|$ és a transzformáltja, ha $s > 0$.

6.1.16. Példa. Legyen $f(t) = [t](t > 0)$ az egészrészfüggvény. Igazoljuk, hogy

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s(e^s - 1)} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Mivel $f(t)$ pozitív, ezért

$$L[f(t)](s) = \int_0^\infty [t]e^{-st} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n [t]e^{-st} dt.$$

Ha $\operatorname{Re} s > 0$, akkor

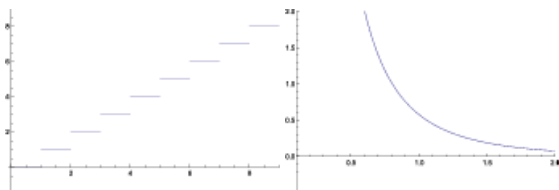
$$\begin{aligned} \int_0^n [t]e^{-st} dt &= \int_0^1 0 \cdot e^{-st} dt + \int_1^2 1 \cdot e^{-st} dt + \dots + \int_{n-1}^n (n-1) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_1^2 e^{-st} dt + 2 \int_2^3 e^{-st} dt + \dots + (n-1) \int_{n-1}^n e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} (e^{-2s} - e^{-s}) - \frac{2}{s} (e^{-3s} - e^{-2s}) - \dots - \frac{n-1}{s} (e^{-ns} - e^{-(n-1)s}) \\ &= \frac{1}{s} (e^{-s} + e^{-2s} + \dots + e^{-(n-1)s} - (n-1)e^{-ns}) \\ &= \frac{e^{-s}}{s} \frac{1 - e^{-(n-1)s}}{1 - e^{-s}} - \frac{(n-1)e^{-ns}}{s}. \end{aligned}$$

Így, ha $\operatorname{Re} s > 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)}{se^{ns}} \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(n-1)s} = 0$$

miatt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n [t]e^{-st} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-s}}{s} \frac{1 - e^{-(n-1)s}}{1 - e^{-s}} - \frac{n-1}{se^{ns}} \right) \\ &= \frac{e^{-s}}{s} \frac{1}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{s(e^s - 1)}. \end{aligned}$$



A $[t]$ egészrészfüggvény és a transzformáltja, ha $s > 0$.

2. Feladatok

A 6.1.1. definíció alapján határozzuk meg a következő függvények Laplace- transzformáltját.

6.1.17. Feladat. ² $f(t) = te^{-t} (t \geq 0)$.

6.1.18. Feladat. ³ $f(t) = e^{2t} \sin 3t (t \geq 0)$.

6.1.19. Feladat. ⁴ Legyen $a, b > 0$ és

$$f(t) = \begin{cases} bt, & \text{ha } 0 < t < a, \\ 0, & \text{ha } t > a. \end{cases}$$

Adjuk meg a következő függvények Laplace- transzformáltját:

6.1.20. Feladat. ⁵ $f(t) = t^2 e^{5t} (t \geq 0)$.

6.1.21. Feladat. ⁶ $f(t) = e^{-3t} \cos \pi t (t \geq 0)$.

6.1.22. Feladat. ⁷ $f(t) = \sqrt{t^3} (t \geq 0)$.

6.1.23. Feladat. ⁸ Az f függvény periódusa legyen $p = 4$, és

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{ha } 0 < t < 3, \\ 0, & \text{ha } 3 < t < 4. \end{cases}$$

6.1.24. Feladat. ⁹ $f(t) = a^{[t]} (t \geq 0)$, ahol $a > 0$.

3. Konvergencia

A Laplace- integrált a felső határ

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) e^{-st} dt$$

impropius integráljaként értelmeztük. Azaz feltételeztük, hogy bármely pozitív b szám esetén az

$$\int_0^b f(t) e^{-st} dt$$

integrál létezik, ha a hagyományos módon nem is, de impropiusan igen.

Ezt az utóbbit láthattuk a 6.1.6. Példában szereplő $f(t) = t^\alpha$ függvény esetén, amely $-1 < \alpha < 0$ esetén nem korlátos a 0 pont környezetében, így itt nem Riemann- integrálható. A transzformált meghatározásakor erre nem figyeltünk, a Gamma függvény segítségével dolgoztunk, amely persze $0 < p < 1$ esetén az alsó határon is impropius integrálként értelmezett.

A később kimondott állítások bizonyítása miatt a továbbiakban az $f(t)$ függvényre vonatkozóan megköveteljük, hogy az lokálisan abszolút integrálható legyen.

6.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f(t)$ függvény lokálisan abszolút integrálható, ha bármely véges intervallumon, legfeljebb véges sok pont tetszőlegesen kicsi környezetétől eltekintve $f(t)$ Riemann- integrálható, és az esetlegesen kimaradó véges sok pont környezetében $f(t)$ abszolútértékben impropiusan integrálható.

Azaz, ha $f(t)$ az (a, b) intervallumnak csak az egyetlen t_0 belső pontjának környezetében nem korlátos, akkor tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén $f(t)$, és így $|f(t)|$ is Riemann- integrálható az $(a, t_0 - \varepsilon)$, $(t_0 + \varepsilon, b)$ intervallumokon, továbbá a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{t_0 - \varepsilon} |f(t)| dt, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 + \varepsilon}^b |f(t)| dt$$

impropius integrálok konvergensek.

Természetesen az $f(t) = t^\alpha$ ($-1 < \alpha$) függvény lokálisan abszolút integrálható. De például, amint azt a 6.2.12.

Feladat mutatja, az $f(t) = \frac{\sin \frac{1}{t}}{t}$ függvény nem az. Az ilyen függvények Laplace- transzformáltjával nem foglalkozunk.

Ugyanakkor a lokálisan abszolút integrálhatóság nem elégséges feltétele a Laplace- integrálhatóságnak. Folytonos függvény lokálisan abszolút integrálható, de még ebbei $f(t) = e^{t^2}$ sem állíthatjuk, hogy van olyan pont, amelyben a Laplace- integrálja konvergens lenne, például az ∞ is ilyen.

6.2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f(t)$ függvény az s pontban abszolút Laplace- integrálható, illetve a Laplace- integrál abszolút konvergens, ha a

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(t)e^{-st}| dt$$

improprius integrál konvergens és ekkor az

$$\overline{F}(s) := \int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt$$

jelölést használjuk.

A függvény lokálisan abszolút integrálhatóságából következik:

6.2.3. Tétel. Az s pontban abszolút Laplace- integrálható $f(t)$ függvény s -ben Laplace- integrálható is és $|F(s)| \leq \overline{F}(s)$.

Bizonyítás. Amennyiben

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(t)e^{-st}| dt$$

konvergens, akkor teljesíti a Cauchy- féle konvergencia kritériumot is, azaz bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható $R > 0$ úgy, hogy tetszőleges $b_1, b_2 > R$ esetén

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(t)e^{-st}| dt < \varepsilon.$$

Innen

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(t)e^{-st}| dt < \varepsilon$$

alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t)e^{-st} dt$$

is Cauchy- tulajdonságú, így konvergens is. Továbbá

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt = \overline{F}(s). \quad //$$

6.2.4. Példa. Folytonos és korlátos f függvény abszolút Laplace- integrálható bármely $\operatorname{Re} s > 0$ esetén.

A folytonosság miatt f bármely zárt intervallumon integrálható és így bármely zárt intervallumon abszolút integrálható is. A korlátosság miatt van olyan K szám, hogy $|f(t)| \leq K$ bármely $t \geq 0$ esetén. Az $s = x + iy$ jelöléssel, ha $x > 0$, akkor tetszőleges $0 < b_1 < b_2$ számokra

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_2} |f(t)e^{-st}| dt &= \int_{b_1}^{b_2} |f(t)|e^{-xt}|e^{-iyt}| dt \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(t)|e^{-xt} dt \\ &\leq K \int_{b_1}^{b_2} e^{-xt} dt = \frac{K}{x} (e^{-xb_1} - e^{-xb_2}) \\ &\leq K \frac{e^{-xb_1}}{x} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha b_1 elég nagy, ugyanis $x > 0$ miatt

$$\lim_{b_1 \rightarrow \infty} e^{-xb_1} = 0.$$

Tehát a Cauchy- féle konvergencia kritérium teljesül, ezért f abszolút Laplace- integrálható, és így persze Laplace- integrálható.

Amint azt az eddigi példáknál láttuk, a függvények Laplace- integráljai valamely jobb oldali félsíkon konvergensek. Megmutatjuk, hogy ez általánosságban is igaz a konvergencia tartományra.

6.2.5. Tétel. Tegyük fel, hogy f Laplace- integrálja abszolút konvergens az s_0 pontban. Ekkor a $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$ zárt félsík bármely pontjában abszolút konvergens, továbbá itt a konvergencia egyenletes.???

Bizonyítás. Az s_0 pontbeli abszolút konvergenciából következik, hogy ekkor bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható $R > 0$ úgy, hogy tetszőleges $b_1, b_2 > R$ esetén

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(t)e^{-s_0 t}| dt < \varepsilon.$$

Ezért a $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$ feltételből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_2} |f(t)e^{-st}| dt &= \int_{b_1}^{b_2} |f(t)e^{-(s-s_0)t}e^{-s_0 t}| dt = \int_{b_1}^{b_2} e^{-\operatorname{Re}(s-s_0)t} |f(t)e^{-s_0 t}| dt \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(t)e^{-s_0 t}| dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát bármely $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$ pontban a Laplace- integrál abszolút konvergens. Továbbá

$$\left| \int_b^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_b^\infty |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_b^\infty |f(t)e^{-s_0 t}| dt$$

miatt a konvergencia egyenletes. //

A fentiekből rögtön kapjuk:

6.2.6. Tétel. Amennyiben $f(t)$ Laplace- integrálja az s_0 pontban abszolút konvergens, akkor bármely $\operatorname{Re} s_2 \geq \operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_0$ esetén

$$\overline{F}(s_2) \leq \overline{F}(s_1) \leq \overline{F}(s_0),$$

így $F(s)$ korlátos a $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$ zárt félsíkon, és

$$|F(s)| \leq \overline{F}(s_0).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
 \overline{F}(s_2) &= \int_0^\infty |f(t)e^{-s_2 t}| dt = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(s_2 - s_1)t} |f(t)e^{-s_1 t}| dt \\
 &\leq \int_0^\infty |f(t)e^{-s_1 t}| dt = \overline{F}(s_1) \\
 &= \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(s_1 - s_0)t} |f(t)e^{-s_0 t}| dt \\
 &\leq \int_0^\infty |f(t)e^{-s_0 t}| dt = \overline{F}(s_0).
 \end{aligned}$$

Így

$$\overline{F}(s_2) \leq \overline{F}(s_1) \leq \overline{F}(s_0). \quad //$$

A 6.2.5. Tételből az is következik, hogy az abszolút Laplace- integrálhatóságot elég csak valós s értékekre vizsgálni, hiszen a $\operatorname{Re} s = a$ egyenesnek vagy minden pontja, vagy egyik pontja sem tartozik az abszolút konvergencia tartományba. Így az abszolút konvergencia tartománya vagy az egész komplex számsík (minden pontban konvergens), vagy az üres halmaz (egyetlen pontban sem konvergens), vagy van olyan α valós szám, hogy a $\operatorname{Re} s > \alpha$ nyílt félsík, vagy a $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ zárt félsík a konvergencia tartomány. Az α számot a Laplace- integrál abszolút konvergencia- abcisszájának nevezzük.

6.2.7. Példa. Az $f(t) = 1$ függvény esetén,

$$\int_0^\infty |1 \cdot e^{-st}| dt = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} st} dt = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{Re} s}, & \text{ha } s > 0, \\ \infty, & \text{ha } s \leq 0, \end{cases}$$

miatt az abszolút konvergencia tartománya a $\operatorname{Re} s > 0$ nyílt félsík.

6.2.8. Példa. Legyen $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Ekkor $s = 0$ esetén

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{1+t^2} e^{-st} \right| dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Továbbá bármely $a > 0$ szám esetén

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{at}}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ae^{at}}{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^2 e^{at}}{2} = \infty,$$

ezért van olyan b szám, hogy ha $t > b$, akkor

$$\frac{e^{at}}{1+t^2} > 1.$$

Így a $\operatorname{Re}(s) < 0$ esetben

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{1+t^2} e^{-st} \right| dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\operatorname{Re} st}}{1+t^2} dt \geq \int_b^\infty \frac{e^{-\operatorname{Re} st}}{1+t^2} dt \geq \int_b^\infty 1 dt = \infty.$$

Tehát $f(t)$ abszolút konvergencia tartománya a $\operatorname{Re} s \geq 0$ zárt félsík.

Fonossága miatt a Laplace- integrál konvergenciájára vonatkozó állítást alaptételnek nevezzük.

6.2.9. Tétel. (Alaptétel) Tegyük fel, hogy az

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

Laplace- integrál az s_0 pontban konvergens. Ekkor a $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ nyílt félsík bármely pontjában is konvergens, továbbá itt előállítható a

$$(s - s_0) \int_0^{\infty} \phi(t) e^{-(s-s_0)t} dt = F(s)$$

abszolút konvergencia integrállal, ahol

$$\phi(t) := \int_0^t f(u) e^{-s_0 u} du.$$

Bizonyítás. A $\phi(t)$ integrálfüggvény folytonos, így tetszőleges $[0, b]$ zárt intervallumon korlátos. A Laplace- integrál s_0 pontbeli konvergenciája azt jelenti, hogy létezik és véges a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = F(s_0)$$

határérték. Ezért van olyan b szám, hogy $t \geq b$ esetén

$$|\phi(t) - F(s_0)| < 1,$$

azaz $\phi(t)$ korlátos, ha $t \geq b$.

Ezek alapján a folytonos $\phi(t)$ függvény korlátos a $[0, \infty)$ halmazon. Ebből következik, hogy bármely $\operatorname{Re} p > 0$ szám esetén

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-pb} \phi(b) = 0,$$

továbbá az, hogy $\phi(t)$ abszolút Laplace- integrálható, azaz

$$\int_0^{\infty} \phi(t) e^{-pt} dt$$

abszolút konvergencia és így konvergencia is.

Ugyanakkor az általánosított parciális integrálás??¹¹

módszerének segítségével $\phi(0) = 0$ miatt teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^b f(t) e^{-st} dt &= \int_0^b e^{-(s-s_0)t} f(t) e^{-s_0 t} dt \\ &= e^{-(s-s_0)b} \phi(b) + \int_0^b (s-s_0) e^{-(s-s_0)t} \phi(t) dt \\ &= e^{-pb} \phi(b) + p \int_0^b e^{-pt} \phi(t) dt, \end{aligned}$$

ahol $p = s - s_0$. Így kapjuk, hogy $\operatorname{Re} p = \operatorname{Re}(s - s_0) > 0$ esetén $f(t)$ Laplace- integrálható és

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = (s - s_0) \int_0^{\infty} \phi(t) e^{-(s-s_0)t} dt. \quad //$$

Tehát a Laplace- integrál konvergencia tartománya vagy az egész komplex számsík, vagy az üres halmaz, vagy valamely jobb oldali félsík. A félsíkot határoló $\operatorname{Re}(s) = \beta$ egyenesnek vagy minden pontja, vagy csak bizonyos pontjai, vagy egyetlen pontja sem tartozik a konvergencia tartományhoz. A β számot a Laplace- integrál konvergencia- abszcisszájának nevezzük.

6.2.10. Példa. Legyen $f(t) = \frac{1}{1+t}$. Az $s = 0$ esetben

$$\int_0^b \frac{1}{1+t} e^{-st} dt = \int_0^b \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+b)$$

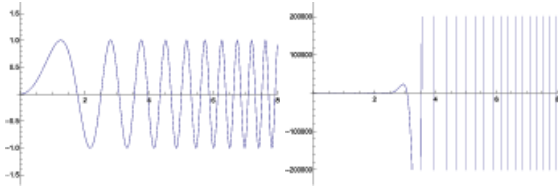
miatt a Laplace- integrál divergens.

De az $s = iy$ ($y \neq 0$) pontban kapott

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t} e^{-iyt} dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos yt}{1+t} dt - i \int_0^{\infty} \frac{\sin yt}{1+t} dt$$

integrálok konvergensek (hasonlóan a 6.2.12. Feladathoz).

6.2.11. Példa. Az $f(t) = 2te^{t^2} \sin e^{t^2}$ függvény Laplace- integrálja $\operatorname{Re} s > 0$ esetén feltételesen konvergens.



$$\sin e^{t^2} \quad 2te^{t^2} \sin e^{t^2}$$

Belátjuk, hogy $f(t)$ egyetlen pontban sem abszolút Laplace- integrálható. Természetesen ezt elég csak pozitív s szám esetén igazolni.

Parciális integrálás útján kapjuk, hogy $b > a \geq 0$ esetén

$$\int_a^b 2te^{t^2} \sin e^{t^2} e^{-st} dt = - \left[\cos e^{t^2} e^{-st} \right]_a^b - s \int_a^b \cos e^{t^2} e^{-st} dt.$$

Definiáljuk a következő értékeket: $t_0 = 0$ és $t_n = \sqrt{\ln(n\pi)}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$f(t_k) = 0 \quad \text{és} \quad \cos e^{t_k^2} = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

és $f(t)$ a $[t_k, t_{k+1}]$ intervallumokon állandó előjelű. Továbbá

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) e^{-st} dt &= - \cos e^{t^2} e^{-st} \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} - s \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos e^{t^2} e^{-st} dt \\ &= (-1)^{k-1} e^{-st_{k-1}} - (-1)^k e^{-st_k} - s \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos e^{t^2} e^{-st} dt \\ &= (-1)^{k-1} (e^{-st_{k-1}} + e^{-st_k}) - s \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos e^{t^2} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} |f(t) e^{-st}| dt &= \int_0^{t_n} |f(t)| e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(t)| e^{-st} dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=1}^n (e^{-st_{k-1}} + e^{-st_k}) - s \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos e^{t^2} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

A $\cos e^{t^2}$ korlátos folytonos függvény, ezért pozitív s esetén abszolút Laplace- integrálható, így a második összeg

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos e^{t^2} e^{-st} dt \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| (-1)^{k-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos e^{t^2} e^{-st} dt \right| \\
 &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos e^{t^2} e^{-st} dt \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\cos e^{t^2} e^{-st}| dt \\
 &\leq \int_0^\infty |\cos e^{t^2} e^{-st}| dt
 \end{aligned}$$

miatt bármely n -re korlátos.

Az első összegre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (e^{-st_{k-1}} + e^{-st_k}) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} e^{-st_k} + e^{-st_n} \\
 &> 2 \sum_{k=1}^{n-1} e^{-s\sqrt{\ln(k\pi)}}.
 \end{aligned}$$

Vizsgáljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-s\sqrt{\ln(n\pi)}}$$

pozitív tagú sort. Bármely rögzített s szám esetén van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$\ln n\pi > s^2,$$

azaz

$$\begin{aligned}
 \ln n\pi &> s\sqrt{\ln n\pi}, \\
 n\pi &> e^{s\sqrt{\ln n\pi}}, \\
 \frac{1}{n\pi} &< e^{-s\sqrt{\ln n\pi}}, \\
 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\pi} &< \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-s\sqrt{\ln(n\pi)}}.
 \end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-s\sqrt{\ln(n\pi)}}$$

bármely rögzített s esetén divergens. Ezért bármely K és s szám esetén van olyan $N_0(K, s) \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N_0(K, s)$ esetén

$$\int_0^{t_n} |f(t)e^{-st}| dt > K,$$

azaz $f(t)$ nem abszolút Laplace- integrálható.

Az $f(t)$ Laplace- integrálhatósága $\operatorname{Re} s > 0$ esetén egyszerűen igazolható, lásd 6.2.14. Feladat.

4. Feladatok

6.2.12. Feladat. ¹² Mutassuk meg, hogy $[0, 1]$ -en

$$f(t) = \frac{\sin \frac{1}{t}}{t}$$

impropriusan integrálható, de az abszolútértéke nem.

6.2.13. Feladat. A komplex függvénytanból??¹³

ismert

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

állítást igazoljuk a Laplace- transzformáció segítségével??¹⁴

6.2.14. Feladat. ¹⁵ Mutassuk meg, hogy az $f(t) = 2te^{t^2} \sin e^{t^2}$ függvény $\operatorname{Re}(s) > 0$ esetén Laplace- integrálható.

6.2.15. Feladat. Tegyük fel, hogy $f(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon szakaszonként folytonos ??¹⁶ és α - rendű exponenciális függvény. ??¹⁷ Mutassuk meg, hogy $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható !??¹⁸

6.2.16. Feladat. ¹⁹ Legyen $\phi(t) = \int_0^t e^{-s_0 u} du$. Mutassuk meg, hogy $s > s_0 > 0$ esetén

$$\frac{1}{s} = (s - s_0) \int_0^{\infty} \phi(t) e^{-(s-s_0)t} dt.$$

5. Az $F(s)$ transzformált függvény tulajdonságai

A transzformáltra vonatkozó tételek bizonyításában az játssza a kulcsszerepet, hogy a transzformált előállítható abszolút konvergens integrállal, amint azt az alaptételben megmutattuk. Ezen állítások igazolása sokkal egyszerűbb ha feltesszük, hogy a függvény abszolút Laplace- integrálható, amint azt mi is tesszük ebben a fejezetben. Az általános eset vizsgálata megtalálható például Gustav Doetsch: Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation című munkájában.

A 6.2.6. tételben megmutattuk, hogy ha az f függvény Laplace- integrálja s_0 - ban abszolút konvergens, akkor Laplace- transzformáltja korlátos az $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$ félsíkon, továbbá valós s esetén monoton csökkenő és most belátjuk, hogy igaz a

6.3.1. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható az s_0 pontban és legyen $s \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Az $f(t)$ függvény lokális abszolút integrálhatóságából következik, hogy ε - hoz megadható b_1 úgy, hogy

$$\int_0^{b_1} |f(t)| dt < \varepsilon,$$

és így bármely $s > 0$ esetén

$$\left| \int_0^{b_1} f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{b_1} |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_0^{b_1} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Az s_0 pontbeli abszolút konvergenciából következik az egyenletes konvergencia az $s > \operatorname{Re} s_0$ félsíkon, ezért ε - hoz megadható b_2 úgy, hogy

$$\left| \int_{b_2}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| < \varepsilon.$$

bármely $s > \operatorname{Re} s_0$ esetén.

Ismételten $f(t)$ lokális abszolút integrálhatóságából következik, hogy az

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(t)| dt$$

integrál korlátos. Így a közbülső integrálra kapjuk, hogy ha s elég nagy, akkor

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(t) e^{-st} dt \right| &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(t)| e^{-st} dt \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(t)| e^{-sb_1} dt \\ &= e^{-sb_1} \int_{b_1}^{b_2} |f(t)| dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Azaz ha s elég nagy, akkor az előbbiek miatt

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \\ &= \left| \int_{b_1}^{b_2} f(t) e^{-st} dt + \int_{b_1}^{b_2} f(t) e^{-st} dt + \int_{b_1}^{b_2} f(t) e^{-st} dt \right| < 3\varepsilon \quad // \end{aligned}$$

ami adja a tétel állítását.

Mielőtt belátnánk, hogy az F transzformált végtelen sokszor differenciálható, ami az f függvény "tetszőleges" volta miatt eléggé meglepő eredmény, szükségünk van a következő tételre.

6.3.2. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható az s_0 pontban, ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $t^n f(t)$ is abszolút Laplace- integrálható, ha $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$.

Bizonyítás. Mivel a

$$\phi(b) = \int_0^\infty |t^n f(t) e^{-st}| dt \quad (b \geq 0)$$

függvény nemnegatív és monoton növekedő, így ha megmutatjuk, hogy $\phi(b)$ felülről korlátos, akkor kapjuk, hogy $b \rightarrow \infty$ esetén a határértéke véges, ami adja az állítást.

Bármely n esetén, tetszőleges p pozitív számra, n - szer használva a L'Hospital szabályt kapjuk:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{pt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{p^n e^{pt}} = 0.$$

Így van olyan $b = b(n, p)$ szám, hogy $t > b$ esetén

$$t^n e^{-pt} < 1.$$

Legyen $p = \operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0 > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |t^n f(t) e^{-st}| dt &= \int_0^b |t^n f(t) e^{-st}| dt + \int_b^\infty |t^n f(t) e^{-st}| dt \\ &\leq b^n \int_0^b |f(t) e^{-st}| dt + \int_b^\infty |t^n e^{-(s-s_0)t}| |f(t) e^{-s_0 t}| dt \\ &\leq b^n \overline{F}(s) + \int_b^\infty |f(t) e^{-s_0 t}| dt \\ &\leq b^n \overline{F}(s) + \overline{F}(s_0) = K. \quad // \end{aligned}$$

6.3.3. Tétel Tegyük fel, hogy $f(t)$ at $n \in \mathbb{N}$ Laplace- integrálható az s_0 pontban, ekkor a $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ nyílt félsíkon analitikus, és tetszőleges - re

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-st} dt = (-1)^n L[t^n f(t)](s).$$

Azaz a derivált maga is egy transzformált.

Bizonyítás. Az állítást elég $n = 1$ -re belátni, az általános eset teljes indukcióval egyszerűen igazolható.

Legyen $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ és $2|h| < \delta := \operatorname{Re}(s - s_0)$. Így, mivel $tf(t)$ is abszolút Laplace- integrálható, az s pontban kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D(h) &:= \frac{F(s+h) - F(s)}{h} + \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty f(t)(e^{-(s+h)t} - e^{-st}) dt + \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) dt. \end{aligned}$$

Az exponenciális függvény

$$e^{-ht} = 1 - ht + \frac{h^2 t^2}{2!} - \frac{h^3 t^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{h^n t^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n t^n}{n!}$$

hatványsorának használatával

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{n-1} t^n}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-1} t^n}{n!} \\ &= |h| t^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-2} t^{n-2}}{n!} \\ &\leq |h| t^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-2} t^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= |h| t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|h|^n t^n}{n!} = |h| t^2 e^{|h|t}. \end{aligned}$$

Innen, figyelembe véve, hogy $2|h| < \delta = \operatorname{Re}(s - s_0)$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |D(h)| &\leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}| \left| \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right| dt \\ &\leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}| |h| t^2 e^{|h|t} dt \\ &= |h| \int_0^\infty |t^2 f(t) e^{-(s-|h|)t}| dt \\ &\leq |h| \int_0^\infty |t^2 f(t) e^{-(s_0+\delta/2)t}| dt. \end{aligned}$$

Az utolsó integrál h -tól független, továbbá konvergens, hiszen a $\delta = \operatorname{Re}(s - s_0)$ tulajdonság miatt $t^2 f(t)$ abszolút Laplace- integrálható az $s_0 + \delta/2$ pontban. Ezért

$$\lim_{h \rightarrow 0} |D(h)| = 0,$$

azaz F differenciálható az s pontban és

$$F'(s) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt = -L[tf(t)](s). \quad //$$

A

$$L[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds} L[f(t)](s)$$

összefüggés segítségével újabb függvények Laplace- transzformáltját határozhatjuk meg egyszerűen.

6.3.4. Példa.

$$L[t \sin \omega t](s) = - \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]' = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

$$L[t \cos \omega t](s) = - \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right]' = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

$$\begin{aligned} L[t^2 \sin \omega t](s) &= L[t(t \sin \omega t)](s) = -\frac{d}{ds} L[t \sin \omega t](s) \\ &= - \left[\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \right]' = \frac{6\omega s^2 - 2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^3}, \end{aligned}$$

$$L[t \operatorname{ch} \omega t](s) = - \left[\frac{s}{s^2 - \omega^2} \right]' = \frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}.$$

A következőkben megmutatjuk, hogy az abszolút Laplace- integrálhatóságból következik a transzformált függvény integrálhatósága is.

Először belátjuk, hogy igaz a

6.3.5. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható az s_0 pontban ($\operatorname{Re} s_0 > 0$), továbbá a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

határérték létezik és véges. Ekkor $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$ esetén $\frac{f(t)}{t}$ abszolút Laplace- integrálható.

Bizonyítás. A véges

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

határérték létezése miatt $\frac{f(t)}{t}$ korlátos a 0 pont környezetében. Azaz van olyan K és $0 < \delta < 1$, hogy bármely $0 < t < \delta$ esetén

$$\left| \frac{f(t)}{t} \right| < K.$$

Így, ha $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$, akkor $\operatorname{Re} s_0 > 0$ miatt $|e^{-st}| \leq 1$ ($t \geq 0$), tehát

$$\left| \frac{f(t)}{t} e^{-st} \right| < K,$$

amennyiben $0 < t < \delta$. Ezért

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left| \frac{f(t)}{t} e^{-st} \right| dt &= \int_0^\delta \left| \frac{f(t)}{t} e^{-st} \right| dt + \int_\delta^\infty \left| \frac{f(t)}{t} e^{-st} \right| dt \\
 &\leq \int_0^\delta K dt + \int_\delta^\infty \frac{1}{t} |f(t) e^{-st}| dt \\
 &\leq K\delta + \frac{1}{\delta} \int_\delta^\infty |f(t) e^{-st}| dt \\
 &\leq K + \frac{1}{\delta} \int_0^\infty |f(t) e^{-st}| dt \\
 &= K + \frac{1}{\delta} \bar{F}(s) < \infty,
 \end{aligned}$$

így következik a tétel állítása. //

6.3.6. Következmény. Az előző tétel feltételei mellett, a 6.3.1 Tétel alapján kapjuk, hogy valós s esetén

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = 0.$$

Ezen tulajdonságok segítségével igazolhatjuk a transzformált függvény integráljára vonatkozó állítást.

6.3.7. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható az s_0 pontban, továbbá a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

határérték létezik és véges. Ekkor a valós $s, s > \operatorname{Re} s_0$ esetén

$$\int_s^\infty F(x) dx = L \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Azaz a transzformált függvény integrálható és az improprius integrálja maga is egy transzformált.

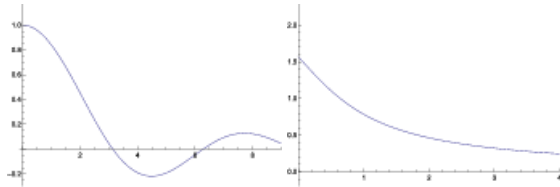
Bizonyítás. A Laplace- integrál egyenletes konvergenciája miatt alkalmazhatjuk a Fubini- tételt, azaz

$$\begin{aligned}
 \int_s^\infty F(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_s^b F(x) dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_s^b \left(\int_0^\infty f(x) e^{-xt} dt \right) dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_s^b f(x) e^{-xt} dx \right) dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[f(x) \frac{e^{-xt}}{-t} \right]_s^b dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} (e^{-st} - e^{-bt}) dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-bt} dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = L \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s). \quad //
 \end{aligned}$$

Ezen tétel alkalmazásaként kapjuk, hogy

6.3.8. Példa. Legyen s pozitív valós szám, ekkor

$$\begin{aligned}
 L\left[\frac{\sin t}{t}\right](s) &= \int_s^\infty L[\sin t](x) dx \\
 &= \int_s^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s \\
 &= \operatorname{arctg} \frac{1}{s}.
 \end{aligned}$$



$$\frac{\sin t}{t} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$$

Ugyanis???²¹Illetve, ha $s > \omega$ valós, akkor

$$\begin{aligned}
 L\left[\frac{\operatorname{sh} \omega t}{t}\right](s) &= \int_s^\infty L[\operatorname{sh} \omega t](x) dx \\
 &= \int_s^\infty \frac{\omega}{x^2 - \omega^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_s^\infty \left(\frac{1}{x - \omega} - \frac{1}{x + \omega} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{x - \omega}{x + \omega} \right]_s^\infty \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{s + \omega}{s - \omega},
 \end{aligned}$$

hiszen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x - \omega}{x + \omega} = \ln 1 = 0.$$

6. Feladatok

6.3.9. Feladat. ²² Lehet-e $\frac{s}{\ln s}$ valamely függvény Laplace- transzformáltja?

Határozzuk meg a következő függvények Laplace- transzformáltját.

6.3.10. Feladat. ²³ $f(t) = \ln t$ ($t > 0$).

6.3.11. Feladat. ²⁴ $f(t) = t \operatorname{sh} \omega t$ ($t \geq 0$).

6.3.12. Feladat. ²⁵ $f(t) = t^2 \cos \omega t$ ($t \geq 0$).

6.3.13. Feladat. ²⁶ $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$ ($t \geq 0$).

6.3.14. Feladat. ²⁷ $f(t) = \frac{1 - \operatorname{ch} \omega t}{t}$ ($t \geq 0$).

7. Az inverz Laplace- transzformáció

Integrálható függvény értékét véges sok helyen megváltoztatva sem változik az integrál értéke $\frac{1}{s}$. A $h(t)$ egységugrás függvényt jobbról folytonosnak definiáltuk, de ha balról lenne folytonos, akkor is $\frac{1}{s}$ lenne a Laplace- transzformálása.

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ 1, & \text{ha } t \geq 0, \end{cases} \quad \hat{h}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ 1, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

Tehát az $\frac{1}{s}$ inverz Laplace- transzformálása,

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] (t)$$

egyértelműen nem adható meg.

Gyakorlati feladatokban általában több ismeretünk van az ismeretlen függvényre vonatkozóan. Integrálegyenleteket vizsgálva a folytonosság, differenciálegyenlet megoldásakor például a differenciálhatóság, és így persze a folytonossági feltétel is ismert. Ebben a fejezetben igazoljuk, hogy a folytonos függvények körében az inverz Laplace- transzformált egyértelmű. Ez magyarázza, hogy használjuk az L^{-1} jelölést, és az inverz Laplace- transzformálton általában folytonos függvényt értünk (esetleg a kezdő pontban nem az).

6.4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $n(t)$ függvény nullfüggvény, ha a határozott integrálja minden felső határ esetén 0, azaz

$$\int_0^t n(u) du = 0 \quad \text{bármely } t \geq 0 \text{ esetén.}$$

Nyilván $n(t)$ nem lehet folytonos olyan t_0 pontban, ahol $n(t_0) \neq 0$. Azaz ha $n(t)$ folytonos, akkor $n(t) \equiv 0$. Továbbá

6.4.2. Tétel. Az $n(t)$ nullfüggvény Laplace- transzformálása 0 bármely s -re.

Bizonyítás. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int_0^b n(t) e^{-st} dt = e^{-st} \int_0^t n(u) du \Big|_0^b + s \int_0^b e^{-st} \left(\int_0^t n(u) du \right) dt = 0. \quad //$$

Azaz egy Laplace- transzformálható függvényhez tetszőleges nullfüggvényt hozzáadva is ugyanazt a Laplace- transzformáltat kapjuk. Igaz ezen tétel megfordítása, azaz ha

$$L[f(t)](s) = F(s) \equiv 0,$$

akkor $f(t)$ nullfüggvény. Sőt ennél gyengébb feltétel esetén is az: ha az $f(t)$ függvény Laplace- transzformáltja 0 a valós tengellyel párhuzamosan, egyenlő távolságban található pontsorozatban, akkor $f(t)$ nullfüggvény. Ennek az állításnak a bizonyításához szükségünk van a következő tételre.

6.4.3. Tétel. Legyen $h(x)$ folytonos a zárt $[0, 1]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $h(x)$ minden momentuma 0, azaz

$$\int_0^1 h(x) x^k dx = 0 \quad \text{bármely } k = 0, 1, \dots \text{ esetén.}$$

Ekkor $h(x) \equiv 0$ a $[0, 1]$ intervallumon.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $h(x)$ valós értékű folytonos függvény. Így a Stone- Weierstrass tétel alapján bármely pozitív $\varepsilon > 0$ -hoz megadható $P_\varepsilon(x)$ polinom, hogy a $[0, 1]$ intervallumon $P_\varepsilon(x)$ legalább ε pontossággal megközelíti $h(x)$ -et, azaz

$$h(x) = P_\varepsilon(x) + \varepsilon R(x), \quad |R(x)| \leq 1$$

bármely $0 \leq x \leq 1$ esetén. Így

$$h^2(x) = h(x)P_\varepsilon(x) + h(x)\varepsilon R(x)$$

és

$$\int_0^1 h^2(x) dx = \int_0^1 h(x)P_\varepsilon(x) dx + \varepsilon \int_0^1 h(x)R(x) dx.$$

Mivel $h(x)$ minden momentuma 0, ezért

$$\int_0^1 h(x)P_\varepsilon(x) dx = 0.$$

Így, $|R(x)| \leq 1$ miatt

$$\begin{aligned} \int_0^1 h^2(x) dx &= \varepsilon \int_0^1 h(x)R(x) dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |h(x)R(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |h(x)| dx, \end{aligned}$$

ami tetszőleges ε esetén csak akkor teljesül, ha

$$\int_0^1 h^2(x) dx = 0.$$

Innen, $h(x)$ folytonossága miatt kapjuk, hogy $h(x) \equiv 0$ a $[0, 1]$ -en.

Komplex értékű függvény esetén külön- külön alkalmazhatjuk a fenti eredményt a függvény valós és képzetes részére. //

6.4.4. Tétel. Legyen $f(t)$ Laplace- integrálható az s_0 pontban. Amennyiben az $L[f(t)](s) = F(s)$ transzfomált a valós tengellyel párhuzamosan, egyenlő távolságban található pontsorozatban eltűnik, azaz van olyan $p > 0$ szám, hogy

$$F(s_0 + np) = 0 \quad \text{bármely } n \in \mathbb{N}\text{-re,}$$

akkor $f(t)$ nullfüggvény.

Bizonyítás. A 6.2.9. alaptétel alapján ekkor bármely $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ esetén

$$F(s) = (s - s_0) \int_0^\infty \phi(t)e^{-(s-s_0)t} dt,$$

ahol

$$\phi(t) = \int_0^t f(u)e^{-s_0 u} du$$

folytonos és

$$\phi(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = F(s_0).$$

Így bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 = F(s_0 + np) = np \int_0^\infty \phi(t)e^{-npt} dt.$$

Az

$$x = e^{-pt}, \text{ azaz } t = -\frac{\ln x}{p}$$

helyettesítéssel és a

$$h(x) := \phi\left(-\frac{\ln x}{p}\right), \quad h(0) := F(s_0)$$

megfeleltetéssel kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= np \int_0^\infty \phi(t) e^{-npt} dt = np \int_1^0 h(x) x^n \frac{-dx}{xp} \\ &= n \int_0^1 h(x) x^{n-1} dx, \end{aligned}$$

azaz a $[0, 1]$ -en folytonos $h(x)$ függvényre teljesül, hogy

$$\int_0^1 h(x) x^k dx = 0 \quad \text{bármely } k = 0, 1, \dots \text{ esetén.}$$

Ezért az előző tétel alapján

$$h(x) \equiv 0, \quad \text{és így } \phi(t) = \int_0^t f(u) e^{-s_0 u} du \equiv 0.$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \int_0^t f(u) e^{-s_0 u} du \\ &= e^{-s_0 u} \int_0^u f(v) dv \Big|_0^t + s_0 \int_0^t \left(e^{-s_0 u} \int_0^u f(v) dv \right) du \\ &= e^{-s_0 t} \int_0^t f(v) dv + s_0 \int_0^t \left(e^{-s_0 u} \int_0^u f(v) dv \right) du. \end{aligned}$$

Az $e^{-s_0 u} \int_0^u f(v) dv$ függvény folytonos, így a második integrál differenciálható t szerint és így az első is, tehát

$$\begin{aligned} 0 &\equiv -s_0 e^{-s_0 t} \int_0^t f(v) dv + e^{-s_0 t} \frac{d}{dt} \int_0^t f(v) dv + s_0 e^{-s_0 t} \int_0^t f(v) dv \\ &= e^{-s_0 t} \frac{d}{dt} \int_0^t f(v) dv, \end{aligned}$$

vagyis

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(v) dv \equiv 0.$$

Így $\int_0^t f(v) dv$ konstans függvény, de $t = 0$ esetén $\int_0^0 f(v) dv = 0$ miatt ez azt jelenti, hogy

$$\int_0^t f(v) dv \equiv 0,$$

azaz $f(t)$ nullfüggvény. //

6.4.5. Következmény. A folytonos függvények körében az inverz Laplace- transzformált egyértelmű, így beszélhetünk az LL^{-1} -gyel jelölt inverzéről.

L^{-1} lineáris transzformáció, azaz ha $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények Laplace- transzformáltja F és G , akkor

$$L^{-1}[c_1 F(s) + c_2 G(s)](t) = c_1 f(t) + c_2 g(t),$$

ami következik L linearitásából és ez az F és G konvergencia tartományának közös részén teljesül.

Az előző bizonyítási módszer segítségével igazolhatjuk, hogy 0 -tól különböző Laplace- transzformált nem lehet periodikus.

6.4.6. Tétel. Tegyük fel, hogy az $f(t)$ függvény az s_0 pontban Laplace- integrálható, és az $F(s)$ Laplace- transzformáltja periodikus, azaz van olyan $p \neq 0$, $\operatorname{Re} p \geq 0$ komplex szám, hogy

$$F(s) = F(s + p)$$

bármely $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ esetén. Ekkor $f(t)$ nullfüggvény és így $F(s) \equiv 0$.

Bizonyítás.

$$F(s) = F(s + p)$$

miatt

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt - \int_0^\infty f(t)e^{-(s+p)t} dt = \int_0^\infty f(t)(1 - e^{-pt})e^{-st} dt = 0$$

bármely $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ esetén. Így $f(t)(1 - e^{-pt})$ nullfüggvény, azaz

$$\int_0^t f(u)(1 - e^{-pu}) du \equiv 0.$$

Parciális integrálással és a $\phi(t) := \int_0^t f(v) dv$ jelölés segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \int_0^t f(u)(1 - e^{-pu}) du \\ &= (1 - e^{-pt}) \int_0^t f(v) dv \Big|_0^t - p \int_0^t \left(e^{-pu} \int_0^u f(v) dv \right) du \\ &= (1 - e^{-pt}) \int_0^t f(v) dv - p \int_0^t \left(e^{-pu} \int_0^u f(v) dv \right) du \\ &= (1 - e^{-pt})\phi(t) - p \int_0^t e^{-pu}\phi(u) du. \end{aligned}$$

Az $e^{-pu}\phi(u)$ függvény folytonos, így a második integrál differenciálható t szerint és így az első is. Tehát az $1 - e^{-pt}$ függvény $t = 2k\pi/p$, $k = 0, 1, 2, \dots$ zérushelyeitől eltekintve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= pe^{-pt}\phi(t) + (1 - e^{-pt})\phi'(t) - pe^{-pt}\phi(t) \\ &= (1 - e^{-pt})\phi'(t), \end{aligned}$$

vagyis

$$\phi'(t) = 0.$$

Ez $\phi(t)$ folytonossága miatt, $\phi(0) = 0$ alapján csak úgy lehetséges, ha $\phi(t) \equiv 0$, vagyis

$$\int_0^t f(v) dv \equiv 0,$$

tehát $f(t)$ nullfüggvény. //

A gyakorlati alkalmazások egyik legfontosabb lépése a "kimeneteli" $F(s)$ függvény ismeretében meghatározni a lehetséges "bemeneteli" függvényt. Amint azt igazoltuk, feltételezve folytonosságát, ez egyértelműen megtehető. A "bemeneteli" függvény meghatározása történhet a Laplace- transzformáció tulajdonságainak alkalmazásával, vagy például a racionális törtekre bontás, vagy a teljes négyzetté alakítás módszerének segítségével.

6.4.7. Példa.

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right] (t) &= 2L^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] (t) - L^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] (t) \\ &= 2e^t - e^{-t}, \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right] (t) &= L^{-1} \left[\frac{s+3}{s^2-1} \right] (t) \\ &= L^{-1} \left[\frac{s}{s^2-1} \right] (t) + 3L^{-1} \left[\frac{1}{s^2-1} \right] (t) \\ &= \operatorname{ch} t + 3 \operatorname{sh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + 3 \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ &= 2e^t - e^{-t}. \end{aligned}$$

6.4.8. Példa.

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{s^2+4s+3} \right] (t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{(s+2)^2-1} \right] (t) \\ &= e^{-2t} \operatorname{sh} t = e^{-2t} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}, \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{s^2+4s+3} \right] (t) &= \frac{1}{2} L^{-1} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right] (t) \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}. \end{aligned}$$

6.4.9. Példa. A 6.3.3. tételben, az $n = 1$ esetén kapott

$$\frac{d}{ds} F(s) = -L[tf(t)](s)$$

egyenlőség alapján

$$L^{-1} [F(s)] (t) = f(t) = -\frac{1}{t} L^{-1} \left[\frac{d}{ds} F(s) \right] (t)$$

és így

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\ln \frac{s+2}{s+3} \right] (t) &= -\frac{1}{t} L^{-1} \left[\frac{d}{ds} \ln \frac{s+2}{s+3} \right] (t) \\ &= -\frac{1}{t} L^{-1} \left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right] (t) \\ &= -\frac{1}{t} (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ &= \frac{e^{-3t} - e^{-2t}}{t}. \end{aligned}$$

Amennyiben $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható az s_0 pontban, továbbá f és f' szakaszonként folytonos függvény, akkor a Fourier- transzformáció elmélete alapján megadható az inverz Laplace- transzformáció.

Terjesszük ki az f függvényt negatív t változóértékekre az

$$f(t) := 0, \quad t \leq 0$$

értelmezés szerint. Ekkor az $s = x + iy$, ($\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$) jelöléssel

$$\begin{aligned} L[f(t)](s) &= F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-(x+iy)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty (f(t)e^{-xt})e^{-iyt} dt \\ &= F(x, y), \end{aligned}$$

ahol $F(x, y)$ pontosan a $g(t) := f(t)e^{-xt}$ függvénynek az y helyen vett Fourier- transzformáltja. Így minden $t > 0$ pontban

$$\frac{g(t^-) + g(t^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(x, y)e^{iyt} dy.$$

Tehát f pozitív folytonossági helyeinél

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{xt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(x, y)e^{iyt} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(x, y)e^{xt} e^{iyt} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(x, y)e^{(x+iy)t} dy, \end{aligned}$$

ahonnan az $s = x + iy$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st} ds \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} F(s)e^{st} ds, \end{aligned}$$

ahol $x \geq \operatorname{Re} s_0$ tetszőleges rögzített szám. Továbbá a t elsőfajú szakadási helyen az utóbbi integrál az

$$\frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$$

értéket szolgáltatja.

Tegyük fel, hogy $F(s)$ véges sok $z_1, z_2, \dots, z_n$ póluspont kivételével analitikus. Ekkor a Reziduum- tétel alapján, amennyiben R elég nagy, azaz $F(s)$ összes pólusa a görbén belül található, fennáll, hogy

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} F(s)e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} F(s)e^{st} ds,$$

ahol $\operatorname{Res}(z_k)$ az $F(s)e^{st}$ függvény reziduma a z_k pontban. Amennyiben van olyan $p > 0$ szám, hogy

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \left| \frac{F(s)}{s^p} \right| = 0,$$

akkor a második integrál határértéke 0, amint R tart a végtelenbe, és ekkor

$$f(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} F(s)e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(z_k).$$

Másrészt, ha z_{km} - edrendű pólusa $F(s)$ - nek, akkor $F(s)e^{st}\operatorname{Res}(z_k)$ - val jelölt reziduma

$$Res(z_k) = \lim_{s \rightarrow z_k} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \{(s - z_k)^m F(s) e^{st}\}$$

szerint adható meg.

6.4.10. Példa. Legyen

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-1)}.$$

Ekkor az $s = \pm 1$ pontok elsőrendű pólusok, ezért

$$\begin{aligned} Res(1) &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)F(s)e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{s+3}{(s+1)(s-1)} e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s+3}{s+1} e^{st} \\ &= 2e^t, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} Res(-1) &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+3}{s-1} e^{st} \\ &= -e^{-t} \end{aligned}$$

alapján

$$f(t) = 2e^t - e^{-t}.$$

6.4.11. Példa. Legyen

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Ekkor az $s = 0$ pont elsőrendű, az $s = -1$ másodrendű pólus, így

$$Res(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)^2} e^{st} = 1$$

és

$$\begin{aligned} Res(-1) &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} ((s+1)^2 F(s) e^{st}) \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{st}}{s} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{ste^{st} - e^{st}}{s^2} \\ &= te^t - e^t, \end{aligned}$$

azaz

$$f(t) = 1 - e^t + te^t.$$

Az alkalmazások szempontjából fontos például az

$$F(s) = \frac{e^{1/s}}{s}$$

transzformált inverzének ismerete, amely csak hatványsor segítségével adható meg. Ugyanakkor a következő példa mutatja, hogy a tagonkénti Laplace- transzformáció nem mindig végezhető el.

6.4.12. Példa. Az $f(t) = e^{-t^2}$ függvény folytonos és korlátos, így Laplace- integrálható $\operatorname{Re} s > 0$ esetén. Továbbá tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Az n - edik tag Laplace- transzformáltjára kapjuk, hogy $\operatorname{Re} s > 0$ esetén

$$L\left[(-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\right](s) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n! s^{2n+1}}.$$

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{n! s^{2n+1}}$$

sor konvergenciáját a hányados teszttel vizsgálva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2(n+1))!}{(n+1)! s^{2(n+1)+1}} \frac{n! s^{2n+1}}{(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{|s|^2} = \infty$$

alapján az egyetlen pontban sem konvergens. Azaz $f(t)$ Laplace- transzformáltját nem kaphatjuk meg $f(t)$ hatványsorának tagonkénti Laplace- transzformáltjának összegeként.

A következő tétel egy elégséges feltételt ad a tagonkénti Laplace- integrálhatóságra vonatkozóan.

6.4.13. Tétel. Ha megadható $K > 0$, $\alpha > 0$ és $N \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy

$$|a_n| \leq K \frac{\alpha^n}{n!}$$

bármely $n > N$ esetén, akkor a

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

hatványsor abszolút konvergens bármely $t \in \mathbb{R}$, továbbá $\operatorname{Re} s > \alpha$ esetén $f(t)$ Laplace- integrálható és

$$L[f(t)](s) = \sum_{n=0}^{\infty} L[a_n t^n](s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}.$$

Bizonyítás.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{K}}{\sqrt[n]{n!}} \alpha = 0$$

alapján a hatványsor abszolút konvergens bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén, és így $f(t)$ folytonos az egész számsíkon. Továbbá $t \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n t^n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| t^n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} K \frac{\alpha^n}{n!} t^n = K \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \\ &= K \left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^N \frac{\alpha^n}{n!} t^n \right). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $f(t)_{\alpha}$ - rendű exponenciális függvény, így a 6.2.15. Feladat alapján $\operatorname{Re} s > \alpha$ esetén $f(t)$ Laplace- integrálható. Továbbá az integrál monotonitása miatt, tetszőleges $x = \operatorname{Re} s > \alpha$ esetén

$$\begin{aligned}
 \left| L[f(t)](s) - \sum_{n=0}^N L[a_n t^n](s) \right| &= \left| L \left[f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right] (s) \right| \\
 &\leq \int_0^{\infty} \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| e^{-xt} dt \\
 &\leq K \int_0^{\infty} \left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^N \frac{\alpha^n}{n!} t^n \right) e^{-xt} dt \\
 &= K \left(\frac{1}{x - \alpha} - \sum_{n=0}^N \frac{\alpha^n}{x^{n+1}} \right) \\
 &= K \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^N \left(\frac{\alpha}{x} \right)^n \right) \\
 &= K \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{x} \right)^{N+1}}{1 - \frac{\alpha}{x}} \right) \\
 &= \frac{K}{x - \alpha} \left(\frac{\alpha}{x} \right)^{N+1}.
 \end{aligned}$$

Így $x > \alpha$ miatt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| L[f(t)](s) - \sum_{n=0}^N L[a_n t^n](s) \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K}{x - \alpha} \left(\frac{\alpha}{x} \right)^{N+1} = 0,$$

azaz

$$L[f(t)](s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N L[a_n t^n](s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}$$

amennyiben $\operatorname{Re} s > \alpha$. //

6.4.14. Példa. A fenti eredmény alapján határozzuk meg az $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$ függvény Laplace- transzformáltját.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1 - e^{-t}}{t} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}}{t} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

alapján a $K = \alpha = 1$ választással bármely n indexre teljesül az előző tétel feltétele. Ezért $\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\begin{aligned}
 L[f(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} L \left[(-1)^n \frac{t^n}{(n+1)!} \right] (s) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n+1)! s^{n+1}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{s^{n+1}} = \ln(1 + 1/s) \\
 &= \ln \left(\frac{s+1}{s} \right).
 \end{aligned}$$

Ugyanis jól ismert, hogy $|x| < 1$ esetén

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

A fenti tétel alapján egyszerűen igazolhatjuk az inverzre vonatkozó hasonló állítást.

6.4.15. Tétel. Tegyük fel, hogy a

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{s^{n+1}}$$

függvénysor $|s| > \varrho$ esetén konvergens. Ekkor

$$f(t) = L^{-1}[F(s)](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n.$$

Bizonyítás. A sor konvergenciájából következik, hogy az általános tag határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{s^{n+1}} = 0,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{s^n} = 0.$$

Így van olyan $K > 0$ szám és $N \in \mathbb{N}$ index, hogy $n > N$ esetén

$$\left| \frac{c_n}{s^n} \right| \leq K,$$

tehát $|s| = \alpha > \varrho$ esetén

$$|c_n| \leq K \alpha^n.$$

Ezért

$$|a_n| := \left| \frac{c_n}{n!} \right| \leq \frac{K \alpha^n}{n!}$$

eleget tesz a 6.4.13. Tétel feltételének, így a folytonos

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n$$

függvénynek a Laplace- transzformáltja

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{s^{n+1}}.$$

Innen, az inverz egyértelmősége miatt az állítás következik. //

6.4.16. Példa. Határozzuk meg

$$F(s) = \frac{e^{1/s}}{s}$$

inverzét.

Amennyiben $\operatorname{Re} s > 1$, akkor

$$F(s) = \frac{e^{1/s}}{s} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! s^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! s^{n+1}}.$$

Így

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}.$$

8. Feladatok

6.4.17. Feladat. ²⁸ Lehet-e e^{-s} valamely függvény Laplace- transzformáltja?

A következő feladatokban az $F(s)$ transzformált ismeretében határozzuk meg az $f(t)$ bemeneteli függvényt.

6.4.18. Feladat. ²⁹ $F(s) = \frac{s-2}{s^2-9}.$

6.4.19. Feladat. ³⁰ $F(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}.$

6.4.20. Feladat. ³¹ $F(s) = \arctg \frac{1}{s}.$

6.4.21. Feladat. ³² $F(s) = \frac{s}{(s-1)(s+3)}.$

6.4.22. Feladat. ³³ $F(s) = \frac{s^2+4}{(s^2-4)^2}.$

9. Derivált, integrálfüggvény, konvolúció és Dirac- delta

A Laplace- transzformáció széleskörű alkalmazását az teszi lehetővé, hogy az ismeretlen függvény deriváltjának, integrálfüggvényének Laplace- transzformáltja kifejezhető az ismeretlen függvény Laplace- transzformáltjával, a konvolúciós egyenletek transzformáltja a transzformáltak szorzatával egyenlő, továbbá az impulzusfüggvény transzformáltja is értelmezhető. Ebben a fejezetben ezen állításokat igazoljuk.

6.5.1. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ az $x_0 > 0$ pontban Laplace- integrálható és legyen

$$\phi(t) := \int_0^t f(u) du.$$

Ekkor $\phi(t)$ is Laplace- integrálható az x_0 pontban, és

$$\Phi(s) := L[\phi(t)](s) = \frac{1}{s} L[f(t)](s) = \frac{F(s)}{s}$$

amennyiben $s = x_0$ vagy $\operatorname{Re} s > x_0$.

Továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{e^{x_0 t}} = 0,$$

azaz a folytonos $\phi(t)$ függvény exponenciális rendű, így $\operatorname{Re} s > x_0$ esetén $\phi(t)$ abszolút Laplace- integrálható.

Bizonyítás. Legyen $x \geq x_0$ rögzített valós szám és

$$h(v) := e^{xv} \int_0^v \phi(t) e^{-xt} dt, \quad v \in \mathbb{R}.$$

A $\phi(t)$ függvény folytonossága miatt $h(v)$ differenciálható :

$$\begin{aligned} h'(v) &:= x e^{xv} \int_0^v \phi(t) e^{-xt} dt + e^{xv} \phi(v) e^{-xv} \\ &= e^{xv} \int_0^v \phi(t) x e^{-xt} dt + \phi(v) \end{aligned}$$

továbbá az általánosított parciális integrálással, $\phi(0) = 0$ alapján

$$\begin{aligned} h'(v) &= e^{xv} \left(-\phi(t) e^{-xt} \Big|_0^v + \int_0^v f(t) e^{-xt} dt \right) + \phi(v) \\ &= e^{xv} \left(-\phi(v) e^{-xv} + \int_0^v f(t) e^{-xt} dt \right) + \phi(v) \\ &= e^{xv} \int_0^v f(t) e^{-xt} dt. \end{aligned}$$

$L[f(t)](s)$ konvergens az $s = x > 0$ pontban, ezért

$$F(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v f(t) e^{-xt} dt = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{h'(v)}{e^{xv}}$$

létezik és véges. Így a L'Hospital- szabály szerint kapjuk, hogy

$$\frac{F(x)}{x} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{h'(v)}{x e^{xv}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{h(v)}{e^{xv}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v \phi(t) e^{-xt} dt = \Phi(x).$$

Mivel az $F(s)$, $\Phi(s)$ függvények analitikusak $\operatorname{Re} s > x_0$ esetén, ezért a

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{s}$$

összefüggés érvényes az egész $\operatorname{Re} s > x_0$ félsíkon.

A fentiek alapján $\phi(t)$ végtelenben vett viselkedésére vonatkozóan adódik, hogy

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{h'(v)}{x_0 e^{x_0 v}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\int_0^v \phi(t) e^{-x_0 t} dt + \frac{\phi(v)}{x_0 e^{x_0 v}} \right) \\ &= \Phi(x_0) + \frac{1}{x_0} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\phi(v)}{e^{x_0 v}}, \end{aligned}$$

azaz

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\phi(v)}{e^{x_0 v}} = 0.$$

Ezért a 6.2.15. feladat alapján kapjuk, hogy $\operatorname{Re} s > x_0$ esetén $\phi(t)$ abszolút Laplace- integrálható. //

Ezen tétel következményeként egyszerűen igazolhatjuk a deriváltra vonatkozó állítást.

6.5.2. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ differenciálható $t > 0$ esetén, és $L[f'(t)](s)$ konvergens az $s = x_0 > 0$ pontban. Ekkor az

$$f(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

véges határérték létezik, $L[f(t)](s)$ konvergens az $s = x_0$ pontban és

$$L[f'(t)](s) = sL[f(t)](s) - f(0^+),$$

ha $s = x_0$ vagy $\operatorname{Re}(s) > x_0$. Továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{x_0 t}} = 0,$$

és így $\operatorname{Re} s > x_0$ esetén $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható.

Bizonyítás. $f'(t)$ Laplace- integrálhatósága definíció szerint feltételezi, hogy $f'(t)$ bármely véges $[0, b]$ ($b > 0$) intervallumon integrálható, azaz

$$\int_0^b f'(u) du = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^b f'(u) du = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(b) - f(t)) = f(b) - f(0^+)$$

létezik.

Az előző tétel alapján, $f'(t)$ Laplace- integrálhatóságából következik, hogy a

$$\phi(t) := \int_0^t f'(u) du = f(t) - f(0^+)$$

integrálfüggvény is Laplace- integrálható és

$$L[\phi(t)](s) = \frac{1}{s} L[f'(t)](s),$$

azaz $\operatorname{Re} s > 0$ miatt

$$\begin{aligned} L[f'(t)](s) &= sL[\phi(t)](s) \\ &= sL[f(t) - f(0^+)](s) \\ &= s \{ L[f(t)](s) - L[f(0^+)](s) \} \\ &= s \left(L[f(t)](s) - \frac{f(0^+)}{s} \right) \\ &= sL[f(t)](s) - f(0^+), \end{aligned}$$

amennyiben $s = x_0 > 0$ vagy $\operatorname{Re} s > x_0$.

Továbbá $x_0 > 0$ alapján

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\phi(v)}{e^{x_0 v}} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{f(v) - f(0^+)}{e^{x_0 v}} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{f(v)}{e^{x_0 v}}, \end{aligned}$$

tehát $\operatorname{Re}(s) > x_0$ esetén $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható. //

Amennyiben f kétszer differenciálható és Laplace- integrálható is, akkor a fentiek alapján

$$\begin{aligned} L[f''(t)](s) &= sL[f'(t)](s) - f'(0^+) \\ &= s \{ sL[f(t)](s) - f(0^+) \} - f'(0^+) \\ &= s^2 L[f(t)](s) - s f(0^+) - f'(0^+), \end{aligned}$$

és így általánosan fennáll, hogy

6.5.3. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ n - szer differenciálható $t > 0$ esetén, és $L[f^{(n)}(t)](s)$ konvergens az $s = x_0 > 0$ pontban. Ekkor az

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \quad f'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t), \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-1)}(t)$$

véges határértékek léteznek, $L[f(t)](s)$ konvergens az $s = x_0$ pontban és

$$L[f^{(n)}(t)](s) = s^n L[f(t)](s) - f(0^+)s^{n-1} - f'(0^+)s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0^+),$$

amennyiben $s = x_0$ vagy $\operatorname{Re} s > x_0$. Továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{x_0 t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f'(t)}{e^{x_0 t}} = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f^{(n-1)}(t)}{e^{x_0 t}} = 0,$$

és így $\operatorname{Re}(s) > x_0$ esetén $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ abszolút Laplace- integrálható. //

Amennyiben $f(t)$ folytonos a $t = 0$ pontban, akkor $f^{(n)}(t)$ Laplace- transzformáltja egyszerűbb alakban is felírható. Ezen állítás kimondásához szükségünk van a következő lemmára.

6.5.4. Lemma. Legyen $f(t)$ folytonos $[0, b]$ - n és differenciálható $(0, b]$ - n. Ha az

$$f'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t)$$

határérték létezik és véges, akkor $f(t)$ (jobbról) differenciálható a 0 pontban és

$$f'(0) = f'(0^+).$$

Bizonyítás. A Lagrange- féle középérték tétel alapján bármely $0 < x (\leq b)$ esetén van olyan $0 < \xi < x$ hely, hogy

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\xi).$$

Ha $x \rightarrow 0$, akkor $\xi \rightarrow 0$, így a jobb oldali kifejezés konvergenciájából adódik a bal oldali konvergenciája is, továbbá

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f'(\xi) = f'(0^+). \quad //$$

Ezen két utolsó állításból következik, hogy

6.5.5. Tétel. Tegyük fel, hogy $f(t)$ folytonos, ha $t \geq 0$, n - szer differenciálható ha $t > 0$, továbbá $L[f^{(n)}(t)](s)$ konvergens az $s = x_0 > 0$ pontban. Ekkor az $f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ függvények a $t = 0$ pontban is folytonosak, továbbá $L[f(t)](s)$ konvergens az $s = x_0$ pontban és

$$L[f^{(n)}(t)](s) = s^n L[f(t)](s) - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

amennyiben $s = x_0 > 0$ vagy $\operatorname{Re} s > x_0$.

Megjegyzés. A fenti előállítás megadható az

$$L[f^{(n)}(t)](s) = s^n L \left[f(t) - \left\{ f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} \right\} \right](s)$$

alakban is, ahol a kapcsos zárójelben az $f(t)$ függvénynek a $t = 0$ pontban vett $(n-1)$ - ed fokú Taylor- polinomja áll.

Határozzuk meg a következő függvények Laplace- transzformáltját.

$$\phi(t) = \int_0^t \sin 3u \, du.$$

6.5.6. Példa.

$$L[\phi(t)](s) = \frac{L[\sin 3t](s)}{s} = \frac{3}{s(s^2 + 9)}.$$

Illetve

$$\int_0^t \sin 3u \, du = -\frac{1}{3} \cos 3u \Big|_0^t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos 3t$$

alapján

$$\begin{aligned} L[\phi(t)](s) &= L\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos 3t\right](s) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 9}\right) = \frac{3}{s(s^2 + 9)}. \end{aligned}$$

6.5.7. Példa. $\phi(t) = \int_0^t \operatorname{ch} 2u \, du.$

$$L[\phi(t)](s) = \frac{L[\operatorname{ch} 2t](s)}{s} = \frac{s}{s(s^2 - 4)} = \frac{1}{s^2 - 4}.$$

Illetve

$$\int_0^t \operatorname{ch} 2u \, du = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2u \Big|_0^t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$$

alapján

$$L[\phi(t)](s) = L\left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t\right](s) = \frac{2}{2(s^2 - 4)} = \frac{1}{s^2 - 4}.$$

6.5.8. Példa. $f(t) = \cos^2 2t.$

Alkalmazva az

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s} \{L[f'(t)](s) + f(0)\}$$

összefüggést,

$$f'(t) = -4 \cos 2t \sin 2t = -2 \sin 4t$$

és $f(0) = 1$ miatt

$$\begin{aligned} L[f(t)](s) &= \frac{1}{s} \{L[-2 \sin 4t](s) + 1\} \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{-8}{s^2 + 16} + 1\right) = \frac{s^2 + 8}{s(s^2 + 16)}. \end{aligned}$$

Illetve

$$\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$$

alapján

$$\begin{aligned} L[f(t)](s) &= L\left[\frac{1 + \cos 4t}{2}\right](s) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 16}\right) = \frac{s^2 + 8}{s(s^2 + 16)}. \end{aligned}$$

Az integrálegyenletek egyik legfontosabb típusában függvények

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(u) f_2(t - u) \, du$$

konvolúciója szerepel. A konvolúciós integrál létezésének egy elégséges feltételét adja a következő állítás.

6.5.9. Tétel. Tegyük fel, hogy az f_1, f_2 abszolút integrálható függvények bármely 0 - t nem tartalmazó véges $[a, b] (a > 0)$ intervallumon korlátosak. Ekkor $(f_1 * f_2)(t)$ létezik.

Bizonyítás. Legyen $t > 0$ rögzített. Ekkor van olyan K_1 és K_2 korlát, hogy ha

$$\frac{t}{2} \leq u \leq t, \text{ akkor } |f_1(u)| \leq K_1, \text{ és } |f_2(u)| \leq K_2.$$

Így

$$\left| \int_0^{t/2} f_1(u) f_2(t-u) du \right| \leq K_2 \int_0^{t/2} |f_1(u)| du$$

és

$$\left| \int_{t/2}^t f_1(u) f_2(t-u) du \right| \leq K_1 \int_{t/2}^t |f_2(v)| dv$$

alapján következik, hogy $(f_1 * f_2)(t)$ létezik. //

A Laplace- transzformált alkalmazások szempontjából nagyon fontos tulajdonsága, hogy függvények konvolúciójának transzformáltja egyenlő a függvények transzformáltjának szorzatával.

6.5.10. Tétel. (Konvolúció- tétel) Legyen f_1 és f_2 abszolút Laplace- integrálható az s_0 pontban, továbbá tegyük fel, hogy $(f_1 * f_2)(t)$ létezik. Ekkor $(f_1 * f_2)(t)$ abszolút Laplace- integrálható az s_0 pontban és

$$L[(f_1 * f_2)(t)](s) = L[f_1(t)](s) \cdot L[f_2(t)](s)$$

bármely $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$, ekkor

$$\begin{aligned} L[f_1(t)](s) \cdot L[f_2(t)](s) &= \int_0^\infty f_1(u) e^{-su} du \cdot \int_0^\infty f_2(v) e^{-sv} dv \\ &= \int_0^\infty \left(f_1(u) e^{-su} \int_0^\infty f_2(v) e^{-sv} dv \right) du \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f_1(u) f_2(v) e^{-s(u+v)} dv \right) du. \end{aligned}$$

A $t = u + v$ helyettesítéssel $dt = du$ alapján

$$L[f_1(t)](s) \cdot L[f_2(t)](s) = \int_0^\infty \left(\int_u^\infty f_1(u) f_2(t-u) e^{-st} dt \right) du.$$

Az f_2 függvényt negatív t értékre 0- nak definiálva kapjuk, hogy amennyiben $t < u$, akkor $f_2(t-u) = 0$, és így

$$L[f_1(t)](s) \cdot L[f_2(t)](s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f_1(u) f_2(t-u) e^{-st} dt \right) du.$$

Az f_1 és f_2 függvények abszolút Laplace- integrálhatóságából következik, hogy az integrálási sorrend felcserelhető, tehát

$$\begin{aligned} L[f_1(t)](s) \cdot L[f_2(t)](s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f_1(u) f_2(t-u) e^{-st} du \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f_1(u) f_2(t-u) du \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty (f_1 * f_2)(t) e^{-st} dt \\ &= L[(f_1 * f_2)(t)](s). \end{aligned} //$$

A konvolúció- tétel az $L[f_1(t)](s) = F_1(s)$, $L[f_2(t)](s) = F_2(s)$ jelöléssel az

$$F_1(s)F_2(s) = L[(f_1 * f_2)(t)](s)$$

alakba írható, amiből következik, hogy

$$L^{-1}[F_1(s)F_2(s)](t) = (f_1 * f_2)(t) = L^{-1}[F_1(s)](t) * L^{-1}[F_2(s)](t)$$

és így alkalmazhatjuk az inverz Laplace- transzformált meghatározására is.

6.5.11. Példa. Legyen $F(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$, ekkor

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s+1)}\right](t) &= L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) * L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) \\ &= e^{2t} * e^{-t} \\ &= \int_0^t e^{2u} \cdot e^{-(t-u)} du \\ &= \int_0^t e^{3u-t} du \\ &= \frac{e^{3u-t}}{3} \Big|_0^t \\ &= \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}. \end{aligned}$$

Kifeszített húrra mért nagy erejű ütés esetén, vagy elektromos hálózat bekapcsolásakor jelentkező folyamat állapotát nem lehetséges leírni a hagyományos függvények segítségével. Ez is motiválta az általánosított függvények, más néven a disztribúciók elméletét, amely például megtalálható Laurent Schwartz: Théorie des distributions című művében. Sajnos terjedelmi okok miatt nincs lehetőségünk ezen témakör elemi tárgyalására sem.

Az alkalmazásokban, mint például a fent említett két példa esetén is fellépő, és ezért az egyik legfontosabb általánosított függvény a Dirac- delta függvény, $\delta(t)$, más néven az impulzusfüggvény.

Ha a Dirac- delta függvényt a 6.1.3. példában definiált $\delta_a(t)$ egységnyi erősségű impulzusfüggvény határértékének tekintjük, mint egy pillanat alatt leadott nagy erőhatásként értelmezve, akkor a $\delta(t)$ Laplace- transzformáltjára érvényes

$$L[\delta(t)](s) = 1 \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

eredmény összhangban van

$$\lim_{a \rightarrow 0} L[\delta_a(t)](s) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-as}}{as} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{se^{-as}}{s} = 1$$

határértékkel.

Ez is azt mutatja, hogy a Dirac- delta függvényt nem lehet a hagyományos értelemben vett függvénynek tekinteni, ugyanis a 6.3.1. tételben megmutattuk, hogy a függvények Laplace- transzformáltja a végtelenben eltűnik. Így az sem meglepő, hogy

$$L[\delta(t-a)](s) = e^{-as} \quad (a > 0, \operatorname{Re} s > 0)$$

egy periodikus függvény, ami a 6.4.6. tétel szerint függvények esetén nem lehetséges.

Továbbá a disztribúciós- derivált, D definíciója alapján kapjuk, hogy

$$L[\delta^{(n)}(t)](s) = L[D^n \delta(t)](s) = s^n.$$

10. Feladatok

Határozzuk meg a következő függvények Laplace- transzformáltját!

6.5.12. Feladat. ³⁴ $\phi(t) = \int_0^t \cos 2u \, du \, .$

6.5.13. Feladat. ³⁵ $\phi(t) = \int_0^t \operatorname{sh} 5u \, du \, .$

6.5.14. Feladat. ³⁶ $f(t) = \operatorname{ch}^2 u.$

6.5.15. Feladat. ³⁷ Határozzuk meg a következő

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ 2e^{-t}, & \text{ha } t \geq 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ \cos t, & \text{ha } t \geq 0, \end{cases}$$

függvények konvolúcióját!

A következő feladatokban a konvolúció- tétel alkalmazásával határozzuk meg a bemeneti függvényt!

6.5.16. Feladat. ³⁸ $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} \, .$

6.5.17. Feladat. ³⁹ $F(s) = \frac{4s}{(s^2 - 4)^2} \, .$

Az általánosított függvények körében határozzuk meg a bemeneteli "függvényt"!

6.5.18. Feladat. ⁴⁰ $F(s) = \frac{s + 4}{s - 2} \, .$

6.5.19. Feladat. ⁴¹ $F(s) = \frac{s^3 + 5s - 2}{s^2 + 4} \, .$

7. fejezet - Alkalmazás

Ebben a fejezetben bemutatjuk a Laplace- transzformált alkalmazását olyan egyszerűbb gyakorlati problémák megoldására, amikor a t változóról feltehető, hogy az nem lehet negatív, $t \geq 0$. Feltételezzük, hogy az egyenletekben szereplő függvények Laplace- integrálhatóak, a keresett megoldás, más néven "bemeneti" függvény, $y(t)$ folytonos $t > 0$ esetén, és a 0 pontban a határértéke, $y(0^+)$ létezik. Továbbá a "zavaró" $f(t)$ függvény szakaszonként folytonos, lokálisan abszolút integrálható és így lehet a konvolúciós integrál egyik eleme.

A továbbiakban $y(t)$ Laplace- transzformáltját $Y(s)$ - nal, $f(t)$ - ét $F(s)$ - fel jelöljük, továbbá használjuk, hogy $y_0 := y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$, $y'_0 := y'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t)$.

1. Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek

Az egyik legegyszerűbb kezdetiérték probléma az elsőrendű lineáris konstans együtthatós differenciálegyenlet:

$$y'(t) + \alpha y(t) = f(t), \quad y(0^+) = y_0.$$

Ekkor a transzformált egyenlet

$$sY(s) - y_0 + \alpha Y(s) = F(s),$$

amely egyszerűen megoldható Y - ra

$$Y(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s + \alpha} + \frac{y_0}{s + \alpha}.$$

Innen vagy az elemi racionális törtekre bontás módszerét alkalmazva keressük vissza a bemeneti függvényt, vagy a konvolúció- tétel alkalmazásával,

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s + \alpha} \right] (t) = e^{-\alpha t}$$

miatt az

$$y(t) = (f * e^{-\alpha t})(t) + y_0 e^{-\alpha t}$$

összefüggés alapján határozzuk meg.

7.1.1. Példa. $y'(t) + 2y(t) = t$, $y_0 = 1$.

$$sY(s) - y_0 + 2Y(s) = L[t](s)$$

$$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s+2)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)s^2}.$$

Elemi racionális törtekre bontással kapjuk, hogy

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

így

$$y(t) = \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t.$$

Illetve a konvolúció-tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-2t} + (t * e^{-2t})(t). \\ &= e^{-2t} + \int_0^t u e^{-2(t-u)} du \\ &= e^{-2t} + e^{-2t} \int_0^t u e^{2u} du \\ &= e^{-2t} + e^{-2t} \left[\frac{1}{2} u e^{2u} - \frac{1}{4} e^{2u} \right]_0^t \\ &= e^{-2t} + e^{-2t} \left(\frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} \right) \\ &= e^{-2t} + e^{-2t} \left(\frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{5}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

7.1.2. Példa. $y'(t) - y(t) = u(t-3), \quad y_0 = 2.$

Képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját, kapjuk, hogy

$$sY(s) - 2 - Y(s) = L[u(t-3)](s).$$

ebből

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-1} L[u(t-3)](s),$$

illetve a konvolúciós egyenlet miatt

$$y(t) = 2e^t + (u(t-3) * e^t)(t)$$

következik. Amennyiben $0 \leq t < 3$, akkor $u(t-3) = 0$, így

$$(u(t-3) * e^t)(t) = 0.$$

$t \geq 3$ esetén $u(t-3) = 1$, ezért ekkor

$$\begin{aligned}
 (u(t-3) * e^t)(t) &= \int_3^t 1 \cdot e^{t-v} dv \\
 &= e^t \int_3^t e^{-v} dv \\
 &= e^t [-e^{-v}]_3^t \\
 &= e^t (e^{-3} - e^{-t}) \\
 &= e^{t-3} - 1.
 \end{aligned}$$

Tehát a bemeneteli függvény

$$y(t) = \begin{cases} 2e^t, & \text{ha } 0 \leq t < 3, \\ 2e^t + e^{t-3} - 1, & \text{ha } t \geq 3. \end{cases}$$

Hasonlóan járhatunk el a magasabb rendű konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása során. Itt csak az alkalmazások szempontjából fontos másodrendűekkel foglalkozunk és $y(t), y'(t), y''(t)$ helyett y, y', y'' , míg $Y(s)$ helyett Y szerepel majd. Tekintsük az

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(t), \quad y(0^+) = y_0, \quad y'(0^+) = y'_0$$

kezdetiérték problémát. Transzformálás után kapjuk, hogy

$$s^2 Y - s y_0 - y'_0 + \alpha(sY - y_0) + \beta Y = F(s),$$

azaz

$$Y(s^2 + \alpha s + \beta) = F(s) + y_0 s + \alpha y_0 + y'_0.$$

Tehát a

$$p(s) := \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

jelöléssel

$$Y = F(s)p(s) + y_0 s p(s) + (\alpha y_0 + y'_0)p(s).$$

A bemeneteli függvény meghatározására a racionális törtekre bontás módszere helyett alkalmazhatjuk a következő gondolatmenetet. A

$$g(t) := L^{-1}[p(s)](t)$$

függvény pontosan a

$$g'' + \alpha g' + \beta g = 0, \quad g_0 = 0, \quad g'_0 = 1$$

"karakterisztikus" egyenlet megoldása. Ezért $g_0 = 0$ és így

$$L[g'(t)](s) = sL[g(t)](s) = s p(s)$$

alapján az y bemeneteli függvényre kapjuk, hogy

$$y(t) = (f * g)(t) + y_0 g'(t) + (\alpha y_0 + y'_0)g(t).$$

7.1.3. Példa. Oldjuk meg az $y'' + 4y' - 5y = e^t$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$ kezdeti érték problémát.

Képezzük az egyenlet Laplace- transzformáltját:

$$\begin{aligned}
 s^2 Y - s y_0 - y'_0 + 4(sY - y_0) - 5Y &= F(s) \\
 s^2 Y - s - 2 + 4(sY - 1) - 5Y &= F(s) \\
 Y(s^2 + 4s - 5) &= F(s) + s + 6.
 \end{aligned}$$

Így

$$p(s) = \frac{1}{s^2 + 4s - 5} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+5} \right)$$

alapján

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 4s - 5} \right] = \frac{1}{6} L^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] - \frac{1}{6} L^{-1} \left[\frac{1}{s+5} \right]$$

miatt

$$g(t) = \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{6} e^{-5t}.$$

Ezért

$$g'(t) = \frac{1}{6} e^t + \frac{5}{6} e^{-5t},$$

és

$$\begin{aligned} (g(t) * e^t)(t) &= \frac{1}{6} \int_0^t (e^u - e^{-5u}) e^{t-u} du \\ &= \frac{e^t}{6} \int_0^t (1 - e^{-6u}) du \\ &= \frac{e^t}{6} \left[u + \frac{1}{6} e^{-6u} \right]_0^t \\ &= \frac{e^t}{6} \left(t + \frac{1}{6} e^{-6t} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} t e^t + \frac{1}{36} e^{-5t} - \frac{1}{36} e^t. \end{aligned}$$

Tehát a bemeneteli függvény

$$\begin{aligned} y(t) &= (g(t) * e^t)(t) + g'(t) + 6g(t) \\ &= \frac{1}{6} t e^t + \frac{1}{36} e^{-5t} - \frac{1}{36} e^t \\ &\quad + \frac{1}{6} e^t + \frac{5}{6} e^{-5t} \\ &\quad + e^t - e^{-5t} \\ &= \frac{1}{6} t e^t + \frac{41}{36} e^t - \frac{5}{36} e^{-5t}. \end{aligned}$$

A kezdeti értékek hiányában is alkalmazhatjuk a Laplace- transzformáltat, hogy megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását.

7.1.4. Példa. Oldjuk meg az $y'' + 4y' - 5y = e^t$ egyenletet.

Képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját,

$$\begin{aligned} s^2 Y - s y_0 - y_0' + 4(sY - y_0) - 5Y &= F(s) \\ s^2 Y - s y_0 - y_0' + 4sY - 4y_0 - 5Y &= F(s) \\ Y(s^2 + 4s - 5) &= F(s) + s y_0 + 4y_0 + y_0' \end{aligned}$$

Így az előző példa alapján

$$y(t) = (g(t) * e^t)(t) + y_0 g'(t) + (4y_0 + y_0') g(t)$$

ahol

$$g(t) = \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{6} e^{-5t}, \quad g'(t) = \frac{1}{6} e^t + \frac{5}{6} e^{-5t},$$

és

$$(g(t) * e^t)(t) = \frac{1}{6}te^t + \frac{1}{36}e^{-5t} - \frac{1}{36}e^t.$$

Azaz

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{6}te^t + \frac{1}{36}(30y_0 + 6y'_0 - 1)e^t + \frac{1}{36}(6y_0 - 6y'_0 + 1)e^{-5t} \\ &= \frac{1}{6}te^t + c_1e^t + c_2e^{-5t}. \end{aligned}$$

7.1.5. Példa. Oldjuk meg az $y'' + 4y = \cos 2t$ egyenletet az $y(0) = 1, y(\pi/4) = 1$ peremfeltételek esetén.

Képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját,

$$\begin{aligned} s^2Y - sy_0 - y'_0 + 4Y &= \frac{s}{s^2 + 4} \\ s^2Y - s - y'_0 + 4Y &= \frac{s}{s^2 + 4} \\ Y(s^2 + 4) &= \frac{s}{s^2 + 4} + s + y'_0 \\ Y &= \frac{s}{(s^2 + 4)^2} + \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{y'_0}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

Az

$$L[t \sin \omega t](s) = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad L[\cos 2t](s) = \frac{s}{s^2 + 4}, \quad L[\sin 2t](s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

eredmények alapján kapjuk, hogy

$$y(t) = \frac{1}{4}t \sin 2t + \cos 2t + \frac{y'_0}{2} \sin 2t.$$

Az $y(\pi/4) = 1$ feltétel miatt

$$\begin{aligned} 1 &= y(\pi/4) = \frac{\pi}{16} + \frac{y'_0}{2} \\ \frac{y'_0}{2} &= 1 - \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Tehát a peremérték feladat megoldása

$$y(t) = \frac{1}{4}t \sin 2t + \cos 2t + \frac{16 - \pi}{16} \sin 2t.$$

7.1.6. Példa. Oldjuk meg az $y'' - 25y = 250t, y_0 = 1, y'(1) = -10$ feladatot.

Képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját,

$$\begin{aligned} s^2Y - sy_0 - y'_0 - 25Y &= \frac{250}{s^2} \\ s^2Y - s - y'_0 - 25Y &= \frac{250}{s^2} \\ Y(s^2 - 25) &= \frac{250}{s^2} + s + y'_0 \\ Y &= \frac{250}{s^2(s^2 - 25)} + \frac{s + y'_0}{s^2 - 25} \\ Y &= 2\frac{5}{s^2 - 25} - \frac{10}{s^2} + \frac{s}{s^2 - 25} + \frac{y'_0}{5} \frac{5}{s^2 - 25} \end{aligned}$$

Így

$$y(t) = 2 \operatorname{sh} 5t - 10t + \operatorname{ch} 5t + \frac{y'_0}{5} \operatorname{sh} 5t$$

és

$$y'(t) = 10 \operatorname{ch} 5t - 10 + 5 \operatorname{sh} 5t + y'_0 \operatorname{ch} 5t.$$

Az $y'(1) = -10$ feltétel miatt

$$-10 = y'(1) = 10 \operatorname{ch} 5 - 10 + 5 \operatorname{sh} 5 + y'_0 \operatorname{ch} 5$$

$$y'_0 = -10 - 5 \tanh 5.$$

Tehát a feladat megoldása

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \operatorname{sh} 5t - 10t + \operatorname{ch} 5t - (2 + \tanh 5) \operatorname{sh} 5t \\ &= -10t + \operatorname{ch} 5t - \tanh 5 \operatorname{sh} 5t. \end{aligned}$$

Műszaki alkalmazásokban a karakterisztikus egyenletet a Dirac- delta függvény segítségével a

$$g'' + \alpha g' + \beta y = \delta(t), \quad g_0 = g'_0 = 0$$

alakban írják fel hangsúlyozva, hogy a nyugalomban lévő rendszer állapota valamilyen külső impulzus hatására változik meg. A disztribúció elmélettel összhangban a deriváltra vonatkozó feltétel

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g'(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} g'(t) = 1$$

módon értendő. A $L[\delta(t)](s) = 1$ tulajdonság alapján a megoldás menete érdemben nem változik, és a helyes eredményt kapjuk.

7.1.7. Példa. Oldjuk meg az $y'' + 2y' - 3y = 4\delta(t)$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$ kezdetiérték problémát.

Képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját,

$$s^2 Y + 2sY - 3Y = 4$$

$$Y(s^2 + 2s - 3) = 4$$

$$Y = \frac{4}{s^2 + 2s - 3}$$

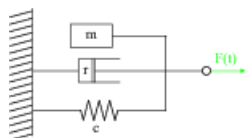
$$Y = \frac{4}{(s+1)^2 - 4}$$

$$y = 2e^{-t} \operatorname{sh} 2t.$$

Rugó jelenlétében egy test egyenes vonalú mozgásegyenlete Newton II. törvénye alapján az

$$mx'' = F(t) - rx' - \frac{1}{c}x$$

egyenlettel írható le. Itt m a test tömege, F a testre ható külső erők eredője, $c > 0$ a rugóállandó, és viszkózus súrlódás esetén $r \geq 0$ a csillapítási együttható. Az ilyen egyszerű mechanikai lengőelem vázlatos rajza az alábbi ábrán látható.



Rendezés és helyettesítés után a mozgásegyenlet az

$$x'' + 2bx' + \lambda^2 x = f(t)$$

alakban írható. A következő példában, az $f(t) = \delta(t)$ választással megadjuk az egységnyi impulzusra adott választ, feltételezve, hogy csillapított mozgást vizsgálunk, azaz $r > 0$ és így $b > 0$.

7.1.8.b. $\lambda > 0$ Oldjuk meg az $x'' + 2bx' + \lambda^2 x = \delta(t)$, $x_0 = 0$, $x'_0 = 0$ kezdetiérték problémát feltételezve, hogy

Képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját, az $X = L[x(t)](s)$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$s^2 X + 2bsX + \lambda^2 X = 1$$

$$X(s^2 + 2bs + \lambda^2) = 1$$

$$X = \frac{1}{s^2 + 2bs + \lambda^2}$$

$$X = \frac{1}{(s+b)^2 + \lambda^2 - b^2}.$$

Amennyiben $\lambda > b$, akkor

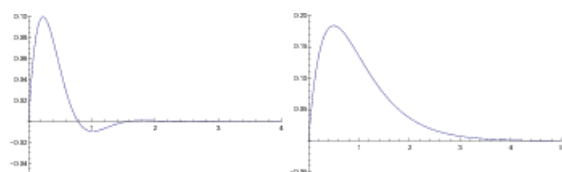
$$x = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} e^{-bt} \sin \sqrt{\lambda^2 - b^2} t.$$

Ha $\lambda = b$, akkor

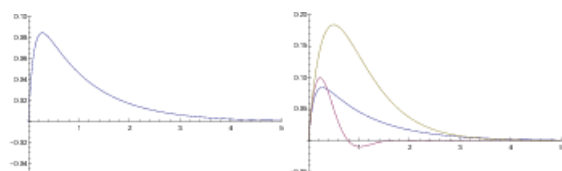
$$x = te^{-bt}.$$

Ha $\lambda < b$, akkor

$$x = \frac{1}{\sqrt{b^2 - \lambda^2}} e^{-bt} \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - \lambda^2} t.$$



$\lambda > b$ $\lambda = b$



$\lambda < b$ együtt

7.1.9. Példa. Egy m tömegű lövedék kilövésekor a kezdősebessége legyen v_0 . Feltételezve, hogy viszkózus gázban halad, a mozgását leíró egyenletre az

$$mx'' + rx' = mv_0 \delta(t), \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = 0$$

összefüggés érvényes, ahol $r > 0$. Határozzuk meg, hogy a $t = 2$ időpontban a lövedék milyen messze található és mennyi a pillanatnyi sebessége, amennyiben $m = 4$ g, $v_0 = 500$ m/s és $k = 2 \cdot 10^{-3}$ kg/s.

$$\begin{aligned}
 ms^2X + ksX &= mv_0 \\
 X(ms^2 + ks) &= mv_0 \\
 X &= \frac{mv_0}{ms^2 + ks} = \frac{v_0}{s(s + k/m)} \\
 X &= \frac{mv_0/k}{s} - \frac{mv_0/k}{s + k/m} \\
 x &= \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).
 \end{aligned}$$

Így

$$x' = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

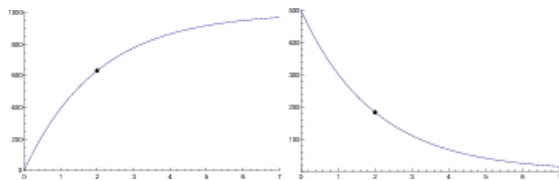
Tehát az adott feltételek mellett

$$x(2) = 10^3(1 - e^{-1}) \approx 631 \text{ (méter)}$$

és

$$x'(2) = 500 \cdot e^{-1} \approx 184 \text{ (méter/sec.)}$$

adja a lövedék távolságát a kilövés helyétől és a pillanatnyi sebességét.



$x(t)$ $v(t)$

7.1.10. Példa. Ellenállást (R) és indukciós tekercset (L) tartalmazó elektromos hálózatban (RL körben) 1V feszültség impulzust alkalmazva a következő összefüggés teljesül:

$$li' + ri = \delta(t), \quad i_0 = 0,$$

ahol i az áramerősség és $r, l > 0$. Az áramerősség $L[i(t)](s)$ Laplace- transzformáltját I - vel jelölve kapjuk, hogy

$$lsI + rI = 1$$

$$I(ls + r) = 1$$

$$I = \frac{1}{ls + r} = \frac{1}{l} \frac{1}{s + r/l}$$

$$i = \frac{1}{l} e^{-\frac{r}{l}t}.$$

2. Feladatok

Oldjuk meg a következő, differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték problémákat.

7.1.11. Feladat. ⁴² $y'(t) - y(t) = e^t \cos t, \quad y_0 = 1.$

7.1.12. Feladat. ⁴³ $y' + y = f(t), \quad y_0 = 1,$ ahol $f(t) = \sin t$ ha $0 \leq t < \pi/2$, különben 0.

7.1.13. Feladat. ⁴⁴ $y'' + 4y' + 8y = \sin 2t, \quad y_0 = 2, \quad y'_0 = 4.$

7.1.14. Feladat. ⁴⁵ Oldjuk meg az

$$y'' + 9y = \sin 3t, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/6) = 0$$

peremfeladatot.

7.1.15. Feladat. Oldjuk meg az $x'' + \lambda^2 x = \delta(t)$, $x_0 = 0$, $x'_0 = 0$ kezdetiérték problémát, feltételezve, hogy $\lambda \neq 0$. Azaz a csillapítatlan rendszerre egységnyi impulzus hat.

3. Polinom együtthatós lineáris differenciálegyenletek

A Laplace- transzformált, $F(s)$ differenciálhatóságára vonatkozó 6.3.3. Tétel alapján

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n L[t^n f(t)](s)$$

amennyiben $f(t)$ abszolút Laplace- integrálható. Azaz

$$\begin{aligned} L[ty(t)](s) &= -Y'(s) = -Y', \\ L[ty'(t)](s) &= -\frac{d}{ds} L[y'(t)](s) \\ &= -\frac{d}{ds} (sY(s) - y_0) \\ &= -Y(s) - sY'(s) \\ &= -sY' - Y, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} L[ty''(t)](s) &= -\frac{d}{ds} L[y''(t)](s) \\ &= -\frac{d}{ds} (s^2 Y(s) - y_0 s - y'_0) \\ &= -2sY(s) - s^2 Y'(s) + y_0 \\ &= -s^2 Y' - 2sY + y_0. \end{aligned}$$

Így, feltételezve, hogy a lineáris differenciálegyenlet együtthatói elsőfokú polinomok, a zavaró és a megoldás függvények Laplace- integrálhatóak, a másodrendű differenciálegyenlet visszavezethető elsőrendűre.

7.2.1. Példa. Oldjuk meg az $y'' + ty' - 3y = 2t$, $y_0 = 0$, $y'_0 = -2$ kezdetiérték problémát.

Képezzük az egyenlet Laplace- transzformáltját, akkor

$$\begin{aligned} s^2 Y - sy_0 - y'_0 - sY' - Y - 3Y &= \frac{2}{s^2} \\ s^2 Y + 2 - sY' - 4Y &= \frac{2}{s^2} \\ sY' - s^2 Y + 4Y &= 2 - \frac{2}{s^2} \\ Y' + \left(\frac{4}{s} - s\right) Y &= \frac{2}{s} - \frac{2}{s^3}. \end{aligned}$$

Ezen egyenletet például megoldhatjuk az integráló tényező használatával:???

$$\int \left(\frac{4}{s} - s\right) ds = 4 \ln s - \frac{s^2}{2}$$

alapján az integráló tényező

$$e^{4 \ln s - s^2/2} = s^4 e^{-s^2/2}.$$

Így

$$\left[s^4 e^{-s^2/2} Y\right]' = \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s^3}\right) s^4 e^{-s^2/2} = (2s^3 - 2s) e^{-s^2/2}.$$

Tehát az $u = -s^2/2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
 s^4 e^{-s^2/2} Y &= \int (2s^3 - 2s) e^{-s^2/2} ds \\
 &= 2 \int (1 - s^2) e^{-s^2/2} (-s) ds \\
 &= 2 \int (1 + 2u) e^u du \\
 &= 4u e^u - 2e^u + C \\
 &= -2s^2 e^{-s^2/2} - 2e^{-s^2/2} + C.
 \end{aligned}$$

Ezért

$$Y = -\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^4} + C \frac{e^{s^2/2}}{s^4}.$$

Az $Y(s)$ Laplace- transzformáltról a 6.3.1. tételben megmutattuk, hogy a végtelenben eltűnik, azaz $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0.$$

Ez pedig csak akkor lehetséges, ha $C = 0$, azaz

$$Y = -\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^4},$$

és így a megoldás

$$y(t) = -2t - \frac{t^3}{3}.$$

7.2.2. Példa. Oldjuk meg az $ty'' - y' = -1$, $y(0) = y_0 = 0$, $y(1) = 2$ peremérték problémát.

Képezzük az egyenlet Laplace- transzformáltját, akkor

$$\begin{aligned}
 -s^2 Y' - 2sY + y_0 - (sY - y_0) &= -\frac{1}{s} \\
 -s^2 Y' - 3sY &= -\frac{1}{s} \\
 Y' + \frac{3}{s} Y &= \frac{1}{s^3}.
 \end{aligned}$$

Innen

$$\int \frac{3}{s} ds = 3 \ln s$$

alapján az integráló tényező

$$e^{3 \ln s} = s^3.$$

Így

$$[s^3 Y]' = 1,$$

és

$$s^3 Y = \int 1 ds = s + C.$$

Azaz

$$Y = \frac{1}{s^2} + \frac{C}{s^3},$$

ahonnan

$$y(t) = t + \frac{C}{2}t^2.$$

Az $y(1) = 2$ peremfeltétel miatt $C = 2$, vagyis a feladat megoldása

$$y(t) = t^2 + t.$$

7.2.3. Példa. Oldjuk meg a $ty'' + (t+1)y' + 2y = e^{-t}$, $y_0 = 0$ egyenletet.

Képezzük az egyenlet Laplace- transzformáltját, akkor

$$\begin{aligned} -s^2Y' - 2sY + y_0 - sY' - Y + sY - y_0 + 2Y &= \frac{1}{s+1} \\ -(s^2 + s)Y' - (s-1)Y &= \frac{1}{s+1} \\ Y' + \frac{s-1}{s^2+s}Y &= -\frac{1}{s(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\int \frac{s-1}{s^2+s} ds = \int \left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s} \right) ds = \ln \frac{(s+1)^2}{s}$$

alapján az integráló tényező

$$\frac{(s+1)^2}{s}.$$

Így

$$\left[\frac{(s+1)^2}{s} Y \right]' = -\frac{1}{s^2},$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{(s+1)^2}{s} Y &= \int -\frac{1}{s^2} ds \\ &= \frac{1}{s} + C, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(s+1)^2} + C \frac{s}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2} + C \frac{s+1}{(s+1)^2} - C \frac{1}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1-C}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1}. \end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$y(t) = (1-C)te^{-t} + Ce^{-t}.$$

Az $y_0 = 0$ feltétel miatt $C = 0$, így a feladat megoldása

$$y(t) = te^{-t}.$$

7.2.4. Példa. Oldjuk meg az $y'' + 2y' + ty = t^3 + 2$, $y_0 = -4$, $y'_0 = 0$ kezdeti érték feladatot.

Képezzük az egyenlet Laplace- transzformáltját, akkor

$$\begin{aligned} s^2 Y - s y_0 - y_0' + 2(sY - y_0) - Y' &= \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s} \\ s^2 Y + 4s + 2(sY + 4) - Y' &= \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s} \\ Y' + (-s^2 - 2s)Y &= 4s + 8 - \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s}. \end{aligned}$$

Az integráló tényező

$$e^{\int (-2s-s^2) ds} = e^{-s^2-s^3/3}.$$

Ezért

$$\left[e^{-s^2-s^3/3} Y \right]' = \left(4s + 8 - \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s} \right) e^{-s^2-s^3/3},$$

és

$$\begin{aligned} e^{-s^2-s^3/3} Y &= \int \left(4s + 8 - \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s} \right) e^{-s^2-s^3/3} ds \\ &= \left(\frac{2}{s^3} - \frac{4}{s} \right) e^{-s^2-s^3/3} + C. \end{aligned}$$

Azaz

$$Y = \frac{2}{s^3} - \frac{4}{s} + C e^{s^2+s^3/3},$$

azonban a határfeltétel miatt $C = 0$, tehát

$$Y = \frac{2}{s^3} - \frac{4}{s},$$

és így

$$y(t) = t^2 - 4.$$

Elég gyakori, hogy a polinom együtthatós egyenletek megoldása során kapott $Y(s)$ függvénynek az inverz Laplace- transzformáltja nem írható fel zárt alakban. Ekkor alkalmazhatjuk a 6.4. Fejezet sorokra vonatkozó eredményét, hogy az $y(t)$ megoldást a hatványsorával adjuk meg.

7.2.5. Példa. Oldjuk meg a $ty'' + y = 0$, $y_0 = 0$, $y_0' = 1$ feladatot.

Képezzük az egyenlet Laplace- transzformáltját, akkor

$$\begin{aligned} -s^2 Y' - 2sY + y_0 + Y &= 0 \\ s^2 Y' + (2s - 1)Y &= 0 \\ Y' + \frac{2s-1}{s^2} Y &= 0. \end{aligned}$$

Az integráló tényező

$$e^{\int \frac{2s-1}{s^2} ds} = e^{\int (\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}) ds} = e^{2 \ln s + \frac{1}{s}} = s^2 e^{1/s},$$

így

$$s^2 e^{1/s} Y = C,$$

és

$$Y = \frac{C}{s^2} e^{-1/s} = \frac{C}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{s}\right)^n}{n!}$$

$$= C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! s^{n+2}}.$$

A 6.4.15. tétel alapján tagonként vehetjük az inverzet, tehát

$$y(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} t^{n+1}.$$

Továbbá az $y'_0 = 1$ feltételt beírva az

$$y'(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} t^n$$

derivált függvénybe kapjuk, hogy $C = 1$, azaz a feladat megoldása

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} t^{n+1}.$$

Vegyük észre, hogy az $Y' + \frac{2s-1}{s^2}Y = 0$ egyenlet szeparábilis, így az Y megoldás egyszerűbben is meghatározható.

4. Feladatok

7.2.6. Feladat. ⁴⁸ Oldjuk meg az $y'' + ty' - 2y = 4$, $y_0 = -1$, $y'_0 = 0$ kezdeti érték problémát.

7.2.7. Feladat. ⁴⁹ Oldjuk meg a $ty'' + y' + 2y = 0$, $y_0 = 1$ feladatot hatványsor segítségével.

5. Differenciálegyenlet- rendszerek

Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet- rendszerek megoldására a Laplace- transzformáció az egyik legjobb módszer. A továbbiakban a $z(t)$ függvény Laplace- transzformáltjára a $Z = Z(s) := L[z(t)](s)$ jelölést használjuk, a korábbi $Y = Y(s) = L[y(t)](s)$ és $X = X(s) = L[x(t)](s)$ mellett.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

7.3.1. Példa.

$$y' + z = t$$

$$z' + 4y = 0$$

$$y_0 = 1, \quad z_0 = -1.$$

Mindkét egyenlet Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti feltételek alapján kapjuk, hogy

$$sY - 1 + Z = \frac{1}{s^2}$$

$$sZ + 1 + 4Y = 0.$$

Azaz

$$s^2Y + sZ = s + \frac{1}{s}$$

$$sZ + 1 + 4Y = 0.$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}s^2 Y - 4Y - 1 &= \frac{s^2 + 1}{s}, \\(s^2 - 4)Y &= \frac{s^2 + s + 1}{s}, \\Y &= \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 - 4)}.\end{aligned}$$

Így, helyettesítve adódik, hogy

$$\begin{aligned}sZ &= -4Y - 1 = -4 \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 - 4)} - 1 \\&= -\frac{s^3 + 4s^2 + 4}{s(s^2 - 4)}, \\Z &= -\frac{s^3 + 4s^2 + 4}{s^2(s^2 - 4)}.\end{aligned}$$

Elemi racionális törtekre bontással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{8} \left(-\frac{2}{s} + \frac{7}{s-2} + \frac{3}{s+2} \right), \\Z &= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{s^2} - \frac{7}{s-2} + \frac{3}{s+2} \right),\end{aligned}$$

amiből a differenciálegyenlet- rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}y(t) &= -\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t}, \\z(t) &= t - \frac{7}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}.\end{aligned}$$

7.3.2. Példa.

$$\begin{aligned}x' + y &= \sin t \\y' - z &= e^t \\z' + x + y &= 1 \\x_0 &= 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1.\end{aligned}$$

Az egyenletek Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti feltételek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}sX + Y &= \frac{1}{s^2 + 1} \\sY - 1 - Z &= \frac{1}{s-1} \\sZ - 1 + X + Y &= \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva és a racionális törtekre bontás után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}X &= -\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}, \\Y &= \frac{s^2 + s}{(s^2 + 1)(s-1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2 + 1}, \\Z &= \frac{s}{s^2 + 1},\end{aligned}$$

így a differenciálegyenlet- rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 - e^t, \\y(t) &= e^t + \sin t, \\z(t) &= \cos t.\end{aligned}$$

7.3.3. Példa.

$$\begin{aligned}y'' + y + x &= 0 \\x' + y' &= 0 \\x_0 = 1, \quad y_0 &= 0, \quad y'_0 = 0.\end{aligned}$$

Ekkor, képezve a Laplace- transzformáltakat kapjuk

$$\begin{aligned}s^2Y + Y + X &= 0 \\sX - 1 + sY &= 0.\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}, \\Y &= -\frac{1}{s^3},\end{aligned}$$

ezért a differenciálegyenlet- rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 + \frac{1}{2}t^2, \\y(t) &= -\frac{1}{2}t^2.\end{aligned}$$

7.3.4. Példa.

$$\begin{aligned}x'' - y + 2z &= 3e^{-t} \\2y' - 2x' + z &= 0 \\2x' - 2y + z' + 2z'' &= 0 \\x_0 = 1, \quad x'_0 &= 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 2, \quad z'_0 = -2.\end{aligned}$$

Az egyenletek Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti feltételek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}s^2X - s - 1 - Y + 2Z &= \frac{3}{s+1} \\2(sY - 2) - 2(sX - 1) + Z &= 0 \\2(sX - 1) - 2Y + sZ - 2 + 2(s^2Z - 2s + 2) &= 0.\end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned}s^2X - Y + 2Z &= \frac{s^2 + 2s + 4}{s+1} \\2sY - 2sX + Z &= 2 \\2sX - 2Y + (2s^2 + s)Z &= 4s.\end{aligned}$$

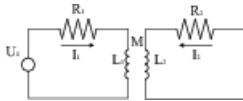
Az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{s-1} \\Y &= \frac{2s}{s^2-1}, \\Z &= \frac{2}{s+1}.\end{aligned}$$

Így a differenciálegyenlet- rendszer megoldása

$$\begin{aligned}x(t) &= e^t, \\y(t) &= 2 \operatorname{ch} t, \\z(t) &= 2e^{-t}.\end{aligned}$$

7.3.5. Példa. Csatolt körök, hídkapcsolások viselkedését csak egyenletrendszerek segítségével vizsgálhatjuk. A alábbi ábrán egy induktív csatolású hálózat látható.



Feltételezve, hogy a hálózatra a $t = 0$ időpontban u_0 egyenfeszültséget kapcsolunk, az áramerősségek időbeli változását a

$$\begin{aligned}r_1 i_1 + l_1 i_1' + m i_2' &= u_0 \\r_2 i_2 + l_2 i_2' + m i_1' &= 0 \\i_1(0^-) &= 0, \quad i_2(0^-) = 0\end{aligned}$$

differentiálegyenlet- rendszer írja le, ahol m jelöli a kölcsönös induktivitást.

Oldjuk meg a feladatot az $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $l_1 = 3$, $l_2 = 12$, $m = 6$, és $u_0 = 9$ értékek esetén. Ekkor

$$\begin{aligned}i_1 + 3i_1' + 6i_2' &= 9 \\4i_2 + 12i_2' + 6i_1' &= 0 \\i_1(0^-) &= 0, \quad i_2(0^-) = 0,\end{aligned}$$

Az egyenletek Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti feltételek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}I_1 + 3sI_1 + 6sI_2 &= \frac{9}{s} \\4I_2 + 12sI_2 + 6sI_1 &= 0.\end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned}(1 + 3s)I_1 + 6sI_2 &= \frac{9}{s} \\4(1 + 3s)I_2 + 6sI_1 &= 0.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned}I_1 &= 9 \frac{3s + 1}{(6s + 1)s} = \frac{9}{s} - \frac{9}{2} \frac{1}{s + 1/6} \\I_2 &= -\frac{27}{2} \frac{1}{6s + 1} = -\frac{9}{4} \frac{1}{s + 1/6}.\end{aligned}$$

Így a differentiálegyenlet- rendszer megoldása

$$\begin{aligned}i_1(t) &= 9 - \frac{9}{2} e^{-t/6}, \\i_2(t) &= -\frac{9}{4} e^{-t/6}.\end{aligned}$$

6. Feladatok

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

7.3.6. Feladat. ⁵⁰

$$y' + y - z = 0$$

$$z' - y + z = 2$$

$$y_0 = 1, \quad z_0 = 2.$$

7.3.7. Feladat. ⁵¹

$$x'' + y' = \cos t$$

$$y'' - x = \sin t$$

$$x_0 = -1, \quad x'_0 = -1, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0.$$

7. Differenciaegyenletek

Egyszerűbb differenciaegyenletek megoldását megkaphatjuk az eltolási tételek és a 6.1.23. feladat segítségével, amint azt a következő példák mutatják.

7.4.1. Példa. Oldjuk meg az

$$y(t) + y(t-1) = e^t, \quad y(t) = 0, \text{ ha } t \leq 0$$

differenciaegyenletet.

A 6.1.8. eltolási tétel alapján, az $y(t) = 0$, ha $t \leq 0$ tulajdonság miatt

$$L[y(t-1)](s) = e^{-s} L[y(t)](s),$$

így az egyenlet Laplace- transzformáltját véve kapjuk, hogy $\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\begin{aligned} Y + e^{-s}Y &= \frac{1}{s-1} \\ Y &= \frac{1}{s-1} \frac{1}{1+e^{-s}} \\ &= \frac{1}{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-s})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-ns}}{s-1}. \end{aligned}$$

Ismételten a 6.1.8. tétel miatt

$$L[h_n(t)e^{t-n}](s) = e^{-ns} L[e^n](s) = \frac{e^{-ns}}{s-1},$$

és így

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h_n(t) e^{t-n} = \sum_{n=0}^{[t]} (-1)^n e^{t-n}.$$

7.4.2. Példa. Oldjuk meg az

$$y(t+1) - y(t) = 1, \quad y(t) = 0, \text{ ha } t \leq 1$$

differenciaegyenletet.

Az $y(t) = 0$, ha $t \leq 1$ tulajdonság miatt

$$L[y(t+1)](s) = e^s L[y(t)](s),$$

így

$$e^s Y - Y = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s(e^s - 1)}.$$

A 6.1.15. példa alapján ez pontosan az egészrészfüggvény Laplace- transzformáltja, ezért

$$y(t) = [t],$$

ha $t \geq 0$.

Amennyiben a differenciaegyenlet sorozattal adott, az

$$y(t) := a_n, \quad \text{ha } n \leq t < n+1$$

megfeleltetéssel kapott egyenlet megoldásánál használjuk a 6.1.23. feladat

$$L[a^{[t]}](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})}$$

eredményét.

7.4.3. Példa. Oldjuk meg az

$$a_{n+1} + a_n = 1, \quad a_0 = 0$$

differenciaegyenletet.

Helyettesítés után az

$$y(t+1) + y(t) = 1, \quad y(t) = 0, \quad \text{ha } t < 0$$

differenciaegyenletet kapjuk. Az egyenlet Laplace- transzformáltját véve,

$$L[y(t+1)](s) = e^s L[y(t)](s)$$

miatt adódik, hogy

$$e^s Y + Y = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s(1 + e^s)}.$$

Az

$$Y = \frac{1}{s(1 + e^s)} = \frac{1}{2} \frac{2}{s(1 + e^s)} = \frac{1}{2} \frac{1 + e^s + 1 - e^s}{s(1 + e^s)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1 - e^s}{s(1 + e^s)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - (-1)e^{-s})} \right)$$

algebrai átalakítás alapján kapjuk, hogy

$$y(t) = \frac{1}{2} (1 - (-1)^{[t]})$$

azaz

$$a_n = \frac{1}{2} (1 - (-1)^n).$$

7.4.4. Példa. Oldjuk meg az

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -1$$

differenceciaegyenletet.

Ebből az

$$y(t+2) - 7y(t+1) + 12y(t) = 0,$$

$$y(t) = 0, \quad \text{ha } t < 1, \quad \text{illetve } y(t) = -1, \quad \text{ha } 1 \leq t < 2$$

differenceciaegyenlet adódik. Így

$$\begin{aligned} L[y(t+2)](s) &= \int_0^\infty y(t+2)e^{-st} dt = \int_2^\infty y(t)e^{-s(t-2)} dt \\ &= \int_0^\infty y(t)e^{-s(t-2)} dt - \int_0^2 y(t)e^{-s(t-2)} dt \\ &= e^{2s} \int_0^\infty y(t)e^{-st} dt - e^{2s} \int_0^1 y(t)e^{-st} dt - e^{2s} \int_1^2 y(t)e^{-st} dt \\ &= e^{2s}Y + e^{2s} \int_1^2 e^{-st} dt \\ &= e^{2s}Y + \frac{e^s - 1}{s}, \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$L[y(t+1)](s) = e^s Y.$$

Tehát

$$\begin{aligned} e^{2s}Y + \frac{e^s - 1}{s} - 7e^s Y + 12Y &= 0 \\ Y(e^{2s} - 7e^s + 12) &= -\frac{e^s - 1}{s}, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} Y &= \frac{e^s - 1}{s} \frac{-1}{e^{2s} - 7e^s + 12} \\ &= \frac{e^s - 1}{s} \left(\frac{1}{e^s - 3} - \frac{1}{e^s - 4} \right) \\ &= \frac{e^s - 1}{s(e^s - 3)} - \frac{e^s - 1}{s(e^s - 4)} \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 3e^{-s})} - \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 4e^{-s})}. \end{aligned}$$

Ezért

$$y(t) = 3^{[t]} - 4^{[t]},$$

és így

$$a_n = 3^n - 4^n.$$

7.4.5. Példa. Oldjuk meg az

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

differenciaegyenletet. (Fibonacci- sorozat)

Ekkor az

$$y(t+2) - y(t+1) - y(t) = 0,$$

$$y(t) = 0, \quad \text{ha } t < 1, \quad \text{illetve } y(t) = -1, \quad \text{ha } 1 \leq t < 2$$

differenciaegyenletet kapjuk. Az előző feladat alapján most

$$L[y(t+2)](s) = e^{2s}Y - \frac{e^s - 1}{s},$$

és ismételtén

$$L[y(t+1)](s) = e^sY.$$

Így

$$\begin{aligned} e^{2s}Y - \frac{e^s - 1}{s} - e^sY - Y &= 0 \\ Y(e^{2s} - e^s - 1) &= \frac{e^s - 1}{s}, \end{aligned}$$

azaz

$$Y = \frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{e^{2s} - e^s - 1}.$$

A $\alpha^2 - \alpha - 1$ polinom zérushelyei

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ezen jelöléssel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{e^{2s} - e^s - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{e^s - \alpha_1} - \frac{1}{e^s - \alpha_2} \right).$$

Tehát

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha_1)} - \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha_2)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - e^{-s}}{s(1 - \alpha_1 e^{-s})} - \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - \alpha_2 e^{-s})} \right), \end{aligned}$$

ahonnan

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha_1^{[t]} - \alpha_2^{[t]} \right),$$

és így

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

8. Feladatok

Laplace- transzformáció segítségével oldjuk meg a következő feladatokat!

7.4.6. Feladat. ⁵²

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 2^n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -1$$

7.4.7. Feladat. ⁵³

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

9. Integrálegyenletek

A 6.5.10. Konvolúció- tétel

$$L[f_1 * f_2] = L[f_1] \cdot L[f_2]$$

állításának segítségével oldjuk meg a következő integrálegyenleteket!

7.5.1. Példa.

$$y(t) = \int_0^t \sin u y(t-u) du.$$

Az egyenlet Laplace- transzformáltját véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{s^2 + 1} Y \\ \frac{s^2}{s^2 + 1} Y &= 0 \\ Y &= 0, \end{aligned}$$

és így

$$y(t) = 0.$$

7.5.2. Példa.

$$te^{-2t} = \int_0^t y(u)y(t-u) du.$$

Ekkor, képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját, kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+2)^2} &= Y^2 \\ Y &= \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

alapján

$$y(t) = e^{-2t}.$$

7.5.3. Példa.

$$y(t) = \sin t + \int_0^t e^u y(t-u) du.$$

Az egyenlet Laplace- transzformáltját véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s-1} Y \\ \frac{s-2}{s-1} Y &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ Y &= \frac{s-1}{(s^2 + 1)(s-2)}. \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontással adódik, hogy

$$Y = -\frac{1}{5} \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{5} \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{5} \frac{1}{s-2},$$

amiből

$$y(t) = -\frac{1}{5} \cos t + \frac{3}{5} \sin t + \frac{1}{5} e^{2t}.$$

7.5.4. Példa.

$$\cos t = y'(t) + \int_0^t y(t-u) du, \quad y_0 = 0.$$

Ekkor, képezve az egyenlet Laplace- transzformáltját:

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2+1} &= sY + \frac{1}{s}Y \\ \frac{s^2+1}{s}Y &= \frac{s}{s^2+1} \\ Y &= \frac{s^2}{(s^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Ez alapján, felhasználva, hogy

$$L[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{és} \quad L[t \cos t](s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

(ld. 6.3.4. példa) kapjuk $y(t)$ - re, hogy

$$y(t) = \frac{1}{2} (\sin t + t \cos t).$$

7.5.5. Példa.

$$\sin t = \int_0^t y''(u)y(t-u) du, \quad y_0 = y'_0 = 0.$$

Laplace- transzformációval kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2+1} &= s^2 Y \cdot Y \\ Y^2 &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} \\ Y &= \frac{1}{s\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{s^2\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}} \\ &= \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{s^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{s^{2n+2}}, \end{aligned}$$

így

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (2n+1) (n!)^2} t^{2n+1}.$$

7.5.6. Példa. Indukciós tekercset (L) és kondenzátort (C) tartalmazó elektromos hálózat (LC körben) u feszültség hatására a következő összefüggés teljesül:

$$li' + \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau = h(t)u(t), \quad i_0 = 0,$$

ahol i az áramerősség és $c, l > 0$. Oldjuk meg a feladatot, amennyiben $l = 1$, $c = 1/4$ és $u = 9$.

Behelyettesítve a konstansokat kapjuk, hogy

$$i' + 4 \int_0^t i(\tau) d\tau = 9, \quad i_0 = 0.$$

Transzformáció után

$$sI + \frac{4}{s}I = \frac{9}{s}$$

$$\frac{s^2 + 4}{s}I = \frac{9}{s}$$

$$I = \frac{9}{s^2 + 4} = \frac{9}{2} \frac{2}{s^2 + 4},$$

azaz

$$i = \frac{9}{2} \sin 2t.$$

10. Feladatok

Laplace- transzformáció segítségével oldjuk meg a következő feladatokat!

7.5.7. Feladat. ⁵⁴

$$1 = \int_0^t \frac{y(u)}{\sqrt{t-u}} dt.$$

7.5.8. Feladat. ⁵⁵

$$i' + 3i + 2 \int_0^t i(\tau) d\tau = h(t) \sin t, \quad i_0 = 1.$$

11. Parciális differenciálegyenletek

Ebben a jegyzetben csak egyszerű parciális differenciálegyenleteket vizsgálunk. Az ismeretlen függvényt $u(x, t)$ - vel jelöljük, ahol az x koordináta a helyre, a t pedig az időre vonatkozik, és $x \geq 0$, $t \geq 0$. A függvény t szerinti Laplace- transzformáltján a

$$U(x, s) := L[u(x, t)](s) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} ds$$

integrált értjük.

7.6.1. Példa.

$$\begin{aligned}L[x+t](s) &= \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}, \\L[xt](s) &= \frac{x}{s^2}, \\L[e^{xt}](s) &= \frac{1}{s-x}.\end{aligned}$$

Ezek azonnal adódnak a Laplace- transzformáció tulajdonságaiból, az ismert transzformáltakat felhasználva.

Feltesszük, hogy az x változó szerinti határérték képzés és deriválás a transzformálással felcserélhető, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} U(x, s) = U(x_0, s),$$

és

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](s) = \frac{\partial}{\partial x} U(x, s).$$

A t változó szerinti derivált Laplace- transzformáltja

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](s) = sU(x, s) - u(x, 0),$$

illetve

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](s) = s^2 U(x, s) - su(x, 0) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0).$$

A peremfeltétel, $u(l, t)$ csak a t -nek függvénye, ezért meghatározzuk a Laplacetranszformáltját, $U(l, s)$ -et, és már a transzformált egyenlet általános megoldásánál figyelembe vesszük.

7.6.2. Példa.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u(0, t) = t^2.$$

Az egyenlet és a peremfeltétel Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti értéket rögtön beírva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, s) + sU(x, s) - x^2 = 0, \quad U(0, s) = \frac{2}{s^3}.$$

Az $y(x) = U(x, s)$ helyettesítéssel kapjuk az

$$y' + sy = x^2$$

közönséges differenciálegyenletet. Az e^{sx} integráló tényezőt alkalmazva

$$\begin{aligned}e^{sx} y' + se^{sx} y &= x^2 e^{sx}, \\[e^{sx} y]' &= x^2 e^{sx}, \\e^{sx} y &= \int x^2 e^{sx} dx \\&= \frac{x^2}{s} e^{sx} - \frac{2x}{s^2} e^{sx} + \frac{2}{s^3} e^{sx} + C.\end{aligned}$$

Ahonnán

$$U(x, s) = y = \frac{x^2}{s} - \frac{2x}{s^2} + \frac{2}{s^3} + Ce^{-sx}.$$

A peremfeltétel, $U(0, s) = 2/s^3$ miatt $C = 0$, ezért

$$U(x, s) = \frac{x^2}{s} - \frac{2x}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

és így

$$u(x, t) = x^2 - 2xt + t^2.$$

7.6.3. Példa.

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = 2x^2, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

Transzformáció után kapjuk, hogy

$$x \frac{\partial}{\partial x} U(x, s) + sU(x, s) + U = \frac{2x^2}{s}, \quad U(0, s) = 0,$$

és így az

$$\begin{aligned} xy' + (s+1)y &= \frac{2x^2}{s} \\ y' + \frac{s+1}{x}y &= \frac{2x}{s} \end{aligned}$$

közönséges differenciálegyenletet. Ezért az integráló tényező x^{s+1} .

$$\begin{aligned} [x^{s+1}y]' &= \frac{2x^{s+2}}{s}, \\ x^{s+1}y &= \frac{2x^{s+3}}{s(s+3)} + C, \\ U(x, s) = y &= \frac{2x^2}{s(s+3)} + Cx^{-(s+1)}. \end{aligned}$$

Az $U(0, s) = 0$ feltétel és az x változóbeli folytonosság miatt $C = 0$, ezért

$$U(x, s) = \frac{2x^2}{s(s+3)} = \frac{2x^2}{3} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \right)$$

és így

$$u(x, t) = \frac{2x^2}{3} (1 - e^{-3t}).$$

7.6.4. Példa. Oldjuk meg a következő hővezetési egyenletet!

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 1.$$

Az egyenlet és a peremfeltételek Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti értéket rögtön beírva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) - sU(x, s) + 1 = 0, \quad U(0, s) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s) = \frac{1}{s}.$$

Az $y(x) = U(x, s)$ helyettesítéssel kapjuk az

$$y'' - sy = -1$$

közönséges differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása

$$U(x, s) = y = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}.$$

A

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s) = \frac{1}{s}$$

peremfeltétel miatt $c_1 = 0$, azaz

$$U(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}.$$

Az $U(0, s) = 0$ feltétel alapján $c_2 = -1/s$, ezért

$$U(x, s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s}$$

és így a transzformációs táblázat segítségével

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-u^2} du.$$

7.6.5. Példa. Oldjuk meg a következő hullámmegyenletet!

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0$$

$$u(0, t) = e^{-t/100} \sin t = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

Transzformálva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) - 4s^2 U(x, s) = 0, \quad U(0, s) = F(s), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s) = 0.$$

Az

$$y'' - 4s^2 y = 0$$

differentiálegyenlet általános megoldása

$$U(x, s) = y = c_1 e^{2sx} + c_2 e^{-2sx}.$$

A

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s) = 0$$

tulajdonság miatt $c_1 = 0$, azaz

$$U(x, s) = c_2 e^{-2sx}.$$

Az $U(0, s) = F(s)$ feltétel alapján $c_2 = F(s)$, ezért

$$U(x, s) = F(s) e^{-2sx}$$

és így

$$u(x, t) = h_{2x}(t) f(t - 2x).$$

Tehát

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{t-2x}{100}} \sin(t-2x), & \text{ha } t > 2x, \\ 0, & \text{ha } t < 2x. \end{cases}$$

A hullámmegyenlet megoldása.

12. Feladatok

7.6.6. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet! ???⁵⁶

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u(0, t) = t.$$

7.6.7. Feladat. Oldjuk meg a következő hővezetési egyenletet! ???⁵⁷

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = 0, \quad u(\pi/2, t) = 2$$

és $0 < x < \pi/2, t > 0$.

8. fejezet - Tesztsor

1. Teszt

1. Adja meg a skaláris szorzat és a norma fogalmát!
2. Adja meg a teljes ortonormált rendszer fogalmát!
3. Mondja ki a Parseval-formulát!
4. Igazolja, hogy $\cos nx$ a $\cos x$ -nek n -edfokú polinomja!
5. Igazolja, hogy a páros függvények minden sinus-együtthatója 0!

2. Teszt

1. Definiálja az L^1 és az L^2 függvényosztályokat!
2. Fogalmazza meg a Riemann- Lebesgue-lemmát!
3. Mondja ki a Dini-féle kritériumot!
4. Igazolja, hogy $\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \infty$, ahol $D_n(t)$ a Dirichlet-mag!
5. Fejtse Fourier-sorba az $f(t) := (\pi - t)/2$, $0 < t < 2\pi$, $f(t + 2\pi) = f(t)$ függvényt és írja föl rá a Parseval-formulát!

3. Teszt

1. Definiálja két függvény konvolúcióját!
2. Definiálja egy sor Fejér-értelmenben vett összegét!
3. Mit jelent az, hogy egy függvény korlátos változású?
4. Mondja ki a lokalizációs tételt!
5. Fejtse Fourier-sorba az $f(t) = t^2$, ha $-\pi \leq t \leq \pi$, $f(t + 2\pi) = f(t)$ függvényt és vizsgálja a sor konvergenciáját a $t = \pi$ helyen!

4. Teszt

1. Definiálja a Haar-rendszert!
2. Definiálja a Legendre-polinomokat!
3. Definiálja a súlyfüggvény szerinti L^2 tereket és a rajtuk értelmezett normát!
4. Igazolja, hogy a Rademacher-rendszer ortogonális, de nem teljes.
5. Hogyan írható fel az ortogonális polinomrendszerek Dirichlet-magja?

5. Teszt

1. Definiálja a Fourier-transzformációt!
2. Mondja ki a Fourier-transzformáltra vonatkozó skálázási tételt!

3. Definiálja a Fourier-magot!
4. Határozza meg a $f(t) := e^{-a|t|}$ függvény Fourier-transzformáltját!
5. Mit jelent az, hogy egy függvény az a helyen Lipschitz-feltételnek tesz eleget?

6. Teszt

1. Definiálja az $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ integrál főértékét!
2. Mondja ki egy inverziós formulát a Fourier-transzformált adott pontbeli inverziójára!
3. Mondja ki a deriváltfüggvény Fourier-transzformáltjáról szóló tételt!
4. Igazolja, hogy integrálható függvény Fourier-transzformáltja mindig egyenletesen folytonos!

7. Teszt

1. Mondja ki a Fourier-transzformáltra vonatkozó Parseval-formulát!
2. Definiálja a kompakt tartójú függvényeket!
3. Mondja ki a Fejér- Lebesgue-féle inverziós formulát!
4. Számolja ki az $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt$ integrált!

8. Teszt

1. Adja meg a Laplace- transzformált definícióját!
2. Definiálja az egységugrás- és az egységnyi erősségű impulzus- függvényt!
3. Definíció alapján határozza meg $\sinh 2t$ Laplace- transzformáltját!
4. Határozza meg $t^5 e^{-2t}$ Laplace- transzformáltját!
5. Határozza meg $t^{5/2}$ Laplace- transzformáltját!

9. Teszt

1. Mit ért azon, hogy $f(t)$ lokálisan abszolút integrálható?
2. Igazolja, hogy a Laplace- integrálhatóság következik az abszolút Laplace- integrálhatóságból!
3. Mondja ki a Laplace- integrál konvergenciájára vonatkozó alaptételt!
4. Határozza meg $t^2 \sinh 2t$ Laplace- transzformáltját!
5. Határozza meg $\frac{1 - \cos wt}{t}$ Laplace- transzformáltját!

10. Teszt

1. Definiálja a nullfüggvényt!
2. Lehet-e $\frac{\sqrt{s}}{\ln s}$ valamely függvény Laplace- transzformáltja?

3. Határozza meg az $L^{-1} \left[\frac{1}{s^3 - 2s} \right] (t)$ inverz Laplace- transzformáltat!

4. Határozza meg $\phi(t) = \int_0^t \operatorname{sh} 2u \, du$ Laplace- transzformáltját!

5. Határozza meg $g(t) = f'(t) = [e^{-t} \sin 3t]' = -e^{-t} \sin 3t + 3e^{-t} \cos 3t$ Laplace- transzformáltját!

11. Teszt

- Oldja meg a $y'(t) - y(t) = e^t \operatorname{ch} t$, $y_0 = 1$ kezdetiérték problémát!
- Oldja meg az $y'' + 4y = \cos 2t$ egyenletet az $y(0) = 1, y'(\pi/4) = 1$ feltételek esetén!
- Oldja meg az $ty'' + (t-1)y' - 2y = e^{-2t}$, $y(0) = 0$ egyenletet!

12. Teszt

- Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$y' - z + y = t - \sin t$$

$$z' - y' + z = 1 + \sin t$$

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 1.$$

2. Oldja meg a $y' + 3y + 2 \int_0^t y(\tau) \, d\tau = 1 - \cos t$, $y(0) = 1$ egyenletet!

3. Oldja meg az $y(t) - y(t - \pi) = \sin t$ ($y(t) = 0$, ha $t \leq 0$) differenciaegyenletet!

13. Javító

- Definiálja a Dirichlet-magot!

2. Fejtse Fourier-sorba az $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{ha } -\pi < t < 0, \end{cases} f(t+2\pi) = f(t)$ függvényt!

3. Határozza meg az $f(t) := e^{-2|t|}$ függvény Fourier transzformáltját, és számolja ki az $\int_0^\infty \frac{x \sin xt}{4+x^2} dx$ integrál értékét!

4. Határozza meg az $e^t * e^{-2t}$ függvényt!

- Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$y' + z = t$$

$$z' - y = 0$$

$$y_0 = 1, \quad z_0 = 0.$$

14. Javító

- Mondja ki a konvolúció Fourier-transzformáltjáról szóló tételt.

2. Fejtse Fourier-sorba a $f(t) := t$, ha $|t| < \pi$, $f(t+2\pi) = f(t)$ függvényt!

3. Határozza meg az $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ függvény Fourier transzformáltját, és számolja ki az $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ integrál értékét!

4. Legyen $f(t)$ függvény periódusa $p = 3$, $f(t) = -t + 2$ ha $0 < t \leq 2$ és $f(t) = 2t - 4$ ha $2 < t \leq 3$. Határozza meg Laplace- transzformáltját!

5. Oldja meg az $y'' + 9y = \cos 9t$ egyenletet az $y(0) = 1, y'(\pi/3) = 1$ feltételek esetén.

9. fejezet - Vizsgasor

1. Vizsga

1. Definiálja a Dirichlet-mag általános fogalmát, sorolja föl a trigonometrikus rendszer és a Haar-rendszer Dirichlet-magjának tulajdonságait!

2. Bizonyítsa be a Riemann-Lebesgue-lemmát!

3. Igazolja, hogy integrálható függvények konvolúciója is integrálható! Igazolja a konvolúció normájáról szóló becslést!

4. Határozza meg az

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját és ennek segítségével az

$$\int_0^\infty \frac{x \sin xt + \cos xt}{1+x^2} dx$$

integrál értékét!

5. Határozza meg $\phi(t) = \int_0^t \sin 2u \, du$ Laplace- transzformáltját!

6. Igazolja a periodikus függvény Laplace- transzformáltjára vonatkozó tételt!

7. Oldja meg a $ty'' + y = 2, y(0) = 1$ egyenletet!

2. Vizsga

1. Definiálja a Fourier-transzformáltat, sorolja föl néhány formális tulajdonságát!

2. Legyen valamely $f(t)$ függvény Fourier-transzformáltja $\hat{f}(\omega)$. Igazolja az $f'(t)$ és a $tf(t)$ függvények transzformáltjait megadó formulákat!

3. Igazolja a Dini-féle kritériumot!

4. Határozza meg az $f(t) := |\sin t|, f(t+2\pi) = f(t)$ függvény Fourier-sorát és ennek segítségével a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

sor összegét!

5. Határozza meg az $L^{-1} \left[\frac{s-1}{s^3-2s} \right] (t)$ inverz Laplace- transzformáltat!

6. Igazolja, hogy folytonos, korlátos függvény abszolút Laplace- integrálható bármely pozitív s esetén!

7. Oldja meg a $2y' + 3y + 4 \int_0^t y(\tau) \, d\tau = \sin t, y(0) = 1$ egyenletet!

3. Vizsga

1. Soroljon föl legalább három feltételt, amelyek biztosítják a Fourier-sor pontbeli konvergenciáját. Milyen kapcsolatban állnak egymással ezek a feltételek?

2. Igazolja, hogy az

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1) = 0$$

differenciálegyenlet $P_n(x)$ megoldásai ortogonális rendszert alkotnak a $[-1, 1]$ intervallumon!

3. Igazolja a Fourier-transzformáció eltolási és skálázási tételét!

4. Az $e^{-a|t|}$, $e^{-b|t|}$ függvények Fourier-transzformáltja segítségével határozza meg az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} \quad a, b > 0$$

integrál értékét!

5. Határozza meg t ch $3t$ Laplace- transzformáltját!

6. Igazolja az integrálfüggvény Laplace- transzformáltjára vonatkozó tételt!

7. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$x - y'' + y = e^{-t} - 1$$

$$x' + y' - y = -3e^{-t} + t$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = -2.$$

10. fejezet - Irodalom

1. Bracewell, Ronald N.: The Fourier transform and its applications - Boston: McGraw- Hill, 2000.
2. Davies, Brian: Integráltranszformációk és alkalmazásaik - Budapest: Műszaki Könyvkiadó, 1983.
3. Doetsch, Gustav: Introduction to the theory and application of the Laplace transform - Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1974.
4. Dyke, Phil P. G.: An introduction to Laplace transforms and Fourier series - London; New York: Springer, 1999.
5. Fodor György: A Laplace- transzformáció műszaki alkalmazása - Budapest: Akadémiai K., 1965.
6. Goldberg, Robert R.: Fourier transforms - Cambridge: University Press, 1961.
7. Kolmogorov, A. N. - Fomin, S.V.: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei - Budapest: Typotex, 2010.
8. Mikolás Miklós: Valós függvénytan és ortogonális sorok - Budapest: Tankönyvkiadó, 1978.
9. Oberhettinger, Fritz: Tables of Laplace transformations - Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1973.
10. Schiff, Joel L.: The Laplace transform: theory and applications - Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1999.
11. Sneddon, Ian N.: The Fourier transforms - New York; Toronto; London: McGraw- Hill, 1951.
12. Szőkefalvi- Nagy Béla: Komplex függvénytan - Szeged: Polygon, 2009.
13. Szőkefalvi- Nagy Béla: Valós függvények és függvénytörések - Szeged: Polygon, 2002.
14. Widder, David V.: An introduction to transform theory - New York; London: Academic Press, 1971.

11. fejezet - Appendix

1

$$\begin{aligned}\int \sin(\omega t) e^{-st} dt &= \frac{1}{2i} \int (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-st} dt \\&= \frac{1}{2i} \int (e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t}) dt \\&= \frac{1}{2i} \left(-\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega} \right) + C \\&= \frac{e^{-st}}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{2i} (-e^{i\omega t}(s+i\omega) + e^{-i\omega t}(s-i\omega)) + C \\&= \frac{e^{-st}}{s^2 + \omega^2} \left(-s \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} - i\omega \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2i} \right) + C \\&= \frac{e^{-st}}{s^2 + \omega^2} (-s \sin \omega t - \omega \cos \omega t) + C\end{aligned}$$

2

A 6.1.1. definíció alapján, ha $\operatorname{Re} s > -1$, akkor a parciális integrálás tételét alkalmazva az improprius integrálra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}L[te^{-t}](s) &= \int_0^\infty te^{-t} e^{-st} dt = \int_0^\infty te^{-(s+1)t} dt \\&= \left[t \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} dt \\&= \frac{1}{s+1} \left[\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \right]_0^\infty \\&= \frac{1}{(s+1)^2}.\end{aligned}$$

3

Ha $\operatorname{Re} s > 2$, akkor

$$\sin 3t = \frac{1}{2i}(e^{3it} - e^{-3it})$$

alapján, a 6.1.1. definíció szerint

$$\begin{aligned}L[e^{2t} \sin 3t](s) &= \int_0^\infty \frac{1}{2i} e^{2t} (e^{3it} - e^{-3it}) e^{-st} dt \\&= \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{(2-s+3i)t} - e^{(2-s-3i)t}) dt \\&= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{(2-s+3i)t}}{2-s+3i} - \frac{e^{(2-s-3i)t}}{2-s-3i} \right]_0^\infty \\&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2-s-3i} - \frac{1}{2-s+3i} \right) \\&= \frac{3}{(2-s)^2 + 9}.\end{aligned}$$

4

Ha $\operatorname{Re} s > 0$, úgy a definíciót, az integrál tulajdonságait és a parciális integrálás tételét is felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned} L[f(t)](s) &= \int_0^a bte^{-st} dt = b \left[\frac{te^{-st}}{-s} \right]_0^a + b \int_0^a \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= b \frac{ae^{-as}}{-s} + b \left[\frac{e^{-st}}{-s^2} \right]_0^a = b \frac{1 - e^{-as} - ase^{-as}}{s^2}. \end{aligned}$$

5

Az eltolási tétel alapján

$$L[t^2 e^{5t}](s) = L[t^2](s - 5) = \frac{2}{(s - 5)^3}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} s > 5.$$

6

$$L[e^{-3t} \cos \pi t](s) = L[\cos \pi t](s + 3) = \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + \pi^2}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} s > -3.$$

7

A 6.1.6. példa eredményét használva $t^{3/2}$ Laplace- transzformáltjára adódik, hogy

$$L[\sqrt{t^3}](s) = L[t^{3/2}](s) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{5/2}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{s^{5/2}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{s^5}}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} s > 0.$$

8

Ekkor

$$\begin{aligned} F_p(s) &= 2 \int_0^3 te^{-st} dt = 2 \left[\frac{te^{-st}}{-s} \right]_0^3 + 2 \int_0^3 \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= 2 \frac{3e^{-3s}}{-s} + 2 \left[\frac{e^{-st}}{-s^2} \right]_0^3 = 2 \frac{1 - e^{-3s} - 3se^{-3s}}{s^2} \end{aligned}$$

alapján

$$F(s) = \frac{F_p(s)}{1 - e^{-4s}} = 2 \frac{1 - e^{-3s} - 3se^{-3s}}{s^2(1 - e^{-4s})}.$$

Az $f(t)/4$ "fűrész" függvény és a transzformáltja, ha $\operatorname{Re} s > 0$.

9

Az $f(t)$ függvény pozitív, ezért

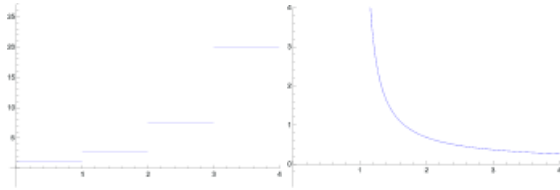
$$L[f(t)](s) = \int_0^\infty a^{[t]} e^{-st} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n a^{[t]} e^{-st} dt.$$

Így

$$\begin{aligned} \int_0^n a^{[t]} e^{-st} dt &= \int_0^1 1 \cdot e^{-st} dt + \int_1^2 a \cdot e^{-st} dt + \dots + \int_{n-1}^n a^{n-1} \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} dt + a \int_1^2 e^{-st} dt + \dots + a^{n-1} \int_{n-1}^n e^{-st} dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{a(e^{-s} - e^{-2s})}{s} + \dots + \frac{a^{n-1}(e^{-(n-1)s} - e^{-ns})}{s} \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \left(1 + ae^{-s} + \dots + a^{n-1} e^{-(n-1)s} \right) \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1 - a^n e^{-ns}}{1 - ae^{-s}} \end{aligned}$$

alapján, ha $\operatorname{Re} s > \max\{0, \ln a\}$, akkor

$$L\left[a^{[t]}\right](s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1 - a^n e^{-n s}}{1 - a e^{-s}} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - a e^{-s})}.$$



$e^{[t]}$ és a transzformáltja, ha $\operatorname{Re} s > 1$

$a^{[t]}$ és a transzformáltja.

10

Bármely pozitív $\varepsilon > 0$ - hoz megadható $R > 0$ úgy, hogy tetszőleges $b > R$ esetén

$$\left| \int_b^\infty f(t) e^{-st} dt \right| < \varepsilon$$

minden $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$ pontban.

11

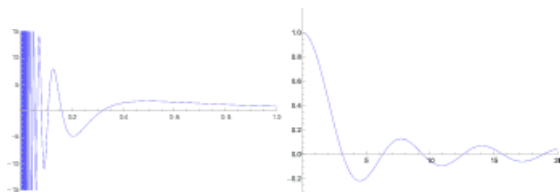
Legyen

$$F(x) = \alpha + \int_a^x f(t) dt, \quad G(x) = \beta + \int_a^x g(t) dt.$$

Ekkor

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

12



$$\frac{\sin 1/t}{t} \frac{\sin u}{u}$$

Az $u = 1/t$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy rögzített kis $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \frac{\sin 1/t}{t} dt &= \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin u}{u} du \\ &= \int_1^\pi \frac{\sin u}{u} du + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin u}{u} du + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin u}{u} du \\ &\quad + \dots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{u} du + \int_{(n+1)\pi}^{1/\varepsilon} \frac{\sin u}{u} du \\ &= a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n + (-1)^{n+1} \tilde{a}_{n+1}, \end{aligned}$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ -re teljesül, hogy $(n+1)\pi < 1/\varepsilon \leq (n+2)\pi$, továbbá $k \in \mathbb{N}$ esetén

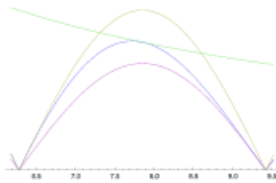
$$a_0 := \int_1^{1\pi} \frac{|\sin u|}{u} du, \quad a_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \quad \text{és} \quad \tilde{a}_{n+1} := \int_{(n+1)\pi}^{1/\varepsilon} \frac{|\sin u|}{u} du.$$

Ekkor

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| du = 2,$$

továbbá, amennyiben $k\pi \leq u \leq (k+1)\pi$, akkor

$$\frac{|\sin u|}{(k+1)\pi} \leq \frac{|\sin u|}{u} \leq \frac{|\sin u|}{k\pi}$$



miatt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{k+1} \leq a_k \leq \frac{2}{k} \quad \text{és} \quad \tilde{a}_{n+1} \leq a_{n+1} \leq \frac{2}{n+1}.$$

Tehát a pozitív tagú a_k sorozat monoton csökkenő, határértéke 0 ($k \rightarrow \infty$). Így a Leibniz- tétel alapján a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

alternáló sor konvergens.

Amennyiben $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor $n \rightarrow \infty$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_{n+1} = 0$$

és

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin \frac{1}{t}}{t} dt + (-1)^n \tilde{a}_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$$

miatt kapjuk, hogy a

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{t}}{t} dt$$

improprius integrál konvergens.

Ugyanakkor

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{|\sin \frac{1}{t}|}{t} dt = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k + \tilde{a}_{n+1} > \sum_{k=1}^n a_k \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+1}$$

miatt kapjuk, hogy a

$$\int_0^1 \frac{|\sin \frac{1}{t}|}{t} dt$$

improprius integrál divergens.

Felhasználva, hogy $\frac{\sin t}{t}$ páros és $\frac{1 - \cos t}{it}$ páratlan függvény, adódik, hogy

$$\begin{aligned} 2 \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt &= \int_{-R}^R \frac{\sin t}{t} dt = \int_{-R}^R \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t - 1}{it} \right) dt \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos t + i \sin t - 1}{it} dt = \int_{-R}^R \frac{e^{it} - 1}{it} dt. \end{aligned}$$

Ez pontosan az

$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{iz}$$

komplex függvénynek a $-R, R$ pontokat összekötő szakasz mentén vett integrálja. Az f függvény a $z = 0$ pont kivételével holomorf, de

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} - 1}{iz} = 1$$

miatt a $z = 0$ pontban is holomorffá tehető. Ennélfogva bármely zárt görbe menti integrálja 0. A $\gamma : z = Re^{i\phi}$, $0 \leq \phi \leq \pi$ félkörívvel együtt zárt görbét kapunk, így

$$\begin{aligned} 2 \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt &= \int_{-R}^R \frac{e^{it} - 1}{it} dt = - \int_{\gamma} \frac{e^{iz} - 1}{iz} dz \\ &= - \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\phi}} - 1}{iRe^{i\phi}} iRe^{i\phi} d\phi = - \int_0^{\pi} (e^{iRe^{i\phi}} - 1) d\phi \\ &= \pi - \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\phi}} d\phi. \end{aligned}$$

A $g(x) = \sin x$ függvény szimmetrikus az $x = \pi/2$ egyenesre, $g(x) = g(\pi - x)$. Továbbá $g''(x) = -\sin x$ miatt konkáv a $[0, \pi]$ intervallumon; azaz a húr a görbe alatt található, ezért $0 \leq x \leq \pi/2$ esetén

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |e^{iRe^{i\phi}}| d\phi &= \int_0^{\pi} |e^{iR \cos \phi - R \sin \phi}| d\phi = \int_0^{\pi} |e^{iR \cos \phi - R \sin \phi}| d\phi \\ &= \int_0^{\pi} e^{-R \sin \phi} d\phi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \phi} d\phi \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\phi/\pi} d\phi = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}). \end{aligned}$$

Innen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) = 0$$

és

$$\left| \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\phi}} d\phi \right| \leq \int_0^{\pi} |e^{iRe^{i\phi}}| d\phi$$

miatt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\phi}} d\phi \right) = \frac{\pi}{2}.$$

A

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sin t e^{-st} dt ds$$

kettős integrálra alkalmazhatjuk a Fubini- tételt, azaz

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin t e^{-st} dt \right) ds = \int_0^\infty \int_0^\infty \sin t e^{-st} dt ds = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin t e^{-st} ds \right) dt.$$

Tehát a $\sin t$ Laplace- transzformáltjának ismeretében kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin t e^{-st} dt \right) ds &= \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} ds = [\operatorname{arctg} s]_0^\infty = \frac{\pi}{2} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \sin t e^{-st} dt ds = \\ \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin t e^{-st} ds \right) dt &= \int_0^\infty \left[\frac{\sin t}{-t} e^{-st} \right]_0^\infty dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\left[\frac{\sin t}{-t} e^{-st} \right]_0^\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin t}{-t} e^{-st} \right] - \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\sin t}{-t} e^{-st} \right] = 0 + \frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t}{t}.$$

A parciális integrálás módszerével kapjuk, hogy

$$\int_0^b 2te^{t^2} \sin e^{t^2} e^{-st} dt = - \left[\cos e^{t^2} e^{-st} \right]_0^b - s \int_0^b \cos e^{t^2} e^{-st} dt.$$

A $\cos e^{t^2}$ függvény folytonos és korlátos, így $\operatorname{Re}(s) > 0$ esetén abszolút Laplaceintegrálható is, továbbá nyilván

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos e^{t^2} e^{-st} = 0,$$

így a fenti egyenlőség $b \rightarrow \infty$ esetén adja, hogy létezik f Laplace- integrálja és

$$L[f(t)](s) = \int_0^\infty 2te^{t^2} \sin e^{t^2} e^{-st} dt = 1 - sL[\cos e^{t^2}](s).$$

Bármely véges intervallumban legfeljebb véges sok t_i pont kivételével folytonos, és a t_i pontokban a

$$f(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t) \quad \text{és} \quad f(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t)$$

féloldali határértékek léteznek és végesek.

Létezik $t_0 > 0$ és $M \in \mathbb{R}$ úgy, hogy bármely $t > t_0$ esetén

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

A szakaszonként folytonos tulajdonságából következik, hogy f bármely zárt $[0, t_0]$ intervallumon korlátos, így van olyan K_1 szám, hogy

$$|f(t)| \leq K_1, \quad \text{ha } 0 \leq t \leq t_0.$$

Mivel f_α - rendű exponenciális függvény, így ha t_0 elég nagy, akkor van olyan K_2 , hogy

$$|f(t)| \leq K_2 e^{\alpha t}, \quad \text{ha } t \geq t_0.$$

A

$$K := \max\{K_1 e^{-\alpha t}; K_2\}$$

választással kapjuk, hogy

$$|f(t)| \leq K e^{\alpha t}, \quad \text{ha } t \geq 0.$$

Így az $s = x + iy$ jelöléssel, ha $x > \alpha$, akkor

$$\begin{aligned} \int_0^b |f(t) e^{-st}| dt &= \int_0^b |f(t)| e^{-xt} dt \leq \int_0^b K e^{\alpha t} e^{-xt} dt = \int_0^b K e^{-(x-\alpha)t} dt \\ &= K \left[\frac{e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} \right]_0^b = K \left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{e^{-(x-\alpha)b}}{x-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Ez $b \rightarrow \infty$ esetén adja, hogy

$$\int_0^\infty |f(t) e^{-st}| dt = \frac{K}{x-\alpha}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} s > \alpha.$$

Tehát f abszolút Laplace- integrálható.

19

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-s_0 u} du = \left[\frac{e^{-s_0 u}}{-s_0} \right]_0^t = \frac{1 - e^{-s_0 t}}{s_0}$$

és így

$$\begin{aligned} (s - s_0) \int_0^\infty \phi(t) e^{-(s-s_0)t} dt &= (s - s_0) \int_0^\infty \frac{1 - e^{-s_0 t}}{s_0} e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= \frac{s - s_0}{s_0} \int_0^\infty (e^{-(s-s_0)t} - e^{-st}) dt \\ &= \frac{s - s_0}{s_0} \left[\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} - \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty \\ &= \frac{s - s_0}{s_0} \left(\frac{1}{s - s_0} - \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

20

$$s > \frac{1}{b_1} \ln \frac{\int_{b_1}^{b_2} |f(t)| dt}{\varepsilon}.$$

21

Legyen

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

alapján f konstans, azaz

$$f(x) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad (x > 0)$$

így

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

22

A L'Hospital- szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{\ln s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{s}} = \infty \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Így nincs ilyen függvény, mert a transzformált függvény végtelenben vett határértékének 0- nak kell lennie (6.3.1. Tétel).

23

Az $u = st, s > 0$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\begin{aligned} L[\ln t](s) &= \int_0^\infty \ln t e^{-st} dt = \int_0^\infty \ln \frac{u}{s} e^{-u} \frac{1}{s} du \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty (\ln u - \ln s) e^{-u} du \\ &= \frac{1}{s} \left(\int_0^\infty \ln u e^{-u} du - \ln s \int_0^\infty e^{-u} du \right) \\ &= \frac{1}{s} (-\gamma - \ln s) = -\frac{\ln s + \gamma}{s}, \end{aligned}$$

ahol

$$\gamma = - \int_0^\infty \ln u e^{-u} du = 0,577215\dots$$

Tehát

$$L[-\ln t - \gamma](s) = -L[\ln t](s) - \gamma L[1](s) = \frac{\ln s + \gamma}{s} - \frac{\gamma}{s} = \frac{\ln s}{s}.$$

24

Ha $s > \omega$, akkor

$$L[t \operatorname{sh} \omega t](s) = -(L[\operatorname{sh} \omega t](s))' = - \left[\frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \right]' = \frac{2s\omega}{(s^2 - \omega^2)^2}.$$

25

Ha $s > 0$, akkor

$$L[t^2 \cos \omega t](s) = \frac{d}{ds^2} (L[\cos \omega t](s)) = \frac{d}{ds^2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{2s(s^2 - 3\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}.$$

26

Ha $s > 0$, akkor

$$\begin{aligned} L\left[\frac{1-e^{-t}}{t}\right](s) &= \int_s^\infty L[1-e^{-t}](x) dx \\ &= \int_s^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = -\ln \frac{x+1}{x} \Big|_s^\infty \\ &= \ln \frac{s+1}{s}. \end{aligned}$$

27

Ha $s > 0$, akkor

$$\begin{aligned} L\left[\frac{1-\operatorname{ch} \omega t}{t}\right](s) &= \int_s^\infty L[1-\operatorname{ch} \omega t](x) dx \\ &= \int_s^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+\omega^2}\right) dx = -\frac{1}{2} \ln \frac{x^2+\omega^2}{x^2} \Big|_s^\infty \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{s^2+\omega^2}{s^2}. \end{aligned}$$

28

Az e^{-s} függvény periodikus, $e^{-s} = e^{-s+2\pi i}$, így nem lehet Laplace- transzformált.

29

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)](t) &= L^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2-9}\right](t) \\ &= L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-9}\right](t) - \frac{2}{3}L^{-1}\left[\frac{3}{s^2-9}\right](t) \\ &= \operatorname{ch} 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sh} 3t. \end{aligned}$$

30

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+5}\right](t) &= L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right](t) \\ &= \frac{1}{2}e^t \sin 2t. \end{aligned}$$

31

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{s}\right](t) &= -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}\right](t) \\ &= -\frac{1}{t}L^{-1}\left[-\frac{1}{s^2+1}\right](t) \\ &= \frac{1}{t} \sin t. \end{aligned}$$

32

Az $s = 1, -3$ pontok elsőrendű pólusok, ezért

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(1) &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)F(s)e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s}{s+3} e^{st} \\ &= \frac{1}{4} e^t, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(-3) &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s}{s-1} e^{st} \\ &= \frac{3}{4} e^{-3t} \end{aligned}$$

alapján

$$f(t) = \frac{1}{4} e^t + \frac{3}{4} e^{-3t}.$$

A feladat a parciális törtekre bontással kapott

$$F(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{s-3}$$

előállítás segítségével is megoldható.

33

Az $s = \pm 2$ pontok másodrendű pólusok, így

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(2) &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} ((s-2)^2 F(s) e^{st}) \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2+4}{(s+2)^2} e^{st} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{((s^2+4)t + 2s)(s+2) - 2(s^2+4)}{(s+2)^3} e^{st} \\ &= \frac{1}{2} t e^t \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(-2) &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2+4}{(s-2)^2} e^{st} \right) \\ &= \frac{1}{2} t e^{-t}, \end{aligned}$$

azaz

$$f(t) = \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{2} t e^{-t} = t \operatorname{ch} 2t.$$

34

$$L[\phi(t)](s) = \frac{L[\cos 2t](s)}{s} = \frac{s}{s(s^2+4)}.$$

35

$$L[\phi(t)](s) = \frac{L[\operatorname{sh} 5t](s)}{s} = \frac{5}{s(s^2-25)}.$$

36

$f'(t) = 2 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t = \operatorname{sh} 2t$ és $f(0) = 1$ alapján

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s} \{L[\operatorname{sh} 2t](s) + 1\} = \frac{1}{s} \left(\frac{2}{s^2-4} + 1 \right) = \frac{s^2-2}{s(s^2-4)}.$$

37

$$\begin{aligned}
 (f_1 * f_2)(t) &= (f_2 * f_1)(t) = \int_0^t \cos u 2e^{-(t-u)} du \\
 &= 2e^{-t} \int_0^t \cos u e^u du \\
 &= \frac{e^u}{e^t} (\cos u + \sin u) \Big|_0^t \\
 &= \cos t + \sin t - e^{-t}.
 \end{aligned}$$

$A2e^{-t}$ és $a \cos t$ konvolúciója.

38

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+1)} \right] (t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] (t) * L^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} \right] (t) \\
 &= 1 * \sin t \\
 &= \sin t * 1 \\
 &= \int_0^t \sin u du \\
 &= -\cos u \Big|_0^t \\
 &= 1 - \cos t.
 \end{aligned}$$

39

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \left[\frac{4s}{(s^2-4)^2} \right] (t) &= 2L^{-1} \left[\frac{s}{s^2-4} \right] (t) * L^{-1} \left[\frac{2}{s^2-4} \right] (t) \\
 &= 2 \operatorname{ch} 2t * \operatorname{sh} 2t \\
 &= 2 \int_0^t \operatorname{ch} 2u \cdot \operatorname{sh} 2(t-u) du
 \end{aligned}$$

$2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta = \operatorname{sh}(\alpha + \beta) + \operatorname{sh}(\alpha - \beta)$ alapján

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^t (\operatorname{sh} 2t + \operatorname{sh}(2t-4u)) du \\
 &= \left[u \operatorname{sh} 2t - \frac{\operatorname{ch}(2t-4u)}{4} \right]_0^t \\
 &= t \operatorname{sh} 2t - \frac{\operatorname{ch}(-2t)}{4} u + \frac{\operatorname{ch}(2t)}{4} \\
 &= t \operatorname{sh} 2t.
 \end{aligned}$$

40

$$F(s) = \frac{s+4}{s-2} = 1 - \frac{6}{s-2}$$

alapján

$$f(t) = \delta(t) - 6e^{2t}.$$

41

$$F(s) = \frac{s^3 + 5s - 2}{s^2 + 4} = s + \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{2}{s^2 + 4}$$

alapján

$$f(t) = \delta'(t) + \cos 2t - \sin 2t.$$

42

$$\begin{aligned}
 sY(s) - y_0 - Y(s) &= L[f(t)](s) \\
 sY - 1 - Y &= F(s) \\
 Y(s-1) &= F(s) + 1 \\
 Y &= F(s) \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \\
 y(t) &= (f(t) * e^t)(t) + e^t \\
 y &= \int_0^t e^u \cos u e^{t-u} du + e^t \\
 &= e^t \int_0^t \cos u du + e^t \\
 &= e^t [\sin u]_0^t + e^t \\
 &= e^t \sin t + e^t.
 \end{aligned}$$

43

$$\begin{aligned}
 sY - y_0 + Y &= F(s) \\
 sY - 1 + Y &= F(s) \\
 Y(s+1) &= 1 + F(s) \\
 Y &= \frac{1}{s+1} + F(s) \frac{1}{s+1} \\
 y &= e^{-t} + f(t) * e^{-t}.
 \end{aligned}$$

Amennyiben $0 \leq t < \pi/2$, akkor

$$\begin{aligned}
 f(t) * e^{-t} &= \int_0^t \sin u e^{-(t-u)} du \\
 &= e^{-t} \int_0^t \sin u e^u du \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} [\sin u e^u - \cos u e^u]_0^t \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} (\sin t e^t - \cos t e^t + 1) \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin t - \cos t}{2}.
 \end{aligned}$$

$t \geq \pi/2$ esetén

$$\begin{aligned}
 f(t) * e^{-t} &= \int_0^{\pi/2} \sin u e^{-(t-u)} du \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} [\sin u e^u - \cos u e^u]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} (e^{\pi/2} + 1) \\
 &= \frac{e^{-t+\pi/2}}{2} + \frac{e^{-t}}{2}.
 \end{aligned}$$

Tehát a bemeneteli függvény

$$y(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t, & \text{ha } 0 \leq t < \pi/2, \\ \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t+\pi/2}, & \text{ha } t \geq \pi/2. \end{cases}$$

44

$$\begin{aligned}s^2 Y - s y_0 - y_0' + 4(sY - y_0) + 8Y &= F(s) \\ s^2 Y - 2s - 4 + 4(sY - 2) + 8Y &= F(s) \\ Y(s^2 + 4s + 8) &= F(s) + 2s + 12.\end{aligned}$$

Így

$$\frac{1}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{(s + 2)^2 + 4}$$

alapján

$$g(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t.$$

Ezért

$$g'(t) = -e^{-2t} \sin 2t + e^{-2t} \cos 2t,$$

és

$$\begin{aligned}g(t) * e^t &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2u} \sin 2u \sin 2(t-u) du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t e^{-2u} (\cos(4u-2t) - \cos 2t) du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t e^{-2u} \cos(4u-2t) du - \frac{\cos 2t}{4} \int_0^t e^{-2u} du \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{2}{20} e^{-2u} \cos(4u-2t) + \frac{4}{20} e^{-2u} \sin(4u-2t) \right]_0^t \\ &\quad - \frac{\cos 2t}{4} \left[-\frac{1}{2} e^{-2u} \right]_0^t \\ &= -\frac{1}{40} e^{-2t} \cos 2t + \frac{1}{20} e^{-2t} \sin 2t + \frac{1}{40} \cos 2t + \frac{1}{20} \sin 2t \\ &\quad + \frac{1}{8} e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{8} \cos 2t.\end{aligned}$$

Tehát a bemeneteli függvény

$$\begin{aligned}y &= g * e^t + 2g' + 12g \\ &= \frac{21}{10} e^{-2t} \cos 2t + \frac{81}{20} e^{-2t} \sin 2t - \frac{1}{10} \cos 2t + \frac{1}{20} \sin 2t.\end{aligned}$$

45

$$\begin{aligned}s^2 Y - s y_0 - y_0' + 9Y &= \frac{3}{s^2 + 9} \\ s^2 Y - s - y_0' + 9Y &= \frac{3}{s^2 + 9} \\ Y(s^2 + 9) &= \frac{3}{s^2 + 9} + s + y_0' \\ Y &= \frac{3}{(s^2 + 9)^2} + \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{y_0'}{s^2 + 9} \\ Y &= \frac{1}{18} \frac{3}{s^2 + 9} - \frac{1}{6} \frac{s^2 - 9}{(s^2 + 9)^2} + \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{y_0'}{3} \frac{3}{s^2 + 9}\end{aligned}$$

A 6.3.12. feladat

$$L[t \cos \omega t](s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

eredménye alapján kapjuk, hogy

$$y(t) = \frac{1}{18} \sin 3t - \frac{1}{6} t \cos 3t + \cos 3t + \frac{y'_0}{3} \sin 3t.$$

Az $y(\pi/6) = 0$ feltétel miatt

$$0 = y(\pi/6) = \frac{1}{18} + \frac{y'_0}{3}$$

$$\frac{y'_0}{3} = -\frac{1}{18}.$$

Tehát a feladat megoldása

$$y(t) = -\frac{1}{6} t \cos 3t + \cos 3t.$$

46

$$s^2 X + \lambda^2 X = 1$$

$$X(s^2 + \lambda^2) = 1$$

$$X = \frac{1}{s^2 + \lambda^2}$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t.$$

47

Az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását megkaphatjuk úgy, hogy az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az

$$e^{\int p(x) \, dx}$$

integráló tényezővel, amely a differenciálegyenlet bal oldalát teljes differenciálba viszi át:

$$\left[y e^{\int p(x) \, dx} \right]' = y' e^{\int p(x) \, dx} + y e^{\int p(x) \, dx} p(x) = e^{\int p(x) \, dx} [y' + p(x)y].$$

Tehát

$$e^{\int p(x) \, dx} [y' + p(x)y] = e^{\int p(x) \, dx} q(x)$$

$$\left[y e^{\int p(x) \, dx} \right]' = e^{\int p(x) \, dx} q(x).$$

Mind a két oldalon integrálva kapjuk, hogy

$$y e^{\int p(x) \, dx} = \int e^{\int p(x) \, dx} q(x) \, dx + C,$$

azaz a differenciálegyenlet megoldása

$$y = e^{-\int p(x) \, dx} \left[\int e^{\int p(x) \, dx} q(x) \, dx + C \right].$$

48

Képezzük a differenciálegyenlet Laplace- transzformáltját,

$$\begin{aligned}s^2 Y - s y_0 - y_0' - s Y' - Y - 2Y &= \frac{4}{s} \\s^2 Y + s - s Y' - 3Y &= \frac{4}{s} \\s Y' - s^2 Y + 3Y &= s - \frac{4}{s} \\Y' + \left(\frac{3}{s} - s\right) Y &= 1 - \frac{4}{s^2}.\end{aligned}$$

Az integráló tényező

$$\int \left(\frac{3}{s} - s\right) ds = 3 \ln s - \frac{s^2}{2}$$

alapján

$$e^{3 \ln s - s^2/2} = s^3 e^{-s^2/2}.$$

Így

$$\left[s^3 e^{-s^2/2} Y\right]' = \left(1 - \frac{4}{s^2}\right) s^3 e^{-s^2/2} = (s^3 - 4s) e^{-s^2/2}.$$

Az $u = -s^2/2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}s^3 e^{-s^2/2} Y &= \int (s^3 - 4s) e^{-s^2/2} ds \\&= \int (4 - s^2) e^{-s^2/2} (-s) ds \\&= \int (4 + 2u) e^u du \\&= 2u e^u + 2e^u + C \\&= -s^2 e^{-s^2/2} + 2e^{-s^2/2} + C.\end{aligned}$$

Így

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} + C \frac{e^{s^2/2}}{s^3}.$$

A

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0$$

tulajdonság miatt ez csak úgy lehetséges, ha $C = 0$, azaz

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3},$$

tehát

$$y(t) = -1 + t^2.$$

49

Képezzük a differenciálegyenlet Laplace- transzformáltját,

$$\begin{aligned}(-s^2 Y' - 2sY + 1) + (sY - 1) + 2Y &= 0 \\s^2 Y' + sY - 2Y &= 0 \\Y' + \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}\right) Y &= 0.\end{aligned}$$

Az integráló tényező

$$\int \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} \right) ds = \ln s + \frac{2}{s}$$

alapján

$$e^{\ln s + 2/s} = s e^{2/s}.$$

Így

$$\left[s e^{2/s} Y \right]' = 0,$$

és

$$Y = C \frac{e^{-2/s}}{s}.$$

Hatványsorba írva kapjuk, hogy

$$Y = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n! s^{n+1}},$$

ezért

$$y(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2} t^n.$$

Az $y_0 = 1$ feltételből következik, hogy $C = 1$, azaz a feladat megoldása

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2} t^n.$$

50

Mindkét egyenlet Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti feltételek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} sY - 1 + Y - Z &= 0 \\ sZ - 2 - Y + Z &= \frac{2}{s}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} (s+1)Y - Z &= 1 \\ (s+1)Z - Y &= \frac{2s+2}{s}, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} Z &= (s+1)Y - 1, \\ (s+1)((s+1)Y - 1) - Y &= \frac{2s+2}{s}, \\ (s^2 + 2s)Y &= s + 1 + \frac{2s+2}{s}, \\ Y &= \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2(s+2)} = \frac{s+1}{s^2}. \end{aligned}$$

Illetve

$$Z = (s+1) \frac{s+1}{s^2} - 1 = \frac{2s+1}{s^2}.$$

Azaz

$$Y = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2},$$

$$Z = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2},$$

és így a differenciálegyenlet- rendszer megoldása

$$y(t) = 1 + t,$$

$$z(t) = 2 + t.$$

51

Mindkét egyenlet Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti feltételek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s^2 X + s + 1 + sY - 1 &= \frac{s}{s^2 + 1} \\ s^2 Y - s - X &= \frac{1}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} s^2 X + sY &= -\frac{s^3}{s^2 + 1} \\ s^2 Y - X &= \frac{s^3 + s + 1}{s^2 + 1}, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} X &= -\frac{s + 1}{s^2 + 1}, \\ Y &= \frac{s}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ezért a differenciálegyenlet- rendszer megoldása

$$x(t) = -\cos t - \sin t,$$

$$y(t) = \cos t.$$

52

Átírva az

$$y(t+2) - 7y(t+1) + 12y(t) = 2^{[t]},$$

$$y(t) = 0, \quad \text{ha } t < 1, \quad \text{illetve } y(t) = -1, \quad \text{ha } 1 \leq t < 2$$

differenciaegyenlet adódik. A 7.4.4. példa alapján kapjuk, hogy

$$e^{2s}Y + \frac{e^s - 1}{s} - 7e^sY + 12Y = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})},$$

azaz

$$Y = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 3e^{-s})} - \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 4e^{-s})} + \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})} \frac{1}{e^{2s} - 7e^s + 12}.$$

A 3. tag

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{-s}}{s(1-2e^{-s})} \frac{1}{e^{2s}-7e^s+12} &= \frac{e^s-1}{s(e^s-2)(e^s-3)(e^s-4)} \\ &= \frac{e^s-1}{s} \left(\frac{\frac{1}{2}}{e^s-2} - \frac{1}{e^s-3} + \frac{\frac{1}{2}}{e^s-4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-e^{-s}}{s(1-2e^{-s})} - \frac{1-e^{-s}}{s(1-3e^{-s})} + \frac{1}{2} \frac{1-e^{-s}}{s(1-4e^{-s})} \end{aligned}$$

átalakításával kapjuk, hogy

$$Y = \frac{1}{2} \left(\frac{1-e^{-s}}{s(1-2e^{-s})} - \frac{1-e^{-s}}{s(1-4e^{-s})} \right).$$

Tehát

$$y(t) = \frac{1}{2}2^{[t]} - \frac{1}{2}4^{[t]},$$

és így

$$a_n = \frac{2^n - 4^n}{2}.$$

53

Ekkor az

$$y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = 0,$$

$$y(t) = 0, \quad \text{ha } t < 1, \quad \text{illetve } y(t) = 1, \quad \text{ha } 1 \leq t < 2$$

differenciaegyenletet kapjuk. Így a 7.4.4. példa alapján

$$\begin{aligned} e^{2s}Y - \frac{e^s-1}{s} - 2e^sY + Y &= 0 \\ Y(e^{2s} - 2e^s + 1) &= \frac{e^s-1}{s} \\ Y &= \frac{1}{s(e^s-1)} \end{aligned}$$

azaz

$$y(t) = [t],$$

és így

$$a_n = n.$$

54

Az egyenlet Laplace- transzformáltját véve, felhasználva, hogy

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &= Y \sqrt{\frac{\pi}{s}} \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{\pi s}}, \end{aligned}$$

így

$$y(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}}.$$

55

A transzformáció után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} sI - 1 + 3I + \frac{2}{s}I &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{s^2 + 3s + 2}{s}I &= \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1} \\ I &= \frac{s(s^2 + 2)}{(s + 2)(s + 1)(s^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontással kapjuk, hogy

$$I = \frac{12}{5} \frac{1}{s + 2} - \frac{3}{2} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{10} \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{3}{10} \frac{1}{s^2 + 1},$$

így

$$i(t) = \frac{12}{5}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t.$$

56

Az egyenlet és a peremfeltétel Laplace- transzformáltját véve, a kezdeti értéket rögtön beírva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, s) - sU(x, s) + x = 0, \quad U(0, s) = \frac{1}{s^2}.$$

Az $y(x) = U(x, s)$ helyettesítéssel kapjuk az

$$y' - sy = -x$$

közönséges differenciálegyenletet. Az e^{-sx} integrálótényezőt alkalmazva

$$\begin{aligned} [e^{-sx}y]' &= -xe^{-sx}, \\ e^{-sx}y &= \int -xe^{-sx} dx \\ &= -\frac{x}{s}e^{-sx} + \frac{1}{s^2}e^{-sx} + C, \\ U(x, s) = y &= \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + Ce^{sx} \end{aligned}$$

a peremfeltétel, $U(0, s) = 1/s^2$ miatt $C = 0$, ezért

$$U(x, s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}$$

és így

$$u(x, t) = x + t.$$

57

Transzformálás után kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x, s) - sU(x, s) + 1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}U(0, s) = 0, \quad U(\pi/2, s) = \frac{2}{s}.$$

Az $y(x) = U(x, s)$ helyettesítéssel kapjuk az

$$y'' - sy = -1$$

közönséges differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása

$$U(x, s) = y = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}.$$

Az $\alpha_1 = c_1 + c_2$ és $\alpha_2 = c_1 - c_2$ helyettesítésekkel

$$U(x, s) = \alpha_1 \operatorname{ch}(\sqrt{s}x) + \alpha_2 \operatorname{sh}(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s},$$

és így

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, s) = \alpha_1 \sqrt{s} \operatorname{sh}(\sqrt{s}x) + \alpha_2 \sqrt{s} \operatorname{ch}(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s}.$$

Tehát a

$$\frac{\partial}{\partial x} U(0, s) = 0$$

feltétel alapján $\alpha_2 = 0$, azaz

$$U(x, s) = \alpha_1 \operatorname{ch}(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s}.$$

Az $U(\pi/2, s) = 2/s$ tulajdonság miatt

$$\alpha_1 = \frac{1}{s \operatorname{ch}(\sqrt{s}\pi/2)}.$$

Így

$$U(x, s) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{ch}(\sqrt{s}\pi/2)} + \frac{1}{s},$$

és a transzformációs táblázat segítségével

$$u(x, t) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 t} \cos(2n+1)x.$$