

Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek

Simon, Péter

Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek

írta Simon, Péter

Publication date 2013

Szerzői jog © 2013 Simon Péter

TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1 MSc Tananyagfejlesztés

Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz

Tartalom

Előszó	v
Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek	1
1. 1 Bevezetés	1
1.1. Előszó	1
1.2. Köszönetnyilvánítás	1
1.3. 1.1 Differenciálegyenletek kvalitatív elmélete és a dinamikai rendszerek	1
1.4. 1.2 A jegyzetben tárgyalt témakörök	2
2. 2 Dinamikai rendszerek topologikus osztályozása	4
2.1. 2.1 Dinamikai rendszerek ekvivalenciái	5
2.1.1. 2.1.1 Diszkrét idejű dinamikai rendszerek	6
2.1.2. 2.1.2 Folytonos idejű dinamikai rendszerek	7
2.2. 2.2 Lineáris rendszerek C^k -osztályozása	9
2.3. 2.3 Lineáris rendszerek C^0 -osztályozása	10
2.3.1. 2.3.1 Folytonos idejű eset $n = 1$ dimenzióban	10
2.3.2. 2.3.2 Diszkrét idejű eset $n = 1$ dimenzióban	11
2.3.3. 2.3.3 Folytonos idejű eset n -dimenzióban	11
2.3.4. 2.3.4 Diszkrét idejű eset n -dimenzióban	17
2.4. 2.4 Feladatok	19
3. 3 Lokális osztályozás, normálformaelmélet és a HartmanGrobman-tétel	21
3.1. 3.1 HartmanGrobman-tétel	23
3.1.1. 3.1.1 A bizonyítás 1. lépése	24
3.1.2. 3.1.2 A bizonyítás 2. lépése	25
3.1.3. 3.1.3 A bizonyítás 3. lépése	25
3.1.4. 3.1.4 A bizonyítás 4. lépése	26
3.2. 3.2 Normálformák	30
3.3. 3.3 Feladatok	34
4. 4 Stabil, instabil és centrális sokaság tétel	35
4.1. 4.1 Stabil és instabil sokaság tétel	35
4.1.1. 4.1.1 Általános eset	36
4.1.2. 4.1.2 Globális sokaságok	40
4.2. 4.2 Centrális sokaság tétel	40
4.2.1. 4.2.1 Általános megközelítés	41
4.2.2. 4.2.2 A centrális sokaság approximációja	42
4.3. 4.3 Feladatok	44
5. 5 Globális vizsgálat, periodikus megoldások, vektormező indexe	47
5.1. 5.1 A globális fáziskép vizsgálata a lokális fázisképek segítségével	47
5.1.1. 5.1.1 Globális fáziskép 1 dimenzióban	48
5.1.2. 5.1.2 Globális fáziskép 2 dimenzióban	49
5.2. 5.2 Periodikus megoldások	59
5.2.1. 5.2.1 Periodikus megoldások létezése	60
5.2.2. 5.2.2 Lokális vizsgálat periodikus megoldások körül	63
5.3. 5.3 Indexelmélet alkalmazása kétdimenziós rendszerekre	66
5.4. 5.4 Végtelenbeli viselkedés	70
5.5. 5.5 Feladatok	74
6. 6 A bifurkációelmélet alapjai és strukturális stabilitás	75
6.1. 6.1 Elemi bifurkációk normálformája	75
6.2. 6.2 Bifurkáció megjelenésének szükséges feltételei	89
6.3. 6.3 Strukturális stabilitás	91
6.3.1. 6.3.1 Egydimenziós rendszerek strukturális stabilitása	92
6.3.2. 6.3.2 Strukturális stabilitás több dimenziós rendszerekben	94
7. 7 Egy kodimenziós bifurkációk, a nyereg-csomó és az AndronovHopf-bifurkáció	95
7.1. 7.1 Nyereg-csomó bifurkáció	96
7.2. 7.2 AndronovHopf-bifurkáció	98
7.2.1. 7.2.1 A Ljapunov-függvény előállítása	99
7.2.2. 7.2.2 AndronovHopf-bifurkáció lineáris paraméterfüggés esetén	102

7.2.3. 7.2.3 AndronovHopf-bifurkáció általános paraméterfüggés esetén Jordan-normálalakú lineáris résszel	104
7.2.4. 7.2.4 AndronovHopf-bifurkáció tetszőleges paraméterfüggés esetén	106
7.2.5. 7.2.5 Példa az AndronovHopf-bifurkáció meghatározására	107
7.3. 7.3 Egy kodimenziós bifurkációs görbék meghatározása kétparaméteres rendszerekben a parametrikus reprezentáció módszerével	110
7.3.1. 7.3.1 A parametrikus reprezentáció módszere	110
7.3.2. 7.3.2 Bifurkációs görbék kétparaméteres rendszerekben	114
8. 8 Diszkrét dinamikai rendszerek, szimbolikus dinamika, kaotikus viselkedés	116
8.1. 8.1 Diszkrét dinamikai rendszerek	116
8.1.1. 8.1.1 A logisztikus leképezés	118
8.1.2. 8.1.2 Kaotikus sorozatok	119
8.1.3. 8.1.3 Szimbolikus dinamika	121
9. 9 Reakció-diffúzió egyenletek	123
9.1. 9.1 Reakció-diffúzió egyenletek stationarius megoldásai	124
9.2. 9.2 Reakció-diffúzió egyenletek utazó hullám megoldásai	126
9.2.1. 9.2.1 Utazó hullámok létezése	126
9.2.2. 9.2.2 Utazó hullámok stabilitása	127
10. Hivatkozások	135

Előszó

A jelen digitális tananyag a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0025 számú, "Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz" című projekt részeként készült el.

A projekt általános célja a XXI. század igényeinek megfelelő természettudományos felsőoktatás alapjainak a megteremtése. A projekt konkrét célja a természettudományi mesterképzés kompetenciaalapú és módszertani megújítása, mely folyamatosan képes kezelni a társadalmi-gazdasági változásokat, a legújabb tudományos eredményeket, és az info-kommunikációs technológia (IKT) eszköztárát használja.



Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek

1. 1 Bevezetés

1.1. Előszó

A jelen jegyzet nagyrészt azokon az előadásokon alapul, amelyeket a szerző az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tartott felsőbb éves matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók számára a bevezető differenciálegyenlet előadást követően, differenciálegyenletek kvalitatív elméletéről és dinamikai (dinamikus) rendszerekről. Ennek megfelelően elsősorban ezen alkalmazott matematikus és matematikus hallgatókat céloztuk meg vele, de nagyon reméljük, hogy más egyetemek matematikus és differenciálegyenleteket alkalmazó nem matematikus hallgatói is haszonnal olvassák majd.

A jegyzet olvasásához tehát előfeltétel a differenciálegyenletek alapvető ismerete, elsősorban néhány egyszerű egyenlet megoldásának módszere, a lineáris rendszerek elméletének alapjai és egyszerű kétdimenziós fázisképek meghatározása. Nem tárgyaljuk a jegyzetben az alapvető egzisztencia és unicitás tételeket sem, (hiszen ezek az ELTE-n az alapkursusban sorra kerülnek), de ezek ismerete nélkül is érthetők a jegyzetben tárgyalt témák. A bevezetésben alább tömören összefoglaljuk a bevezető differenciálegyenlet kurzusban tárgyalt fontosabb fogalmakat és tételeket, az érdeklődő olvasónak ajánljuk a [22] könyvet, a <http://www.cs.elte.hu/~simonp/kozdiff.pdf> oldalon elérhető elektronikus jegyzetet, vagy más bevezető jellegű differenciálegyenlet jegyzetet.

1.2. Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetet mond az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetében az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszéken dolgozó kollégáinak, akik támogatták a dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek kurzus megindítását és a jegyzet megírását.

Köszönet illeti a jegyzet lektorát Nagy Bálint tanszékvezető főiskolai docenst, aki mindenre kiterjedő figyelemmel igyekezett javítani a hibákat, és elősegíteni az érthetőséget, és a konzisztenciát.

A jegyzet a TAMOP-4.1.2.A/1-11/1 pályázat, Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz című projektjének keretében készült.

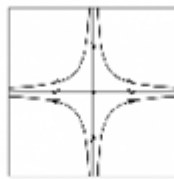
1.3. 1.1 Differenciálegyenletek kvalitatív elmélete és a dinamikai rendszerek

A differenciálegyenletek elmélete a matematikának több mint 300 éves területe, melyet mindig az alkalmazások felől érkező kihívások termékenyítettek meg, és amely ezt továbbadva a matematika több területének létrejöttét motiválta. Nem célunk erről a hatalmas területről átfogó képet adni, azonban a dinamikai rendszerek elméletével való kapcsolatára szeretnénk rávilágítani. A szerző felfogásában a differenciálegyenletek vizsgálatával kapcsolatos matematikai eredmények az alábbi három szempont szerint csoportosíthatók.

- A megoldások előállítása képlettel, vagy numerikus közelítéssel.
- A megoldás létezésének és egyértelműségének bizonyítása.
- A megoldás tulajdonságainak jellemzése a megoldás képletének ismerete nélkül.

Az első terület irányában nyilvánvaló igény jelentkezik az alkalmazások felől. Érdemes megjegyezni, hogy az utóbbi 50 évben a hangsúly a numerikus közelítésen van, ebből külön tudományterület nőtt ki, a

differenciálegyenletek numerikus módszereinek vizsgálata. A második kérdés a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti érték feladatokra vonatkozóan nagyon szépen megválaszolható (motiválva normált térbeli leképezések fixpont tételeinek kifejlesztését), ezért a mai kutatások ezzel kapcsolatos egyik nagy területe a nemlineáris egyenletekre vonatkozó peremérték-feladatok megoldásai pontos számának vizsgálata. Megjegyezzük, hogy parciális differenciálegyenletekre vonatkozóan az egzisztencia és unicitás kérdése messze nem tisztázható ilyen egyszerűen, ezért ez ma is nagyon aktív kutatási terület. A fenti harmadik témakör vizsgálatának kezdetei a XIX. század végéig nyúlnak vissza, amikor igény mutatkozott nemlineáris közönséges differenciálegyenletek vizsgálatára, és világossá vált, hogy ezek képlettel való megoldása, csak nagyon speciális esetben várható. Talán Poincaré nevéhez köthetők az úgynevezett kvalitatív elmélet kezdetei, amikor azt kezdték vizsgálni, hogy a megoldás képletének ismerete nélkül, hogyan határozhatók meg mégis a megoldás bizonyos tulajdonságai. A paradigmaváltást egyszerűen szemléltethetjük az $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ rendszer példáján. A rendszer megoldása természetesen egyszerűen előállítható képlettel, a hagyományos megközelítés szerint ezen rendszert látva a matematikus válasza: $x(t) = e^t x_0$, $y(t) = e^{-t} y_0$. Ehhez képest a kvalitatív vizsgálat ehhez a rendszerhez az 1. ábrán látható fázisképet adja válaszként, amely ugyan a megoldások időfüggését nem adja meg, viszont számos fontos tulajdonsága leolvasható róla.



1. ábra. Az $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ rendszer fázisképe, az úgynevezett nyereg.

A rendszerre tehát elsősorban mint dinamikai rendszere gondolunk, melynek a pályáit szeretnénk jellemezni, főleg geometriai szempontból. Ezzel a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete és a dinamikai, vagy más szóval dinamikus rendszerek elmélete szoros kapcsolatba került, melyet az is jelez, hogy a modern tankönyvek címében a differenciálegyenletek szó mellett legtöbbször a dinamikai rendszer kifejezés is szerepel. A kvalitatív vizsgálat fejlődéséhez jelentős mértékben hozzájárult az 1960-as évektől kezdődően a kaotikus viselkedést mutató rendszerek felfedezése és a fázisképek számítógéppel történő numerikus előállításának lehetősége. Mára a kvalitatív vizsgálat alapvető eszközeinek használata rutinná vált, nemcsak a fizikus és mérnök, hanem a vegyész, biológus és közgazdász hallgatók is már egyetemi tanulmányaik során megismerkednek ezekkel. Ez is magyarázza, hogy az elmúlt két évtizedben több bevezető jellegű monográfia született, amely nemcsak a matematikus képzettségű, hanem a kellő matematikai háttérrel rendelkező nem matematikus olvasókat is bevezeti a kvalitatív vizsgálat rejtelmeibe. Példaként említhetjük a káoszelméletbe bevezető [1] monográfiát, Guckenheimer és Holmes klasszikusnak mondható könyvét [9], Hale és Kocak nagyon szemléletesen megírt munkáját [10], Hubbard és West pedagógikusan meg szerkesztett [13], valamint Perko [16] széles spektrumot átölelő könyvét, illetve Seydel bifurkációkról írott munkáját [19]. A kicsivel több matematikai bizonyítást igénylő olvasók is számos angol nyelvű monográfiából tájékozódhatnak, Arnold [2 és], Chow és Hale [6], Chicone [5], Hirsch, Smale és Devaney [12], valamint Robinson [17] és Wiggins [23] könyvei csak néhány a széles palettáról. Látható, hogy a kvalitatív elméletet részletesen tárgyaló, egyetemi hallgatóknak szóló, magyar nyelvű tankönyv nem szerepel ezek között, ami nagyban motiválta ezen jegyzet megírását.

1.4. 1.2 A jegyzetben tárgyalt témakörök

Az alábbiakban bemutatjuk azt a matematikai struktúrát, amelyben vizsgálódásainkat folytatjuk, illetve röviden ismertetjük a főbb témákat, amelyeket részletesen tárgyalni fogunk. Vizsgálatunk fő objektuma az

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

autonóm, közönséges differenciálegyenlet-rendszer, melyben $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ az ismeretlen függvény és $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adott folytonosan differenciálható függvény, melyet jobboldalnak nevezünk. Ebbe a kategóriába a legtöbb fontos közönséges differenciálegyenlet-rendszer belefér, és lehetetlen lenne felsorolni mindazokat a mérnöki, fizikai, kémiai, biológiai, közgazdasági alkalmazásokat, amelyekben ilyen rendszerek vizsgálata megjelenik. Az egyenlet $x(0) = p$ kezdeti feltételből induló megoldását $\varphi(t, p)$ -vel jelölve igazolható, hogy a

φ függvény teljesíti a (folytonos idejű) dinamikai (vagy dinamikus) rendszer alábbi definíciójában szereplő feltételeket.

1.1. Definíció A $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvényt folytonos idejű dinamikai rendszernek nevezzük, ha teljesíti az alábbi két feltételt.

- Minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(0, p) = p$,
- Minden $p \in \mathbb{R}^n$ és $t, s \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p)$.

A dinamikai rendszer egy determinisztikus folyamat modelljének fogható fel, melyben $\varphi(t, p)$ azt az állapotot jelöli, ahová a rendszer a p állapotból indulva t idő alatt jut. Egyszerűen igazolható, hogy a fenti közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldása lényegében egy dinamikai rendszert határoz meg. (Előfordulhat, hogy a megoldások nem értelmezettek az egész számegyenesen, amit viszont a dinamikai rendszertől elvárunk, azonban ez a pályákon nem látható.) Illetve egy dinamikai rendszerhez mindig megadható egy differenciálegyenlet, aminek ez a megoldása. Ezért az autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszert és a dinamikai rendszert együtt szokták vizsgálni, mi is párhuzamosan használjuk a jegyzetben a két fogalmat.

A dinamikai rendszer fenti definíciója több irányban kiterjeszthető. Egyik fontos alternatíva az, amelyben az idő szerepét az $\mathbb{R}$ helyett a $\mathbb{Z}$ halmaz veszi át, ekkor jutunk a diszkrét idejű dinamikai rendszer fogalmához.

1.2. Definíció A $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvényt diszkrét idejű dinamikai rendszernek nevezzük, ha teljesíti az alábbi két feltételt.

- Minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(0, p) = p$,
- Minden $p \in \mathbb{R}^n$ és $k, m \in \mathbb{Z}$ esetén $\varphi(k, \varphi(m, p)) = \varphi(k + m, p)$.

Ahogy a folytonos idejű dinamikai rendszert az autonóm differenciálegyenletből származtattuk, úgy a diszkrét idejű dinamikai rendszert egy leképezésből lehet származtatni. Legyen ugyanis $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adott folytonos függvény, és tekintsük az

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

$x_0 = p$ rekurzióval definiált sorozatot (nevezhetjük differenciaegyenletnek is). A $\varphi(k, p) = x_k$ képlettel definiált függvény teljesíti a diszkrét idejű dinamikai rendszer definíciójában szereplő feltételeket. Tehát egy differenciaegyenlet meghatároz egy diszkrét idejű dinamikai rendszert. Fordítva pedig, ha φ egy diszkrét idejű dinamikai rendszer, akkor legyen $g(p) = \varphi(1, p)$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ezzel $x_k = \varphi(k, p)$ a fenti rekurzió megoldása, melyet röviden a $\varphi(k, p) = g^k(p)$ képlettel fejeznek ki, ahol k nem kitevőt, hanem a g függvény k -szori alkalmazását jelenti (negatív k esetén az inverz függvény alkalmazását).

A kétféle dinamikai rendszer sok esetben együtt tárgyalható, ekkor az idő változót a $\mathbb{T}$ halmazból vesszük, amely az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Z}$ számhalmazt jelöli. Folytonos idejű esetben gyakran használják a folyam (flow) kifejezést, diszkrét esetben pedig a leképezés (map) kifejezést.

A dinamikai rendszerek vizsgálatának fő tárgya a pályák geometriai jellemzése. Egy p pont pályája a

$$\{\varphi(t, p) : t \in \mathbb{T}\}$$

halmaz, amely folytonos esetben egy görbe, diszkrét esetben pedig egy pontsorozat a fázistérben.

Az alapvető matematikai struktúra ismertetése után térjünk rá most a jegyzetben tárgyalt témakörök áttekintésére.

A következő fejezetben azt vizsgáljuk, hogy amennyiben a pályák pontos meghatározása nélkül szeretnénk a pályák összessége által meghatározott fázisképet vizsgálni, akkor milyen geometriai definíció segítségével lehet különböző rendszerek fázisképeinek hasonlóságát egzakt módon megfogni. Ehhez bevezetjük a topológikus ekvivalencia fogalmát, amely egy ekvivalencia reláció a dinamikai rendszerek halmazán. Az ekvivalencia

bevezetése után azt vizsgáljuk, hogy milyen osztályokat hoz ez létre, illetve, próbálunk az osztályokból egy-egy könnyen vizsgálható reprezentánst kiválasztani. Ezenkívül foglalkozunk azzal az alapvető kérdéssel, hogy ha a dinamikai rendszert differenciálegyenlettel adjuk meg, akkor a jobboldalak alapján hogyan dönthető el két rendszer ekvivalenciája. Ezt a programot csak a lineáris rendszerek osztályozása esetében lehet teljességgel véghezvinni.

A nemlineáris rendszereket a 3. Fejezetben osztályozzuk, azonban ekkor csak az egyensúlyi pontok körüli lokális fázisképek osztályozása hajtható végre. Ennek egyik eszköze a linearizálás, amelynek lehetőségét a Hartman-Grobman-tétel teremti meg. Amennyiben a lineáris rendszer nem határozza meg a fázisképet, akkor a fáziskép szempontjából meghatározó tagok a normálformák elméletének segítségével választhatók ki.

Az egyensúlyi pontok körüli lokális fázisképek vizsgálatában segít a stabil, instabil és centrális sokaság tétel, melyeket a 4. Fejezetben tárgyalunk. Ezek a sokaságok a lineáris rendszerek esetében bevezetett a stabil, instabil és centrális alterek általánosításai. Ezen sokaságok invariánsak, azaz a trajektóriák nem hagyják el azokat. A stabil sokaság azon trajektóriákat tartalmazza, amelyek $t \rightarrow +\infty$ esetén az egyensúlyi ponthoz tartanak, az instabil sokaság pedig azokat, amelyek $t \rightarrow -\infty$ esetén tartanak az egyensúlyi ponthoz. A centrális sokaság a fázistér dimenziójának redukálását teszi lehetővé, azaz magasabb dimenziós rendszerekben el lehet különíteni a fázistérnek azt az alacsonyabb dimenziós részét, amelyben a nehezen vizsgálható trajektóriák futnak.

A fáziskép globális vizsgálatának eszközeire az 5. Fejezetben kerül sor. Ebben először áttekintjük a kétdimenziós fázisképek meghatározásának elemi módszereit. Ezután részletesen vizsgáljuk a periodikus megoldásokat. Ezek létezésére és nem-létezésére vonatkozó kétdimenziós fázistérben alkalmazható tételeket foglaljuk össze először, majd rátérünk a periodikus megoldások stabilitásvizsgálatára tetszőleges dimenziós fázistérben. A fejezet végén visszatérünk a kétdimenziós esetre, és két fontos globális eszközt, a vektormező indexét és a Poincaré-gömbre való vetítéssel történő kompaktifikációt ismertetjük.

Azt ezt követő két fejezetben a paraméterektől is függő rendszerek fázisképének alakulását vizsgáljuk a paraméterek értékétől függően. Módszereket mutatunk azon rendszerek vizsgálatára, melyeknél a paraméterek változtatásakor minőségi változás következik be a fázisképben, ezeket a minőségi változásokat nevezzük bifurkációnak. Részletesen tárgyaljuk a két legfontosabb, úgynevezett egy-kodimenziós bifurkációt, a nyereg-csomó és az Andronov-Hopf-bifurkációt.

Dinamikai rendszerek vizsgálatának egyik fontos fejezete a káosz definiálása és a kaotikus rendszerek vizsgálata. Ennek eszközeit elsősorban diszkrét idejű rendszerekre fejlesztették ki, ezért a 8. Fejezetben ezeket külön vizsgáljuk. Bemutatjuk a fixpont és periodikus pálya lokális vizsgálatának alapvető eszközeit. Bevezetünk egy káosz definíciót, majd megmutatjuk, hogy bizonyos leképezéseknek vannak kaotikus pályáik. Ehhez ismertetjük a szimbolikus dinamika fogalmát és alkalmazásának módszerét.

Az utolsó fejezet a dinamikai rendszer elmélet egy olyan irányú kiterjesztéséről szól, amikor a fázistér nem véges dimenziós. Ez például parciális differenciálegyenletek esetében fordul elő. Ebben a fejezetben szemilineáris parabolikus parciális differenciálegyenleteket vizsgálunk, melyeket a gyakorlatban sokszor reakció-diffúzió egyenletnek hívnak. Foglalkozunk a stacionárius megoldások (melyek az egyensúlyi pontnak felelnek meg) létezésének és stabilitásának vizsgálatával, illetve egy másik, gyakorlat szempontjából fontos megoldás típussal az utazó hullámokkal. Ezek esetében is a létezésüket és a stabilitásukat vizsgáljuk.

2. 2 Dinamikai rendszerek topologikus osztályozása

A differenciálegyenletek elméletének fejlődése során először a differenciálegyenletek megoldásával foglalkoztak, igen sokféle módszert kifejlesztettek, amelyekkel speciális típusú differenciálegyenletek megoldása képlettel előállítható. Azonban kiderült, hogy differenciálegyenlet-rendszerek megoldása általában képlettel nem adható meg (szinte kizárólag csak a lineáris esetben), vagy ha megadható, akkor is nehézségekbe ütközhet, hogy a megoldás bizonyos fontos tulajdonságait a képlet alapján meghatározzuk. Kétdimenziós nemlineáris rendszerek megoldásait például célszerű úgy vizsgálni, hogy a trajektóriákat (pályákat) ábrázoljuk a fázissíkon. Ez nem azt jelenti, hogy a megoldásgörbéket pontosan felrajzoljuk, hanem az analízisbeli függvényvizsgálathoz hasonlóan járunk el, amikor csak a függvénygrafikon legfontosabb alaki tulajdonságait (monotonitás, konvexitás) vesszük figyelembe. A kétdimenziós rendszerek megoldásainak ábrázolása során tehát lényegében egy a vizsgált rendszerrel valamilyen értelemben ekvivalens rendszer pályáit ábrázoltuk (mégpedig annak, amelynek pályái úgy néznek ki, mint a vizsgálandó rendszer pályái). Most szeretnénk ezen

ekvivalencia fogalmát pontosan meghatározni, azaz definiálni azt, hogy mit értünk azon, hogy két rendszer fázisképe ugyanúgy néz ki.

A továbbiakban tehát a $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ dinamikai rendszerek halmazán meg fogunk adni egy ekvivalenciarelációt. Azután az a cél, hogy meghatározzuk a lehetséges osztályokat, keressünk minden osztályból egy könnyen vizsgálható reprezentánst, és egyszerű módszert adjunk annak eldöntésére, hogy egy adott rendszer melyik osztályba tartozik.

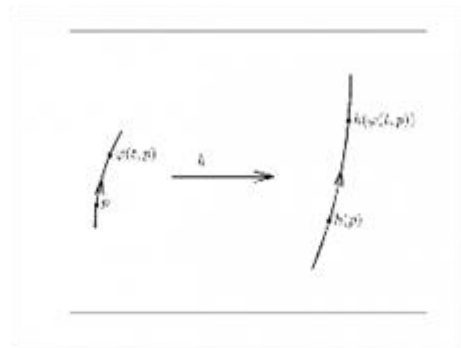
2.1. 2.1 Dinamikai rendszerek ekvivalenciái

Két dinamikai rendszert ekvivalensnek fogunk nevezni, ha pályáik egy megfelelő leképezéssel egymásba vihetők. Először ezen leképezés típusokat definiáljuk. A diszkrét és folytonos idejű dinamikai rendszerekre egyszerre fogalmazzuk meg ezeket a definíciókat, ezért a továbbiakban jelölje $\mathbb{T}$ az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Z}$ számhalmazt.

2.1. Definíció Legyenek $M, N \subset \mathbb{R}^n$ halmazok. Egy $h : M \rightarrow N$ leképezést homeomorfizmusnak (esetenként C^0 -diffeomorfizmusnak) nevezünk, ha folytonos, bijekció és az inverze is folytonos. A leképezést C^k -diffeomorfizmusnak nevezzük, ha k -szor folytonosan differenciálható, bijekció és inverze is k -szor folytonosan differenciálható.

2.2. Definíció Legyenek $M, N \subset \mathbb{R}^n$ tartományok, azaz összefüggő, nyílt halmazok. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ és $\psi : \mathbb{T} \times N \rightarrow N$ dinamikai rendszerek C^k -ekvivalensek, ($k=0$ esetén topologikusan ekvivalensek), ha van olyan $h : M \rightarrow N$ C^k -diffeomorfizmus ($k=0$ esetén homeomorfizmus), mely a pályákat egymásba viszi az idő irányításának megtartásával. Ezt a 2. ábra szemlélteti. Részletesebben megfogalmazva, ha létezik olyan $a : \mathbb{T} \times M \rightarrow \mathbb{T}$ folytonos függvény, melyre $t \mapsto a(t, p)$ szigorúan növe bijekció, és minden $t \in \mathbb{T}$, valamint $p \in M$ esetén

$$h(\varphi(t, p)) = \psi(a(t, p), h(p)).$$



2. ábra. Topologikusan ekvivalens rendszerek pályáit homeomorfizmussal egymásba lehet vinni.

A fenti definícióban az a , illetve h függvény speciális választásával különféle ekvivalencia fogalmakat kaphatunk. A fenti általános ekvivalenciát fogjuk a továbbiakban 1. típusúnak nevezni, az alábbi fontos speciális eseteket pedig 2, 3 és 4. típusúnak.

2.3. Definíció Azt mondjuk, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k folyam ekvivalensek (2. típusú ekvivalencia), ha a fenti definícióban a nem függ p választásától, azaz létezik olyan szigorúan növe $b : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ bijekció, melyre $a(t, p) = b(t)$ minden $p \in M$ esetén. Ekkor tehát az időátparaméterezés minden pályán ugyanaz.

2.4. Definíció Azt mondjuk, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k konjugáltak (3. típusú ekvivalencia), ha a fenti definícióban $a(t, p) = t$ minden $t \in \mathbb{T}$ és $p \in M$ esetén. Ekkor tehát a pályákon nincs időátparaméterezés. Ez esetben a feltétel így írható

$$h(\varphi(t, p)) = \psi(t, h(p)).$$

2.5. Definíció Azt mondjuk, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek orbitálisan ekvivalensek (4. típusú ekvivalencia), ha a fenti definícióban $M = N$ és $h = id$, azaz a pályák ugyanazok, csak az idő más a két rendszerben a pályákon.

A definíciókból nyilvánvaló, hogy az ekvivalencia fogalmak között az alábbi kapcsolat áll fenn.

2.1. Állítás

1. Ha a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k konjugáltak, akkor C^k folyam ekvivalensek.
2. Ha a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k folyam ekvivalensek, akkor C^k -ekvivalensek.
3. Ha a φ és ψ dinamikai rendszerek orbitálisan ekvivalensek, akkor C^k -ekvivalensek.

Összefoglalva, az ekvivalencia típusok között a következő összefüggés áll fenn

$$3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1, \quad 4 \Rightarrow 1.$$

2.1.1. 2.1.1 Diszkrét idejű dinamikai rendszerek

Diszkrét idejű dinamikai rendszerek esetében valójában csak egyféle ekvivalencia van, ezt fogalmazzuk meg a következő állításban. Legyenek $\varphi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ és $\psi : \mathbb{Z} \times N \rightarrow N$ diszkrét idejű dinamikai rendszerek. Legyen $f(p) = \varphi(1, p)$ és $g(p) = \psi(1, p)$. Ekkor a dinamikai rendszer csoporttulajdonsága alapján egyszerűen igazolható, hogy $\varphi(n, p) = f^n(p)$ és $\psi(n, p) = g^n(p)$, ahol f^n és g^n a függvények n -szeri alkalmazását jelöli.

2.2. Állítás Az alábbi állítások ekvivalensek.

1. A φ és ψ dinamikai rendszerek C^k -konjugáltak.
2. A φ és ψ dinamikai rendszerek C^k folyam ekvivalensek.
3. A φ és ψ dinamikai rendszerek C^k -ekvivalensek.
4. Létezik olyan $h : M \rightarrow N$ C^k -diffeomorfizmus, melyre $h \circ f = g \circ h$.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint az első három állítás fentről lefelé következik egymásból. Először igazoljuk, hogy a negyedik állításból következik az első, majd azt, hogy a harmadikból következik a negyedik. A $h \circ f = g \circ h$ egyenlőséget felhasználva

$$h \circ f^2 = h \circ f \circ f \underset{h \circ f = g \circ h}{=} g \circ h \circ f \underset{h \circ f = g \circ h}{=} g \circ g \circ h = g^2 \circ h.$$

Ehhez hasonlóan az $h \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ h$ feltételből következik $h(f^n(p)) = g^n(h(p))$, azaz $h(\varphi(n, p)) = \psi(n, h(p))$ minden n és p esetén, amely éppen a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k -konjugáltságát jelenti.

Tegyük fel most, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k -ekvivalensek. Vegyük észre először, hogy, ha $r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ szigorúan növekvő bijekció, akkor van olyan $k \in \mathbb{Z}$, mellyel $r(n) = n + k$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Ugyanis a szigorú monotonitás miatt $r(n+1) > r(n)$, viszont mivel r bijekció, azért $r(n+1)$ és $r(n)$ között nem lehet egész szám, tehát $r(n+1) = r(n) + 1$. Így bevezetve a $k = r(0)$ számot, indukcióval az $r(n) = n + k$ összefüggéshez jutunk. Tehát a C^k -ekvivalencia definíciójában szereplő a függvényre fennáll,

hogyminden $p \in M$ ponthoz van olyan $k_p \in \mathbb{Z}$ egész szám, mellyel $a(n, p) = n + k_p$. Tehát φ és ψ C^k -ekvivalenciája azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ és minden $p \in M$ esetén

$$h(\varphi(n, p)) = \psi(n + k_p, h(p)),$$

azaz

$$h(f^n(p)) = g^{n+k_p}(h(p)).$$

Alkalmazzuk ezt az összefüggést először $n = 0$ esetén. Ekkor $h(p) = g^{k_p}(h(p))$. Ezután $n = 1$ esetén

$$h(f(p)) = g^{1+k_p}(h(p)) = g(g^{k_p}(h(p))) = g(h(p)),$$

ami éppen a kívánt állítást adja. [QED]

2.3. Állítás A φ és ψ dinamikai rendszerek pontosan akkor orbitálisan ekvivalensek, ha egyenlők.

Bizonyítás. Ha a két dinamikai rendszer egyenlő, akkor nyilván orbitálisan ekvivalensek. Fordítva, amennyiben orbitálisan ekvivalensek, akkor C^k -ekvivalensek is, így az előbbi állítás szerint $h \circ f = g \circ h$, viszont $h = id$ miatt $f = g$, tehát $\varphi(n, p) = \psi(n, p)$ bármely $n \in \mathbb{Z}$ esetén, azaz a két dinamikai rendszer azonos. [QED]

2.6. Definíció Diszkrét idejű esetben, azaz $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ esetén, az f és g leképezést, illetve a megfelelő diszkrét dinamikai rendszereket C^k -konjugáltaknak nevezzük, ha van olyan h C^k -diffeomorfizmus, melyre $h \circ f = g \circ h$.

2.1. Megjegyzés Ebben az esetben az f és g függvény csak koordináta-transzformációban különbözik egymástól.

2.4. Állítás Ha $k > 1$ esetén f és g C^k -konjugáltak, valamint $p \in M$ fixpontja az f leképezésnek (ekkor nyilván $h(p)$ fixpontja g -nek), akkor az $f'(p)$ és $g'(h(p))$ mátrixok hasonlóak.

Bizonyítás. Deriváljuk a $h \circ f = g \circ h$ egyenlőséget a p pontban, és használjuk fel, hogy $f(p) = p$, valamint $g(h(p)) = h(p)$. Ekkor $h'(p)f'(p) = g'(h(p))h'(p)$, melyet megszorozhatunk a $h'(p)$ mátrix inverzával (amely azért létezik, mert h C^k -diffeomorfizmus). Így az $f'(p)$ és $g'(h(p))$ mátrixok valóban hasonlóak. [QED]

2.2. Megjegyzés A fenti állítás miatt a C^k -konjugáltság túl finom osztályozást ad $k \geq 1$ -re, hiszen például az $f(x) = 2x$ és $g(x) = 3x$ függvények az állítás szerint nem C^k -konjugáltak (az egyik mátrix sajátértéke 2, a másiké 3), viszont az általuk meghatározott $x_{n+1} = 2x_n$ és $x_{n+1} = 3x_n$ dinamikai rendszerek pályáinak viselkedése között nem szeretnénk különbséget tenni. Látni fogjuk, azonban, hogy a két függvény C^0 -konjugált, azaz $k = 0$ -ra nem igaz az állítás.

2.1.2. 2.1.2 Folytonos idejű dinamikai rendszerek

Térjünk rá most a folytonos idejű dinamikai rendszerek ekvivalenciáinak vizsgálatára, legyen tehát most $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, és legyenek $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ valamint $\psi : \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ folytonos idejű dinamikai rendszerek. Ekkor megadhatók olyan $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $g : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvények, melyekre $\dot{x} = f(x)$ megoldása a φ , és $\dot{y} = g(y)$ megoldása a ψ dinamikai rendszer.

2.5. Állítás

1. Legyen $k \geq 1$. Ekkor a φ és ψ dinamikai rendszerek pontosan akkor C^k -konjugáltak, ha létezik olyan $h : M \rightarrow N$ C^k -diffeomorfizmus, mellyel $h' \cdot f = g \circ h$.

2. Tegyük fel, hogy a $t \mapsto a(t, p)$ függvény differenciálható. Ekkor a φ és ψ dinamikai rendszerek pontosan akkor orbitálisan ekvivalensek, ha létezik olyan $h: M \rightarrow N$, mellyel

3. A 2.1. Állításban a következtetések nem fordíthatók meg.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel először, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k -konjugáltak. Ekkor létezik olyan $h: M \rightarrow N$ C^k -diffeomorfizmus, mellyel $h(\varphi(t, p)) = \psi(t, h(p))$. Deriváljuk ezt az egyenletet t szerint, ekkor $h'(\varphi(t, p)) \cdot \dot{\varphi}(t, p) = \dot{\psi}(t, h(p))$. Mivel $\dot{x} = f(x)$ megoldása a φ , és $\dot{y} = g(y)$ megoldása a ψ , azért

$$h'(\varphi(t, p)) \cdot f(\varphi(t, p)) = g(\psi(t, h(p))).$$

Alkalmazzuk ezt $t = 0$ esetén, ekkor

$$h'(\varphi(0, p)) \cdot f(\varphi(0, p)) = g(\psi(0, h(p))),$$

azaz $h'(p) \cdot f(p) = g(h(p))$. Ezzel az állítás egyik irányát igazoltuk. Tegyük fel most, hogy létezik olyan $h: M \rightarrow N$ C^k -diffeomorfizmus, mellyel $h' \cdot f = g \circ h$. Legyen $\psi^*(t, q) := h(\varphi(t, h^{-1}(q)))$, igazoljuk, hogy ez megoldása $\dot{y} = g(y)$ differenciálegyenletnek, így az egyértelműség miatt $\psi^* = \psi$, melyből a kívánt állítás következik, hiszen ψ^* definíciójában a $q = h(p)$ helyettesítést elvégezve φ és ψ C^k -konjugáltágát kapjuk. Egyrészt $\psi^*(0, q) := h(\varphi(0, h^{-1}(q))) = q$, másrészt

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^*(t, q) &= h'(\varphi(t, h^{-1}(q))) \cdot \dot{\varphi}(t, h^{-1}(q)) \\ &= h'(h^{-1}(\psi^*(t, q))) \cdot f(h^{-1}(\psi^*(t, q))) = g(\psi^*(t, q)), \end{aligned}$$

mellyel a kívánt állítást igazoltuk.

2. Tegyük fel először, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek orbitálisan ekvivalensek. Ekkor $\varphi(t, p) = \psi(a(t, p), p)$, melyet t szerint deriválva a $\dot{\varphi}(t, p) = \dot{\psi}(a(t, p), p) \cdot \dot{a}(t, p)$ egyenlethez jutunk. Mivel $\dot{x} = f(x)$ megoldása a φ , és $\dot{y} = g(y)$ megoldása a ψ , azért $f(\varphi(t, p)) = g(\psi(a(t, p), p))$. Alkalmazzuk ezt $t = 0$ esetén, ekkor $f(p) = g(p) \cdot \dot{a}(0, p)$, melyből a bizonyítandó állítást kapjuk a $v(p) = \dot{a}(0, p)$ függvény bevezetésével. Tegyük fel most, hogy létezik olyan $v: M \rightarrow \mathbb{R}^+$, mellyel $g = f \cdot v$. Legyen $p \in \mathbb{R}^n$, és rövidség kedvéért vezessük be az $x(t) = \varphi(t, p)$ jelölést. Legyen

$$b(t) = \int_0^t \frac{1}{v(x(s))} ds,$$

akkor $\dot{b}(t) = 1/v(x(t)) > 0$, így a b függvénynek van inverze, legyen ez $a = b^{-1}$. (Ez függ a p választásától is, ezért használhatjuk az $a(t, p) = b^{-1}(t)$ jelölést is.) Legyen $y(t) = x(a(t, p))$, ekkor

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(a(t, p)) \dot{a}(t, p) = f(x(a(t, p))) \frac{1}{b(a(t, p))} = f(y(t))v(y(t)) = g(y(t)).$$

Így y megoldása az $\dot{y}(t) = g(y(t))$ differenciálegyenletnek, és teljesíti az $y(0) = p$ kezdeti feltételt, ezért $y(t) = \psi(t, p)$. Ezzel az $y(t) = x(a(t, p))$ definíció alapján a kívánt $\psi(t, p) = \varphi(a(t, p), p)$ összefüggéshez jutunk.

3. Ezen állítás bizonyításához ellenpéldákat adunk meg.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor az $\dot{x} = Ax$ és $\dot{y} = By$ differenciálegyenletek fázisképe azonos, mindkettő centrum, azonban a megoldások periódusa a két rendszerben különböző. Így amennyiben a pályákat egymásba képezzük, akkor az időátparaméterezése szükséges, azaz a két rendszer nem konjugált, viszont folyam-ekvivalens.
2. Ha a φ és ψ dinamikai rendszerben van két-két periodikus pálya, melyeken a periódusok aránya különböző, akkor a két rendszer nem C^k -folyam-ekvivalens, viszont lehetnek C^k -ekvivalensek.
3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ekkor az $\dot{x} = Ax$ és $\dot{y} = By$ differenciálegyenletek fázisképe nyeregpont, azaz C^0 -ekvivalensek, viszont a pályák nem azonosak, ezért nem orbitálisan ekvivalensek.

[QED]

2.2.2 Lineáris rendszerek C^k -osztályozása

Ebben a szakaszban az $\dot{x} = Ax$ alakú lineáris egyenleteket, illetve az $x_{n+1} = Ax_n$ lineáris diszkrét idejű rendszereket fogjuk osztályozni az előbbi szakaszban ismertett ekvivalenciák szerint. Vezessük be az

$$L(\mathbb{R}^n) = \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineáris leképezés}\}$$

és a

$$GL(\mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n) : \det A \neq 0\}$$

tereket. Ha $A \in L(\mathbb{R}^n)$, akkor az A mátrixot az $\dot{x} = Ax$ lineáris differenciálegyenlet jobboldalának tekintjük, ha pedig $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, akkor az A mátrixot az $x_{n+1} = Ax_n$ diszkrét rendszert meghatározó leképezésként kezeljük. Így $L(\mathbb{R}^n)$ a folytonos, $GL(\mathbb{R}^n)$ pedig a diszkrét idejű lineáris rendszereket reprezentálja. A lineáris rendszerek esetében a mátrix által meghatározott dinamikai rendszer explicit módon megadható. Ha $A \in L(\mathbb{R}^n)$, akkor az általa meghatározott dinamikai rendszer, (azaz az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenlet megoldása) $\varphi(t, p) = e^{At}p$. Ha $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, akkor az általa meghatározott dinamikai rendszer, (azaz az $x_{n+1} = Ax_n$ rekurzió explicit megoldása) $\psi(n, p) = A^n p$. A továbbiakban két mátrix valamely típusú ekvivalenciáján az általuk meghatározott dinamikai rendszerek ekvivalenciáját értjük. Használni fogjuk még a következő ekvivalencia fogalmat.

2.7. Definíció Az A és B mátrixok lineárisan ekvivalensek, ha létezik olyan $\alpha > 0$ és P invertálható mátrix, mellyel $A = \alpha P B P^{-1}$

2.6. Állítás Legyen $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ és $k \geq 1$.

1. Az $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ mátrixok pontosan akkor C^k -konjugáltak, ha hasonlók.
2. Az $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ mátrixok pontosan akkor C^k -ekvivalensek, ha lineárisan ekvivalensek.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy az A és B mátrixok C^k -konjugáltak, azaz létezik olyan $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^k -diffeomorfizmus, mellyel $h(\varphi(t, p)) = \psi(t, h(p))$, azaz $h(e^{At}p) = e^{Bt}h(p)$. Deriváljuk ezt p szerint, ekkor $h'(e^{At}p) \cdot e^{At} = e^{Bt}h'(p)$, majd helyettesítsünk p helyére nullát $h'(0)e^{At} = e^{Bt} \cdot h'(0)$. Deriváljunk most t szerint, ekkor a $h'(0)e^{At} \cdot A = e^{Bt} \cdot B \cdot h'(0)$ egyenlethez jutunk, melyből a $t = 0$ helyettesítéssel a $h'(0)A = B \cdot h'(0)$ összefüggést kapjuk. Mivel h diffeomorfizmus, azért a $h'(0)$ mátrixnak van inverze, ezzel megszorozva az egyenletet $A = h'(0)^{-1} B h'(0)$, azaz az A és B mátrixok hasonlóak. Tegyük fel most, hogy az A és B mátrixok hasonlóak, azaz van olyan P invertálható mátrix, mellyel $A = P^{-1} B P$. Ekkor a

$h(p) = Pp$ lineáris függvény olyan C^k -diffeomorfizmus, amely a pályákat egymásba képezi az irányítás megtartásával, ugyanis $Pe^{At}p = Pe^{P^{-1}BPt}p = e^{Bt}Pp$.

2. Tegyük fel, hogy az A és B mátrixok C^k -ekvivalensek, azaz létezik olyan $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^k -diffeomorfizmus, és $a: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyekkel $h(\varphi(t, p)) = \psi(a(t, p), h(p))$, azaz $h(e^{At}p) = e^{Ba(t, p)}h(p)$. Deriváljuk ezt p szerint, majd helyettesítsünk p helyére nullát, ekkor $h'(0)e^{At} = e^{Ba(t, 0)} \cdot h'(0)$. Deriváljunk most t szerint, ekkor $h'(0)e^{At} \cdot A = e^{Ba(t, 0)} \cdot B\dot{a}(t, 0) \cdot h'(0)$ egyenlethez jutunk, melyből a $t = 0$ helyettesítéssel a $h'(0)A = B\dot{a}(0, 0) \cdot h'(0)$ összefüggést kapjuk. Mivel h diffeomorfizmus, azért a $h'(0)$ mátrixnak van inverze, ezzel megszorozva az egyenletet, és bevezetve az $\alpha = \dot{a}(0, 0)$ jelölést, $A = \alpha h'(0)^{-1} B h'(0)$, azaz az A és B mátrixok lineárisan ekvivalensek. Tegyük fel most, hogy az A és B mátrixok lineárisan ekvivalensek, azaz van olyan P invertálható mátrix és $\alpha > 0$, melyekkel $A = \alpha P^{-1} B P$. Ekkor a $h(p) = Pp$ lineáris függvény olyan C^k -diffeomorfizmus, amely a pályákat egymásba képezi az $a(t, p) = \alpha t$ időátparaméterezéssel, ugyanis $Pe^{At}p = Pe^{\alpha P^{-1} B P t}p = e^{B\alpha t} P p$. [QED]

2.3. Megjegyzés A fenti állítás miatt a C^k -konjugáltság és ekvivalencia túl finom osztályozást ad $k \geq 1$ -re.

Hiszen például az $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixok az állítás szerint nem C^k -konjugáltak, és nem is C^k -ekvivalensek, viszont mindkettő stabil csomót határoz meg, így a dinamikai rendszerek pályáinak viselkedése között nem szeretnénk különbséget tenni. Látni fogjuk azonban, hogy a két mátrix C^0 -konjugált, azaz $k = 0$ -ra nem igaz az állítás.

2.7. Állítás Legyen $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ és $k \geq 1$. Az $A, B \in GL(\mathbb{R}^n)$ mátrixok pontosan akkor C^k -konjugáltak, ha hasonlóak.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az A és B mátrixok C^k -konjugáltak, azaz a 4. Állítás szerint létezik olyan $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^k -diffeomorfizmus, mellyel $h(Ap) = Bh(p)$. Deriváljuk ezt p szerint, ekkor $h'(Ap)A = Bh'(p)$, majd helyettesítsünk p helyére nullát, így $h'(0)A = Bh'(0)$. Mivel h diffeomorfizmus, azért a $h'(0)$ mátrixnak van inverze, ezzel megszorozva az egyenletet $A = h'(0)^{-1} B h'(0)$, azaz az A és B mátrixok hasonlóak. Tegyük fel most, hogy az A és B mátrixok hasonlóak, azaz van olyan P invertálható mátrix, mellyel $A = P^{-1} B P$. Ekkor a $h(p) = Pp$ lineáris függvény olyan C^k -diffeomorfizmus, amely a pályákat egymásba képezi az irányítás megtartásával, ugyanis $PAp = BPp$.

2.3.2.3 Lineáris rendszerek C^0 -osztályozása

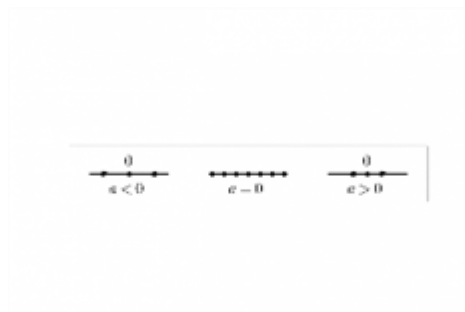
Ebben a szakaszban a következő kérdéseket vizsgáljuk.

1. Adott $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ mátrixokról hogy lehet eldönteni, hogy C^0 ekvivalensek, vagy C^0 konjugáltak?
2. Adott $A, B \in GL(\mathbb{R}^n)$ mátrixokról hogy lehet eldönteni, hogy C^0 konjugáltak?

Vizsgáljuk a kérdést először az $n = 1$ dimenziós esetben.

2.3.1. 2.3.1 Folytonos idejű eset $n = 1$ dimenzióban

Tekintsük az $\dot{x} = ax$ differenciálegyenletet. Ha $a < 0$, akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis, azaz minden megoldás az origóhoz tart. Ha $a > 0$, akkor az origó instabilis, a megoldások végtelenhez tartanak. Ha $a = 0$, akkor minden pont egyensúlyi pont. A 3. ábrán látható a háromféle fáziskép pozitív, negatív és nulla a értékek esetén. Tehát az $\dot{x} = ax$ és $\dot{y} = by$ rendszerek, melyekben $a, b \in \mathbb{R}$ pontosan akkor C^0 -ekvivalensek, ha $\text{sgn } a = \text{sgn } b$. (A homeomorfizmus ez esetben lehet az identitás.)



3. ábra. Egyváltozós, folytonos idejű lineáris rendszerek három osztálya.

2.3.2. 2.3.2 Diszkrét idejű eset $n = 1$ dimenzióban

Tekintsük az $x_{n+1} = ax_n$ rekurzióval definiált diszkrét idejű dinamikai rendszert különböző $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ értékek esetén. Megjegyezzük, hogy a $GL(\mathbb{R})$ halmaz azonosítható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazzal. Mivel a rekurzió mértani sorozatot definiál, azért a pályák viselkedése egyszerűen megállapítható. Az alábbi hat osztályt kapjuk a C^0 -ekvivalencia szerint.

1. Ha $a > 1$, akkor pozitív x_0 esetén szigorúan növekvő a sorozat, a 0 instabil fixpont.
2. Ha $a = 1$, akkor minden pont fixpont.
3. Ha $0 < a < 1$, akkor a 0 stabil fixpont, minden megoldás 0-hoz tart monoton csökkenően.
4. Ha $-1 < a < 0$, akkor a 0 stabil fixpont, minden megoldás 0-hoz tart, azonban előjelváltó módon, ezért ez nem ekvivalens az előzővel, mert a homeomorfizmus szakaszt szakaszba visz.
5. Ha $a = -1$, akkor a megoldás oszcillál.
6. Ha $a < -1$, akkor 0 instabil fixpont, azonban a sorozat előjelváltó, így ez nem ekvivalens az $a > 1$ esettel.

Az osztályozás formális igazolásához megadjuk a homeomorfizmust, amely a C^0 -ekvivalenciát adja. Adott $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén keresünk olyan $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ homeomorfizmust, melyre $h(ax) = bh(x)$ teljesül minden x esetén. Keressük a h homeomorfizmust a következő alakban:

$$h(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{ha } x > 0 \\ -(-x)^\alpha & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ha $a, b > 0$ és $x > 0$, akkor a $h(ax) = bh(x)$ egyenletből $a^\alpha x^\alpha = bx^\alpha$, így $a^\alpha = b$, azaz $\alpha = \frac{\ln b}{\ln a}$. A h függvény homeomorfizmus, ha $\alpha > 0$, ez pedig akkor teljesül, ha a és b az 1 ugyanazon oldalán helyezkedik el. Tehát, ha $a, b > 1$, akkor a két rendszer C^0 -konjugált, illetve, ha $a, b \in (0, 1)$, akkor is C^0 -konjugáltak. (Egyszerűen látható, hogy negatív x értékek esetén is fennáll a $h(ax) = bh(x)$ egyenlőség.) Hasonló módon látható, hogy ha $a, b < -1$, akkor a két rendszer C^0 -konjugált, illetve, ha $a, b \in (-1, 0)$, akkor is C^0 -konjugáltak. A fenti $h(x) = |x|^\alpha \operatorname{sgn}(x)$ homeomorfizmus segítségével tehát igazolhatjuk, hogy a C^0 -konjugáltság szerint a $GL(\mathbb{R})$ halmaz legfeljebb hat osztályra bontható. Egyszerűen igazolható, hogy valóban hat osztály van, tehát a fenti különböző osztályok elemei egymással valóban nem C^0 -konjugáltak, azaz nem adható meg más homeomorfizmus, amely egymásba vinné a pályáikat.

2.3.3. 2.3.3 Folytonos idejű eset n -dimenzióban

Tekintsük az $\dot{x} = Ax$ lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ahol A $n \times n$ méretű mátrix. A C^0 -osztályozást a stabil, instabil és centrális alterek segítségével lehet jellemezni, ezek definícióját, és legfontosabb tulajdonságait, foglalkozunk először. Jelölje a mátrix sajátértékeit multiplicitással. Jelölje azt a bázist B -ben, amely a mátrix valós Jordan-normálformáját adja. Ezen bázis általános meghatározása hosszabb előkészítést igényel, azonban a leggyakoribb és a továbbiakban előforduló esetekben a bázis az alábbi módon egyszerűen meghatározható. Ha a sajátértékek valósak és különbözők, akkor a báziselemek éppen a megfelelő sajátvektorok. Ha vannak komplex konjugált sajátérték párok, akkor az ezeknek megfelelő komplex sajátvektor valós és képzetes része van a bázisban. Többszörös sajátértékek esetén az általánosított sajátvektorok kerülnek a bázisba, ha a sajátalter dimenziója kisebb, mint a sajátérték algebrai multiplicitása. Ha például kétszeres sajátérték, de csak egydimenziós sajátalter tartozik hozzá, akkor az általánosított sajátvektort az $(A - \lambda_k I)x = 0$ egyenlet határozza meg, ahol λ_k az egydimenziós sajátalteret kifeszítő (sajátvektor). Megjegyezzük, hogy ekkor olyan v -től független vektor, melyre $(A - \lambda_k I)v = 0$, ugyanis v a sajátvektor. Ezen bázis segítségével az alábbi módon definiálható lineáris rendszerek stabil, instabil és centrális altere.

2.8. Definíció Legyen egy az A valós normálalakját meghatározó bázis $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Jelölje λ_k azt a sajátértéket, amelyhez az u_k bázisvektor tartozik (u_k nem feltétlenül sajátvektor). Az

$$E_s(A) = \langle \{u_k : \operatorname{Re} \lambda_k < 0\} \rangle, \quad E_u(A) = \langle \{u_k : \operatorname{Re} \lambda_k > 0\} \rangle,$$

$$E_c(A) = \langle \{u_k : \operatorname{Re} \lambda_k = 0\} \rangle$$

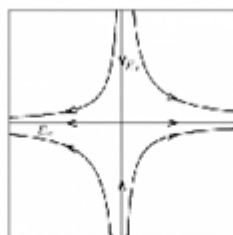
altereket rendre az $\dot{x} = Ax$ lineáris differenciálegyenlet-rendszer stabilis, instabilis, centrális alterének nevezzük. ($\langle \cdot \rangle$ a zárójelben levő vektorok által kifeszített alteret jelöli.)

Ezek legfontosabb tulajdonságai az alábbi tételben foglalhatók össze.

2.9. Tétel Az $E_s(A)$, $E_u(A)$, $E_c(A)$ alterek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

1. $E_s(A) \oplus E_u(A) \oplus E_c(A) = \mathbb{R}^n$
2. Invariánsak A -ra (azaz $A(E_i(A)) \subset E_i(A)$, $i = s, u, c$), és e^{At} -re.
3. Minden $p \in E_s(A)$ esetén $e^{At}p \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow +\infty$, sőt van olyan $K, \alpha > 0$, hogy $|e^{At}p| \leq K e^{-\alpha t} |p|$, ha $t \geq 0$.
4. Minden $p \in E_u(A)$ esetén $e^{At}p \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow -\infty$, sőt van olyan $L, \beta > 0$, hogy $|e^{At}p| \leq L e^{\beta t} |p|$, ha $t \leq 0$.

Az invariáns altereket egyszerűen szemléltethetjük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix által meghatározott nyeregpont esetében. Ekkor a mátrix sajátértékei 1 és -1 , az ezekhez tartozó sajátvektorok pedig $(1, 0)^T$ és $(0, 1)^T$. Így a stabilis alter a függőleges, az instabilis alter pedig a vízszintes koordináta tengely, amint a 4. ábra mutatja.



4. ábra. Nyeregpont esetén a stabilis és instabilis alter egydimenziós.

A C^0 -osztályozásban az invariáns alterek dimenziója fog alapvető szerepet játszani, erre vezetünk be jelöléseket az alábbi definícióban.

2.10. Definíció Az A mátrix stabil alterének dimenzióját jelölje $s(A) = \dim(E_s(A))$, instabil alterének dimenzióját $u(A) = \dim(E_u(A))$, illetve centrális alterének dimenzióját $c(A) = \dim(E_c(A))$.

Egy A mátrix spektrumát, azaz sajátértékeinek halmazát $\sigma(A)$ fogja jelölni. Fontos szerepet fognak játszani az alábbi rendszerek.

$$EL(\mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n) : \operatorname{Re} \lambda \neq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)\},$$

melynek elemeit hiperbolikus mátrixoknak fogjuk nevezni a folytonos idejű esetben.

Először a hiperbolikus rendszerek C^0 -osztályozását fogjuk elvégezni, ehhez szükségünk lesz az alábbi lemmára.

2.11. Lemma

1. Ha $s(A) = n$, akkor az A és $-I$ mátrixok C^0 -konjugáltak.

2. Ha $u(A) = n$, akkor az A és I mátrixok C^0 -konjugáltak.

Bizonyítás. Csak az első állítást igazoljuk, a második következik ebből, ha azt a $-A$ mátrixra alkalmazzuk. Négy lépésben bizonyítunk.

a. Az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenlet p pontból induló megoldása $x(t) = e^{At}p$, az $\dot{y} = -y$ megoldása $y(t) = e^{-t}p$. A kvadrátikus Ljapunov-függvényekről szóló tétel szerint létezik olyan $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív definit szimmetrikus mátrix, hogy a $Q_B(p) = \langle Bp, p \rangle$ kvadrátikus alakra $L_A Q_B$ negatív definit. Jelölje $S := \{p \in \mathbb{R}^n : Q_B(p) = 1\}$, az ezen kvadrátikus alak által meghatározott ellipszoidot.

b. Az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenlet bármely nem nulla megoldása pontosan egyszer metszi az S halmazt, azaz minden $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ponthoz létezik egyetlen $\tau(p) \in \mathbb{R}$, hogy $e^{A\tau(p)}p \in S$. Ugyanis a $V^*(t) = Q_B(e^{At}p)$ függvény minden $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén szigorúan monoton fogyó, és $\lim_{t \rightarrow \infty} V^* = 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} V^* = +\infty$. Nyilván $\tau : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, valamint $\tau(e^{At}p) = \tau(p) - t$.

c. A két rendszer pályáit egymásba képező homeomorfizmus legyen

$$h(p) := e^{(A+I)\tau(p)}p, \quad \text{ha } p \neq 0, \quad \text{és } h(0) = 0.$$

Ennek hatása a következőképpen szemléltethető. A leképezés a p pontot elviszi az S halmazra az $\dot{x} = Ax$ pályáján, majd ezt a pontot ugyanannyi ideig ($\tau(p)$ ideig) visszaviszi az $\dot{y} = -y$ pályáján, lásd az 5. ábrán.

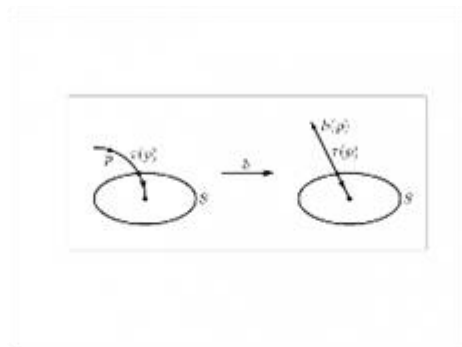
d. Igazoljuk, hogy h homeomorfizmus, és a pályákat egymásba képezi. Az utóbbi azt jelenti, hogy $h(e^{At}p) = e^{-t}h(p)$. Ez $p = 0$ esetén nyilvánvaló, $p \neq 0$ esetén pedig

$$h(e^{At}p) = e^{(A+I)\tau(e^{At}p)}e^{At}p = e^{(A+I)(\tau(p)-t)}e^{At}p = e^{(A+I)\tau(p)}e^{-t}p = e^{-t}h(p).$$

Mivel $L_{-I}Q_B = Q_{-2B}$ negatív definit, azaz $\dot{y} = -y$ pályái az S halmazt csak egyszer metszik, azért h bijekció (az inverze is hasonlóan felírható). A τ függvény folytonossága miatt h és h^{-1} is folytonos a 0 ponton kívül. Tehát már csak a 0-beli folytonosságot kell igazolni. Ehhez megmutatjuk, hogy

$$\lim_{p \rightarrow 0} e^{\tau(p)}e^{A\tau(p)}p = 0.$$

Mivel $e^{A\tau(p)}p \in S$ és S korlátos, azért elég igazolni, hogy $\lim_{p \rightarrow 0} \tau(p) = -\infty$, azaz bármely $\tau > 0$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy legalább δ idő kell amíg egy megoldás az halmazról a $e^{At}p$ gömbbe eljut. Ehhez megmutatjuk, hogy létezik olyan $\alpha > 0$, hogy minden $p \in S$ pontra $\|e^{At}p\| \leq e^{-\alpha t} \|p\|$, azaz a megoldások nullához tartása alulról is korlátozott. (Nyilván ekkor α is alulról becsülhető.) Legyen Q_C az a negatív definit mátrix melyre $Q_C(p) \geq \alpha \|p\|^2$ mátrix negatív, és Q_B mátrix pozitív definitása miatt létezik olyan $\beta > 0$ és $p \in S$ és $Q_B(p) \geq \beta \|p\|^2$ minden $t \geq 0$ esetén. Vezessük be $V(t) = Q_B(e^{At}p)$ és $V^*(t) = Q_C(e^{At}p)$ tetszőleges $p \in S$ függvényt. Ekkor $V'(t) = -\alpha V(t)$, tehát $V(t) = V(0)e^{-\alpha t}$, $V^*(t) = V^*(0)e^{\alpha t}$. Legyen $\alpha < \beta$. Ekkor a Gronwall-lemma legegyszerűbb változata szerint $V(t) \leq V(0)e^{-\alpha t}$, amit igazolni akartunk. [QED]



5. ábra. A h leképezés, amely az $\dot{x} = Ax$ rendszer pályáit az $\dot{y} = -y$ rendszer pályáira képezi le.

Ezen lemma felhasználásával egyszerűen igazolható a hiperbolikus rendszerek osztályozásáról szóló alábbi tétel.

2.12. Tétel Az $A, B \in EL(\mathbb{R}^n)$ hiperbolikus mátrixok pontosan akkor C^0 -konjugáltak és egyben C^0 -ekvivalensek, ha $s(A) = s(B)$. (Ekkor természetesen $u(A) = u(B)$ is igaz, mivel a centrális alterek nulla dimenziósak.)

A nem hiperbolikus rendszerek C^0 -osztályozása az alábbi mély tételen alapszik, ezt bizonyítás nélkül közöljük, a bizonyítás meghaladja ezen jegyzet kereteit.

2.13. Tétel (Kuiper) Legyenek $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ olyan mátrixok, melyekre $c(A) = c(B) = n$. Ezek pontosan akkor C^0 -ekvivalensek, ha lineárisan ekvivalensek.

A fenti két tételből következik az alábbi teljes osztályozás.

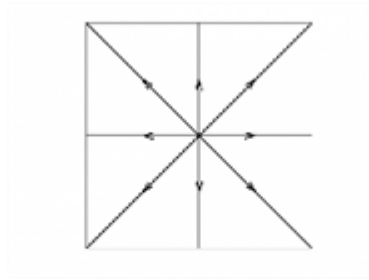
2.14. Tétel Az $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ mátrixok pontosan akkor C^0 -ekvivalensek, ha $s(A) = s(B)$, $u(A) = u(B)$ és a centrális alterükre megszorítva lineárisan ekvivalensek (azaz $A|_{E_c}$ és $B|_{E_c}$ lineárisan ekvivalensek).

2.1. Példa Megmutatjuk, hogy a kétváltozós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek tere, azaz $L(\mathbb{R}^2)$ nyolc osztályra bontható C^0 -ekvivalencia szerint. Az osztályokat a centrális alter dimenziója szerint soroljuk fel.

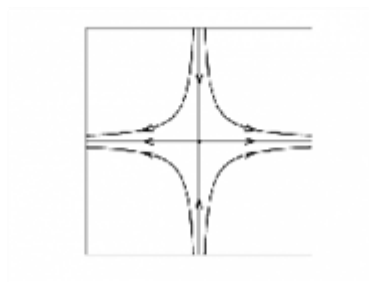
1. Ha $c(A) = 0$, akkor a stabil alter dimenziója 0, 1 vagy 2 lehet így három osztály van. Ezek egy-egy egyszerű reprezentánsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

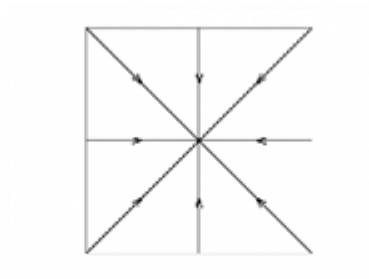
melyek rendre megfelelnek az instabil csomónak, vagy fókusznak, a nyeregnek, illetve a stabil csomónak, vagy fókusznak. (A fókusz és a csomó egymással -konjugáltak.) A fázisképeket a 6., 7., 8. ábrákon láthatjuk.



6. ábra. Instabil csomó.



7. ábra. Nyeregpont.

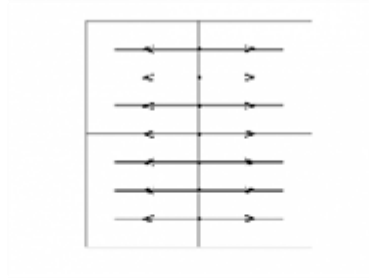


8. ábra. Stabil csomó.

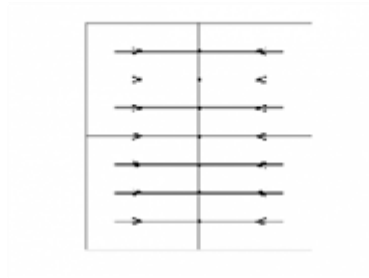
2. Ha $c(A) = 1$, akkor a stabil altér dimenziója 0 vagy 1 lehet, így két osztály van. Ezek egy-egy egyszerű reprezentánsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A fázisképeket a 9. és 10. ábrákon láthatjuk.



9. ábra. Végtelen sok instabil egyensúlyi pont.

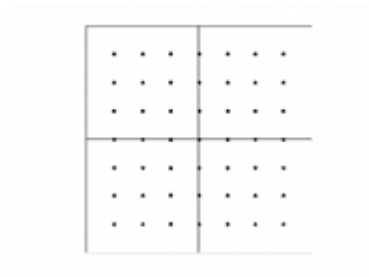


10. ábra. Végtelen sok stabil egyensúlyi pont.

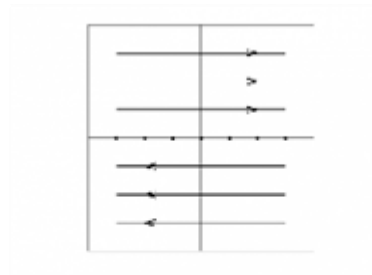
3. Ha $c(A) = 2$, akkor a lineáris ekvivalencia szerinti osztályokat kell meghatározni. Ha a nulla kétszeres sajátérték, akkor két osztályt kapunk, a tiszta képzetes sajátértékekkel rendelkező mátrixok pedig lineárisan ekvivalensek egymással. Így három osztályt kapunk, ezek egy-egy egyszerű reprezentánsa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

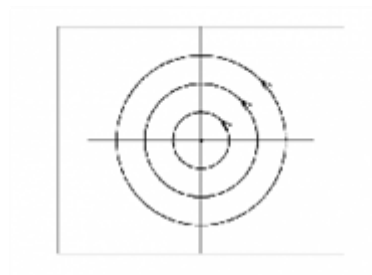
A legutolsó megfelel a centrum pontnak, a másik kettő nem kapott külön elnevezést. A fázisképeket a 11., 12., 13. ábrákon láthatjuk.



11. ábra. Minden pont egyensúlyi pont.



12. ábra. Egy egyenesen elhelyezkedő elfajult egyensúlyi pontok.



13. ábra. Centrumpont.

A fentihez hasonlóan igazolható, hogy a háromváltozós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek tere, azaz $L(\mathbb{R}^3)$ 17 osztályra bontható C^0 -ekvivalencia szerint. Az $L(\mathbb{R}^4)$ halmazzal végtelen sok osztályra bontja a C^0 -ekvivalencia, azaz végtelen sok különböző négy dimenziós lineáris fáziskép van.

2.3.4. 2.3.4 Diszkrét idejű eset n -dimenzióban

Tekintsük az $x_{k+1} = Ax_k$ rekurzióval definiált diszkrét idejű lineáris rendszert, ahol A $n \times n$ méretű mátrix. A C^0 -osztályozást most is a stabil, instabil és centrális alterek segítségével lehet jellemezni, ezek definícióját és legfontosabb tulajdonságait foglaljuk össze először. Jelölje a mátrix sajátértékeit multiplicitással $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Jelölje $u_1, u_2, \dots, u_n$ azt a bázist $\mathbb{R}^n$ -ben, amely a mátrix valós Jordan-normálformáját adja. Ezen bázis segítségével az alábbi módon definiálható lineáris rendszerek stabil, instabil és centrális altere.

2.15. Definíció Legyen egy az A valós normálalakját meghatározó bázis $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Jelölje λ_k azt a sajátértéket, amelyhez az u_k bázisvektor tartozik (u_k nem feltétlenül sajátvektor). Az

$$E_s(A) = \langle \{u_k : |\lambda_k| < 1\} \rangle, \quad E_u(A) = \langle \{u_k : |\lambda_k| > 1\} \rangle,$$

$$E_c(A) = \langle \{u_k : |\lambda_k| = 1\} \rangle$$

altereket rendre az $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ leképezés stabilis, instabilis és centrális alterének nevezzük. ($\langle \cdot \rangle$ a zárójelben levő vektorok által kifeszített alteret jelöli.)

Ezek legfontosabb tulajdonságai az alábbi tételben foglalhatók össze.

2.16. Tétel Az $E_s(A)$, $E_u(A)$, $E_c(A)$ alterek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

1. $E_s(A) \oplus E_u(A) \oplus E_c(A) = \mathbb{R}^n$
2. Invariánsak A -ra (azaz $A(E_i(A)) \subset E_i(A)$, $i = s, u, c$).

3. Minden $p \in E_s(A)$ esetén $A^n p \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow +\infty$.

4. Minden $p \in E_u(A)$ esetén $A^{-n} p \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow +\infty$.

A C^0 -osztályozásban az invariáns alterek dimenziója fog alapvető szerepet játszani, erre vezetünk be jelöléseket az alábbi definícióban.

2.17. Definíció Az A mátrix stabil alterének dimenzióját jelölje $s(A) = \dim(E_s(A))$, instabil alterének dimenzióját $u(A) = \dim(E_u(A))$, illetve centrális alterének dimenzióját $c(A) = \dim(E_c(A))$.

Fontos szerepet fognak játszani az alábbi rendszerek.

$$HL(\mathbb{R}) = \{A \in GL(\mathbb{R}^n) : |\lambda| \neq 1 \forall \lambda \in \sigma(A)\},$$

melynek elemeit szintén hiperbolikus mátrixoknak fogjuk nevezni, de a diszkrét idejű esetben.

A hiperbolikus rendszerek C^0 -osztályozásához fel fogjuk használni az alábbi lemmát.

2.18. Lemma Legyenek az $A, B \in HL(\mathbb{R}^n)$ mátrixok C^0 -konjugáltak, azaz létezik olyan $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, melyre $h(Ax) = Bh(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ekkor

1. $h(0) = 0$,
2. $h(E_s(A)) = E_s(B)$, azaz a h stabil alteret stabil altérbe visz; $h(E_u(A)) = E_u(B)$, azaz h instabil alteret instabil altérbe visz,
3. $s(A) = s(B)$, $u(A) = u(B)$.

Bizonyítás. 1. A $h(Ax) = Bh(x)$ egyenletből az $x = 0$ helyettesítéssel a $h(0) = Bh(0)$ összefüggést kapjuk, melyből $h(0) = 0$, ugyanis a B mátrix hiperbolikus, tehát az 1 nem sajátértéke.

2. Legyen $x \in E_s(A)$, ekkor $A^n x \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$, így $h(A^n x) = B^n h(x)$ miatt $B^n h(x)$ is nullához tart. Ebből az következik, hogy $h(x)$ a B stabil alterében van, tehát azt kaptuk, hogy $h(E_s(A)) \subset E_s(B)$. Hasonló érvelést alkalmazva a h^{-1} függvényre, azt kapjuk, hogy $h^{-1}(E_s(A)) \subset E_s(B)$, melyből $E_s(B) \subset h(E_s(A))$. Mivel mindkét irányú tartalmazás fennáll, azért a két halmaz azonos: $h(E_s(A)) = E_s(B)$.

3. Mivel $E_s(A)$ homeomorfizmussal átvihető az $E_s(B)$ altérbe, azért dimenziójuk egyenlő, azaz $s(A) = s(B)$, melyből $u(A) = u(B)$ is következik, hiszen a centrális alterek nulla dimenziósak. [QED]

Folytonos idejű dinamikai rendszerek esetében azt láttuk, hogy $s(A) = s(B)$ nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is két hiperbolikus rendszer C^0 -konjugáltságának. Vizsgáljuk meg egy egydimenziós és egy kétdimenziós példán, hogy diszkrét idejű esetben is elégséges-e ez a feltétel.

2.2. Példa Tekintsük az $A = \frac{1}{2}$ és $B = -\frac{1}{2}$ számok (1×1 -es mátrixok) által meghatározott lineáris rendszereket. Mindkettőnek egydimenziós a stabil altere, azaz $s(A) = s(B) = 1$, hiszen mindkettőnek nullához tartó mértani sorozatok adják a pályáit. Azonban, amint a 2.3.2. szakasz elején láttuk, a két rendszer egymással nem C^0 -konjugált. Ott megmutattuk, hogy a $GL(\mathbb{R})$ halmazt C^0 -konjugáltság szerint hat osztályra lehet bontani.

Ez a példa tehát azt mutatja, hogy $s(A) = s(B)$ nem elégséges feltétele a C^0 -konjugáltságának. Ennek ellenére érdemes megvizsgálni a kétdimenziós esetet is, mert ebből intuíciót nyerhetünk a hiperbolikus rendszerek osztályozásához.

2.3. Példa Tekintsük az $A = \frac{1}{2}I$ és $B = -\frac{1}{2}I$ mátrixokat, ahol I a 2×2 -es egységmátrix. Mindkettőnek kétdimenziós a stabil altere, azaz C^0 , hiszen mindkettőnek nullához tartó sorozatok adják a pályáit. Megmutatjuk, hogy ezek a rendszerek C^0 -konjugáltak. Olyan homeomorfizmust kell megadni, melyre fennáll minden esetben. A homeomorfizmust úgy adjuk meg, hogy az origó középső köröket önmagukba vigye, és a sugaruktól függő mértékben forgassa el. Induljunk ki az egység sugarú körből, és definiáljuk ezen $h(x)$ -t önkényes módon, mégpedig ezen kör pontjait hagyja helyben a leképezés. Ekkor a 180° egyenlet miatt az egység sugarú körön hatása már meghatározott, nevezetesen ezt a kört $1/4$ kal kell elforgatnia. A két kör közötti gyűrűben ismét önkényesen lehet definiálni a függvényt. Ezután az $1/2$ és $1/4$ sugarú körök közötti gyűrűben a függvényt már a egyenlet definiálja. Ezt követően az $1/4$ és $1/8$ sugarú körök közötti gyűrűben felvett értékek a egyenlet segítségével meghatározzák értékét az $1/8$ és $1/16$ sugarú körök közötti gyűrűben. Hasonlóképpen az $1/16$ és $1/32$ sugarú körök közötti gyűrűben felvett értékek a egyenlet segítségével meghatározzák értékét az $1/32$ és $1/64$ sugarú körök közötti gyűrűben. Könnyen láthatjuk, hogy a $1/2$ sugarú körön a forgatás szöge π . Legyen tehát az $1/2^k$ sugarú körön a forgatás szöge $\pi/2^k$, ezzel a forgatás szöge a sugár folytonos függvénye lesz, és esetén a π szögű forgatást kapjuk. Ezzel tehát a leképezést a teljes síkon definiálhatjuk a fenti eljárással. A függvényt képlettel is meg lehet adni a következőképpen

$$h(x) = R(-\pi \log_2(|x|))x, \quad \text{ahol} \quad R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

A leképezés nyilvánvalóan bijekció, folytonossága csak az origóban szorul bizonyításra, ezt az Olvasóra bizzuk.

Megjegyezzük, hogy 3 dimenzióban az $A = \frac{1}{2}I$ és $B = -\frac{1}{2}I$ mátrixok, ahol I a 3×3 -as egységmátrix, nem C^0 -konjugáltak. Azt láttuk tehát, hogy $s(A) = s(B)$ nem elégséges feltétele a C^0 -konjugáltságnak. Az elégséges feltételt a következő lemmában fogalmazzuk meg.

2.19. Lemma Tegyük fel, hogy $s(A) = s(B) = n$ (vagy $u(A) = u(B) = n$). Ebben az esetben A és B pontosan akkor C^0 -konjugáltak, ha $\text{sgn det } A = \text{sgn det } B$.

Ennek segítségével megadható a pontos feltétel hiperbolikus rendszerek C^0 -konjugáltságára.

2.20. Tétel Az $A, B \in HL(\mathbb{R}^n)$ hiperbolikus leképezések pontosan akkor C^0 -konjugáltak, ha

- $s(A) = s(B)$
- $\text{sgn det } A|_{E_s(A)} = \text{sgn det } B|_{E_s(B)}$
- $\text{sgn det } A|_{E_u(A)} = \text{sgn det } B|_{E_u(B)}$

2.4. Példa A tétel szerint az $A = \frac{1}{2}I$ és $B = -\frac{1}{2}I$ mátrixok, ahol I az $n \times n$ -es egységmátrix, pontosan akkor C^0 -konjugáltak, ha n páros. Ugyanis ekkor a $-I$ mátrixnak is pozitív a determinánsa, míg páratlan n esetén negatív. Amint tehát fent már megmutattuk az

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mátrixok C^0 -konjugáltak.

2.5. Példa A tétel alapján egyszerűen megmutatható, hogy a hiperbolikus mátrixok $HL(\mathbb{R}^2)$ terét a C^0 -konjugáltság nyolc osztályra bontja. Ennek igazolását, valamint az egyes osztályokból egy-egy reprezentáns megkeresését az Olvasóra bizzuk.

2.4. 2.4 Feladatok

1. Az alábbi $L(\mathbb{R}^2)$ mátrixok közül melyik C^1 -konjugált a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixszal?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Válasz: egyik sem.

2. Az alábbi $L(\mathbb{R}^2)$ mátrixok közül melyik C^0 -konjugált a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixszal?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Válasz: C.

3. Az alábbi $L(\mathbb{R}^2)$ mátrixok közül melyik C^0 -ekvivalens a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixszal?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Válasz: C.

4. Az alábbi $L(\mathbb{R}^3)$ mátrixok közül melyik C^0 -ekvivalens a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Válasz: B.

5. Az alábbi $GL(\mathbb{R}^2)$ mátrixok közül melyik C^1 -konjugált a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixszal?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Válasz: egyik sem.

6. Az alábbi $GL(\mathbb{R}^2)$ mátrixok közül melyik C^0 -konjugált a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixszal?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Válasz: C.

7. Az alábbi $L(\mathbb{R}^2)$ mátrixok közül melyik hiperbolikus, azaz melyik van benne az $EL(\mathbb{R}^2)$ halmazban?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Válasz: B.

8. Az alábbi $GL(\mathbb{R}^2)$ mátrixok közül melyik hiperbolikus, azaz melyik van benne a $HL(\mathbb{R}^2)$ halmazban?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Válasz: A.

9. Az alábbi rendszerek közül melyik orbitálisan ekvivalens az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix által meghatározott lineáris differenciálegyenlettel?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x, \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^3 + y_1 y_2^2 \\ -y_1^2 y_2 - y_2^3 \end{pmatrix}$$

Válasz: Az első.

3.3 Lokális osztályozás, normálformaelmélet és a HartmanGrobman-tétel

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

n -dimenziós autonóm rendszert. Ez általában képlettel nem oldható meg, így a legtöbb információt a megoldásokról a fáziskép szolgáltatja. Az $x(t) \equiv p$ konstans megoldásokat az $f(p) = 0$ algebrai egyenletrendszer megoldásával nyerhetjük. Ezen p pontokat nevezzük egyensúlyi, vagy stacionárius pontoknak. A trajektóriák viselkedése az egyensúlyi pontok kis környezetében linearizálással határozható meg. Ez szemléletesen a következőképpen magyarázható. Az $y(t) = x(t) - p$ függvényre a differenciálegyenlet

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(p) + f'(p)y(t) + r(y(t)) = f'(p)y(t) + r(y(t))$$

ahol r a maradéktagot jelöli. Mivel kis y esetén ez kisebb nagyságrendű, mint a lineáris tag (ha az nem túl kicsi, pl. nem zérus), azért várható, hogy a p egyensúlyi pont egy környezetében a fázisképet az

$$\dot{y}(t) = f'(p)y(t) \tag{2}$$

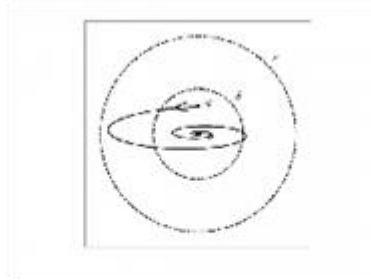
ún. linearizált egyenlet, melynek mátrixát Jacobi-mátrixnak nevezzük, meghatározza. Itt két dolgot kell pontosítani, egyrészt, hogy mi a nem túl kicsi lineáris tag, másrészt, hogy milyen értelemben határozza meg a fázisképet.

Erre vonatkozóan a bevezető Differenciálegyenlet kurzusban az egyensúlyi pont stabilitását vizsgáltuk. Röviden összefoglaljuk az ezzel kapcsolatos eredményeket. Jelölje az (1) rendszer $x(0) = p$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását $t \mapsto \varphi(t, p)$, ennek értelmezési tartományát $I(p)$.

3.1. Definíció Az (1) rendszer $p \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pontját stabilisnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$q \in \mathbb{R}^n, \quad |q - p| < \delta, \quad t \geq 0 \text{ esetén } |\varphi(t, q) - p| < \varepsilon.$$

Az egyensúlyi pontot aszimptotikusan stabilisnak nevezzük, ha stabilis és q fenti választása mellett $t \rightarrow +\infty$ esetén $\|p(t) - p\| \rightarrow 0$, lásd 14. ábra. Az egyensúlyi pontot instabilisnak nevezzük, ha nem stabilis.



14. ábra. Aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont.

Linearizálás segítségével a stabilitás következőképpen dönthető el.

3.2. Tétel

1. Ha az $f'(p)$ mátrix minden sajátértékének negatív a valós része, akkor p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja az (1) rendszernek.
2. Ha az $f'(p)$ mátrixnak van pozitív valósrésű sajátértéke, akkor p instabilis egyensúlyi pontja az (1) rendszernek.

A fenti tétel azon esetekre vonatkozik, amikor a stabil altér n -dimenziós, illetve az instabil altér legalább egy dimenziós. Ennél általánosabb állítás is megfogalmazható, mely szerint a stabil, instabil és centrális altérrel azonos dimenziós invariáns sokaságok léteznek a nemlineáris rendszerben. Ezeket az állításokat nevezik stabil, instabil és centrális sokaság tételnek, melyeket a következő szakaszban tárgyalunk. Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy egy adott rendszer egy pontjához hogyan adható meg egy nála egyszerűbb rendszer, melynek fázisképe topologikusan ekvivalens a vizsgált rendszer fázisképével az adott pont egy környezetében. Ennek pontos megfogalmazásához bevezetjük a lokális ekvivalencia fogalmát.

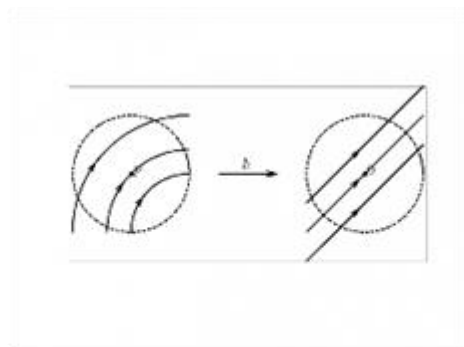
3.3. Definíció Legyenek (M, φ) , (N, ψ) dinamikai rendszerek, $p \in M$, $q \in N$. A φ dinamikai rendszer a p pontban lokálisan C^k -ekvivalens (konjugált) a ψ dinamikai rendszerrel a q pontban, ha van p -nek olyan U környezete, és q -nak olyan V környezete, és $h : U \rightarrow V$ C^k -diffeomorfizmus, amely a pályákat egymásba képezi (az idő megtartásával), és $h(p) = q$.

A lokális vizsgálat alapgondolata az, hogy az f függvény p pont körüli $f(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p) + \dots$ sorfejtésének tagjai meghatározzák a lokális fázisképet. Jelen szakaszban az ezzel kapcsolatos tételeket tárgyaljuk, melyeket vázlatosan az alábbi módon foglalhatunk össze.

- Kiegyenesítési tétel: A nem nulla konstans tag meghatározza a fázisképet.
- HartmanGrobman-tétel: A hiperbolikus lineáris tag meghatározza a fázisképet.
- Normálformák: A rezonáns magasabb fokú tagok meghatározzák a fázisképet.

A Kiegyenesítési tételt itt fogalmazzuk meg, ez tehát a nem egyensúlyi pont körüli lokális viselkedésre vonatkozik. A tétel szerint egy nem egyensúlyi pontban a rendszer lokálisan C^k -konjugált azzal a rendszerrel, melynek pályái párhuzamos egyenesek. A HartmanGrobman-tételt és a normálformákat az alább következő két szakaszban tárgyaljuk.

3.4. Tétel (Kiegyenesítési tétel) Ha $f(p) \neq 0$, akkor $\dot{x} = f(x)$ egyenlet a p pontban és az $\dot{y} = f(p)$ egyenlet az origóban lokálisan C^k -konjugáltak (amennyiben $f \in C^k$). Azaz, ha $f(p) \neq 0$, vagyis p nem egyensúlyi pont, akkor a sorfejtés konstans tagja meghatározza a fázisképet.



15. ábra. Kiegyenesítési tétel.

3.1. 3.1 HartmanGrobman-tétel

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy összefüggő nyílt halmaz, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy C^1 (folytonosan differenciálható) függvény, $p^* \in D$ olyan pont melyre $f(p^*) = 0$. Jelölje az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (3)$$

differenciálegyenlet $x(0) = p$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását $x(t) = \varphi(t, p)$. Használni fogjuk a $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ jelölést, ezzel $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A differenciálegyenletnek p^* egyensúlyi pontja. A HartmanGrobman-tétel lényege, hogy az egyensúlyi pontban a (3) rendszer fázisképe lokálisan topologikusan konjugált a linearizált rendszer fázisképével. Legyen $A = f'(p^*)$ a p^* pontban a Jacobi-mátrix, ekkor a linearizált rendszer

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \quad (4)$$

3.5. Tétel (Hartman-Grobman) Legyenek D , f , p^* olyanok, mint fent, valamint tegyük fel, hogy az A mátrix hiperbolikus, azaz semelyik sajátértéke nem nulla valósrésztű. Ekkor a (3) rendszer a p^* pontban és a (4) rendszer az origóban lokálisan topologikusan konjugáltak. Azaz létezik a p^* pontnak olyan $U \subset \mathbb{R}^n$ környezete, az origónak olyan $V \subset \mathbb{R}^n$ környezete és olyan $h : U \rightarrow V$ homeomorfizmus, melyre

$$h(\varphi(t, p)) = e^{At} h(p) \quad (5)$$

minden $p \in U$ és minden olyan $t \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\varphi(t, p) \in U$. Röviden $h \circ \varphi_t = e^{At} \circ h$.

A tétel bizonyítása a következő lépésekből áll.

1. Megmutatjuk, hogy feltehető $p^* = 0$.
2. Kiterjesztjük az f függvényt az egész $\mathbb{R}^n$ térre úgy, hogy egy adott gömbön kívül megegyezzen a saját lineáris részével. Megmutatjuk, hogy elég a kiterjesztett rendszer és a linearizált rendszer globális topologikus konjugáltságát igazolni. Ezt nevezik a HartmanGrobman-tétel globális változatának.
3. A globális változatot visszavezetjük a leképezésekre vonatkozó (globális) HartmanGrobman-tételre.
4. Bebizonyítjuk a leképezésekre vonatkozó (globális) HartmanGrobman-tételt.

Használni fogjuk az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} B_r &= \{p \in \mathbb{R}^n : |p| < r\} \\ C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &= \{g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : g \text{ folytonos}\} \\ C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &= \{g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : g \text{ folytonosan differenciálható}\} \\ C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &= \{g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : g \text{ folytonos és korlátos}\} \end{aligned}$$

$a \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, illetve $b \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ esetén

$$\|a\|_0 = \sup_{\mathbb{R}^n} |a| \quad \|b\|_1 = \|b\|_0 + \|b'\|_0$$

Mielőtt a bizonyítás lépéseire rátérnénk, megfogalmazzuk az HartmanGrobman-tétel fent említett változatait.

3.6. Tétel (globális Hartman-Grobman-tétel) Legyen $A \in L(\mathbb{R}^n)$ hiperbolikus, $a \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, valamint $f = A + a$. Jelölje most is a (3) rendszer megoldását $\varphi(\cdot, p)$. A rendszernek az origó az egyensúlyi pontja. Ekkor létezik olyan $\nu > 0$ szám, hogy ha az a kompakt tartójú és teljesül rá $\|a\|_1 < \nu$, akkor létezik olyan $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, melyre

$$h(\varphi(t, p)) = e^{At} h(p) \quad (6)$$

minden $p \in \mathbb{R}^n$ és minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

3.7. Tétel (Hartman--Grobman-tétel leképezésekre) Legyen $L \in GL(\mathbb{R}^n)$ hiperbolikus, azaz L olyan mátrix, melynek nincs 0 és 1 abszolútértékű sajátértéke. Ekkor létezik olyan $\mu > 0$ szám, hogy minden olyan $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ függvényhez, melyre $\|F\|_1 < \mu$, létezik egyetlen $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, melyre $H = \text{id} + g$ homeomorfizmus, és

$$H \circ (L + F) = L \circ H. \quad (7)$$

3.1.1. 3.1.1 A bizonyítás 1. lépése

3.1. Állítás Tegyük fel, hogy $p^* = 0$ esetén igaz a HartmanGrobman-tétel. Ekkor tetszőleges p^* esetén igaz.

Bizonyítás. Legyen $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a következő eltolás $l(p) = p - p^*$. Legyen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y(t) = x(t) - p^*$. Ekkor $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(y(t) + p^*)$, azaz y megoldása az

$$\dot{y}(t) = g(y(t)) \quad (8)$$

differenciálegyenletnek, ahol $g = f \circ l^{-1}$. Ennek az egyenletnek az origó egyensúlyi pontja. Jelölje a differenciálegyenlet $y(0) = q$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását $\psi(\cdot, q)$. Egyszerűen látható, hogy $\psi(t, q) = \varphi(t, q + p^*) - p^*$, azaz

$$l \circ \varphi_t = \psi_t \circ l. \quad (9)$$

Mivel a (8) egyenletre a feltevés szerint igaz a HartmanGrobman-tétel, azért van olyan h_1 homeomorfizmus, melyre

$$h_1 \circ \psi_t = e^{At} \circ h_1, \quad (10)$$

ahol $A = g'(0) = f'(p^*)$. Komponáljuk a (10) egyenletet jobbról l -lel, ekkor $h_1 \circ \psi_t \circ l = e^{At} \circ h_1 \circ l$. Alkalmazva a (9) összefüggést $h_1 \circ l \circ \varphi_t = e^{At} \circ h_1 \circ l$. Bevezetve a $h = h_1 \circ l$ jelölést a kívánt állítást kapjuk, mivel h , két homeomorfizmus kompozíciójaként, maga is homeomorfizmus. [QED]

3.1.2. 3.1.2 A bizonyítás 2. lépése

Az alábbi kiterjesztési lemma segítségével bebizonyítjuk, hogy a HartmanGrobman-tétel globális változatából (6. Tétel) következik a lokális (5. Tétel). A lemmát nem bizonyítjuk.

3.8. Lemma Legyen $f \in C^1(B_R, \mathbb{R}^n)$, és legyen $A = f'(0)$. Minden $\nu > 0$ számhoz létezik olyan $r > 0$ és $a \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, melyekre

1. minden $|p| < r$ esetén $a(p) = f(p) - Ap$,
2. minden $|p| > 2r$ esetén $a(p) = 0$,
3. $\|a\|_1 < \nu$.

Bizonyítás.[5 Tétel bizonyítása] A 3.1. Állítás szerint elegendő a tételt $p^* = 0$ esetén igazolni. Legyen $\nu > 0$ a 6. Tételben adott érték (ez csak az A mátrixtól függ). Ehhez a kiterjesztési lemma szerint válasszuk meg az $r > 0$ számot és az $a \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ függvényt. Legyen $\bar{f} = A + a$, és jelölje az $\dot{x}(t) = \bar{f}(x(t))$ differenciálegyenlet megoldását $\bar{\varphi}(\cdot, p)$. Ekkor a B_r gömbön az f és $\bar{f}$ függvények megegyeznek, így $p \in B_r$ és $\varphi(t, p) \in B_r$ esetén $\bar{\varphi}(t, p) = \varphi(t, p)$. Mivel az a függvényre teljesülnek a 6. Tétel feltételei, azért e tétel szerint létezik olyan $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus, melyre $\bar{h} \circ \bar{\varphi}_t = e^{At} \circ \bar{h}$. Ekkor $U = B_r$, $h = \bar{h}|_U$ és $V = h(B_r)$ választással teljesül a bizonyítandó állítás. [QED]

3.1.3. 3.1.3 A bizonyítás 3. lépése

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a leképezésekre vonatkozó HartmanGrobman-tételből (7. Tétel) következik a globális HartmanGrobman-tétel (6. Tétel).

Bizonyítás.[6 Tétel bizonyítása] A konstans variációs formula szerint az $\dot{x}(t) = Ax(t) + a(x(t))$ differenciálegyenlet $x(0) = p$ kezdeti feltételt kielégítő megoldására fennáll

$$\varphi(t, p) = e^{At} p + \int_0^t e^{A(t-s)} a(\varphi(s, p)) ds .$$

Ezt a $t = 1$ esetre alkalmazva

$$\varphi(1, p) = e^A p + \int_0^1 e^{A(1-s)} a(\varphi(s, p)) ds . \quad (11)$$

Legyen

$$L = e^A \quad \text{és} \quad F(p) = \int_0^1 e^{A(1-s)} a(\varphi(s, p)) ds .$$

Válasszuk meg a $\mu > 0$ számot az L mátrixhoz a 7 Tétel szerint. Egyszerűen megmutatható, hogy van olyan $\nu > 0$ szám, melyre $\|a\|_1 < \nu$ esetén $\|F\|_1 < \mu$.

Mivel az A mátrix sajátértékei nem nulla valósrésűek, azért az L mátrix sajátértékei nem egy abszolútértékűek. Így teljesülnek a 7 Tétel feltételei, tehát létezik egyetlen olyan $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, melyre fennáll

$$(\text{id} + g) \circ (L + F) = L \circ (\text{id} + g) . \quad (12)$$

Megmutatjuk, hogy a $h = \text{id} + g$ választással teljesül a bizonyítandó állítás, azaz $h \circ \varphi_t = e^{At} \circ h$. Ehhez elegendő megmutatni, hogy az

$$\alpha(p) = e^{-At} h(\varphi(t, p))$$

képlettel definiált függvény megegyezik a h függvénnyel. Ez viszont fennáll, ha megmutatjuk, hogy az $\alpha - \text{id}$ függvény is teljesíti (12)-t, és igaz $\alpha - \text{id} \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ugyanis a g függvény egyértelmű volt. Ezt a két állítást fogjuk most igazolni.

A (12) egyenlet szerint

$$h(\varphi(1, p)) = e^A h(p)$$

minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén. Így

$$\begin{aligned} [\alpha \circ (L + F)](p) &= \alpha(\varphi(1, p)) = e^{-At} h(\varphi(t, \varphi(1, p))) = e^{-At} h(\varphi(t + 1, p)) = \\ &= e^{-At} h(\varphi(1, \varphi(t, p))) = e^{-At} e^A h(\varphi(t, p)) = e^A e^{-At} h(\varphi(t, p)) = (L \circ \alpha)(p), \end{aligned}$$

tehát az $\alpha - \text{id}$ függvény is teljesíti (12)-t. Másrészt

$$(\alpha - \text{id})(p) = e^{-At} h(\varphi(t, p)) - p = e^{-At} (h(\varphi(t, p)) - \varphi(t, p)) + e^{-At} \varphi(t, p) - p .$$

A jobboldal első tagja azért korlátos (p -ben), mert $h - \text{id}$ korlátos $\mathbb{R}^n$ -en, a második tag pedig azért korlátos, mert nagy $|p|$ esetén $a(p) = 0$, így az egyenlet lineáris, tehát $\varphi(t, p) = e^{At} p$. Ezzel tehát beláttuk, hogy $\alpha - \text{id} \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, amiből a tétel következik. [QED]

3.1.4. 3.1.4 A bizonyítás 4. lépése

Bizonyítás.[7 Tétel bizonyítása]

A bizonyítást öt lépésben végezzük el.

1. Legyen az L mátrix valós Jordan normálformáját előállító bázis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, az ezekhez tartozó sajátértékek legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Legyenek

$$E_s = \text{span}\{e_k : |\lambda_k| < 1\}, \quad E_u = \text{span}\{e_k : |\lambda_k| > 1\}$$

az L mátrixhoz tartozó stabil és instabil alterek. Ezek nyilván invariánsak L -re (azaz $L(E_s) \subset E_s$ és $L(E_u) \subset E_u$), valamint $E_s \oplus E_u = \mathbb{R}^n$. Legyenek

$$L_s = L|_{E_s}, \quad L_u = L|_{E_u} .$$

Megmutatható (most ennek igazolását mellőzzük), hogy az $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bázis megfelelő választásával fennáll $\|L_s\| < 1$ és $\|L_u^{-1}\| < 1$. Legyen

$$r = \max\{\|L_s\|, \|L_u^{-1}\|\} < 1 .$$

2. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy létezik olyan $\mu > 0$ szám, melyre $\|F\|_1 < \mu$ esetén az $L + F$ függvény invertálható. A globális inverzfüggvény tétel alábbi alakját alkalmazzuk.

Globális inverzfüggvény tétel/Legyen $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, melyre minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik $\phi'(p)^{-1}$, és létezik olyan $K > 0$, hogy $\|\phi'(p)\| \leq K$. Ekkor ϕ homeomorfizmus.

Legyen most $\phi = L + F$, ekkor $\phi' = L + F'$. Ezért van olyan $\mu > 0$, melyre $\|F'\|_1 < \mu$ esetén teljesülnek a globális inverzfüggvény tétel feltételei (ezeket itt részletesen nem ellenőrizzük), így $L + F$ homeomorfizmus.

3. Most a (7) egyenletet olyan alakra hozzuk, hogy g meghatározására a Banach-féle fixponttétel alkalmazható legyen.

Egyszerűen látható, hogy a (7) egyenlet ekvivalens az alábbival

$$F + g \circ (L + F) = L \circ g. \quad (13)$$

Komponáljuk ezt az egyenletet először jobbról az $(L + F)^{-1}$ függvénnyel, majd balról az L^{-1} függvénnyel. Ekkor a következő egyenleteket kapjuk

$$g = -F \circ (L + F)^{-1} + L \circ g \circ (L + F)^{-1}, \quad (14)$$

$$L^{-1} \circ F + L^{-1} \circ g \circ (L + F) = g, \quad (15)$$

Mivel $E_s \oplus E_u = \mathbb{R}^n$, azért mind az F , mind a g függvény esetében bevezethetjük az $F_s, g_s : \mathbb{R}^n \rightarrow E_s$, és az $F_u, g_u : \mathbb{R}^n \rightarrow E_u$ függvényeket olyan módon, hogy fennálljon

$$g = g_s + g_u \quad \text{és} \quad F = F_s + F_u.$$

Nyilvánvalóan $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ esetén igaz $g_s, g_u \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is. Defináljuk a T operátort $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ esetén a következőképpen.

$$T(g) = L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1} + L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u. \quad (16)$$

Megmutatjuk, hogy ha g fixpontja a T operátornak, akkor $H = \text{id} + g$ megoldása a (7) egyenletnek. Ugyanis tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1})(p) \in E_s \quad \text{és} \quad (L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u)(p) \in E_u.$$

Így $g = g_s + g_u$ miatt a $T(g) = g$ egyenlet csak úgy állhat fenn, ha az alábbi két egyenlet teljesül

$$L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1} = g_s \quad \text{és} \quad L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u = g_u.$$

Ezekből

$$L \circ g_s = g_s \circ (L + F) + F_s \quad \text{és} \quad L \circ g_u = g_u \circ (L + F) + F_u.$$

Összeadva a két egyenletet és felhasználva L linearitását, a (13) egyenletet kapjuk, amely ekvivalens a (7) egyenlettel.

4. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy megfelelő normát választva a $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ téren a T operátor a teret önmagába képező kontrakció, így a g függvény létezése és egyértelműsége a Banach-féle fixponttételből következik.

Nyilvánvaló, hogy T értelmezve van az egész $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ téren, és bármely $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ esetén a $T(g)$ függvény az egész $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ halmazon értelmezett folytonos függvény. Először megmutatjuk, hogy T korlátos is, azaz a T operátor a $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ teret önmagába képezi. Ugyanis a (16) jobboldalán álló minden tag egy korlátos függvényt definiál. Például az utolsó tag esetében

$$|(L^{-1} \circ F_u)(p)| = |L^{-1} F_u(p)| \leq \|L^{-1}\| \|F\|_0$$

fennáll minden $p \in \mathbb{R}^n$ pontra. Hasonlóan a többi tagra is.

Végül belátjuk, hogy T kontrakció. Legyen $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ esetén

$$\|g\|_* = \|g_s\|_0 + \|g_u\|_0 .$$

Könnyen igazolható, hogy a $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tér ezzel a normával Banach tér. Megmutatjuk, hogy ekkor T kontrakció. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} (T(g))_s &= L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - F_s \circ (L + F)^{-1} , \\ (T(g))_u &= L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) + L^{-1} \circ F_u , \end{aligned}$$

valamint, hogy $g, \bar{g} \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ esetén $(g + \bar{g})_s = g_s + \bar{g}_s$, és $(g + \bar{g})_u = g_u + \bar{g}_u$. Tetszőleges $g, \bar{g} \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ esetén

$$\|T(g) - T(\bar{g})\|_* = \|(T(g) - T(\bar{g}))_s\|_0 + \|(T(g) - T(\bar{g}))_u\|_0 =$$

$$\|L \circ g_s \circ (L + F)^{-1} - L \circ \bar{g}_s \circ (L + F)^{-1}\|_0 + \|L^{-1} \circ g_u \circ (L + F) - L^{-1} \circ \bar{g}_u \circ (L + F)\|_0 =$$

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} |L_s g_s((L + F)^{-1}(p)) - L_s \bar{g}_s((L + F)^{-1}(p))| +$$

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} |L_u^{-1} g_u((L + F)(p)) - L_u^{-1} \bar{g}_u((L + F)(p))| \leq$$

$$\|L_s\| \|g_s - \bar{g}_s\|_0 + \|L_u^{-1}\| \|g_u - \bar{g}_u\|_0 \leq r(\|(g - \bar{g})_s\|_0 + \|(g - \bar{g})_u\|_0) \leq r(\|g - \bar{g}\|_*) .$$

Tehát $r < 1$ miatt T kontrakció, így létezik egyetlen $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fixpontja.

5. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a $H = \text{id} + g$ függvény homeomorfizmus. Ehhez azt használjuk fel, hogy a H függvény inverzére a (7) egyenlethez hasonló egyenlet írható fel, melynek szintén egyértelmű a megoldása. Ugyanis a 3. és 4. pontbelihez hasonlóan igazolható, hogy létezik egyetlen olyan $g^* \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ függvény, melyre

$$(L + F) \circ (\text{id} + g^*) = (\text{id} + g^*) \circ L . \quad (17)$$

Másrészt a (7) egyenletet az $F \equiv 0$ esetre alkalmazva azt kapjuk, hogy az

$$L \circ (\text{id} + g) = (\text{id} + g) \circ L . \quad (18)$$

egyenletnek csak a $g \equiv 0$ függvény a megoldása.

Megmutatjuk, hogy ha $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a (7) egyenlet megoldása, akkor a $H = \text{id} + g$ függvény inverze a függvény. Az (7) és (17) egyenletből

$$L \circ H \circ H^* = H \circ (L + F) \circ H^* = H \circ H^* \circ L .$$

Legyen $\bar{g} = H \circ H^* - \text{id}$. Ezzel tehát $\bar{g}$ a (18) egyenlet megoldása. Ha megmutatjuk, hogy $\bar{g} \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, akkor $\bar{g} \equiv 0$, azaz $\text{id} = H \circ H^*$. Ez pedig következik az alábbiából:

$$\bar{g} = H \circ H^* - \text{id} = (\text{id} + g) \circ (\text{id} + g^*) - \text{id} = g^* + g \circ (\text{id} + g^*) ,$$

mivel a jobboldalon álló függvény nyilván folytonos és korlátos. Hasonlóan igazolható, hogy $\text{id} = H^* \circ H$, így H folytonos bijekció, amiből következik, hogy homeomorfizmus. [QED]

Az alábbi példákkal azt mutatjuk meg, hogy, ha a lineáris rész nem hiperbolikus, akkor előfordulhat, hogy a linearizált rendszer lokális fázisképe különbözik a nemlineáris rendszer lokális fázisképétől.

3.1. Példa Tekintsük az alábbi kétváltozós rendszert.

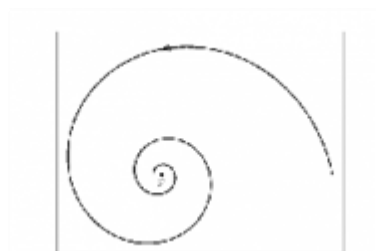
$$\dot{x} = -y - xy^2 - x^3 \quad (19)$$

$$\dot{y} = x - y^3 - x^2y \quad (20)$$

Ennek lineáris része az origóban, mint egyensúlyi pontban az $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix, amely centrum pontot határoz meg, azaz a lineáris rész nem hiperbolikus. Az origó ebben a rendszerben stabilis fókusz, amit polárkoordinátákra való transzformálással egyszerűen igazolhatunk. Vezessük be az r és ϕ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\phi(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\phi(t))$ transzformációs képletekkel. Ezekből

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\phi) - r \dot{\phi} \sin(\phi), \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\phi) + r \dot{\phi} \cos(\phi).$$

Az első egyenletet $\cos(\phi)$ -vel, a másodikat $\sin(\phi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet összeadva és felhasználva a differenciálegyenleteket, az $\dot{r} = -r^3$ differenciálegyenletet kapjuk. Hasonlóképpen az első egyenletet $\sin(\phi)$ -vel, a másodikat $\cos(\phi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet kivonva és felhasználva a differenciálegyenleteket, a $\dot{\phi} = 1$ egyenlethez jutunk. Így az r függvény szigorúan monoton fogyó módon nullához, a ϕ függvény pedig szigorúan növekedően végtelenhez tart, ezért az origó stabil fókusz, amint a 16. ábrán látható.



A (19)-(20) rendszer fázisképe.

3.2. Példa Tekintsük az alábbi kétváltozós rendszert.

$$\dot{x} = -y + xy^2 + x^3 \quad (21)$$

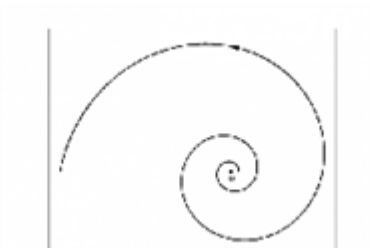
$$\dot{y} = x + y^3 + x^2y \quad (22)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek lineáris része az origóban, mint egyensúlyi pontban az A mátrix, amely centrum pontot határoz meg, azaz a lineáris rész nem hiperbolikus. Az origó ebben a rendszerben instabil fókusz, amit polárkoordinátákra $x(t) = r(t)\cos(\phi(t))$ és $y(t) = r(t)\sin(\phi(t))$ egyszerűen igazolhatunk. Vezessük be ismét az $\dot{r}$ és $\dot{\phi}$ függvényeket az

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\phi) - r\dot{\phi}\sin(\phi), \quad \dot{y} = \dot{r}\sin(\phi) + r\dot{\phi}\cos(\phi).$$

Az első egyenletet $\cos(\phi)$ -vel, a másodikat $\sin(\phi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet összeadva és felhasználva a differenciálegyenleteket $\dot{r} = r^3$. Hasonlóképpen az első egyenletet $\sin(\phi)$ -vel, a másodikat $\cos(\phi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet kivonva és felhasználva a differenciálegyenleteket $\dot{\phi} = 1$. Így az r és ϕ függvény is szigorúan monoton növekedően végtelenhez tart, ezért az origó instabil fókusz, amint a 17. ábrán látható.



A (21)-(22) rendszer fázisképe.

3.2. 3.2 Normálformák

Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -szor folytonosan differenciálható függvény, melyet röviden $f \in C^k$ fog jelölni. Sokszor feltesszük, hogy f akárhányszor differenciálható, ezt $f \in C^\infty$ fogja jelölni, ha pedig f analitikus is, azaz sorba fejthető, tehát sorfejtésének van összege, és az előállítja f -et, akkor az $f \in C^\omega$ jelölést használjuk.

A normálformák levezetésének alapgondolata a következő. Az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlet egyszerűsítése céljából vezessük be az $y(t)$ függvényt az $x = h(y)$ összefüggéssel, ahol h diffeomorfizmus. Ekkor az y függvényre a differenciálegyenlet az alábbi módon kapható meg. Az $x(t) = h(y(t))$ összefüggést deriválva $\dot{x} = h'(y) \cdot \dot{y}$, másrészt $\dot{x} = f(x) = f(h(y))$ miatt $h'(y) \cdot \dot{y} = f(h(y))$, azaz az y függvényre az $\dot{y}(t) = g(y(t))$ differenciálegyenletet kapjuk, ahol az f és g között fennáll

$$h' \cdot g = f \circ h. \quad (23)$$

Ez tehát a 2.5. Állítás szerint azt jelenti, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ és $\dot{y}(t) = g(y(t))$ dinamikai rendszerek C^k -konjugáltak, amennyiben $h \in C^k$. A cél olyan h függvény választása, hogy a g sorfejtésében minél kevesebb tag legyen (ekkor várhatóan egyszerűbb meghatározni az y -ra vonatkozó fázisképet). A h transzformáció segítségével tehát lényegében eltüntetjük a jobboldal sorfejtésének azon tagjait, amelyek nem játszanak szerepet a fáziskép meghatározásában.

A lokális fázisképet egy P egyensúlyi pont körül fogjuk vizsgálni. Előkészítő lépésként toljuk el az egyensúlyi pontot az origóba, és hozzuk a lineáris részt Jordan-normálalakra. Azaz vezessük be az $y = x - p$ új függvényt, erre a differenciálegyenlet $\dot{y} = g(y)$, ahol $g(y) = f(y + p)$. A lineáris rész Jordan-normálalakra hozásához legyen $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix, és vezessük be az új y függvényt az $x = Py$ lineáris transzformációval. Ekkor $P\dot{y} = f(Py)$, azaz $\dot{y} = g(y)$, ahol $g(y) = P^{-1} \cdot f(Py)$. Ekkor az $\dot{y} = g(y)$ rendszer origóbeli Jacobi-mátrixa $g'(0) = P^{-1} \cdot f'(0) \cdot P$ az eredeti $f'(0)$ Jacobi-mátrix Jordan-normálalakjának választható, ha a P mátrixot alkalmasan választjuk. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy az

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ rendszer egyensúlyi pontja az origó, és a linearizálással kapott $f'(0)$ Jacobi-mátrix Jordan-normálalakú.

A továbbiakban célunk a magasabb fokú tagok kitranszformálása, melyet először az egydimenziós esetben mutatunk be. Legyen tehát $f(x) = Ax + a_r \cdot x^r + o(x^r)$, ahol $r \geq 2$ és $o(x^r)$ egy olyan függvényt jelöl, amely csak r -nél magasabb fokú tagokat tartalmaz, azaz x^r -nel osztva nullához tart, amint $x \rightarrow 0$. Keressük a h függvényt $h(x) = x + h_r \cdot x^r$ polinom alakban. Nézzük meg, hogy a (23) összefüggés alapján elérhető-e, hogy a g függvény $g(x) = Ax + o(x^r)$ alakú legyen. Mivel $h'(x) = 1 + r \cdot h_r \cdot x^{r-1}$, azért feltételezve, hogy $g(x) = Ax + o(x^r)$, a (23) bal oldala

$$h'(x)g(x) = Ax + Arh_r x^r + o(x^r),$$

másrészt a (23) jobb oldala

$$f(h(x)) = Ax + Ah_r x^r + a_r x^r + o(x^r).$$

Így a két oldalon szereplő r -ed fokú tagok együtthatóit egyenlővé téve az $Arh_r = Ah_r + a_r$ összefüggést kapjuk, melyből a h függvény ismeretlen h_r együtthatója meghatározható, ha $A \neq 0$

$$h_r = \frac{a_r}{A(r-1)}.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy az egydimenziós esetben, ha a lineáris rész nem nulla, akkor minden magasabb fokú tag kitranszformálható. Pontosabban megfogalmazva a tagok eltüntetése a következőképpen történik. Először egy $H_2(x) = x + h_2 \cdot x^2$ függvényt választunk, melyben $h_2 = a_2/A$. Ekkor a G_2 függvény $G_2(x) = Ax + o(x^2)$ alakú és teljesíti a (23) egyenletet, azaz $H_2' \cdot G_2 = f \circ H_2$. Ezután a $G_2(x) = Ax + b_3 x^3 + o(x^3)$ függvényhez keresünk egy $H_3(x) = x + h_3 \cdot x^3$ függvényt. Ebben $h_3 = b_3/2A$, ekkor $G_3(x) = Ax + o(x^3)$ alakú és teljesíti a (23) egyenletet, azaz $H_3' \cdot G_3 = G_2 \circ H_3$. Legyen most $h = H_2 \circ H_3$, ekkor $h' = (H_2' \circ H_3) \cdot H_3'$, így

$$f \circ h = f \circ H_2 \circ H_3 = (H_2' \cdot G_2) \circ H_3 = (H_2' \circ H_3) \cdot (G_2 \circ H_3) = (H_2' \circ H_3) \cdot H_3' \cdot G_3 = h' \cdot G_3.$$

Tehát $f \circ h = h' \cdot G_3$, ami azt jelenti, hogy a H_2 és H_3 leképezések egymás utáni alkalmazásával kapott h transzformáció mind a másodfokú és a harmadfokú tagokat kitranszformálja az f sorfejtéséből. Az eljárást folytatva, ha a G_{k-1} függvényt, melyben csak $k-1$ -ed és magasabb fokú tagok vannak, már meghatároztuk, akkor a H_k függvény h_k együtthatójának megfelelő választásával elérhető, hogy a

$$H_k' \cdot G_k = G_{k-1} \circ H_k$$

egyenlet által meghatározott G_k függvény sorfejtésében ne legyenek k -nál kisebb fokú tagok. Így végül a $h = H_2 \circ H_3 \circ \dots$ végtelen kompozíció segítségével az összes nemlineáris tag kitranszformálható, azaz fennáll a (23) egyenlet a $g(x) = Ax$ lineáris függvényvel. Itt természetesen kérdés a végtelen kompozíció konvergenciája, melyről a szakasz végén megfogalmazunk egy tételt. A továbbiakban a fenti eljárást kiterjesztjük az n -dimenziós esetre.

Tekintsük tehát az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rendszert, melynek egyensúlyi pontja az origó, és a linearizálással kapott $A = f'(0)$ Jacobi-mátrixról tegyük fel, hogy diagonális. Legyen tehát

$$f(x) = Ax + a(x) + o(x^r),$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonális és $a(x)$ csak r -ed fokú tagokat tartalmaz, azaz $a(x)$

$$e_i \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n}, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n = r$$

alakú tagok lineáris kombinációja, ahol $e_i \in \mathbb{R}^n$ az i -edik egységvektor (i -edik koordinátája 1, a többi koordinátája 0). Például $n = 2$, $r = 2$ esetén $a(x)$ az alábbi térnek eleme:

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tehát az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rendszer az alábbi alakba írható

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + a_{20} x_1^2 + a_{11} x_1 x_2 + a_{02} x_2^2 + o(x^3) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_{20} x_1^2 + b_{11} x_1 x_2 + b_{02} x_2^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

Tetszőleges n és r esetén $a(x)$ a hasonlóan definiált

$$V_r = \text{span} \{ e_i \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n} : m_1 + m_2 + \dots + m_n = r, i = 1, 2, \dots, n \}$$

térnek eleme. Keressük a h homeomorfizmust $h(x) = x + H(x)$ alakban, ahol $H(x) \in V_r$ is r -ed fokú tagok lineáris kombinációja. Célunk a H olyan választása, hogy a (23) egyenlet által meghatározott g függvényre $g(x) = Ax + o(x^r)$ teljesüljön. Írjuk fel a (23) egyenlet bal és jobb oldalát.

$$(f \circ h)(x) = Ax + AH(x) + a(x + H(x)) + o(x^r) = Ax + AH(x) + a(x) + o(x^r)$$

mivel $a(x + H(x)) = a(x) + o(x^r)$, az a sorfejtésének felhasználásával. Másrészt

$$h'(x) \cdot g(x) = (I + H'(x)) \cdot (Ax + o(x^r)) = Ax + H'(x) \cdot Ax + o(x^r).$$

A jobb és bal oldal r -ed fokú tagjainak együtthatóit egyenlővé téve kapjuk a H függvényre vonatkozó, úgynevezett homologikus egyenletet

$$H'(x)Ax - AH(x) = a(x).$$

Vezessük be az $L_A : V_r \rightarrow V_r$ lineáris leképezést, amely egy H függvényhez a homologikus egyenlet bal oldalát rendeli hozzá, azaz

$$(L_A H)(x) = H'(x)Ax - AH(x).$$

A homologikus egyenletnek tehát pontosan akkor van minden $a \in V_r$ esetén egyértelmű megoldása, ha L_A bijekció, azaz fennáll a következő állítás.

3.2. Állítás Ha 0 nem sajátértéke az L_A leképezésnek, akkor az r -ed fokú tagok kitranszformálhatók.

Nézzük meg, hogy hogyan hat az L_A leképezés a V_r fenti megadásában szereplő báziselemekre. Ehhez vezessük be az $x^m = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n}$ jelölést.

3.9. Lemma

$$L_A(e_i x^m) = e_i x^m \left(\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k - \lambda_i \right),$$

ahol az m_k számok az m koordinátái, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az A mátrix diagonálisában álló sajátértékek.

Bizonyítás. Most tehát

$$H(x) = e_i x^m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$AH(x) = e_i x^m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i e_i x^m.$$

Másrészt

$$H'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_1 \frac{x^m}{x_1} & m_2 \frac{x^m}{x_2} & \dots & m_n \frac{x^m}{x_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

és

$$Ax = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix},$$

melyekből

$$H'(x)Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^m \sum_{k=1}^n m_k \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i x^m \sum_{k=1}^n m_k \lambda_k.$$

A fentiekből

$$H'(x)Ax - AH(x) = e_i x^m \left(\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k - \lambda_i \right),$$

amit bizonyítani akartunk. [QED]

A lemma szerint tehát az L_A leképezés sajátértékei a $\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k - \lambda_i$ számok, a sajátvektorai pedig az $e_i x^m$ alakú függvények. Mivel ezek a függvények feszítik ki a V_r teret, azért pontosan annyi sajátértéket találtunk meg, amennyi a V_r tér dimenziója. Így az összes sajátérték $\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k - \lambda_i$ alakban előállítható, ami azt jelenti, hogy amennyiben ezek nem nullák, akkor az L_A leképezés bijekció. Vezessük be ezen sajátértékek alapján a következő fogalmat.

3.10. Definíció Az A mátrix sajátértékeit rezonánsoknak nevezzük, ha van olyan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, és vannak olyan $m_1, m_2, \dots, m_n$ nem negatív egészek, melyekre $m_1 + m_2 + \dots + m_n \geq 2$ és $\lambda_i = \sum_{k=1}^n m_k \lambda_k$. Amennyiben ez fennáll, akkor az $e_i x^m$ tagot rezonáns tagnak hívják.

Ha tehát az A mátrix sajátértékeit nem rezonánsak, akkor az L_A leképezés bijekció. Ez pedig azt jelenti, hogy megadható diffeomorfizmusok olyan sorozata, melyek kompozíciójával az eredeti rendszer a saját lineáris részével C^k -konjugált, sőt C^∞ -konjugált. A végtelen kompozíció konvergenciája megfelelő feltételek mellett igazolható, ezt fogalmazzuk meg az alábbi tételben.

3.11. Tétel (Poincaré tétele)

1. Ha A sajátértékei nem rezonánsak, akkor az $\dot{x} = f(x)$ egyenletből minden tag kitranszformálható, azaz formálisan megadható olyan transzformáció, mellyel a rendszer ekvivalens az $\dot{y} = Ay$ lineáris rendszerrel, ahol $A = f'(0)$.
2. Ha A sajátértékei nem rezonánsak és a sajátértékek halmazának konvex burka nem tartalmazza 0-t $\mathbb{C}$ -ben, akkor $\dot{x} = f(x)$ és $\dot{y} = Ay$ az origóban lokálisan C^∞ -konjugált.

3.3. Példa Ha a rendszer $n = 2$ dimenziós, akkor másodfokú rezonáns tagok a következőképpen fordulhatnak elő.

$$\begin{aligned} m &= (0, 2), & 0 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 &= \lambda_1 \text{ v. } \lambda_2 \\ m &= (1, 1), & 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 &= \lambda_1 \text{ v. } \lambda_2 \\ m &= (2, 0), & 2 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 &= \lambda_1 \text{ v. } \lambda_2 \end{aligned}$$

Ha például $\lambda_1 = 0$ vagy $\lambda_2 = 0$, akkor az $m = (1, 1)$ választással rezonanciát kapunk, azaz az $x_1 x_2$ tagot nem lehet kitranszformálni.

3.3.3 Feladatok

1. Ha a rendszer $n = 2$ dimenziós, és az A mátrix sajátértékei $\pm i$, akkor az alábbi tagok közül melyek rezonánsak?

$$(A) \quad x_1 x_2, \quad (B) \quad x_1^2, \quad (C) \quad x_1 x_2^2$$

Válasz: (C).

2. Ha a rendszer $n = 2$ dimenziós, és az A mátrix sajátértékei ± 1 , akkor az alábbi tagok közül melyek rezonánsak?

$$(A) \quad x_1 x_2, \quad (B) \quad x_1^2, \quad (C) \quad x_1 x_2^2$$

Válasz: (C).

4. 4 Stabil, instabil és centrális sokaság tétel

Lineáris rendszerek esetében bevezettük a stabil, instabil és centrális altereket a 2.8. Definícióban. Ezen alterek invariánsak, azaz a trajektóriák nem hagyják el azokat. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy nemlineáris rendszerek esetében ezen alterek szerepét a stabil, instabil és centrális sokaság veszi át. A stabil és instabil sokaság tétel bizonyítása technikailag egyszerűbb, az első szakaszban ezekkel fogunk foglalkozni, a centrális sokaság tételt külön szakaszban tárgyaljuk.

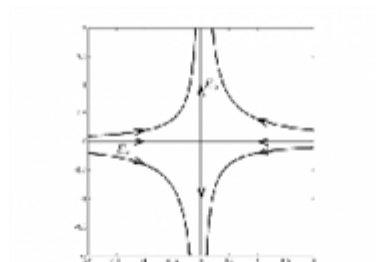
4.1. 4.1 Stabil és instabil sokaság tétel

A tétel szemléletes megértéséhez először vizsgáljuk meg az alábbi két egyszerű rendszert.

- 4.1. Példa Tekintsük a nyeregpontot meghatározó

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2\end{aligned}$$

lineáris rendszert. Ebben a stabil altér, E_s , a vízszintes koordináta tengely, az instabil altér, E_u , pedig a függőleges tengely, amint a 18. ábrán láthatjuk. Vegyük észre, hogy az E_s és E_u altereken kívül nincs más olyan egydimenziós altér, azaz origón áthaladó egyenes, amelyet a pályák nem hagynak el, azaz invariáns lenne.



A stabil és instabil alterek a 4.1 példában.

Az alábbi példa azt mutatja, hogy a fenti lineáris rendszer kis nemlineáris perturbációja hogyan változtatja meg az invariáns altereket.

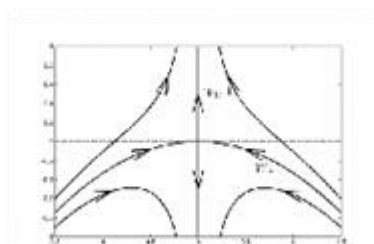
- 4.2. Példa Tekintsük az

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2\end{aligned}$$

nemlineáris rendszert. Az első egyenlet független a másodiktól, megoldása $x_1(t) = e^{-t}c_1$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe, inhomogén lineáris egyenletet kapunk, melyet meg lehet oldani: $x_2(t) = e^t \cdot c_2 + \frac{1}{3}(e^t - e^{-t})$. Ezek a megoldások teljesítik az $x_1(0) = c_1$, $x_2(0) = c_2$ kezdeti feltételt. Vegyük észre, hogy amennyiben a kezdeti feltétellel $x_2(0) + \frac{c_1^2}{3} = 0$ fennáll, akkor minden t időpontban igaz. Azaz a

$$W_s = \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 : c_2 + \frac{c_1^2}{3} = 0\}$$

halmaz invariáns, a pályák nem hagyják el. Az ezen halmazból induló trajektóriák az origóhoz tartanak, ezt fogjuk stabil sokaságnak hívni, hiszen ez vette át a stabil altér szerepét. Az instabil sokaságot egyszerűbb meghatározni, hiszen a függőleges koordinátatengely invariáns, és ezen a trajektóriák végtelenhez tartanak, tehát az invariáns sokaság ez esetben a $W_u = \{(0, c_2) \in \mathbb{R}^2 : c_2 \in \mathbb{R}\}$ altér. Az invariáns sokaságokat a 19. ábra mutatja.



A stabil és instabil sokaságok a 4.2 példában.

4.1.1. 4.1.1 Általános eset

A fenti motiváló példák után térjünk rá most az általános eset tárgyalására. A sokaság fogalmának technikai részleteit szeretnénk elkerülni, ezért a sokaságokat függvény grafikonnal fogjuk helyettesíteni. Megjegyezzük, hogy a sokaság a görbe és a felület fogalmát általánosítja, így az absztrakt fogalom helyett gondolhatunk ezekre, az érdeklődő Olvasónak ajánljuk Perko könyvének [16] 2.7. fejezetét.

Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, melyre $f(0) = 0$. Az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet-rendszernek tehát az origó egyensúlyi pontja, egy p pontból induló megoldást szokott módon jelöljön $\varphi(t, p)$. Tegyük fel, hogy az $f'(0)$ Jacobi-mátrixnak nincs nulla valósrésztű sajátértéke, az E_s és E_u stabil és instabil alterei pedig k , illetve $n - k$ dimenziósak.

4.1. Tétel (Stabil és instabil sokaság tétel) Megadható az origónak egy U környezete, valamint vannak olyan $\Psi : E_s \cap U \rightarrow E_u$ és $\Phi : E_u \cap U \rightarrow E_s$ folytonosan differenciálható függvények, melyekkel a

$$W_s^{loc} = \{(q, \Psi(q)) \in \mathbb{R}^n : q \in E_s \cap U\} \quad \text{és} \quad W_u^{loc} = \{(r, \Phi(r)) \in \mathbb{R}^n : r \in E_u \cap U\}$$

k -dimenziós lokális stabil sokaság és $n - k$ dimenziós lokális instabil sokaság rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal. (Megjegyezzük, hogy a fenti q és $\Phi(r)$ vektornak k koordinátája, az r és $\Psi(q)$ vektornak pedig $n - k$ koordinátája van.)

1. W_s^{loc} pozitívan invariáns, W_u^{loc} negatívan invariáns.
2. Az origóban W_s^{loc} érinti az E_s alteret, W_u^{loc} pedig az E_u alteret.
3. Ha $p \in W_s^{loc}$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p) = 0$.

4. Ha $p \in W_u^{loc}$, akkor $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, p) = 0$.

Bizonyítás. Elegendő a stabil sokaságra vonatkozó állításokat igazolni, ugyanis az $\dot{x} = -f(x)$ egyenlet stabil sokasága megegyezik az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet instabil sokaságával. A tétel stabil sokaságra vonatkozó részét három lépésben bizonyítjuk.

1. Lépés

Először a lineáris részt Jordan-normálalakra transzformáljuk. Az $f'(0)$ mátrix Jordan-normálalakja:

$$J = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

ahol $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ minden sajátértéke negatív valósrésztű, és $C \in \mathbb{R}^{n-k \times n-k}$ minden sajátértéke pozitív valósrésztű. Jelölje P azt a mátrixot, amely az $f'(0)$ mátrixot Jordan-normálalakra hozza, azaz $Pf'(0)P^{-1} = J$. Vezessük be az $\tilde{x} = Px$ új változót. Ekkor

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= P\dot{x} = Pf(x) = Pf'(0)x + P(f(x) - f'(0)x) = \\ &= Pf'(0)P^{-1}\tilde{x} + P(f(P^{-1}\tilde{x}) - f'(0)P^{-1}\tilde{x}) \end{aligned}$$

azaz

$$\dot{\tilde{x}} = J\tilde{x} + a(\tilde{x}), \tag{24}$$

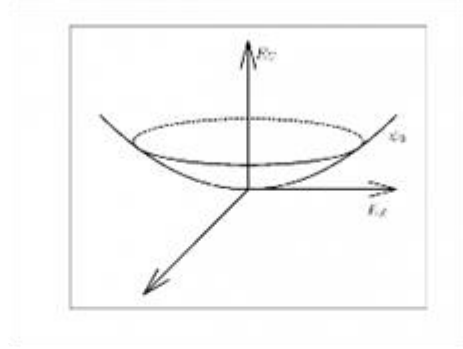
ahol $a(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ és $a'(0) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A továbbiakban tekintsük az $\tilde{x}$ függvényre vonatkozó egyenletet. Erre az egyenletre vonatkozóan

$$\tilde{E}_s = \{p \in \mathbb{R}^n : p_{k+1} = p_{k+2} = \dots p_n = 0\}, \quad \tilde{E}_u = \{p \in \mathbb{R}^n : p_1 = p_2 = \dots p_k = 0\}.$$

Tehát a (24) egyenletre vonatkozóan az $\mathbb{R}^n$ teret felbonthatjuk egy k dimenziós altér és egy $n - k$ dimenziós altér direkt összegére. A stabil sokasághoz meg fogunk adni olyan k változós $\psi_{k+1}, \psi_{k+2}, \dots, \psi_n : E_s \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényeket, hogy a

$$\begin{aligned} \tilde{W}_s^{loc} &= \{(p_1, p_2, \dots, p_k, \psi_{k+1}(p_1, \dots, p_k), \dots, \psi_n(p_1, \dots, p_k)) : \\ &\quad (p_1, \dots, p_k, 0, \dots, 0) \in E_s \cap U\} \end{aligned}$$

halmaz pozitívan invariáns legyen, és a belőle induló trajektóriák az origóhoz tartanak. A 20. ábrán az $n = 3$, $k = 2$ esetben a ψ_3 függvényt láthatjuk, melynek grafikonja a két dimenziós stabil sokaságot adja meg.



20. ábra. A stabil sokaságot $n = 3$ és $k = 2$ esetén a ψ_3 függvény grafikonja határozza meg.

Mivel az új és régi változót az $\tilde{x} = Px$ összefüggés köti össze, azért a (24) egyenlethez tartozó $\tilde{W}_s^{loc}$ lokális stabil sokaságból a $P^{-1}\tilde{W}_s^{loc} = W_s^{loc}$ lineáris transzformációval kapjuk az eredeti egyenlet lokális stabil sokaságát. Tehát elegendő a Jordan-normálalakú lineáris résszel rendelkező (24) egyenlet esetében igazolni a tételt. A továbbiakban ezért ezt az egyenletet tekintjük, és $\tilde{W}_s^{loc}$ helyett a W_s^{loc} jelölést használjuk.

2. Lépés

Mivel a (24) rendszer direkt összeg alakú, azért célszerű az alábbi jelölések bevezetése. Tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén legyen $v = v_s + v_u$, ahol

$$v_s = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Legyen továbbá

$$J_s = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Ha x megoldása a (24) rendszernek és $a = a_s + a_u$, akkor az x_s és x_u függvényekre fennáll

$$\dot{x}_s = J_s x_s + a_s(x) \quad (25)$$

$$\dot{x}_u = J_u x_u + a_u(x). \quad (26)$$

Alkalmazzuk a konstans variációs formulát a (24) egyenletre, ekkor

$$x(t) = e^{Jt}p + \int_0^t e^{J(t-\tau)} a(x(\tau)) d\tau,$$

melyben

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{Bt} & 0 \\ 0 & e^{Ct} \end{pmatrix}.$$

A konstans variációs formulát alkalmazhatjuk a (25) és (26) egyenletre is.

$$x_s(t) = e^{J_s t} p_s + \int_0^t e^{J_s(t-\tau)} a(x(\tau)) d\tau \quad (27)$$

$$x_u(t) = e^{J_u t} p_u + \int_0^t e^{J_u(t-\tau)} a(x(\tau)) d\tau, \quad (28)$$

ahol

$$e^{J_s t} = \begin{pmatrix} e^{Bt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad e^{J_u t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Ct} \end{pmatrix},$$

ezért $e^{J_s t} a_u = 0$, azaz $e^{J_s t} a_s = e^{J_s t} a$, és hasonló módon $e^{J_u t} a_s = 0$ miatt $e^{J_u t} a_u = e^{J_u t} a$.

A stabil sokaság egy $p = p_s + p_u$ pontjában $p_s = (p_1, p_2, \dots, p_k, 0, \dots, 0)^T$,

$$p_u = (0, \dots, 0, \psi_{k+1}(p_1, \dots, p_k), \dots, \psi_n(p_1, \dots, p_k))^T,$$

és ez utóbbiakat úgy kell megválasztani a $p_1, p_2, \dots, p_k$ számokhoz, hogy a p pontból induló megoldás az origóhoz tartson $t \rightarrow \infty$ esetén, azaz fennálljon $\lim_{t \rightarrow \infty} x_u(t) = 0$. A (28) képlet alapján ez akkor állhat fenn, ha $p_u + \int_0^\infty e^{-J_u \tau} a(x(\tau)) d\tau = 0$, mivel a J_u mátrixban szereplő C mátrix sajátértékei pozitív valósrésűek, így $e^{J_u t}$ normája végtelenhez tart. A p_u vektor ilyen választása mellett

$$x_u(t) = -e^{J_u t} \int_t^\infty e^{-J_u \tau} a(x(\tau)) d\tau.$$

Helyettesítsük ezt be az $x = x_s + x_u$ összefüggésbe, ekkor

$$x(t) = e^{J_s t} p_s + \int_0^t e^{J_s(t-\tau)} a(x(\tau)) d\tau - \int_t^\infty e^{J_u(t-\tau)} a(x(\tau)) d\tau. \quad (29)$$

A 3. Lépésben megmutatjuk, hogy az origó egy alkalmas U környezetét választva, minden $p_s \in E_s \cap U$ pont esetén a fenti egyenletnek van x megoldása. Ezután legyen $\psi_j(p_1, p_2, \dots, p_k) := x_j(0)$, $j = k+1, \dots, n$. Az ezen függvények segítségével definiált W_s^{loc} stabil altérre pedig teljesülnek a tételben megfogalmazott állítások, ugyanis egy szintén a 3. Lépésben igazolandó becslés alapján, ha $p \in W_s^{loc}$, akkor a (29) megoldásaként kapott x függvényre $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, azaz $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p) = 0$. Másrészt a (29) fenti levezetéséből látható, hogy $p \notin W_s^{loc}$ esetén $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p) = 0$ nem teljesülhet, ezért W_s^{loc} pozitívan invariáns. Ugyanis, ha egy $p \in W_s^{loc}$ pontból induló megoldás elhagyná a W_s^{loc} halmazt, akkor nem tarthatna nullához $t \rightarrow \infty$ esetén.

3. Lépés

Igazoljuk, hogy ha a $p_s \in E_s$ pont elég közel van az origóhoz, akkor van olyan x függvény, amelyre fennáll a (29) egyenlet, és erre a függvényre $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Az x függvény létezését szukcesszív approximációval bizonyítjuk. Vezessük be a folytonos, korlátos függvények $X = C_b([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ terét, és azon az $\|x\| = \sup_{[0, +\infty)} |x|$ normát. A (29) egyenlet jobb oldalán szereplő kifejezés alapján vezessük be a $T : X \rightarrow X$

$$(T(x))(t) = e^{J_s t} p_s + \int_0^t e^{J_s(t-\tau)} a(x(\tau)) d\tau - \int_t^\infty e^{J_u(t-\tau)} a(x(\tau)) d\tau$$

operátort. Nyilvánvaló, hogy T az egész X téren értelmezve van, és egyszerűen igazolható, hogy az X térbe képez. Azt kell igazolnunk, hogy a T leképezésnek van fixpontja, amely tehát megoldása a (29) egyenletnek.

Legyen $x_0 \in X$, $x_0 \equiv 0$, és képezzük az $x_{n+1} = T(x_n)$ rekurzióval az $(x_n) \subset X$ függvénysorozatot. Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{K|p_s|e^{-\alpha t}}{2^n},$$

ahol $K > 0$ és $\alpha > 0$ olyan számok, melyekkel minden $t \geq 0$ esetén fennállnak az

$$\|e^{J_s t}\| \leq K e^{-(\alpha+\sigma)t}, \quad \|e^{-J_s t}\| \leq K e^{-\sigma t}$$

becslések, melyekben $\sigma > 0$. Ebből következik, hogy $(x_n) \subset X$ Cauchy-sorozat, így mivel X teljes metrikus tér, azért konvergál egy $x \in X$ függvényhez. Igazolható, hogy T folytonos, ezért az $x_{n+1} = T(x_n)$ rekurzióból $n \rightarrow \infty$ esetén azt kapjuk, hogy $x = T(x)$, azaz megkaptuk a kívánt fixpontot. Ezenkívül belátható, hogy $\|x_n(t)\| \leq C e^{-\alpha t}$ minden $t \geq 0$ esetén, így ugyanez teljesül az x függvényre is, ami a nullához tartását igazolja. [QED]

4.1.2. 4.1.2 Globális sokaságok

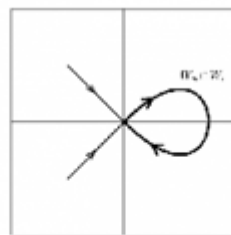
A W_s^{loc} és W_u^{loc} sokaság segítségével definiálhatjuk a globális sokaságokat. Ezek rendszerint már nem adhatók meg függvénygrafikonként, ezért a továbbiakban sokaságként hivatkozunk rájuk. A stabil sokaságot úgy definiáljuk, hogy a belőle induló trajektóriák az origóhoz tartanak. Mivel az origóhoz tartó pályák az origó közelében a lokális stabil sokaságban haladnak, azért a globális stabil sokaságot célszerű a következőképpen definiálni.

$$W_s := \bigcup_{t \leq 0} \varphi(t, W_s^{loc}).$$

Az instabil sokaságot úgy határozzuk meg, hogy a belőle induló pályák $t \rightarrow -\infty$ esetén tartanak az origóhoz. Mivel az ilyen pályák az origó közelében a lokális instabil sokaságban haladnak, azért az instabil sokaságok a következőképpen definiáljuk.

$$W_u := \bigcup_{t \geq 0} \varphi(t, W_u^{loc}).$$

A globális stabil és instabil sokaságnak közös része is lehet, egy ilyen példát mutat a 21. ábra. Az ezen bemutatott rendszernek homoklinikus pályája van, amely mind a stabil, mind az instabil sokaságnak része.



21. ábra. Homoklinikus pálya, amely a stabil és instabil sokaság közös része.

4.2. 4.2 Centrális sokaság tétel

A centrális sokaság tétel megfogalmazása előtt vizsgáljuk meg a következő példát.

4.3. Példa Tekintsük az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy + x^3 \\ \dot{y} &= -y - 2x^2\end{aligned}$$

rendszert, és vizsgáljuk a lokális fázisképet a $(0, 0)$ pont környezetében. A linearizálással kapott Jacobi-mátrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ennek sajátértékei 0 és -1 . Az origó tehát nem hiperbolikus egyensúlyi pont, így a lokális fáziskép linearizálással nem határozható meg. Mivel van egy negatív sajátérték, azért a stabil sokaság tétele szerint az origóban a rendszernek van egy egydimenziós stabil sokasága, amelyben a pályák az origóhoz tartanak. A fejezet végén meg fogjuk mutatni, hogy a 0 sajátértékhez tartozó sajátalteret érinti egy invariáns centrális sokaság, amelyben a pályák viselkedése egy egyszerű egyváltozós rendszer vizsgálatával eldönthető.

4.2.1. 4.2.1 Általános megközelítés

Tekintsünk ismét egy $\dot{x} = f(x)$ alakú általános autonóm rendszert, melyről feltesszük, hogy az origó egyensúlyi pontja, azaz $f(0) = 0$, $f'(0) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ahol B sajátértékei 0 valósrésztűek, C sajátértékei pedig nem 0 valósrésztűek. A rendszer tehát az $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ jelöléssel az alábbi alakba írható.

$$\dot{y} = By + g(y, z) \quad (30)$$

$$\dot{z} = Cz + h(y, z), \quad (31)$$

ahol feltételezzük, hogy g és h deriváltja az origóban zérus.

4.2. Tétel (Centrális sokaság tétele) Létezik az origónak egy olyan U környezete és létezik olyan $\psi : E_c \cap U \rightarrow E_s \oplus E_u$ differenciálható leképezés, melyre fennállnak az alábbiak.

1. $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$.
2. A $W_c^{loc} = \{(p_c, \psi(p_c)) : p_c \in E_c \cap U\}$ lokális centrális sokaság lokálisan invariáns, azaz ha $p \in W_c^{loc}$ és $\varphi(t, p) \in U$, akkor $\varphi(t, p) \in W_c^{loc}$.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása a technikai nehézségek miatt meglehetősen hosszú, itt csak az alapgondolatát

ismertetjük vázlatosan Chow és Hale könyve [6] alapján. Tekintsünk egy $(p_c, \psi(p_c))$ pontból induló $\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ megoldást. Erre az invariancia miatt fennáll

$$\dot{y} = By + g(y, \psi(y)) \quad (32)$$

$$\dot{z} = Cz + h(y, \psi(y)). \quad (33)$$

A második egyenletre alkalmazzuk a konstans variációs formulát a $t = \tau$ kezdőpontot választva.

$$z(t) = e^{C(t-\tau)} \cdot z(\tau) + \int_{\tau}^t e^{C(t-s)} h(y(s), \psi(y(s))) ds$$

Legyen $\tau < 0$ és helyettesítsünk $t = 0$ értéket a képletbe.

$$\psi(p_c) = z(0) = e^{-C\tau} \cdot z(\tau) + \int_{\tau}^0 e^{-Cs} h(y(s), \psi(y(s))) ds \quad (34)$$

Tekintsük azt az esetet, amikor C sajátértékei negatív valósrésztűek. (Az általános eset hasonló módon tárgyalható.) Mivel a centrális sokaságban haladó megoldásokra időben visszafelé haladva értéke nem tarthat végtelenhez, azért

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{-C\tau} z(\tau) = 0,$$

így a (34) egyenletből

$$\psi(p_c) = \int_{-\infty}^0 e^{-Cs} h(y(s), \psi(y(s))) ds.$$

Adott ψ függvény esetén tehát képezzük a (32) differenciálegyenlet megoldását az $y(0) = p_c$ kezdeti feltétellel, majd ennek segítségével definiáljuk az alábbi operátort.

$$(T(\psi))(p_c) = \int_{-\infty}^0 e^{-Cs} h(y(s), \psi(y(s))) ds.$$

Erről igazolható, hogy egy megfelelően választott Banach-téren kontrakció, így a Banach-féle fixponttétel szerint van fixpontja, amely a kívánt ψ függvényt adja. [QED]

A centrális sokaság tétel az alábbi következménye, a redukciós tétel, segítségével alkalmazható a lokális fáziskép meghatározására. A tétel bizonyítása Carr [3] könyvében található meg.

4.3. Tétel (Redukciós tétel) Tekintsük a (30)-(31) rendszert, amely teljesíti a fent megadott feltételeket. Legyen ψ az origóban a centrális sokaságot meghatározó függvény. Vezessük be az ún. centrális sokaság redukcióval az alábbi rendszert.

$$\dot{u} = Bu + g(u, \psi(u)) \quad (35)$$

$$\dot{v} = Cv, \quad (36)$$

ahol tehát a hiperbolikus részben a lineáris részt használjuk. Ekkor a (30)-(31) rendszer és a (35)-(36) rendszer lokálisan topologikusan ekvivalens az origóban.

4.1. Megjegyzés Ez a tétel a Hartman-Grobman-tétel általánosítása olyan esetre, amelynél a lineáris rész nem hiperbolikus. A tétel dimenziócsökkentést tesz lehetővé, hiszen az u függvényre vonatkozó, alacsonyabb dimenziós rendszer fázisképének meghatározásával a teljes rendszer fázisképe meghatározható, mivel a v függvényre vonatkozó hiperbolikus lineáris rendszer fázisképe egyszerűen vizsgálható.

A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy a redukciós tétel praktikusán hogyan alkalmazható a lokális fáziskép vizsgálatára.

4.2.2. 4.2.2 A centrális sokaság approximációja

A redukciós tétel alkalmazásához ismerni kell a centrális sokaságot megadó ψ függvényt, amelyet explicit módon kivételes esetektől eltekintve nem tudunk kiszámítani. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a centrális sokaság közelítő kiszámítása is elegendő a fáziskép jellemzéséhez.

Válasszunk egy centrális sokaságon haladó $x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ megoldást. Erre az invariancia miatt fennáll $z(t) = \psi(y(t))$, melyet differenciálva $\dot{z} = \psi'(y) \cdot \dot{y}$. Így

$$\dot{z} = Cy + h(y, \psi(y)) = \psi'(y) \cdot (By + g(y, \psi(y))) \quad (37)$$

egy újabb egyenletre ψ függvényre. Bár a Banach-féle fixponttétel alkalmazására ez nem ad lehetőséget, arra alkalmas, hogy a sorfejtésének tagjait ennek segítségével meghatározzuk. Az alábbi approximációs tétel szerint, ha a fenti egyenlet valamilyen r -ed rendű tagig fennáll egy ψ függvényre, akkor ez a függvény r -ed rendben közelíti a ψ függvényt.

4.4. Tétel (Centrális sokaság approximációja) Legyen $\tilde{\psi} : E_c \cap U \rightarrow E_s \oplus E_u$ olyan függvény, melyre

1. $\tilde{\psi}(0) = 0, \tilde{\psi}'(0) = 0$.

2. (37) teljesül r -ed rendben.

Ekkor $|\psi(y) - \tilde{\psi}(y)| = O(|y|^r)$, azaz ψ és $\tilde{\psi}$ sorfejtése r -ed rendben megegyezik.

Az eddigi eredmények alkalmazásaként tekintsük ismét a szakasz elején bemutatott példát.

4.4. Példa

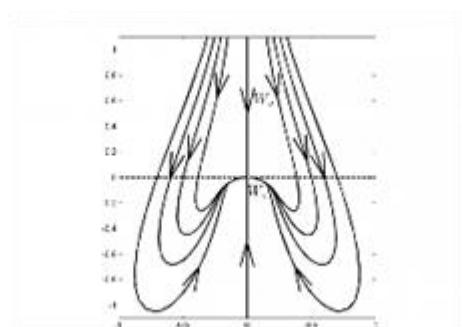
$$\dot{x} = xy + x^3 \quad (38)$$

$$\dot{y} = -y - 2x^2. \quad (39)$$

Ekkor $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, az E_s stabil alteret a $(0,1)$, az E_c centrális alteret pedig az $(1,0)$ vektor adja meg. Keressük a centrális sokaságot meghatározó ψ függvény közelítését az alábbi alakban: $\psi(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$. Itt tehát felhasználtuk, hogy a centrális sokaság a centrális alteret érinti az origóban, azaz ψ megadható x függvényeként. Ekkor az invariancia miatt $y(t) = \psi(x(t))$, melyet deriválva $\dot{y}(t) = \psi'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$. Helyettesítsük be ebbe az egyenletbe az x és y deriváltját a differenciálegyenletből. Ekkor a $-\psi(x) - 2x^2 = \psi'(x)(x \cdot \psi(x) + x^3)$ egyenletet kapjuk a ψ függvényre. Fejezzük ki ebben a ψ -t a sorfejtésének tagjaival, majd tegyük egyenlővé az egyenlet két oldalán szereplő azonos hatványhoz tartozó tagokat. Ekkor x^2 együtthatóiból a $-a_2 - 2 = 0$ összefüggést kapjuk, melyből $a_2 = -2$. Így a centrális sokaságot megadó függvényre $\psi(x) = -2x^2 + O(x^3)$, azaz centrális sokaság másodrendű approximációja $\tilde{\psi}(x) = -2x^2$. Helyettesítsük most a redukált rendszer első egyenletébe a $\psi(x) = -2x^2 + O(x^3)$ függvényt. Ekkor

$$\dot{x} = x(-2x^2 + a_3 x^3 + \dots) + x^3 = -x^3 + O(x^4)$$

Ezen egyenlet origó körüli fázisképe nem függ az $O(x^4)$ tagoktól, hiszen azok a pályák irányát az origó közelében nem befolyásolják. Tehát ebben a rendszerben a pályák az origó közelében az origóhoz tartanak, azaz a centrális sokaságon az origóhoz közelednek a megoldások. Mivel a rendszer nem nulla sajátértéke negatív, azért lokálisan minden megoldás az origóhoz tart, azaz a redukációs tétel segítségével igazoltuk, hogy az origó aszimptotikusan stabilis. A fázisképet a 22 ábra mutatja.



A (38)-(39) rendszer fázisképe.

4.3. 4.3 Feladatok

1. Határozzuk meg az egyensúlyi pontokat és azok típusát az alábbi kétdimenziós rendszerekben:

- a. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x - 3y$ Megoldás: Az egyensúlyi pontok $(k\pi, 0)$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -3 \end{pmatrix}.$$

A mátrix nyoma $Tr(J) = -3$, determinánsa $Det(J) = \cos x$. Ezek előjele alapján eldönthető a sajátértékek valósrészenek előjele, így páros k esetén az egyensúlyi pont stabil csomó, páratlan k esetén pedig nyereg.

- b. $\dot{x} = y^2 - 1$, $\dot{y} = x^2 + y^2 - 2$ Megoldás: Az első egyenlet alapján az egyensúlyi pontok második koordinátája ± 1 , majd a második egyenletből az első koordináta is ± 1 az elsőtől függetlenül. Így az egyensúlyi pontok: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

ezért $Tr(J) = 2y$, $Det(J) = -4xy$, $Tr^2(J) - 4Det(J) = 4y(y + 4x)$. Az $(1, 1)$ és $(-1, -1)$ pontban $Det(J) < 0$, így ezek nyeregpontok. Az $(1, -1)$ pontban $Tr(J) < 0$, $Det(J) > 0$ és $Tr^2(J) - 4Det(J) < 0$, ezért ez stabil fókusz. Végül a $(-1, 1)$ pontban $Tr(J) > 0$, $Det(J) > 0$ és $Tr^2(J) - 4Det(J) < 0$, ezért ez instabil fókusz.

- c. $\dot{x} = x^2 + y^2 - 25$, $\dot{y} = xy - 12$ Megoldás: Az második egyenletből $y = 12/x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $x^4 - 25x^2 + 12^2 = 0$, melyből $x = \pm 3$ vagy $x = \pm 43$. A megfelelő y értéket az $y = 12/x$ képlet adja. Így az egyensúlyi pontok: $(3, 4)$, $(-3, -4)$, $(4, 3)$, $(-4, -3)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix},$$

ezért $Tr(J) = 3x$, $Det(J) = 2(x^2 - y^2)$, $Tr^2(J) - 4Det(J) = x^2 + 8y^2 > 0$. A $(3, 4)$ és $(-3, -4)$ pontban $Det(J) < 0$, így ezek nyeregpontok. A $(4, 3)$ pontban $Tr(J) > 0$, $Det(J) > 0$ és $Tr^2(J) - 4Det(J) > 0$, ezért ez instabil csomó. Végül a $(-4, -3)$ pontban $Tr(J) < 0$, $Det(J) > 0$ és $Tr^2(J) - 4Det(J) > 0$, ezért ez stabil csomó.

- d. $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x^3 - x + xy$ Megoldás: Az első egyenletből $y = 0$, majd a másodikból $x = 0$, $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3x^2 - 1 + y & x \end{pmatrix},$$

ezért $Tr(J) = x$, $Det(J) = 3x^2 - 1 + y$, $Tr^2(J) - 4Det(J) = 4 - 11x^2 - 4y$. A $(0, 0)$ pontban $Det(J) < 0$, így ez nyeregpont. Az $(1, 0)$ pontban $Tr(J) > 0$, $Det(J) > 0$ és $Tr^2(J) - 4Det(J) < 0$, ezért ez instabil fókusz. Végül a $(-1, 0)$ pontban $Tr(J) < 0$, $Det(J) > 0$ és $Tr^2(J) - 4Det(J) < 0$, ezért ez stabil fókusz.

- e. $\dot{x} = y - x^2 - x$, $\dot{y} = 3 - 4x - y$ Megoldás: Az egyensúlyi pontokra vonatkozó két egyenletet kivonva egymásból $x = 1$, azaz $y = 0$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve $x = 1$, $y = 0$ melyből vagy $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(1, 0)$ és $(-1, 0)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -2x - 1 & 1 \\ 3 - 2x & -1 \end{pmatrix},$$

melyre a $(0, 0)$ pontban $Tr(J(0, 0)) = -2$, $Det(J(0, 0)) = -2$, így a $(0, 0)$ pont nyereg. Az $(1, 2)$ pontban $Tr(J(1, 2)) = -4$, $Det(J(1, 2)) = 2$, $Tr^2(J(1, 2)) - 4Det(J(1, 2)) > 0$, így az $(1, 2)$ pont stabil csomó.

2. Határozzuk meg az egyensúlyi pontokat, és azokban a linearizált rendszer stabil, instabil és centrális alterének dimenzióját az alábbi három dimenziós rendszerekben.

- a. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = x^2 - yz - 1$ Megoldás: Az első két egyenletből $y = 0$ és $z = 0$, majd a harmadikból $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(1, 0, 0)$ és $(-1, 0, 0)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & -z & -y \end{pmatrix},$$

melynek karakterisztikus egyenlete a $(\pm 1, 0, 0)$ pontokban $\lambda^3 = \pm 2$. Az $(1, 0, 0)$ pontban tehát a linearizált rendszer sajátértékei (azaz a $\lambda^3 = 2$ egyenlet gyökei) $\lambda_1 = \sqrt[3]{2}$, $\lambda_{2,3} = \sqrt[3]{2}(\cos(2\pi/3) \pm i \sin(2\pi/3))$. Így $\dim(E_s) = 2$ és $\dim(E_u) = 1$. A $(-1, 0, 0)$ pontban a linearizált rendszer sajátértékei (azaz a $\lambda^3 = -2$ egyenlet gyökei) $\lambda_1 = -\sqrt[3]{2}$, $\lambda_{2,3} = -\sqrt[3]{2}(\cos(2\pi/3) \pm i \sin(2\pi/3))$. Így $\dim(E_s) = 1$ és $\dim(E_u) = 2$.

- b. $\dot{x} = y + z$, $\dot{y} = x^2 - 2y$, $\dot{z} = x + y$ Megoldás: Az utolsó egyenletből $y = -x$, majd a másodikból $x^2 + 2x = 0$, azaz $x = 0$, vagy $x = -2$. Ebből $y = 0$, illetve $y = 2$, valamint az első egyenlet alapján $z = 0$ és $z = -2$. Így az egyensúlyi pontok: $(0, 0, 0)$ és $(-2, 2, -2)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2x & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda(1 + 2x) - 2(1 + x) = 0$. A $(0, 0, 0)$ pontban a karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Vegyük észre, hogy ennek egyik gyöke $\lambda_1 = 1$, így $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$. A másodfokú tag gyökei $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Így a $(0, 0, 0)$ pontban a $\dim(E_u) = 3$. A $(-2, 2, -2)$ pontban a karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Vegyük észre, hogy ennek egyik gyöke $\lambda_1 = -1$, így $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 2)$. A másodfokú tag gyökei negatív valósrésztűek, így a $(-2, 2, -2)$ pontban a $\dim(E_s) = 3$.

3. Határozzuk meg az $\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = \rho x - y - xz$, $\dot{z} = -\beta z + xy$ Lorenz rendszerben a $\sigma, \rho, \beta > 0$ paraméterek függvényében az origóban mint egyensúlyi pontban a linearizált rendszer stabil, instabil és centrális alterének dimenzióját. Megoldás: A rendszer Jacobi mátrixa az origóban

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \sigma + 1) + \lambda(\beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho)) + \beta\sigma(1 - \rho) = 0$. Ennek egyik gyöke (ezt a mátrix blokk diagonális alakjából láthatjuk), így a másik két gyök a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 - \sigma \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - \rho)})$$

Könnyen látható, hogy $\rho < 1$ esetén mindhárom gyök negatív, azaz a stabil altér három dimenziós. Ha $\rho = 1$, akkor az egyik sajátérték nulla, a másik kettő pedig negatív, ezért a stabil altér kétdimenziós, a centrális altér pedig egydimenziós. Ha $\rho > 1$, akkor $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, azaz az instabil altér egydimenziós, a stabil altér pedig kétdimenziós.

4. Határozzuk meg az $\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = \rho x - y - xz$, $\dot{z} = -\beta z + xy$ Lorenz rendszerben a $\sigma, \rho, \beta > 0$ paraméterek függvényében az egyensúlyi pontokat, és azok stabilitását. Megoldás: Az első egyenletből $y = x$, majd az utolsóból $z = x^2/\beta$. Ezeket a második egyenletbe helyettesítve $x(\rho - 1)\beta = x^3$. Ennek $x_1 = 0$ megoldása a paraméterek bármely értékre, és $\rho > 1$ esetén $x_{2,3} = \pm\sqrt{(\rho - 1)\beta}$ is megoldások. Tehát $\rho \leq 1$ esetén az egyetlen egyensúlyi pont $(0, 0, 0)$, míg $\rho > 1$ esetén ezenkívül $(x_2, x_2, \rho - 1)$ és $(x_3, x_3, \rho - 1)$ is egyensúlyi pontok. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

Az origóban felírt Jacobi-mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \sigma + 1) + \lambda(\beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho)) + \beta\sigma(1 - \rho) = 0$. Az origó stabilitásának eldöntéséhez tudnunk kell, hogy az egyenlet minden megoldása negatív valós részű. Ennek eldöntésére alkalmazzuk most a Routh-Hurwitz feltételt (bár, mivel az egyenletnek az egyik gyöke β , így a másik két gyök is képlettel egyszerűen megadható). Az egyenlet bal oldalán álló polinom együtthatóiból készítsük el a Routh-Hurwitz mátrixot.

$$\begin{pmatrix} \beta + \sigma + 1 & 1 & 0 \\ \beta\sigma(1 - \rho) & \beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho) & \beta + \sigma + 1 \\ 0 & 0 & \beta\sigma(1 - \rho) \end{pmatrix}$$

A mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha a Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 főminorok pozitívak. Mivel $\Delta_1 = \beta + \sigma + 1 > 0$, és $\Delta_3 = \Delta_2\beta\sigma(1 - \rho)$, azért a stabilitás $\Delta_2 > 0$ és $\rho < 1$ esetén állhat fenn. A Δ_2 determináns

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (\beta + \sigma + 1)(\beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho)) - \beta\sigma(1 - \rho) \\ &= (\beta^2 + \beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho))(\sigma + 1) \end{aligned}$$

pozitív, ha $\rho < 1$. Így a Lorenz-rendszerben az origó aszimptotikus stabilis $\rho < 1$ esetén, és instabilis $\rho > 1$ esetén. Az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pontban felírt Jacobi-mátrix

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \sqrt{\beta(\rho - 1)} & \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \sigma + 1) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0.$$

Az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pont stabilitásához igazolnunk kell, hogy az egyenlet minden megoldása negatív valószínű. Ennek eldöntésére alkalmazzuk a Routh-Hurwitz feltételt. Az egyenlet bal oldalán álló polinom együtthatóiból készítsük el a Routh-Hurwitz mátrixot.

$$\begin{pmatrix} \beta + \sigma + 1 & 1 & 0 \\ 2\beta\sigma(\rho - 1) & \beta(\sigma + \rho) & \beta + \sigma + 1 \\ 0 & 0 & 2\beta\sigma(\rho - 1) \end{pmatrix}$$

A mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha a Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 főminorok pozitívak. Mivel $\Delta_1 = \beta + \sigma + 1 > 0$, és $\Delta_3 = 2\beta\sigma(\rho - 1)\Delta_2$, azért a stabilitás $\Delta_2 > 0$ és $\rho > 1$ esetén áll fenn. A Δ_2 determináns

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \beta(\beta + \sigma + 1)(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(1 - \rho) \\ &= \beta(\sigma(\beta + \sigma + 3) - \rho(\sigma - \beta - 1)) \end{aligned}$$

pozitív, bármely $\rho > 1$ esetén, ha $\sigma - \beta - 1 < 0$, illetve $1 < \rho < \rho_H := \sigma \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1}$ esetén, ha $\sigma - \beta - 1 > 0$. Ekkor tehát az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pont aszimptotikusan stabilis. Megjegyezzük, hogy igazolható, hogy $\Delta_2 < 0$ esetén a Jacobi mátrixnak két pozitív valósrésű komplex sajátértéke van. A rendszer szimmetriája miatt az $(x_3, x_3, \rho - 1)$ egyensúlyi pont stabilitására ugyanazt a feltételt kapjuk, mint az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pont esetében.

5. 5 Globális vizsgálat, periodikus megoldások, vektormező indexe

5.1. 5.1 A globális fáziskép vizsgálata a lokális fázisképek segítségével

Az eddigi fejezetekben azzal foglalkoztunk, hogy az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlethez tartozó lokális fázisképet egy-egy pont környezetében hogyan lehet meghatározni. Ezt vázlatosan az alábbi módon foglalhatjuk össze.

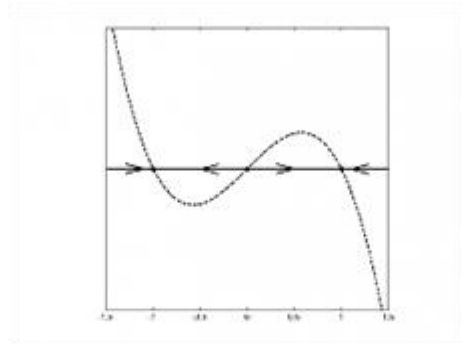
- Ha a vizsgált P pont nem egyensúlyi pont, akkor alkalmazzuk a kiegyenesítési tételt, azaz a P pont egy környezetében a lokális fázisképet, az $f(P)$ vektorral (iránymező) párhuzamos szakaszok alkotják.
- Ha a vizsgált P pont egyensúlyi pont, akkor a lineáris rész, azaz $f'(P)$ segítségével vizsgáljuk a lokális fázisképet.
 - Ha a lineáris rész hiperbolikus, azaz $f'(P)$ sajátértékeinek valósrésze nem zérus, akkor a Hartman-Grobman tételt alkalmazzuk: a lokális fáziskép a lineáris rész fázisképével topologikusan ekvivalens.
 - Ha a lineáris rész nem hiperbolikus, akkor a magasabb fokú tagok is szerepet játszanak a fáziskép meghatározásában. Ezek hatását kétféle módon vizsgálhatjuk.
 - A rendszer normálformájának meghatározásával.
 - Centrális sokaság redukcióval.

A jelen fejezet célja a globális fáziskép tanulmányozása, felhasználva az egyes pontokban már meghatározott lokális fázisképet. Egydimenziós rendszerek esetében ezzel teljes osztályozást nyerhetünk, ezt mutatjuk meg először a továbbiakban.

5.1.1. 5.1.1 Globális fáziskép 1 dimenzióban

Az egydimenziós rendszerek fázisképének meghatározása lényegében a jobboldal előjelének meghatározására redukálható. Nézzük meg ezt először egy egyszerű példán.

5.1. Példa Tekintsük az $\dot{x} = x - x^3$ differenciálegyenletet. Az $f(x) = x - x^3$ függvény gyökei a -1 , 0 , és az 1 számok, a függvény előjelét pedig ezek között egyszerűen megállapíthatjuk, a $(-\infty, -1)$ és $(0, 1)$ intervallumokon pozitív, a $(-1, 0)$ és $(1, +\infty)$ intervallumokon pedig negatív. A függvény grafikonját a 23. ábrán láthatjuk. Tehát az egyenletnek három egyensúlyi pontja van, a -1 , 0 , és az 1 pontok, ezen kívül két pozitív irányítású pályája a $(-\infty, -1)$ és $(0, 1)$ intervallum, valamint két negatív irányítású pályája a $(-1, 0)$ és $(1, +\infty)$ intervallum. Így a függvény előjelének megállapításával egyszerűen megkapjuk a 23. ábrán látható globális fázisképet.

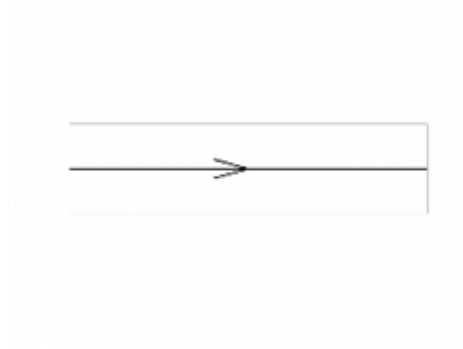


23. ábra. Az $\dot{x} = x - x^3$ differenciálegyenlet fázisképe.

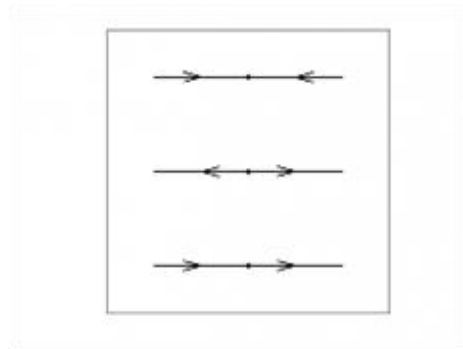
Térjünk rá most az $\dot{x} = f(x)$ alakú egyenlet fázisképeinek osztályozására, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egyszerűség kedvéért folytonosan differenciálható függvény. Az osztályozást az f gyökeinek száma szerint végezzük a fenti példa tanulsága alapján.

- Ha az f függvénynek nincs gyöke, akkor az egyenletnek nincs egyensúlyi pontja. Ekkor a fáziskép az $\dot{x} = 1$ egyenlet fázisképével ekvivalens, melyet a 24. ábra mutat. (Megjegyezzük, hogy ha f negatív, akkor is ezzel ekvivalens a fáziskép.)
- Ha az f függvénynek egy gyöke van, akkor az egyenletnek egy egyensúlyi pontja van. Ekkor a fáziskép az alábbi három közül valamelyikkel ekvivalens, melyeket a 25. ábrán láthatunk.
 - $\dot{x} = -x$
 - $\dot{x} = x$
 - $\dot{x} = x^2$
- Ha az f függvénynek két gyöke van, akkor az egyenletnek két egyensúlyi pontja van. Ezek lehetnek stabil, instabil és neutrális (egyik oldalról stabil, másik oldalról instabil) típusúak. Így négy eset lehetséges a fáziskép szempontjából: 1. egy stabil és egy instabil egyensúlyi pont van, 2. egy stabil és egy neutrális egyensúlyi pont van, 3. egy instabil és egy neutrális egyensúlyi pont van, 4. két neutrális egyensúlyi pont van. Ezen eseteknek megfelelő fázisképeket a 26. ábrán láthatjuk.

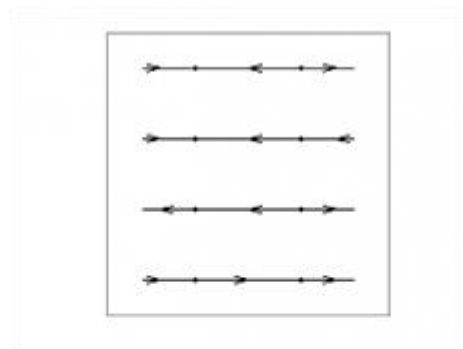
Hasonló módon osztályozhatjuk az n gyökhellyel rendelkező függvényeket. Megjegyezzük, hogy előfordulhat végtelen sok egyensúlyi pont, például az $f(x) = \sin x$ függvény esetében, sőt, az egyensúlyi pontok torlódhatnak is, például az $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$ függvény esetében, azonban ezekkel itt nem foglalkozunk.



24. ábra. Az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet fázisképe, ha az f függvénynek nincs gyöke.



25. ábra. Az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet három lehetséges fázisképe, ha az f függvénynek egy gyöke van.



26. ábra. Az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet négy lehetséges fázisképe, ha az f függvénynek két gyöke van.

5.1.2. 5.1.2 Globális fáziskép 2 dimenzióban

Tekintsük az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

kétváltozós rendszert, melyben $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Célunk a teljes fáziskép jellemzése, melyhez a következő módszereket lehet használni.

- Az iránymező és a nullavonalak megrajzolása.
- Transzformáció polár koordinátákba, vagy komplex változóra.
- Első integrál és Ljapunov-függvény keresése.
- A (P, Q) vektormező szimmetriájának felhasználása.

Ezen módszerek alkalmazásán túl természetesen a differenciálegyenletek (megfelelő kezdeti feltételekből indított) numerikus megoldásának ábrázolása segít meghatározni a fázisképet. Az alábbiakban ismertetjük ezen módszereket, és példákon szemléltetjük az alkalmazásukat.

5.1.2.1. 5.1.2.1 Iránymező és nullavonalak

Az iránymező nem más, mint a $(P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény, amely a fázissík minden pontjához olyan kétdimenziós vektort rendel, amely éppen a ponton áthaladó trajektória érintője. A fáziskép elkészítéséhez sokszor elég annyit tudni, hogy az iránymező az egyes pontokban fel vagy le, illetve balra vagy jobbra mutat. Ennek eldöntésében segítenek az

$$N_1 := \{p \in \mathbb{R}^2 : P(p) = 0\} \quad N_2 := \{p \in \mathbb{R}^2 : Q(p) = 0\}$$

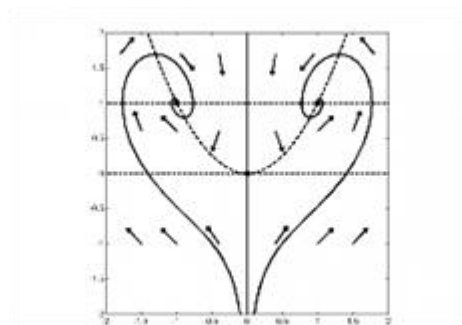
nullavonalak. Az N_1 nullavonal két (nem feltétlenül összefüggő) részre osztja a fázissíkot. Az egyikben, melyben $P > 0$, a trajektóriák jobbra, a másikban, melyben $P < 0$, a trajektóriák balra haladnak. Hasonlóképpen az N_2 nullavonal két (nem feltétlenül összefüggő) részre osztja a fázissíkot. Az egyikben, melyben $Q > 0$, a trajektóriák felfelé, a másikban, melyben $Q < 0$, a trajektóriák lefelé haladnak. Így az N_1 és N_2 nullavonal négy részre bontja a fázissíkot, amelyek mindegyikében egyszerűen eldönthető, hogy a trajektória fel vagy le, illetve balra vagy jobbra mozog. (A trajektória mozgása kifejezést használjuk, valójában t növekedtével a $\varphi(t, p)$ pont mozog a trajektória mentén.)

A nullavonalak metszéspontjai az egyensúlyi pontok, ezekben P és Q értéke is zérus. Az egyensúlyi pontok környezetében linearizálással határozhatjuk meg a fáziskép szerkezetét. A globális fázisképhez a nyeregpontok szeparatrixainak (a nyeregpontba befutó, illetve onnan kiinduló két-két pálya) elhelyezkedését kell meghatározni. Ebben is sokszor segít az iránymező. A fáziskép iránymezővel történő jellemzését egy példán szemléltetjük.

5.2. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = x^2 - y$$

rendszert. Az N_1 nullavonal egyenlete $x(1 - y) = 0$. Azaz ez a nullavonal két egyenesből, az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$ és az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 1\}$ egyenesből áll. Ezek négy tartományra osztják a fázissíkot. A jobb felső és bal alsó tartományban balra, a másik kettőben jobbra mozognak a trajektóriák. Mivel az $x = 0$ egyenes is a nullavonal része, azért ez invariáns egyenes, hiszen $x = 0$ esetén $\dot{x} = 0$. Az N_2 nullavonal egyenlete $y = x^2$, ez tehát egy parabola. A parabola feletti részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a parabola alatt pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt nyolc részre osztja a fázissíkot. A 27. ábrán mindegyik részben egy-egy nyíl mutatja a trajektória érintővektorának irányát. A rendszer egyensúlyi pontjait és azok típusát a szokott módon határozhatjuk meg. A $(0, 0)$ pont nyereg, az $(1, 1)$ és $(-1, 1)$ pont pedig stabil fókusz. A nyeregpontba befutó szeparatrix az $x = 0$ invariáns egyenes, a nyeregpontból kiinduló pályákról pedig az iránymező alapján azt mondhatjuk, hogy a stabilis fókuszokba futnak bele (ez egyébként bizonyításra szorul, ugyanis az iránymező alapján az is elképzelhető lenne, hogy ezek a pályák végtelenbe tartanak). Hasonlóan igazolható, hogy a jobb fésíkből induló megoldások mind az $(1, 1)$ stabilis fókuszpontba futnak be ($t \rightarrow +\infty$ esetén, a bal fésíkből induló megoldások pedig a $(-1, 1)$ stabilis fókuszpontba jutnak). Ezzel megkaptuk az ábrán látható fázisképet.



Az 5.2. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképének meghatározása az iránymező segítségével.

5.3. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = 2x + y^2 - 1, \quad \dot{y} = 6x - y^2 + 1$$

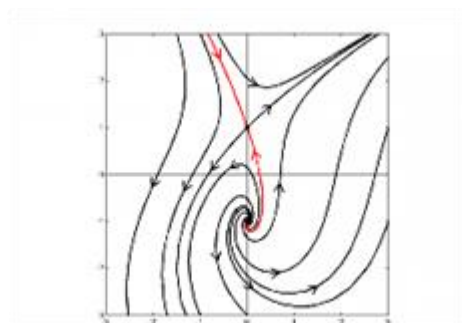
rendszert. Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A két egyenletet összeadva $8x = 0$, majd az elsőből $y = \pm 1$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 1)$ és $(0, -1)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 6 & -2y \end{pmatrix}.$$

A $(0, 1)$ egyensúlyi pontban $J(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, melyre $Tr(J(0, 1)) = 0$, $Det(J(0, 1)) = -16$, így

$(0, 1)$ nyereg. A $(0, -1)$ egyensúlyi pontban $J(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, melyre $Tr(J(0, -1)) = 4$, $Det(J(0, -1)) = 16$, $Tr^2(J(0, -1)) - 4Det(J(0, -1)) < 0$, így $(0, -1)$ instabilis fókusz. Az N_1

nullavonal egyenlete $x = (1 - y^2)/2$, azaz ez a nullavonal egy fekvő, balfelé nyitott parabola, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A jobboldali tartományban jobbra, a baloldali balra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal egyenlete $x = (y^2 - 1)/6$, ez tehát egy fekvő, jobbfelé nyitott parabola, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A baloldali részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a jobboldalin pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt öt részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontból kiinduló pályák ∞ -hez tartanak. A nyeregpontba befutó egyik szeparatrix az instabil fókuszról, a másik végtelenből jön (az ábrán ezek pirossal vannak jelölve). Néhány pontból induló pályát numerikusan kiszámítva, a 28. ábrán látható fázisképet kapjuk.



Az 5.3. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképének meghatározása az iránymező segítségével.

5.4. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = xy - 4, \quad \dot{y} = (x - 4)(y - x)$$

rendszert. Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A második egyenletből $x = 4$ vagy $y = -2$, majd ezeknek megfelelően az elsőből, illetve. Így az egyensúlyi pontok, és. A rendszer Jacobi-mátrixa

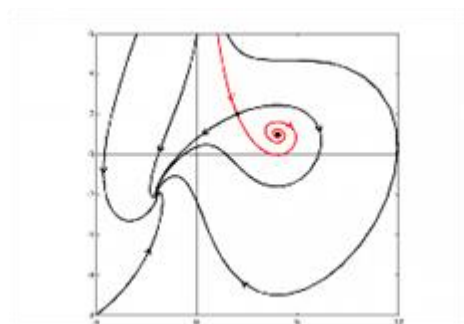
$$J = \begin{pmatrix} y & x \\ y - 2x + 4 & x - 4 \end{pmatrix}.$$

A $(4, 1)$ egyensúlyi pontban $J(4, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, melyre $Tr(J(4, 1)) = 1$, $Det(J(4, 1)) = 9$, $Tr^2(J(4, 1)) - 4Det(J(4, 1)) < 0$, így $(4, 1)$ instabilis fókusz. A $(2, 2)$ egyensúlyi pontban

$J(2, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, melyre $Tr(J(2, 2)) = 0$, $Det(J(2, 2)) = -8$, így $(2, 2)$ nyereg. A $(-2, -2)$

egyensúlyi pontban $J(-2, -2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, melyre $Tr(J(-2, -2)) = -8$, $Det(J(-2, -2)) = 24$, $Tr^2(J(-2, -2)) - 4Det(J(-2, -2)) < 0$, így $(-2, -2)$ stabilis fókusz. Az N_1 nullavonal egyenlete

$y = 4/x$, azaz ez a nullavonal hiperbola, mely három tartományra osztja a fázissíkot. A középső (két hiperbolaág közötti) tartományban balra, a két szélső tartományban pedig jobbra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal az $x = 4$ és $x = y$ egyenesekből áll, melyek négy tartományra osztják a fázissíkot. A baloldali felső és jobboldali alsó részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a jobboldali felső és baloldali alsó részen pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt 9 részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontból kiinduló pályák a stabil fókuszba futnak be. A nyeregpontba befutó szeparatrixok közül az egyik az instabil fókuszba jön, a másik pedig végtelenből. Ezen pályákon kívül minden más pálya a stabil fókuszba fut be. Néhány pontból induló pályát numerikusan kiszámítva, a 29. ábrán látható fázisképet kapjuk.



Az 5.4. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképének meghatározása az iránymező segítségével.

5.1.2.2. 5.1.2.2 Transzformáció polár koordinátákba, vagy komplex változóra

Az $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ rendszerhez vezessük be az r és ϕ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\phi(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\phi(t))$ transzformációs képletekkel. Ezekből

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\phi) - r \dot{\phi} \sin(\phi), \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\phi) + r \dot{\phi} \cos(\phi).$$

Az első egyenletet $\cos(\phi)$ -vel, a másodikat $\sin(\phi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet összeadva és felhasználva a differenciálegyenleteket

$$\dot{r} = P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cos(\phi) + Q(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \sin(\phi).$$

Hasonlóképpen az első egyenletet $\sin(\phi)$ -vel, a másodikat $\cos(\phi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet kivonva egymásból és felhasználva a differenciálegyenleteket

$$\dot{\phi} = Q(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cos(\phi) - P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \sin(\phi).$$

Bizonyos esetekben az r és ϕ függvényekre felírt egyenletek egyszerű alakúak és lehetővé teszik a fáziskép meghatározását. A legegyszerűbb példa a centrum esete, amikor az egyenletek $\dot{r} = 0$ és $\dot{\phi} = 0$. Ebből egyszerűen kapjuk, hogy $r = 1$ és $\phi = 0$, melyek mutatják, hogy a pályák origó közepű körök.

Komplex változó bevezetése is célravezető lehet számos esetben. Vezessük be a $z(t) = x(t) + iy(t)$ függvényt. Erre a differenciálegyenlet

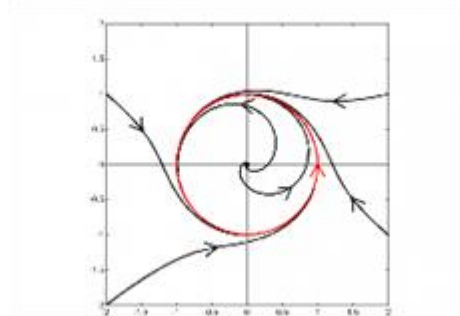
$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = P(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + iQ(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)).$$

A transzformáció akkor célravezető, ha a jobboldal közvetlenül z függvényeként fejezhető ki, a valós és képzetes rész használata nélkül. A legegyszerűbb példa ekkor is a centrum esete, amikor az egyenletek $\dot{x} = -y$ és $\dot{y} = x$. Ebből $\dot{z} = iz$, melynek megoldása $z(t) = \exp(it)$, ebből pedig megkaphatjuk az x és y függvények képletét. Valamint könnyen látható, hogy $|z(t)|$ állandó, azaz a pályák körök.

5.5. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y, \quad \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$$

rendszert. A fent ismertetett módszert követve vezessük be az r és ϕ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\phi(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\phi(t))$ transzformációs képletekkel. Ekkor a fenti képleteket felhasználva az új ismeretlen függvényekre az $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\phi} = 1$ differenciálegyenleteket kapjuk. Mivel $r = 1$ esetén $\dot{r} = 0$, azért az $r = 1$ körvonal invariáns, és $\dot{\phi} = 1$ miatt pozitív irányban haladnak rajta a megoldások. Ha $r < 1$, akkor $\dot{r} > 0$, azaz a kör belsejében a sugár növekszik, a pályák az $r = 1$ körvonalhoz közelednek. Ha $r > 1$, akkor $\dot{r} < 0$, azaz a körön kívül a sugár csökken, a pályák szintén az $r = 1$ körvonalhoz közelednek. A fáziskép tehát az origóból, mint instabil fókuszról, az $r = 1$ körvonalból, mint stabil határciklusból, és ezen határciklusra (belülről és kívülről) rácsavarodó pályákból áll, amint a 30. ábrán láthatjuk.



Az 5.5. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképének meghatározása polárkoordinátákra való transzformációval.

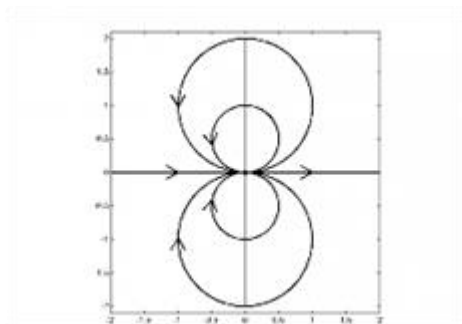
Komplex változó bevezetésének alkalmazására nézzük a következő példát.

5.6. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy$$

rendszert. Vezessük be a $z(t) = x(t) + iy(t)$ függvényt. Erre a differenciálegyenlet $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = P(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + iQ(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$, azaz $\dot{z} = z^2$. Ez szétválasztható változójú differenciálegyenlet, osszuk el z^2 -tel, majd integráljuk. Ekkor az egyenlet megoldása $z(t) = \frac{1}{c-t}$, ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex konstans. Határozzuk meg a függőleges tengelyről induló megoldásokat. Ezekre $z(0) = Ki$, tehát $c = 1/Ki$, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós konstans. Azaz $z(t) = \frac{Ki}{1-tKi} = \frac{Ki-tK^2}{1+t^2K^2}$. Így, mivel x és y a z valós és képzetes része, azért $x(t) = \frac{-tK^2}{1+t^2K^2}$ és $y(t) = \frac{K}{1+t^2K^2}$. E két egyenletből a t változót eliminálhatjuk (az y segítségével kifejezzük t -t, majd ezt az x képletébe helyettesítjük), ezzel az

$x^2 = (K - y)y$ összefüggést kapjuk. Ez az $x^2 + (y - K)^2 = K^2$ egyenlettel egyenértékű, ami egy olyan kör egyenlete, amelynek középpontja a függőleges koordinátatengelyen van és áthalad az origón (középpontja a $(0, K)$ pont, sugara K). Tehát a rendszernek az origó az egyensúlyi pontja, az x tengely invariáns, rajta jobbra haladnak a megoldások, a többi pályák pedig olyan körök (valójában homoklinikus pályák), amelyeknek középpontja a függőleges koordinátatengelyen van és áthaladnak az origón. A felső félsíkban ezen körökön pozitív irányban haladnak a megoldások, az alsó félsíkban pedig negatív irányban. A fázisképet a 31. Ábrán láthatjuk. Megjegyezzük, hogy amennyiben az $x^2 + (y - K)^2 - K^2 = 0$ képlet már ismert, akkor deriválással azt kapjuk, hogy ennek deriváltja $2x(x^2 + (y - K)^2 - K^2)$, tehát ha $x^2 + (y - K)^2 - K^2 = 0$ fennáll a trajektória kezdőpontjában, akkor minden pontjában fennáll, azaz ezen képlettel megadott körvonal invariáns görbe.



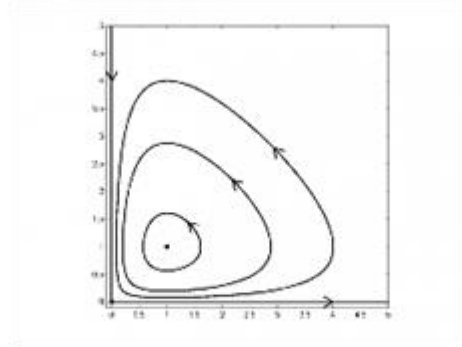
Az 5.6. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképének meghatározása komplex változóra való transzformációval.

5.1.2.3. Első integrál és Ljapunov-függvény keresése

A $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény első integrálja az $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ rendszernek, ha $P\partial_1 V + Q\partial_2 V = 0$. Az első integrál segítségével egyszerűen megkaphatjuk a fázisképet, hiszen annak szintvonalain fekszenek a rendszer pályái. Tekintsük példaként a LotkaVolterra-rendszert:

$$\dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = xy - y.$$

A két egyenletet elosztva egymással, és feltételezve, hogy y megadható x függvényeként (legalábbis bizonyos tartományokban), a következő differenciálegyenletet kapjuk az $x \mapsto y(x)$ függvényre: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$. Ez szétválasztható változójú egyenlet, ezért könnyen megoldható. Az y -t tartalmazó tényezőket a bal oldalra átvihetjük: $\frac{1-y}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x}$. Integrálás után $\ln(|y|) - y = x - \ln(|x|) + K$, ahol K tetszőleges konstans. Tehát a $V(x, y) = \ln(|x|) - x + \ln(|y|) - y$ függvény első integrál, melyről most már deriválással is meggyőződhetünk (ha esetleg az előbbi formális levezetést nem tartjuk megbízhatónak). Ugyanis $L_f V(x, y) = (1/x - 1)x(1 - y) + (1/y - 1)y(x - 1) = 0$. Megjegyezzük, hogy az első integrált $V(x, y) = F(x) + G(y)$ alakban keresve is eljuthatunk a fenti függvényhez. Igazolható, hogy az első integrál szintvonalai az első síknegyedben zárt görbék, ezért a pozitív koordinátájú megoldások periodikusak, amint a 32. ábrán látható.



32. ábra. A Lotka–Volterra-rendszer fázisképe.

Az első integrál képletének meghatározására nincs általános szabály, azonban egy fontos speciális esetben, nevezetesen, amikor a rendszer Hamilton-típusú, az első integrál megadható.

Az $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ kétváltozós rendszer Hamilton-rendszer, ha van olyan $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre $P = \partial_2 H$ és $Q = -\partial_1 H$. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel szerint H létezésének szükséges feltétele $\partial_1 P = -\partial_2 Q$, azaz $\partial_1 P + \partial_2 Q = 0$, vagyis a rendszer divergenciája nulla. A rendszer Jacobi mátrixa

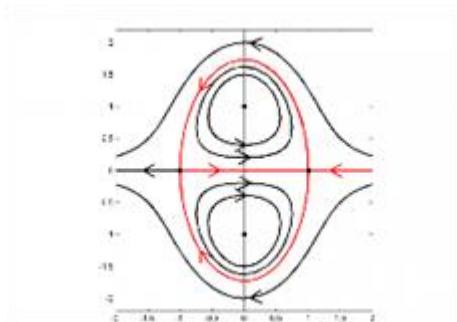
$$J = \begin{pmatrix} \partial_1^2 H & \partial_1 \partial_2 H \\ -\partial_1 \partial_2 H & -\partial_2^2 H \end{pmatrix}$$

Ennek nyoma $\text{Tr}(J) = 0$, így a linearizálás alapján az egyensúlyi pontok vagy nyereg, vagy centrum típusúak. Mivel $\text{Det}(J) = \text{Det}(H''(x, y))$, azért ha az egyensúlyi pontban $\text{Det}(H''(x, y)) < 0$, azaz $H''(x, y)$ indefinit, akkor az nyereg. Ha az egyensúlyi pontban $\text{Det}(H''(x, y)) > 0$, azaz (x, y) szélsőértéke H -nak, akkor az a pont centrum, mivel a szélsőérték egy környezetében a szintvonalak zárt görbék.

5.7. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy$$

egyenletet. Mivel $\partial_1 P(x, y) + \partial_2 Q(x, y) = -2x + 2x = 0$, azért a rendszer Hamilton-típusú. A P függvényt y szerint integrálva a Hamilton-függvény $H(x, y) = y - x^2 y - y^3/3 + C(x)$ alakú, ahol C tetszőleges differenciálható függvény. A H függvényt x szerint deriválva, a $Q = -\partial_1 H$ egyenlőségből a $C'(x) = 0$ összefüggést kapjuk, tehát a C függvény választható például a konstans nulla függvénynek. Így a Hamilton-függvény $H(x, y) = y - x^2 y - y^3/3$. A szintvonalak ábrázolása előtt célszerű meghatározni az egyensúlyi pontokat, illetve megrajzolni a nullklínákat és néhány pontban az iránymezőt. A második egyenletből az egyensúlyi pontokra $x = 0$ vagy $y = 0$. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe $y = \pm 1$ vagy $x = \pm 1$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ és $(-1, 0)$. Az egyensúlyi pontok típusát $\text{Det}(H''(x, y))$ előjele határozza meg. Esetünkben $\text{Det}(H''(x, y)) = -4x^2 + 4y^2$. Így $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ nyeregpontok, $(0, 1)$ és $(0, -1)$ pedig centrum pontok. A $H = 0$ szinthalmaz két részből áll, egyrészt tartalmazza az x tengelyt, másrészt a két nyeregpontot az alsó és felső félsíkban összekötő $1 = x^2 + y^2/3$ egyenletű ellipszist. A negatív H értékekhez tartozó szintvonalak a két centrum pontot az alsó és felső félsíkban megkerülő, az ellipszis belsejében fekvő görbék. A pozitív H értékekhez tartozó szintvonalak az alsó és felső félsíkban fekvő, az ellipszist megkerülő, és végtelenben az x tengelyhez hozzáasimuláló két görbéből állnak. A trajektóriák irányát az iránymezőből, a második egyenlet alapján kaphatjuk meg. Az első és harmadik síknegyedben, $\dot{y} > 0$ miatt a trajektóriák felfelé mennek, míg a második és negyedik negyedben $\dot{y} < 0$ miatt lefelé. Néhány pontból induló pályát numerikusan kiszámítva, a 33. ábrán látható fázisképet kapjuk.



Az 5.7. Példában szereplő Hamilton-féle differenciálegyenlet-rendszer fázisképe.

A Hamilton-rendszerek fontos speciális esete az $\ddot{x} + U'(x) = 0$ alakú, egy szabadsági fokú mechanikai rendszer. A megfelelő elsőrendű rendszer $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -U'(x)$. Ezen rendszer első integrálja a $V(x, y) = y^2/2 + U(x)$ függvény, ugyanis ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = -yU'(x) + yU'(x) = 0$. Így rendszer trajektóriái a V függvény szintvonalain fekszenek. Tehát a fáziskép elkészítéséhez csak a V szintvonalait kell meghatározni, majd ezeken $\dot{x}$ és $\dot{y}$ előjele alapján a trajektória irányát kell megjelölni. A V szintvonalainak felrajzolásához célszerű először az U függvény grafikonját megrajzolni az (x, U) síkban. Majd erre a síkra merőlegesen felvéve az y tengelyt az (y, U) síkkal párhuzamosan mozgatva egy $y^2/2$ típusú parabolát, olyan módon, hogy csúcsa az $U(x)$ függvény grafikonját fussa be, a V függvény felületét kapjuk meg. Ezután a szintvonalakat egyszerűen megkaphatjuk a felületet vízszintes síkokkal metszve. A rendszer Jacobi-mátrixa

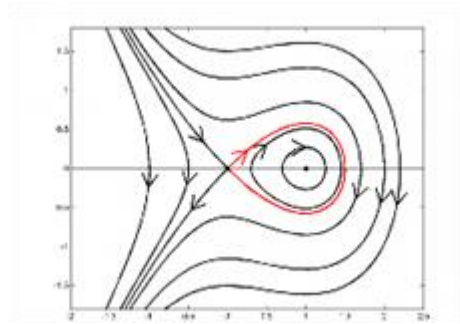
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek nyoma $\text{Tr}(J) = 0$, így a linearizálás alapján az egyensúlyi pontok vagy nyereg, vagy centrum típusúak. Mivel $\text{Det}(J) = U''(x)$, azért ha az egyensúlyi pontban $U''(x) < 0$, akkor az nyereg. Ha az egyensúlyi pontban $U''(x) > 0$, akkor a pont minimuma a V első integrálnak, így az centrum.

5.8. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^2$$

egyenletet. A rendszer egyensúlyi pontjai $(0, 0)$ és $(1, 0)$. Az U függvény $U(x) = x^3/3 - x^2/2$, így a rendszer első integrálja $V(x, y) = y^2/2 + x^3/3 - x^2/2$. Az U függvénynek maximuma van a 0 pontban és minimuma az 1 pontban, ezért $(0, 0)$ nyeregpont és $(1, 0)$ centrum. Készítsük el ezután az U függvény grafikonját, majd a fent leírt módszer alapján a V szintvonalait. A $V = 0$ -hoz tartozó szintvonal tartalmazza az origót, és a jobb félsíkban hurkot ír le. A hurk belsejében találhatók a negatív V értékekhez tartozó zárt görbék, az $(1, 0)$ pont a V lokális minimuma. Szintén negatív V értékekhez tartoznak a bal félsíkban fekvő, hiperbola ágra emlékeztető görbék. Tehát a V negatív szintjeihez tartozó szinthalmozok két különálló görbéből állnak. A pozitív értékekhez tartozó szintvonalak viszont összefüggőek, ezek a hurkot megkerülő görbék. A trajektóriák irányát az első differenciálegyenletből kaphatjuk meg legegyszerűbben, ugyanis a felső félsíkban, ahol $y > 0$ a trajektóriák jobbra mennek, hiszen ott $\dot{x} > 0$, míg az alsó félsíkban $\dot{x} < 0$, ezért ott a trajektóriák balra mennek. A fázisképet a 34. ábrán láthatjuk.

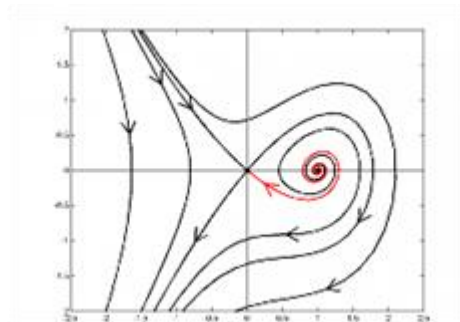


Az 5.8. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképe.

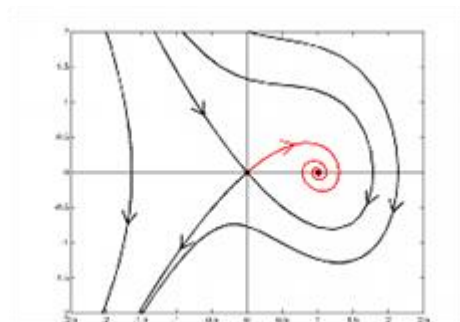
5.9. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^2 + cy$$

egyenletet. A rendszer egyensúlyi pontjai $(0, 0)$ és $(1, 0)$. Vegyük észre, hogy az egyenlet a 5.8. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer perturbációjának tekinthető, ezért számítsuk ki azon rendszer első integráljának Lie-deriváltját ezen rendszer szerint. Egyszerű számolással azt kapjuk, hogy $V(x, y) = y^2/2 + x^3/3 - x^2/2$ esetén $L_f V(x, y) = cy^2$, melynek előjele megegyezik c előjelével. Így $c < 0$ esetén a V függvény értéke a megoldások mentén csökken. Így a $(0, 0)$ nyeregpontból kiinduló egyik pálya az $(1, 0)$ stabil fókuszhoz tart. A fázisképet a 35. Ábrán láthatjuk. Ha $c > 0$, akkor a V függvény értéke a megoldások mentén nő. Így a $(0, 0)$ nyeregpontba befutó egyik pálya az $(1, 0)$ instabil fókuszba indul ki. A fázisképet a 36. ábrán láthatjuk.



Az 5.9. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképe $c < 0$ esetén.



Az 5.9. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképe $c > 0$ esetén.

5.1.2.4. 5.1.2.4 A vektormező szimmetriájának felhasználása

A vektormező szimmetriája sok esetben segítheti az iránymezőből kapott információ felhasználását. Leggyakoribb példa a nemlineáris centrum esete, melynek létezését sem a linearizálásból sem az iránymezőből nem lehet megállapítani (hiszen csak annyit látunk, hogy a pályák az egyensúlyi pont körül körbejárnak). Ilyen

esetben előfordulhat, hogy a pályák tengelyesen szimmetrikusak egy, az egyensúlyi ponton áthaladó tengelyre. Ezt a tényt a megoldások ismerete nélkül magukból a differenciálegyenletekből be lehet bizonyítani. Tekintsünk ehhez egy általános $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rendszert (nem kell feltétlenül kétdimenziósnak lennie). Legyen $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ az a transzformáció, amely a pályákat önmagukba képezi. Ha egy $p \in \mathbb{R}^n$ pontból induló pálya pozitív t értékekhez tartozó részét a T leképezés a $T(p)$ pontból induló pálya negatív t értékekhez tartozó részre képezi, akkor fennáll a

$$\varphi(-t, T(p)) = T(\varphi(t, p))$$

azonosság minden t esetén. Ezt t szerint deriválva $-\dot{\varphi}(-t, T(p)) = T'(\varphi(t, p))\dot{\varphi}(t, p)$, ezt a $t = 0$ esetben alkalmazva

$$-f(T(p)) = T'(p)f(p).$$

Ez utóbbi ellenőrzéséhez pedig nem kell a megoldások ismerete.

Nézzük meg a fenti képlet jelentését két fontos speciális, kétdimenziós esetben. Nevezetesen, hogy hogyan állapítható meg a differenciálegyenletekből, hogy a megoldások valamelyik koordinátatengelyre szimmetrikusak. A függőleges tengelyre való tükrözés a $T(x, y) = (-x, y)$ leképezés, melynek

deriváltmátrixa $T' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Így a fenti képlet alapján, az $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ rendszer pályái a függőleges tengelyre szimmetrikusak, ha $-(P(-x, y), Q(-x, y)) = T'(P(x, y), Q(x, y))$, azaz

$$P(-x, y) = P(x, y), \quad -Q(-x, y) = Q(x, y).$$

A vízszintes tengelyre való tükrözés a $T(x, y) = (x, -y)$ leképezés, melynek deriváltmátrixa $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Így a fenti képlet alapján, az $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ rendszer pályái a vízszintes tengelyre szimmetrikusak, ha $-(P(x, -y), Q(x, -y)) = T'(P(x, y), Q(x, y))$, azaz

$$-P(x, -y) = P(x, y), \quad Q(x, -y) = Q(x, y).$$

5.10. Példa Tekintsük az

$$\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2x$$

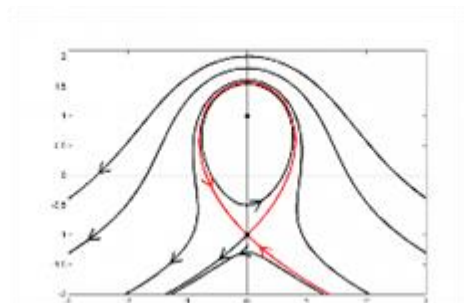
egyenletet. Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A második egyenletből $x = 0$, majd az elsőből $y = \pm 1$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 1)$ és $(0, -1)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $(0, 1)$ egyensúlyi pontban $J(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, melyre $Tr(J(0, 1)) = 0$, $Det(J(0, 1)) = 4$, $Tr^2(J(0, 1)) - 4Det(J(0, 1)) < 0$, így $(0, 1)$ típusa a linearizálásból nem dönthető el (a sajátértékek tisztán

képzetesekek). Az $(0, -1)$ egyensúlyi pontban $J(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, melyre $Tr(J(0, -1)) = 0$, $Det(J(0, -1)) = -4$, így $(0, -1)$ nyereg. Az N_1 nullavonal egyenlete $x^2 + y^2 = 1$, azaz ez a nullavonal origó középpontú kör, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A külső tartományban balra, a belsőben jobbra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal a függőleges koordináta tengely, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A baloldali részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a jobboldali részen pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt négy részre osztja a fázissíkot. Az ábrán mindegyikben egy-egy nyíl mutatja a trajektória érintővektorának irányát. A nyeregpontból kiinduló pályák

közül az egyik megkerüli a $(0, 1)$ egyensúlyi pontot, a másik $-\infty$ -hez tart. A nyeregpontba befutó szeparatrixok közül az egyik a $(0, 1)$ pontot megkerülve érkezik a nyeregpontba, a másik $-\infty$ felől jön. A pályák viselkedésének pontos megállapításához vegyük észre, hogy a fáziskép a függőleges tengelyre szimmetrikus, azaz a tengelyről időben előre és hátra indított megoldások szimmetrikusan haladnak. Ezt az bizonyítja, hogy $P(-x, y) = P(x, y)$ és $-Q(-x, y) = Q(x, y)$ fennáll. Eszerint a $(0, 1)$ egyensúlyi pontot zárt pályák veszik körül, tehát ez centrum, és a nyeregből felfelé kimenő és bejövő pálya egybeesik, egy homoklinikus pályát formálva. A homoklinikus pályát megkerülő pályák is a függőleges tengelyre szimmetrikusak. Néhány pontból induló pályát numerikusan kiszámítva, a 37. ábrán látható fázisképet kapjuk.



Az 5.10. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer fázisképe.

A fenti példák alapján láthatjuk, hogy kétdimenziós rendszerek esetében az egyes pontok körüli lokális fáziskép ismeretében nem feltétlenül határozható meg a globális fáziskép, ugyanis lehetnek globális alakzatok, melyeket a lokális fázisképek nem határoznak meg. Két dimenzióban a lehetséges globális alakzatok a következők:

- periodikus pálya
- homoklinikus pálya
- heteroklinikus pálya.

A következő szakaszban ezek közül a periodikus pályákkal foglalkozunk.

5.2. 5.2 Periodikus megoldások

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

differenciálegyenlet-rendszert, melyben $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Jelölje a P pontból induló megoldást $\varphi(t, p)$.

5.1. Definíció A P nem egyensúlyi pontot periodikus pontnak nevezzük, ha létezik $T > 0$, melyre $\varphi(T, p) = p$. A P pont pályáját periodikus pályának nevezzük, a legkisebb ilyen T értéket a pálya periódusának hívjuk.

A periodikus pályákkal kapcsolatban az alábbi két alapvető kérdéssel fogunk foglalkozni.

1. Hogyan lehet igazolni a periodikus pálya létezését vagy nem létezését?
2. Milyen a fáziskép a periodikus pálya egy környezetében?

Megjegyezzük, hogy egyensúlyi pontokkal kapcsolatban ezeket a kérdéseket már vizsgáltuk. Az első kérdés megválaszolásához az $f(p) = 0$ algebrai egyenletrendszert kell megoldani, illetve a megoldás létezését vizsgálni. A második kérdést pedig az egyensúlyi pontban felírt derivált mátrix segítségével lehet eldönteni. A periodikus megoldásokra vonatkozó analóg probléma a kérdés globális volta miatt jóval nehezebb, az ismert

alapvető eredményeket az alábbi két szakaszban mutatjuk be, valamint fontos megoldatlan problémákat is említünk.

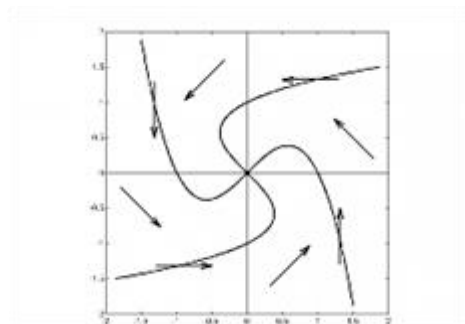
5.2.1. 5.2.1 Periodikus megoldások létezése

Periodikus megoldások létezését kétdimenziós rendszerekben a Poincaré-Bendixson-tétel segítségével lehet igazolni. A tétel megfogalmazása előtt az alapvető ötletet egy motiváló példával illusztráljuk.

5.11. Példa Tekintsük az

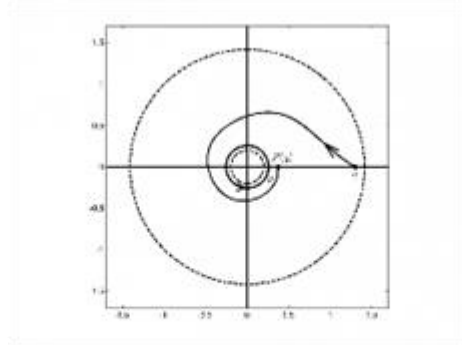
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x^3 \\ \dot{y} &= x + y - y^3\end{aligned}$$

rendszert. Az $y = x - x^3$ és $x = y^3 - y$ nullavonalakat ábrázolva látható, hogy az origó körül körbejárnak a pályák, azonban azt nem lehet egyszerűen eldönteni, hogy az origóhoz közelednek, vagy távolodnak tőle, lásd a 38. ábrát.



Az 5.11. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszer nullavonalai és az iránymező.

Ennek vizsgálatára vezessük be a $V(x, y) := x^2 + y^2$ Ljapunov-függvényt. Egy tetszőleges $(x(t), y(t))$ megoldást választva, legyen $V^*(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Ekkor az x és y függvényre vonatkozó differenciálegyenleteket felhasználva $\dot{V}^*(t) = 2(x^2(t) + y^2(t) - x^4(t) - y^4(t))$. Ezen kifejezés előjelét kell meghatároznunk a pályák viselkedésének meghatározásához. Az alábbi állítások egyszerűen igazolhatók. Ha $x^2 + y^2 < 1$, akkor $x^2 + y^2 - x^4 - y^4 > 0$, ha pedig $x^2 + y^2 > 2$, akkor $x^2 + y^2 - x^4 - y^4 < 0$. Ez azt jelenti, hogy az egység sugarú körben a pályák távolodnak az origótól, a $\sqrt{2}$ sugarú körön kívül viszont közelednek hozzá. Az 1 és $\sqrt{2}$ sugarú körök által meghatározott gyűrű alakú tartomány tehát pozitívan invariáns, azaz nem hagyhatják el a pályák. Tekintsük a vízszintes koordinátatengely 1 és $\sqrt{2}$ közötti szakaszát, és értelmezzük ezen a $P: [1, \sqrt{2}] \rightarrow [1, \sqrt{2}]$ Poincaré-leképezést a következőképpen. Egy tetszőleges $q \in [1, \sqrt{2}]$ esetén legyen $P(q) \in [1, \sqrt{2}]$ az a pont, ahová a q pontból induló pálya először visszaérkezik, lásd a sematikus 39. ábrát.



39. ábra. A Poincaré-leképezés és egy p pontból induló periodikus pálya.

Igazolható, hogy a Poincaré-leképezés folytonos, tehát a leképezés az $[1, \sqrt{2}]$ intervallumot önmagába képezi folytonosan, ezért van fixpontja, azaz van olyan $p \in [1, \sqrt{2}]$, melyre $P(p) = p$. Ez a pont tehát periodikus pontja a rendszernek, hiszen a belőle induló pálya önmagába tér vissza.

A példában alkalmazott módszer általánosításával igazolható az alábbi tétel.

5.2. Tétel (Poincaré--Bendixson-tétel gyenge alakja) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvény, és tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ kétdimenziós rendszert. Ha $K \subset \mathbb{R}^2$ pozitívan invariáns, kompakt halmaz, melyben nincs egyensúlyi pont, akkor K -ban van a rendszernek periodikus pályája. A fenti tulajdonságú K halmazt Bendixson-féle zsáknak nevezik.

A tétel bizonyítását itt nem közöljük, megtalálható a [22] könyv 8.3.3. szakaszában. Megjegyezzük, hogy a fenti példában az 1 és $\sqrt{2}$ sugarú körök által meghatározott gyűrű alakú tartomány a Bendixson-féle zsák.

A Poincaré-Bendixson-tétel elégséges feltételt ad kétdimenziós rendszerekben periodikus megoldás létezésére. A tétel alkalmazhatósága a Bendixson-féle zsák megkonstruálhatóságán alapszik, azonban ez sok esetben túl nagy kihívásnak tűnik. Ezért fontos az, hogy a periodikus pálya nem létezésére is legyen feltételünk, hiszen önmagában az, hogy nem sikerült Bendixson-féle zsákot találni, nem jelenti azt, hogy nincs is periodikus pálya. Periodikus pálya nem létezésére vonatkozó feltételek a Bendixson-kritérium, illetve a Bendixson-Dulac-kritérium. Ezeket fogjuk a továbbiakban ismertetni.

Mindkét kritérium a Stokes-tétel alábbi kétdimenziós változatának segítségével igazolható.

5.3. Lemma Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, és $G : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenciálható függvény. Ekkor

$$\int_D (\partial_1 G_1 + \partial_2 G_2) = \int_{\partial D} (-G_2, G_1).$$

Ezen lemma segítségével igazoljuk először a Bendixson-kritériumot.

5.4. Tétel (Bendixson-kritérium) Ha $H \subset \mathbb{R}^2$ olyan egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, amelyen a $\operatorname{div} f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ függvény állandó előjelű, és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el, akkor az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ kétdimenziós rendszernek nincs teljesen a H halmazban haladó periodikus pályája.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van teljesen a H halmazban haladó periodikus megoldás, legyen egy ilyen Γ . Jelölje ennek belsejét D . Felírva a Stokes-tételt az f függvényre és a D tartományra, ellentmondást kapunk, mivel a baloldal adott előjelű (a divergencia előjelének megfelelően), viszont a jobboldal nulla, hiszen a $(-f_2, f_1)$ vektor a periodikus megoldás pontjaiban merőleges a ∂D görbe, azaz a periodikus megoldás érintőjére. A periodikus megoldást $\gamma(t)$ -vel jelölve, formálisan a jobboldali kifejezés

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (-f_2, f_1) &= \int_0^T \left(-f_2(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + f_1(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) \right) dt \\ &= \int_0^T (-\dot{\gamma}_2 \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2) dt = 0.\end{aligned}$$

. [QED]

Ezt a tételt általánosítja a BendixsonDulac-kritérium.

5.5. Tétel (Bendixson–Dulac-kritérium) Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, és legyen $B : H \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melyre a $\text{div}(Bf)$ függvény állandó előjelű, és legfeljebb egy görbe pontjaiban tűnik el. Ekkor az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rendszernek nincs teljesen a H halmazban haladó periodikus pályája.

Bizonyítás. Az előző bizonyítás menetét követjük, azonban most az f függvény helyett a Bf függvényre alkalmazzuk a gondolatmenetet. [QED]

A nemlétezési tételek alkalmazására mutatunk néhány példát.

5.12. Példa Tekintsük az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy^2 + y^3 \\ \dot{y} &= 3y - x^2y + x^3\end{aligned}$$

rendszert. Ekkor $\partial_1 f_1(x, y) + \partial_2 f_2(x, y) = 1 - y^2 + 3 - x^2 = 4 - (x^2 + y^2)$, amely a 2 sugarú körön belül szigorúan pozitív, így ebben a körben nem lehet a rendszernek periodikus pályája.

5.13. Példa Az

$$\dot{x} = x + y^2 + x^3 \quad \dot{y} = -x + y + x^2y$$

rendszernek a Bendixson-kritérium szerint nincs periodikus megoldása. Ugyanis $\text{div} f(x, y) = 2 + 4x^2 > 0$ a sík minden pontjában.

Az eddigi tételek és példák kétdimenziós rendszerekre vonatkoztak, topológiai okokból több dimenziós esetben ilyen általános tételek nincsenek, az ezzel kapcsolatos eredmények tárgyalása meghaladja ezen jegyzet kereteit. A kérdés mélységét és nehézségét illusztrálja az is, hogy Hilbert ezzel kapcsolatos, úgynevezett 16. problémája több mint 100 éve megoldatlan.

Hilbert 16. problémája

Legyenek P és Q n -edfokú polinomok. Legfeljebb hány határciklus lehet az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

rendszerben?

Nyilvánvaló, hogy $n = 1$ esetén, amikor a rendszer lineáris, nem lehet határciklus (periodikus megoldások lehetnek, például, amikor a rendszer egyensúlyi pontja centrum). Az $n = 2$ esetben a határciklusok maximális számára a sejtés 4, erre Shi, Chen és Wang adtak példát 1979-ben, azonban eddig nem sikerült igazolni, hogy több határciklus nem lehet. Az eredményekről számos áttekintő cikk mellett Perko könyvében [16] olvasható összefoglalás.

5.2.2. 5.2.2 Lokális vizsgálat periodikus megoldások körül

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy periodikus pályák körül hogyan jellemezhető a lokális fáziskép. Tanulmányozni fogjuk periodikus megoldások stabilitását, illetve stabil, instabil és centrális altereit. A vizsgálat legfontosabb eszköze a Poincaré-leképezés, amellyel a kérdést diszkrét dinamikai rendszerek fixpontjának lokális vizsgálatára lehet visszavezetni.

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány és legyen $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ dinamikai rendszer. Legyen $p \in M$ periodikus pont T periódussal, azaz $\varphi(T, p) = p$. Vezessük be a $\gamma(t) := \varphi(t, p)$ és $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [0, T]\}$ jelöléseket.

5.6. Definíció Legyen $L \subset \mathbb{R}^n$ egy $n-1$ dimenziós hipersík ν normálvektorral. Egy $\Sigma \subset L$ összefüggő halmazt transzverzális metszetnek nevezünk, ha $\langle \nu, \partial_t \varphi(0, q) \rangle \neq 0$ minden $q \in \Sigma$ pontra.

Legyen Σ egy p pontot belsejében tartalmazó transzverzális metszet. Az implicit-függvény tétel egyszerű alkalmazásával igazolható az alábbi.

5.1. Állítás (Poincaré-leképezés létezése) A p pontnak van olyan $U \subset \Sigma$ környezete, és létezik olyan $\Theta : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre $\Theta(p) = T$ és $\varphi(\Theta(q), q) \in \Sigma$, minden $q \in U$ pontra.

5.7. Definíció A $P : U \rightarrow \Sigma$, $P(q) = \varphi(\Theta(q), q)$ függvényt a (Σ transzverzális metszethez tartozó) Poincaré-leképezésnek nevezzük.

A Poincaré-leképezés függ a p pont és a Σ transzverzális metszet választásától. A következő állítás szerint a különböző Poincaré-leképezések koordináta-transzformációval egymásba vihetők.

5.2. Állítás Legyenek $p_1, p_2 \in \Gamma$, Σ_1, Σ_2 ezeket tartalmazó transzverzális metszetek, $U_i \subset \Sigma_i$ ($i = 1, 2$) nyílt halmazok, melyeken értelmezve vannak a $P_i : U_i \rightarrow \Sigma_i$ ($i = 1, 2$) Poincaré-leképezések. Ekkor van a p_1 pontnak olyan $V \subset U_1$ környezete, és $S : V \rightarrow U_2$ differenciálható függvény, melyre $P_2(S(p)) = S(P_1(p))$ minden $p \in V$ esetén.

5.8. Következmény A $P'_1(p_1)$ és $P'_2(p_2)$ mátrixok sajátértékei megegyeznek.

Ha $P(U) \subset U$, akkor a P Poincaré-leképezés az U halmazon egy $\psi : \mathbb{N} \times U \rightarrow U$ diszkrét dinamikai rendszert (pontosabban ún. szemidynamikai rendszert) határoz meg a következőképpen: $\psi(n, q) = P^n(q)$, ahol $P^n = P \circ P \circ \dots \circ P$ az n tagú kompozíciót jelöli. (Azért nevezik szemidynamikai rendszernek, mert negatív n értékekre nincs értelmezve.) Mivel $P(p) = p$, azért a p pont a ψ dinamikai rendszernek egyensúlyi pontja. Látni fogjuk, hogy ennek stabilitása határozza meg a Γ pálya stabilitását, ezért először emlékeztetünk diszkrét dinamikai rendszerek fixpontjának stabilitásával kapcsolatos alapvető fogalmakra és a linearizálással kapcsolatos eredményekre. (Ezeket a 8. fejezetben részletesen tárgyalni fogjuk.)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, $g : G \rightarrow G$ diffeomorfizmus (olyan differenciálható függvény, melynek létezik inverze, és az is differenciálható). Ez a függvény a G halmazon meghatároz egy $\psi : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$ diszkrét dinamikai rendszert a következőképpen: $\psi(n, q) = g^n(q)$, ahol $g^n = g \circ g \circ \dots \circ g$ az n tagú kompozíciót jelöli, ha $n \in \mathbb{N}$. Ha $n < 0$, akkor legyen $g^n = g^{-1} \circ g^{-1} \circ \dots \circ g^{-1}$ $-n$ tagú kompozíció. Könnyen látható, hogy ψ egy dinamikai rendszer. A rövideg kedvéért helyette a g^n jelölést fogjuk használni.

5.9. Definíció A $p \in G$ pontot a ψ dinamikai rendszer egyensúlyi pontjának, vagy fixpontjának nevezzük, ha $g(p) = p$ (azaz $\psi(n, p) = p$, minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén).

5.10. Definíció A p fixpontot stabilisnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|q - p| < \delta$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $|g^n(q) - p| < \varepsilon$. A p fixpontot instabilisnak nevezzük, ha nem stabilis.

A p fixpontot aszimptotikusan stabilisnak nevezzük, ha stabilis, és $|q - p| < \delta$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(q) = p$.

A fixpont stabilitása a folytonos dinamikai rendszerhez hasonlóan linearizálással dönthető el.

5.11. Tétel (Fixpont stabilitása) Ha a $g'(p)$ mátrix minden λ sajátértékére $|\lambda| < 1$, akkor a p fixpont aszimptotikusan stabilis.

Térjünk most vissza a $P : U \rightarrow \Sigma$ Poincaré-leképezés vizsgálatára. Megmutatjuk, hogy a Poincaré-leképezés fixpontjának stabilitása hogyan határozza meg a Γ pálya stabilitását. Könnyen látható, hogy egy periodikus megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis, mégis mint halmazhoz tarthatnak hozzá egy környezetéből a megoldások (lehet ω -határhalmaz, vagy attraktor). Ezért a periodikus megoldás stabilitásának leírására bevezetjük az orbitális stabilitás fogalmát. Használni fogjuk a pontok Γ pályától való távolságára az alábbi jelölést:

$$d(q, \Gamma) = \inf\{|q - \gamma(t)| : t \in [0, T]\}.$$

5.12. Definíció A γ periodikus megoldás orbitálisan stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, melyre $d(q, \Gamma) < \delta$ és $t \geq 0$ esetén $d(\varphi(t, q), \Gamma) < \varepsilon$.

A γ periodikus megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabilis, ha orbitálisan stabilis és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \Gamma) = 0.$$

A Γ pálya határciklus, ha van olyan $q \notin \Gamma$ pont, melyre $\Gamma \subset \omega(q)$, vagy $\Gamma \subset \alpha(q)$.

A Γ pálya stabil határciklus, ha γ orbitálisan aszimptotikusan stabilis.

Legyen Σ egy p pontot tartalmazó transzverzális metszet, $U \subset \Sigma$ a p pont környezete, $P : U \rightarrow \Sigma$ a Poincaré-leképezés.

5.13. Tétel Ha p (aszimptotikusan) stabilis fixpontja a P Poincaré-leképezésnek, akkor γ orbitálisan (aszimptotikusan) stabilis.

A tétel bizonyításának alap gondolata megtalálható [22] könyvben. A periodikus pálya stabilitását tehát a Poincaré-leképezés deriváltjának sajátértékei határozzák meg.

5.14. Definíció A $P'(p)$ $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix sajátértékeit a Γ periodikus pálya karakterisztikus multiplikátorainak nevezzük.

A 5.8. Következmény szerint a karakterisztikus multiplikátorok nem függenek a Poincaré-leképezés választásától. A 5.11 Tétel szerint pedig jellemzik a fixpont stabilitását. Ezzel tehát a következő tételt kapjuk.

5.15. Tétel (Andronov-Witt) Ha a Γ periodikus pálya karakterisztikus multiplikátorainak abszolútértéke 1-nél kisebb, akkor a Γ pálya stabil határciklus.

Kétdimenziós rendszerek esetében az egyetlen karakterisztikus multiplikátor $P'(p)$. Igazolható (lásd Perko könyvében [16] a 3.4. Fejezetben a 2. Tételt), hogy ez a következőképpen adható meg

$$P'(p) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt\right),$$

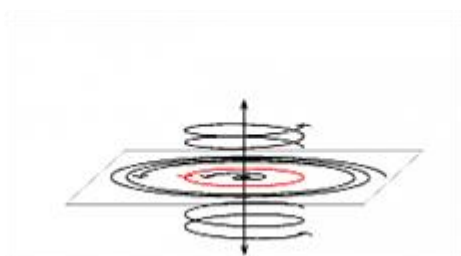
ahol $\operatorname{div} f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ az f divergenciáját jelöli. Tehát, ha a divergencia a periodikus pálya mentén végig negatív, akkor a periodikus pálya stabil határciklus, ha pedig a divergencia a pálya mentén végig pozitív, akkor igazolható, hogy a periodikus pálya instabil határciklus.

Kétdimenziós rendszerek esetében egy karakterisztikus multiplikátora van a periodikus pályának, így a pályához csak egy invariáns altér tartozik. Magasabb dimenzióban megtörténhet, hogy a periodikus pálya egy irányból vonz, más irányból pedig taszít, tehát nyereg jellegű. Ilyen esetekben a periodikus pálya körüli lokális viselkedést a stabil, instabil és centrális sokaság dimenziójával lehet jellemezni. Az invariáns sokaságok bevezetését az alábbi példával szemléltetjük.

5.14. Példa Tekintsük az alábbi háromváltozós rendszert.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} &= z\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy az (x, y) vízszintes sík, illetve a z tengely invariáns, azaz ezeket nem hagyják el a pályák. A vízszintes síkban fekvő, origó közepű egység sugarú kör egy periodikus megoldás pályája. A vízszintes síkban fekvő pályák ehhez a határciklushoz közelítenek. A határciklust tartalmazó függőleges hengerfelület szintén invariáns, az ebben haladó pályák viszont távolodnak a határciklustól, hiszen pozitív z esetén z értéke növekszik, a negatív oldalon pedig csökken. A határciklus stabil sokasága tehát a vízszintes sík, instabil sokasága pedig a függőleges hengerfelület, ezt a 40 ábrán szemléltetjük.



Invariáns sokaságok az 5.14. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszerben.

Térjünk rá ezután a periodikus pálya stabil, instabil és centrális sokaságának definiálására.

Legyen tehát $M \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány és legyen $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ dinamikai rendszer. Legyen $p \in M$ periodikus pont T periódussal, azaz $\varphi(T, p) = p$. Használjuk ismét a $\gamma(t) := \varphi(t, p)$ és $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [0, T]\}$ jelöléseket. Legyenek a Γ periodikus pálya karakterisztikus multiplikátorai $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$.

5.16. Tétel (Stabil és instabil sokaság tétel) Tegyük fel, hogy a Γ periodikus pálya karakterisztikus multiplikátorai közül k olyan van, melynek abszolútértéke 1-nél kisebb, és $n-1-k$ olyan, melynek abszolútértéke 1-nél nagyobb. Ekkor valamely $\delta > 0$ esetén legyen $W_s^{loc}(\Gamma)$ azon $q \in \mathbb{R}^n$ pontok halmaza melyekre

1. $d(\varphi(t, q), \Gamma) \rightarrow 0$, amint $t \rightarrow \infty$,
2. $d(\varphi(t, q), \Gamma) < \delta$, ha $t \geq 0$.

Valamint legyen $W_u^{loc}(\Gamma)$ azon $q \in \mathbb{R}^n$ pontok halmaza melyekre

1. $d(\varphi(t, q), \Gamma) \rightarrow 0$, amint $t \rightarrow -\infty$,
2. $d(\varphi(t, q), \Gamma) < \delta$, ha $t \leq 0$.

Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, melyre $W_s^{loc}(\Gamma)$ egy $k+1$ dimenziós pozitívan invariáns differenciálható sokaság, és $W_u^{loc}(\Gamma)$ egy $n-k$ dimenziós negatívan invariáns differenciálható sokaság, melyeket a Γ periodikus pálya lokális stabil, illetve instabil sokaságoknak nevezünk. Ezek a Γ görbe pontjaiban transzverzálisan metszik egymást.

A globális stabil és instabil sokaságokat az egyensúlyi pont esetéhez hasonlóan a $W_s^{loc}(\Gamma)$ és $W_u^{loc}(\Gamma)$ lokális sokaságok segítségével definiálhatjuk. A stabil sokaságot úgy definiáljuk, hogy a belőle induló trajektóriák az origóhoz tartanak. Mivel az origóhoz tartó pályák az origó közelében a lokális stabil sokaságban haladnak, azért a globális stabil sokaságot célszerű a következőképpen definiálni.

$$W_s(\Gamma) := \bigcup_{t \leq 0} \varphi(t, W_s^{loc}(\Gamma)).$$

Az instabil sokaságot úgy határozzuk meg, hogy a belőle induló pályák $t \rightarrow -\infty$ esetén tartanak az origóhoz. Mivel az ilyen pályák az origó közelében a lokális instabil sokaságban haladnak, azért az instabil sokaságok a következőképpen definiáljuk.

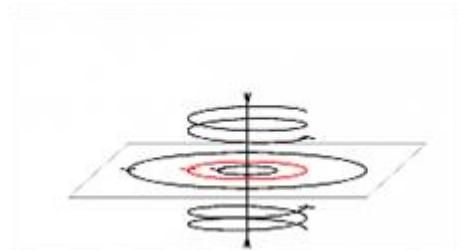
$$W_u(\Gamma) := \bigcup_{t \geq 0} \varphi(t, W_u^{loc}(\Gamma)).$$

Ezen sokaságok mellett, ha vannak 1 abszolútértékű karakterisztikus multiplikátorok, akkor létezik a Γ pályának centrális sokasága is, melyet $W_c(\Gamma)$ jelöl. Ennek dimenziója megegyezik az 1 abszolútértékű karakterisztikus multiplikátorok számával.

5.15. Példa Tekintsük az alábbi háromváltozós rendszert.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \\ \dot{z} &= -z\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy az (x, y) vízszintes sík, illetve a z tengely invariáns, azaz ezeket nem hagyják el a pályák. A vízszintes síkban fekvő, origó közepű körök periodikus megoldások pályái. Tekintsük az egység sugarú kört, mint periodikus pályát. Ennek centrális sokasága a vízszintes sík. A kört tartalmazó függőleges hengerfelület szintén invariáns, az ebben haladó pályák viszont közelednek ehhez a pályához, hiszen pozitív z esetén z értéke csökken, a negatív oldalon pedig növekszik. Az egység sugarú kör centrális sokasága tehát a vízszintes sík, stabil sokasága pedig a függőleges hengerfelület, melyet a 41. ábra mutat.



Invariáns sokaságok az 5.15. Példában szereplő differenciálegyenlet-rendszerben.

5.3. 5.3 Indexelmélet alkalmazása kétdimenziós rendszerekre

Kétdimenziós rendszerek globális vizsgálatának egyik fontos eszköze a vektormező indexe. Az index topológiai fogalom, amely magasabb dimenziós rendszerekre is értelmezhető, mi itt azonban csak a kétdimenziós esettel foglalkozunk. Tekintsük az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

rendszert, és vegyünk egy $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos, egyszerű zárt görbét. A γ görbe indexe, $\text{ind}(\gamma)$, azt adja meg, hogy a $(P(\gamma(s)), Q(\gamma(s)))$ vektor hányszor fordul körbe, mialatt az s befutja az $[a, b]$ intervallumot. Így természetesen $\text{ind}(\gamma)$ mindig egész szám. Egyszerűen látható, hogy például egy (stabil vagy instabil) csomópontot megkerülő görbe esetében $\text{ind}(\gamma) = 1$, míg egy nyeregpontot megkerülő görbe esetében $\text{ind}(\gamma) = -1$. Ezeket formálisan is hamarosan levezetjük, melyhez szükség van az index képlettel való definiálására.

Jelölje $\Theta(x, y)$ az (x, y) pontban a $(P(x, y), Q(x, y))$ vektor szögét, valamint egy adott $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbe esetén legyen minden $s \in [a, b]$ esetén. Ekkor

$$\operatorname{tg} \Theta^*(s) = \frac{Q(\gamma(s))}{P(\gamma(s))}.$$

Deriváljuk ezt s szerint, ekkor

$$\frac{1}{\cos^2 \Theta^*(s)} \cdot \dot{\Theta}^*(s) = \frac{\left(\partial_1 Q(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_1(s) + \partial_2 Q(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_2(s) \right) P(\gamma(s))}{P^2(\gamma(s))} - \frac{\left(\partial_1 P(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_1(s) + \partial_2 P(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_2(s) \right) Q(\gamma(s))}{P^2(\gamma(s))}$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{\cos^2 \Theta^*} = \operatorname{tg}^2 \Theta^* + 1 = \frac{Q^2}{P^2} + 1 = \frac{Q^2 + P^2}{P^2}$$

kifejezhetjük a $\dot{\Theta}^*$ deriváltat.

$$\dot{\Theta}^*(s) = \frac{P(\partial_1 Q \dot{\gamma}_1 + \partial_2 Q \dot{\gamma}_2) - Q(\partial_1 P \dot{\gamma}_1 + \partial_2 P \dot{\gamma}_2)}{P^2 + Q^2}$$

A $(P(\gamma(s)), Q(\gamma(s)))$ vektor elfordulásának nagyságát az

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \dot{\Theta}^*(s) ds$$

integrál adja, ezért a görbe indexét a következőképpen definiáljuk.

5.17. Definíció Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos, egyszerű zárt görbe, amely nem halad át egyensúlyi ponton. Ekkor a γ görbe indexe az $\dot{x} = P(x, y)$ $\dot{y} = Q(x, y)$ rendszerre vonatkozóan

$$\operatorname{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{P(\partial_1 Q \dot{\gamma}_1 + \partial_2 Q \dot{\gamma}_2) - Q(\partial_1 P \dot{\gamma}_1 + \partial_2 P \dot{\gamma}_2)}{P^2 + Q^2}.$$

5.16. Példa Számítsuk ki egy instabil csomópontot megkerülő görbe indexét. Az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \end{aligned}$$

rendszernek az origó csomó típusú egyensúlyi pontja. Legyen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ az origó középső egység sugarú kör. Ekkor a görbe pontjaiban a vektormező sugárirányban kifelé mutat, amint a . ábra mutatja. Így a vektor 2π szöget fordul, mialatt a görbén körbemegyünk, azaz a görbe indexe 1. Számítsuk ki ezt a formális definíció alapján is. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} P(x, y) &= x \partial_1 P = 1 \partial_2 P = 0 \\ Q(x, y) &= y \partial_1 Q = 0 \partial_2 Q = 1 \end{aligned}$$

valamint $\dot{\gamma}_1 = -\sin t$, $\dot{\gamma}_2 = \cos t$. Így a definíció szerint

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos t(\cos t) - \sin t(-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 1.$$

5.17. Példa Számítsuk ki egy stabil csomópontot megkerülő görbe indexét. Az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

rendszernek az origó csomó típusú egyensúlyi pontja. Legyen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ az origó középpontú egység sugarú kör. Ekkor a görbe pontjaiban a vektormező sugárirányban befelé mutat, amint a . Ábra mutatja. Így a vektor 2π szöget fordul, mialatt a görbén körbeme gyünk, azaz a görbe indexe 1. Számítsuk ki ezt a formális definíció alapján is. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}P(x, y) &= -x\partial_1 P = -1\partial_2 P = 0 \\ Q(x, y) &= -y\partial_1 Q = 0\partial_2 Q = -1\end{aligned}$$

valamint $\dot{\gamma}_1 = -\sin t$, $\dot{\gamma}_2 = \cos t$. Így a definíció szerint

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\cos t(-\cos t) + \sin t(\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 1.$$

5.18. Példa Számítsuk ki egy nyeregpontot megkerülő görbe indexét. Az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

rendszernek az origó nyereg típusú egyensúlyi pontja. Legyen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ az origó középpontú egység sugarú kör. Ekkor a görbe pontjaiban a vektormező irányát a . Ábra mutatja. Így a vektor -2π szöget fordul, mialatt a görbén körbeme gyünk, azaz a görbe indexe -1. Számítsuk ki ezt a formális definíció alapján is. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}P(x, y) &= x\partial_1 P = 1\partial_2 P = 0 \\ Q(x, y) &= -y\partial_1 Q = 0\partial_2 Q = -1\end{aligned}$$

valamint $\dot{\gamma}_1 = -\sin t$, $\dot{\gamma}_2 = \cos t$. Így a definíció szerint

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos t(-\cos t) + \sin t(-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = -1.$$

Az index kiszámításának, illetve alkalmazásának szempontjából egyaránt fontos az alábbi állítás, melyet formálisan nem igazolunk, szemléletesen azonban világos a definíció alapján.

5.3. Állítás Bármely γ görbe és (P, Q) vektormező esetén fennállnak az alábbiak.

1. A görbe indexe $\text{ind}(\gamma)$ folytonosan függ a γ görbétől, amíg az nem megy át egyensúlyi ponton.
2. A görbe indexe $\text{ind}(\gamma)$ folytonosan függ a P és Q függvényről, feltéve, hogy a görbe nem megy át egyensúlyi ponton.

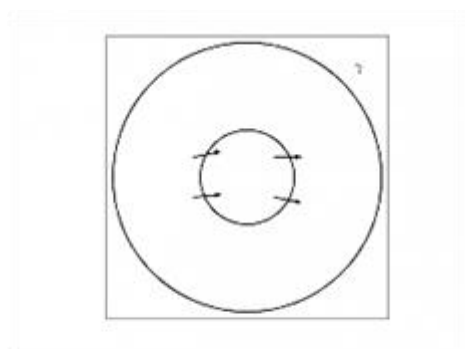
Mivel az index egész szám, azért a folytonos függésből következik az alábbi.

5.18. Következmény Bármely γ görbe és (P, Q) vektormező esetén $\text{ind}(\gamma)$ állandó, ha a γ görbét, vagy a P és Q függvényt úgy változtatjuk, hogy közben a görbe nem megy át egyensúlyi ponton.

Ezen következményt felhasználva igazolható néhány globális jellegű állítás a fázisképpel kapcsolatban.

5.4. Állítás Ha a γ görbe belsejében nincs egyensúlyi pont, akkor $\text{ind}(\gamma) = 0$.

Bizonyítás. Ha a γ görbe belsejében nincs egyensúlyi pont, akkor a görbe folytonosan összehúzható egy pontra, úgy, hogy közben a görbe nem megy át egyensúlyi ponton. A 42. Ábra alapján egyszerűen látható, hogy, amikor γ már elegendően kicsire van összehúzva, akkor végighaladva rajta a vektormező körbefordulása 0, azaz a görbe indexe 0. Mivel az index az összehúzás során nem változik, azért az eredeti γ görbe indexe is 0. [QED]



42. ábra. A görbe indexe nulla, ha belsejében nem tartalmaz egyensúlyi pontot.

A fenti következmény lehetővé teszi az egyensúlyi pont indexének definiálását.

5.19. Definíció Legyen (x_0, y_0) izolált egyensúlyi pontja az $\dot{x} = P(x, y)$ $\dot{y} = Q(x, y)$ rendszernek. Ekkor bármely az egyensúlyi pontot körülvevő, de más egyensúlyi pontot nem tartalmazó görbe indexe ugyanannyi. Az egyensúlyi pont indexe $\text{ind}(x_0, y_0)$, legyen egy ilyen görbe indexe.

A fenti példák alapján az egyensúlyi pontok indexére az alábbiakat kapjuk.

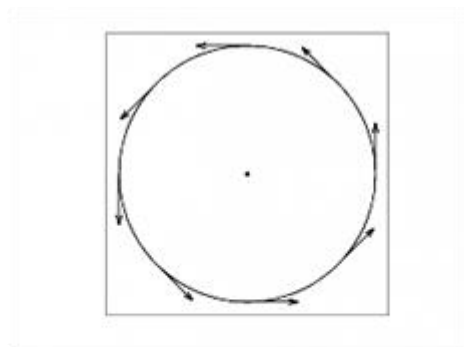
5.5. Állítás A nyeregpont indexe -1 , a csomó és fókusz indexe 1 .

Szintén a γ görbe folytonos változtatásával igazolható az alábbi.

5.6. Állítás Legyenek a γ görbe belsejében levő egyensúlyi pontok (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, k$. Ekkor a görbe indexe egyenlő a belsejében fekvő egyensúlyi pontok indexeinek összegével, azaz

$$\text{ind}(\gamma) = \sum_{i=1}^k \text{ind}(x_i, y_i).$$

A 43. Ábra alapján láthatjuk, hogy amennyiben γ egy periodikus megoldás pályája, akkor rajta végighaladva a vektor egyet fordul körbe, azaz fennáll az alábbi.



43. ábra. Periodikus pálya indexének kiszámítása.

5.7. Állítás Ha γ egy periodikus megoldás pályája, akkor $\text{ind}(\gamma) = 1$.

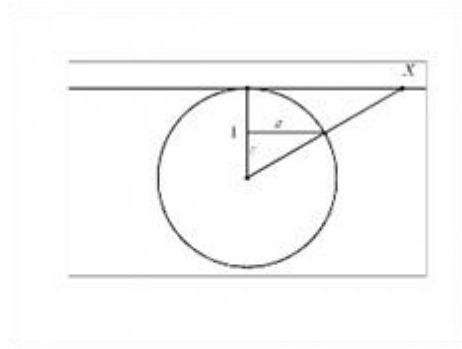
Ebből és a megelőző állításból azonnal következik az alábbi.

5.20. Következmény Ha γ periodikus megoldás, akkor a belsejében van egyensúlyi pont. Sőt a benne fekvő egyensúlyi pontok indexének összege 1.

Megjegyezzük, hogy az index fogalma nemcsak síkban, hanem más kétdimenziós sokaságokon, például gömbön, vagy tóruszon hasonlóképpen definiálható. A Poincaré-féle indextétel szerint egy kétdimenziós sokaságon megadott vektormező egyensúlyi pontjai indexének összege megegyezik a felület Euler-karakterisztikájával. Ennek értéke gömbre $\chi(S^2) = 2$, tóruszra $\chi(T^2) = 0$, a projektív sík esetén pedig $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$. Így például egy gömb felszínén megadott differenciálegyenlet egyensúlyi pontjai indexének összege mindig 2.

5.4. 5.4 Végtelenbeli viselkedés

Kétdimenziós fázisképek globális osztályozásának egyik nehézsége abban rejlik, hogy a fázissík nem kompakt és a végtelenbeli viselkedést nehéz megragadni. Ezen probléma kezelésére különböző projekciókat alkalmaznak, melyek a síkot kompakt halmazra vetítik. Ezek közül itt a Poincaré-féle centrális vetítést mutatjuk be, amely a fázissíkot egy félgömbre vetíti, a végtelenbeli pontokat pedig a félgömböt határoló körre (a megfelelő gömb egyenlítőjére) viszi. Ezzel a végtelenbeli viselkedés struktúrája részletesen vizsgálhatóvá válik (jobban, mint az egy pontú kompaktifikáció esetében). Tekintsünk tehát egy egység sugarú, origó közepű gömböt és egy síkot, amely a gömböt a $(0, 0, 1)$ pontban (északi sark) érinti. Ezen sík origója legyen az érintési pont, és a síkon a koordinátákat jelölje (x, y) . A térbeli koordináták jelölésére az X, Y, Z betűket használjuk. A sík pontjait olyan módon vetítjük a felső félgömbre, hogy egy (x, y) pontot összekötünk az origóval (a gömb középpontjával), majd a síkbeli pontnak megfeleltetjük azt a pontot a félgömbön, amelynél a sugár félgömböt metszi. A 44. Ábrán látható derékszögű háromszögek hasonlósága miatt a koordinátákat összekapcsoló formula $x = X/Z$.



44. ábra. A síkot a gömb felszínére képező transzformáció.

A síkbeli (x, y) koordináták segítségével tehát vezessük be az alábbi X, Y, Z koordinátákat a térben

$$\begin{aligned} X &= xZ \\ Y &= yZ \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Nézzük meg, hogy ez a koordináta-transzformáció hogyan hat a síkban megadott

$$\dot{x} = P(x, y) \quad (42)$$

$$\dot{y} = Q(x, y) \quad (43)$$

differenciálegyenlet fázisképére. Differenciáljuk a transzformációt definiáló azonosságokat. Ekkor az

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x}Z + x\dot{Z} \\ \dot{Y} &= \dot{y}Z + y\dot{Z} \\ \dot{Z} &= -Z^3(x\dot{x} + y\dot{y}) \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk. Helyettesítsük be ebbe a (42)-a (43) differenciálegyenletből a deriváltakat, valamint alkalmazzuk a transzformáció képleteit. Ekkor az X koordinátára vonatkozó differenciálegyenlet

$$\dot{X} = Z \cdot P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - Z \cdot X \cdot \left(X P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + Y Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right).$$

Hasonlóan kapjuk a differenciálegyenleteket az Y és Z változóra is. A rövidség kedvéért $P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ helyett írjunk P -t, és hasonlóan járunk el Q esetében is. Ekkor az új koordinátarendszerben a differenciálegyenlet-rendszer

$$\dot{X} = ZP - ZX(XP + YQ) \quad (44)$$

$$\dot{Y} = ZQ - ZY(XP + YQ) \quad (45)$$

$$\dot{Z} = -Z^3(XP + YQ). \quad (46)$$

Egyszerűen látható, hogy ennek a rendszernek az egységgömb invariáns felülete. Az ezen felületen létrejött fáziskép felel meg az eredeti síkbeli fázisképnek, a trajektóriák végtelenbeli viselkedése pedig a gömb egyenlítőjén, azaz a $Z=0$ síkkal való metszetén látható.

Nézzük meg néhány egyszerű lineáris rendszer példáján, hogy a jól ismert síkbeli fáziskép milyen végtelenbeli viselkedést mutat.

5.19. Példa Tekintsük a nyeregponttal rendelkező

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

lineáris rendszert. Ekkor $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = -y$, így $ZP = X$, $ZQ = -Y$ és $Z(XP + YQ) = X^2 - Y^2$. Helyettesítsük ezeket a (44)-(46) rendszerbe, ezzel az

$$\begin{aligned}\dot{X} &= X(1 - X^2 + Y^2) \\ \dot{Y} &= Y(-1 - X^2 + Y^2) \\ \dot{Z} &= -Z(X^2 - Y^2)\end{aligned}$$

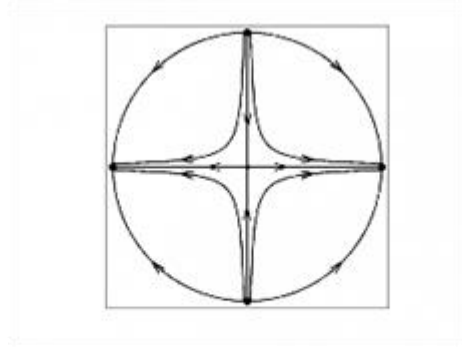
rendszert kapjuk az új változókra. Vizsgáljuk ennek fázisképét az egységsugarú gömb felszínén. A végesben levő egyensúlyi pontok $(0, 0, 1)$ és $(0, 0, -1)$ nyeregpontok, mivel az origó az eredeti rendszernek nyeregpontja volt, és ezek a pontok az origó vetítésével keletkeztek a gömb felületén. Vizsgáljuk most a végtelenbeli egyensúlyi pontokat. Ezek harmadik koordinátája $Z = 0$, így az $X^2 + Y^2 = 1$ egyenlet határozza meg azokat. Ebből $X = 0$ és $Y = \pm 1$ vagy $X = \pm 1$ és $Y = 0$. Így a végtelenben négy egyensúlyi pont van: $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$. Határozzuk meg ezek típusát. Az $(1, 0, 0)$ pontban vetítsük az egyenletet az $X = 1$ síkra. Ekkor az

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= Y(-2 + Y^2) \\ \dot{Z} &= -Z(1 - Y^2)\end{aligned}$$

kétváltozós rendszert kapjuk. Ennek egyensúlyi pontja a $(0, 0)$ pont (ez felel meg az $(1, 0, 0)$ pontnak). A rendszer Jacobi-mátrixa a $(0, 0)$ -ban

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tehát $(0, 0)$ stabil csomó, azaz az $(1, 0, 0)$ pont stabil csomó. Hasonlóan vizsgálható a másik három egyensúlyi pont. A $(-1, 0, 0)$ pont szintén stabil csomó, a $(0, 1, 0)$ és $(0, -1, 0)$ pontok pedig instabil csomópontok. Ezzel tehát a felső félgömbön a 45. Ábrán látható fázisképet kapjuk. (A fázisképet a felső félgömről függőleges vetítéssel az egyenlítő síkjára vetítjük, az ábrán ez látható.)



45. ábra. Nyeregponttal rendelkező lineáris rendszer végtelenbeli viselkedése.

Érdeemes megjegyezni, hogy az egész gömbfelületen összesen hat egyensúlyi pont van, két nyeregpont és négy csomópont. Ezek indexeinek összege $2(-1) + 4 = 2 = \chi(S^2)$, amely a gömb Euler-karakterisztikáját adja. A Poincaré-féle indextétel szerint egy kétdimenziós sokaságon megadott vektormező egyensúlyi pontjai indexének összege megegyezik a felület Euler-karakterisztikájával.

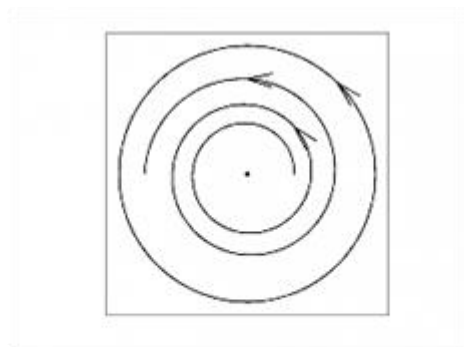
5.20. Példa Tekintsük az instabil fókuszponttal rendelkező

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$$

lineáris rendszert. Ekkor $P(x, y) = x - y$, $Q(x, y) = x + y$, így $ZP = X - Y$, $ZQ = X + Y$ és $Z(XP + YQ) = X^2 + Y^2$. Helyettesítsük ezeket a (44)-(46) rendszerbe, ezzel az

$$\begin{aligned}\dot{X} &= X - Y - X(X^2 + Y^2) \\ \dot{Y} &= X + Y - Y(X^2 + Y^2) \\ \dot{Z} &= -Z^2(X^2 + Y^2)\end{aligned}$$

rendszert kapjuk az új változókra. Vizsgáljuk ennek fázisképét az egységsugarú gömb felszínén. A végesben levő egyensúlyi pontok $(0, 0, 1)$ és $(0, 0, -1)$ instabil fókuszpontok, mivel az origó az eredeti rendszernek instabil fókuszpontja, és ezek a pontok az origó vetítésével keletkeztek a gömb felületén. Vizsgáljuk most a végtelenbeli egyensúlyi pontokat. Ezek harmadik koordinátája $Z = 0$, így az $X^2 + Y^2 = 1$ egyenlet határozza meg azokat. Ha ezt a kifejezést az első két egyenletbe helyettesítjük, akkor láthatjuk, hogy ennek eleget tevő egyensúlyi pontja nincs a rendszernek, azaz nincsenek végtelenbeli egyensúlyi pontok. Ezzel tehát a felső félgömbön a 46. Ábrán látható fázisképet kapjuk. (A fázisképet a felső félgömről függőleges vetítéssel az egyenlítő síkjára vetítjük, az ábrán ez látható.)



46. ábra. Instabil fókuszponttal rendelkező lineáris rendszer végtelenbeli viselkedése.

Érdeemes megjegyezni, hogy az egész gömbfelületen összesen két egyensúlyi pont van, mindkettő instabil fókusz. Ezek indexe 1, ezért indexeik összege $2 = \chi(S^2)$, amely a gömb Euler-karakterisztikáját adja.

5.5. 5.5 Feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Az $\dot{x} = f(x)$ egyenletek topologikus ekvivalencia szerint hány osztályba sorolhatók, ha az f függvénynek három zérushelye van?

(A) 10, (B) 9, (C) 8

Válasz: (A).

2. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Az $\dot{x} = f(x)$ egyenletek topologikus ekvivalencia szerint hány osztályba sorolhatók, ha az f függvénynek négy zérushelye van?

(A) 15, (B) 16, (C) 17

Válasz: (B).

3. Hány egyensúlyi pontja van a végtelenben a centrumponttal rendelkező

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

rendszernek?

(A) 2, (B) 3, (C) 0

Válasz: (C).

4. Hány egyensúlyi pontja van a végtelenben a csomóponttal rendelkező

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y\end{aligned}$$

rendszernek?

(A) 4, (B) 3, (C) 0

Válasz: (A).

6. 6 A bifurkációelmélet alapjai és strukturális stabilitás

Az eddigi fejezetekben számos módszert láthattunk differenciálegyenlet-rendszerek fázisképének vizsgálatára. A különböző alkalmazásokban megjelenő egyenletek általában paramétereket is tartalmaznak, így természetes kérdés, hogy a fáziskép hogyan függ a paraméterektől. Egy paraméter értékét változtatva a differenciálegyenlet megoldása megváltozik, azonban minőségi változás csak bizonyos speciális paraméter értékeknél következik be. Gondoljunk például az $\dot{x} = ax$ differenciálegyenletre, melyben $a \in \mathbb{R}$ a paraméter. Ennek megoldása, $x(t) = e^{at}x(0)$ nyilván függ az a paraméter értékétől, de ha a értékét például $a = 1$ -ről $a = 1.01$ -re változtatjuk, akkor a megoldás minőségileg nem változik meg. Ezzel szemben az $a = 0$ körül minőségi változás következik be, hiszen $a = 0$ esetén a megoldások konstans függvények, viszont bármilyen kis pozitív a értékre szigorúan nőnek, negatív a esetén pedig szigorúan fogyók. Azon paraméterértékeket, melyeknél minőségi változás következik be, azaz a fáziskép nem topologikusan ekvivalens a közeli paraméterértékekhez tartozó rendszerek fázisképével, bifurkációs paraméterértékeknek nevezzük, a bekövetkező minőségi változást pedig bifurkációnak hívjuk. Ezt fogalmazzuk meg általánosan a következő definícióban.

Tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletet, melyben $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, a $\lambda \in \mathbb{R}^k$ vektor (gyakran csak egyetlen szám) a paraméter.

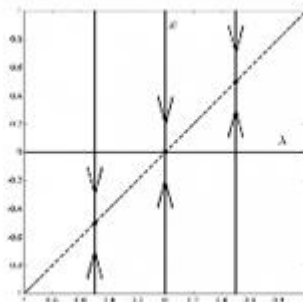
6.1. Definíció A $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$ paraméterérték reguláris, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ esetén az $f(\cdot, \lambda)$ rendszer topologikusan ekvivalens a $f(\cdot, \lambda_0)$ rendszerrel. A $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$ bifurkációs paraméter, ha nem reguláris.

Az első szakaszban számos példán szemléltetjük a definíció jelentését. Ezek között szerepelni fognak a legfontosabb bifurkációk is, melyek közül néhányat a következő fejezetben általánosabban és részletesebben is tárgyalni fogunk. A második szakaszban elégséges feltételt adunk bifurkációk megjelenésére, a harmadik szakaszban pedig a strukturális stabilitással foglalkozunk.

6.1. 6.1 Elemi bifurkációk normálformája

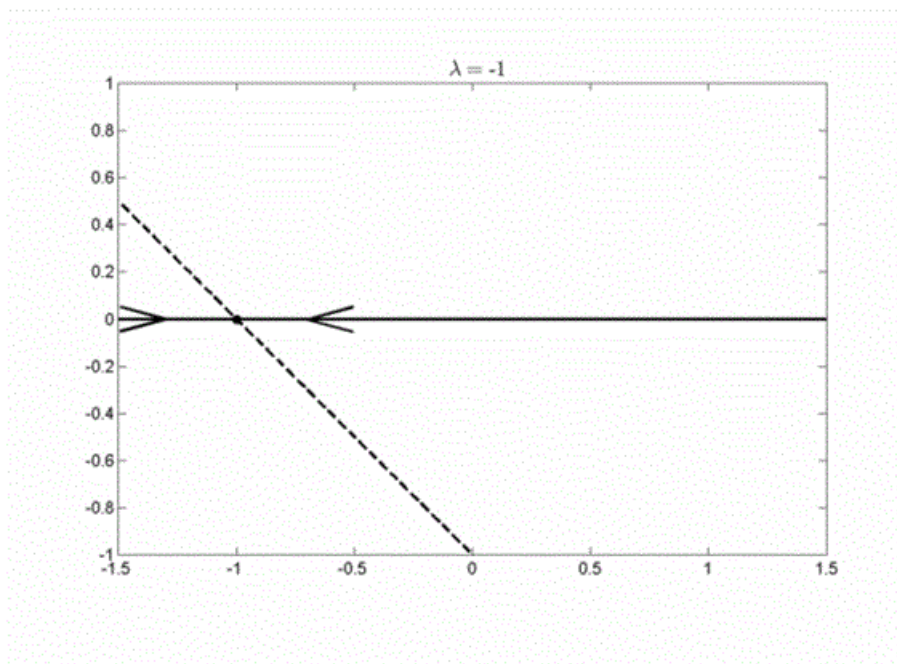
Ebben a szakaszban bemutatjuk a leggyakrabban vizsgált bifurkációk normálformáját, azaz azokat a legegyszerűbb egyenleteket, amelyekben ezek a bifurkációk megjelennek.

6.1. Példa Vizsgáljuk meg az $\dot{x} = \lambda - x$ egyenletet, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter. Az egyensúlyi pont bármely λ esetén az $x = \lambda$ pont. Ez a pont minden λ értékre globálisan aszimptotikusan stabilis, azaz ehhez tartanak a pályák. A fázisképet különböző λ értékekre úgy szokták ábrázolni, hogy a vízszintes tengelyen változik λ értéke, és egy adott λ értékhez tartozó fázisképet az ott felvett függőleges egyenesen ábrázolják, amint a 47. ábra mutatja. Az ábrán láthatjuk, hogy minden λ esetén ugyanaz a fáziskép, nincs bifurkáció, azaz minden λ érték reguláris. A különböző λ értékekhez tartozó fázisképek topologikus ekvivalenciája formálisan is igazolható a pályákat egymásba vivő homeomorfizmusok megadásával. Például a $\lambda = 0$ értékekhez tartozó fáziskép pályáit a $h(p) = p - 1$ eltolás a $\lambda = 1$ értékekhez tartozó fáziskép pályáira képezi.



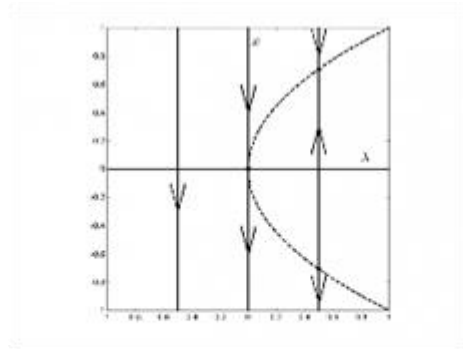
A 47. Példában szereplő differenciálegyenlet fázisképe különböző λ paraméterértékek esetén.

Az alábbi animációban a 47. Példában szereplő differenciálegyenlet fázisképe látható, amint a λ paraméter -1 és 1 között változik.



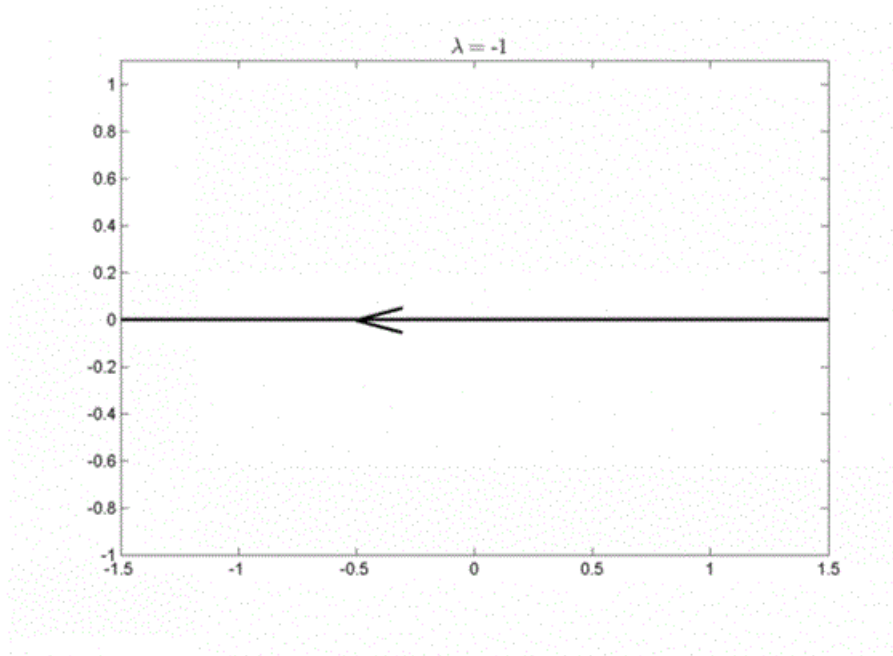
Nézzünk most olyan egyenleteket, melyekben a bifurkáció megjelenik. Ezek közül a legfontosabb és legegyszerűbb a nyereg-csomó, vagy más néven fold-bifurkáció.

6.2. Példa (Nyereg-csomó, vagy fold bifurkáció) Tekintsük az $\dot{x} = \lambda - x^2$ egyenletet, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter. Az egyensúlyi pont létezése ebben az esetben függ λ értékétől. Ha $\lambda < 0$, akkor nincs egyensúlyi pont, ha $\lambda = 0$, akkor egy egyensúlyi pont van, az $x = 0$ pont, ha pedig $\lambda > 0$, akkor két egyensúlyi pont van $x = \pm\sqrt{\lambda}$. A fázisképet különböző λ értékekre az előbbi példához hasonlóan ábrázolhatjuk, amint a 48. ábra mutatja. Az ábrán láthatjuk, hogy $\lambda = 0$ bifurkációs érték, hiszen a bal és jobb oldalán különböző a fáziskép. A $\lambda \neq 0$ értékek viszont regulárisak, hiszen negatív és pozitív λ értékek körül (λ értékét elegendően kicsit változtatva), nem változik a fáziskép. A különböző $\lambda \neq 0$ értékekhez tartozó fázisképek topologikus ekvivalenciája formálisan is igazolható a pályákat egymásba vivő homeomorfizmusok megadásával. Például a $\lambda < 0$ értékekhez tartozó fázisképeket a $h(p) = p$ identitás egymásba képezi. A pozitív λ értékekhez tartozó fázisképeket szakaszonként lineáris h függvénnyel lehet egymásba képezni, ennek konkrét megadását az Olvasóra bízunk. Ebben a példában $\lambda = 0$ esetén bekövetkező bifurkációt nyereg-csomó, vagy fold-bifurkációnak nevezik. A nyereg-csomó elnevezés az $\dot{x} = \lambda - x^2$, $\dot{y} = -y$ kétdimenziós rendszerben bekövetkező változásra utal, melyet a 3. ábrán láthatunk.

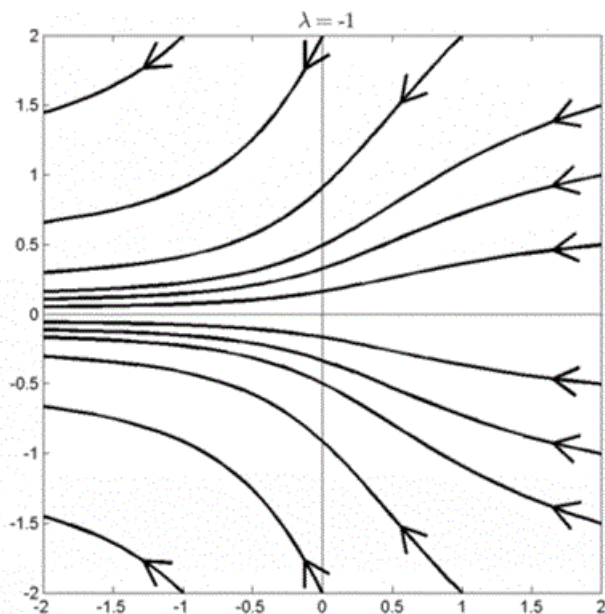


48. ábra. Nyereg-csomó, vagy másnéven fold-bifurkáció az $\dot{x} = \lambda - x^2$ differenciálegyenletben $\lambda = 0$ esetén.

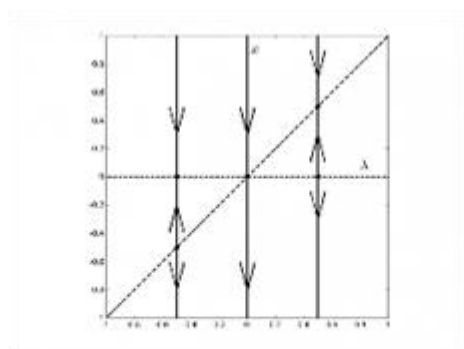
Az alábbi animációban az $\dot{x} = \lambda - x^2$ differenciálegyenlet fázisképe látható, amint a λ paraméter -1 és 1 között változik.



Nyereg-csomó bifurkáció az $\dot{x} = \lambda - x^2$, $\dot{y} = -y$ kétdimenziós rendszerben $\lambda = 0$ esetén.

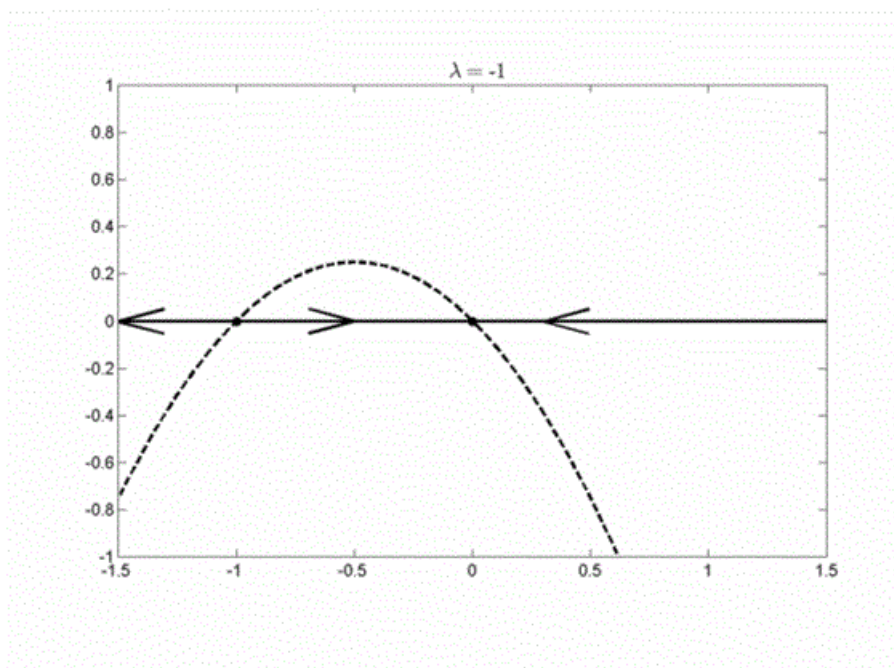


6.3. Példa (Transzkritikus bifurkáció) Tekintsük az $\dot{x} = \lambda x - x^2$ egyenletet, melyben ismét $\lambda \in \mathbb{R}$ a paraméter. Az $x = 0$ pont most bármely λ esetén egyensúlyi pont. Ezen kívül $x = \lambda$ is egyensúlyi pont, tehát $\lambda \neq 0$ esetén két egyensúlyi pont van, $\lambda = 0$ esetén viszont csak egy. Tehát a $\lambda = 0$ értéknél bifurkáció van. A fázisképet különböző λ értékekre a 47. Péladához hasonlóan ábrázolhatjuk, amint a 49. ábra mutatja. Az ábrán láthatjuk, hogy $\lambda = 0$ bifurkációs érték, hiszen $\lambda \neq 0$ esetén más a fáziskép, mint $\lambda = 0$ esetén. A $\lambda \neq 0$ értékek viszont regulárisak, hiszen negatív és pozitív λ értékek körül (λ értékét elegendően kicsit változtatva), nem változik a fáziskép. Negatív λ esetén az $x = 0$ egyensúlyi pont stabil, és az $x = \lambda$ egyensúlyi pont instabil. Pozitív λ esetén az $x = \lambda$ egyensúlyi pont veszi át a stabilitást. Ezt a bifurkációt a stabilitásváltás miatt transzkritikus bifurkációnak nevezzük. A különböző $\lambda \neq 0$ értékekhez tartozó fázisképek topologikus ekvivalenciája formálisan itt is igazolható a pályákat egymásba vivő homeomorfizmusok megadásával, melyet ismét az Olvasóra bízunk.

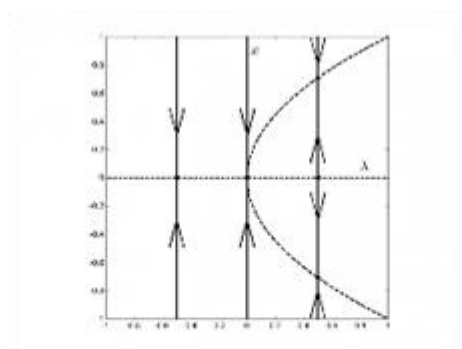


49. ábra. Transzkritikus-bifurkáció az $\dot{x} = \lambda x - x^2$ differenciálegyenletben $\lambda = 0$ esetén.

Az alábbi animációban az $\dot{x} = \lambda x - x^2$ differenciálegyenlet fázisképe látható, amint a λ paraméter -1 és 1 között változik.

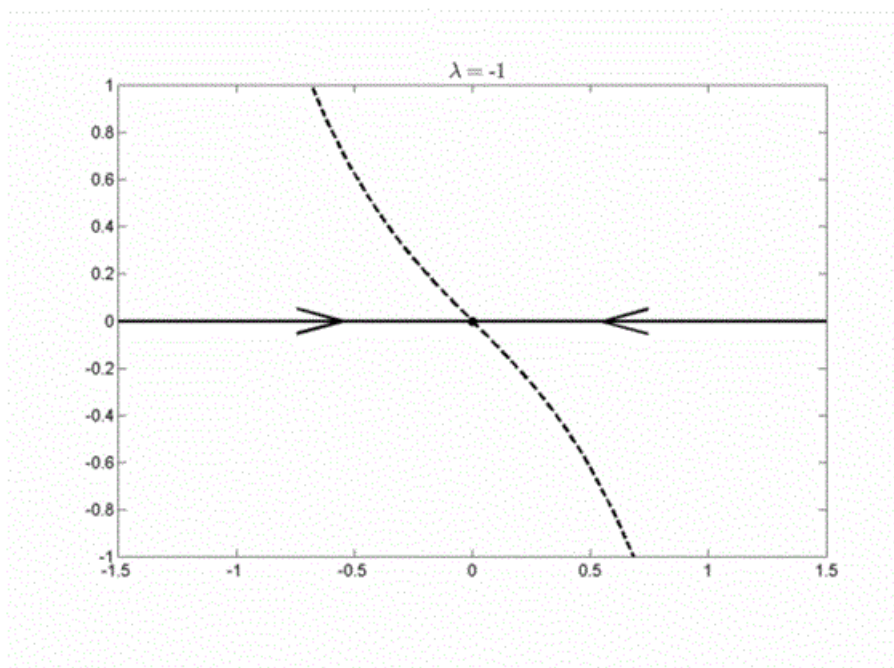


6.4. Példa (Vasvilla-bifurkáció) Vizsgáljuk az $\dot{x} = \lambda x - x^3$ egyenletet, melyben ismét $\lambda \in \mathbb{R}$ a paraméter. Az $x = 0$ pont most is bármely λ esetén egyensúlyi pont. Ezen kívül $x = \pm\sqrt{\lambda}$ is egyensúlyi pont, ha $\lambda > 0$. Tehát $\lambda < 0$ esetén egy egyensúlyi pont van, $\lambda > 0$ esetén pedig három, így a $\lambda = 0$ értéknél bifurkáció van. A fázisképet különböző λ értékekre a 47. Példához hasonlóan ábrázolhatjuk, amint az 50. ábra mutatja. Az ábrán láthatjuk, hogy $\lambda = 0$ bifurkációs érték, hiszen a bal és jobb oldalán különböző a fáziskép. A $\lambda \neq 0$ értékek viszont regulárisak, hiszen negatív, illetve pozitív λ értékek körül (λ értékét elegendően kicsit változtatva), nem változik a fáziskép. Negatív λ esetén az $x = 0$ egyensúlyi pont globálisan stabil. Pozitív λ esetén az $x = \pm\sqrt{\lambda}$ egyensúlyi pontok veszik át a stabilitást. Ezt a bifurkációt a bifurkációs görbe alakja miatt vasvilla-bifurkációnak nevezik. A különböző $\lambda < 0$, illetve $\lambda > 0$ értékekhez tartozó fázisképek topologikus ekvivalenciája formálisan itt is igazolható a pályákat egymásba vivő homeomorfizmusok megadásával, melyet ismét az Olvasóra bízunk.



50. ábra. Vasvilla-bifurkáció az $\dot{x} = \lambda x - x^3$ differenciálegyenletben $\lambda = 0$ esetén.

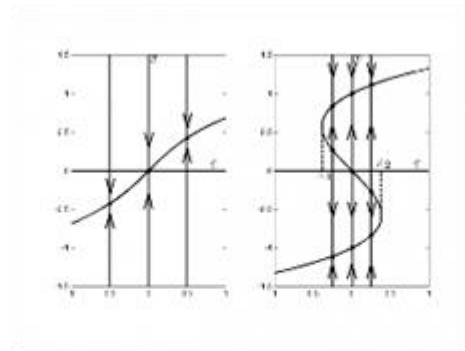
Az alábbi animációban az $\dot{x} = \lambda x - x^3$ differenciálegyenlet fázisképe látható, amint a λ paraméter -1 és 1 között változik.



Érdeemes megvizsgálni, hogy egy új paraméter hozzávétele hogyan változtatja meg a bifurkációs diagramot.

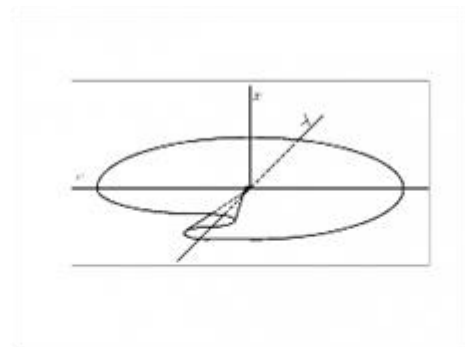
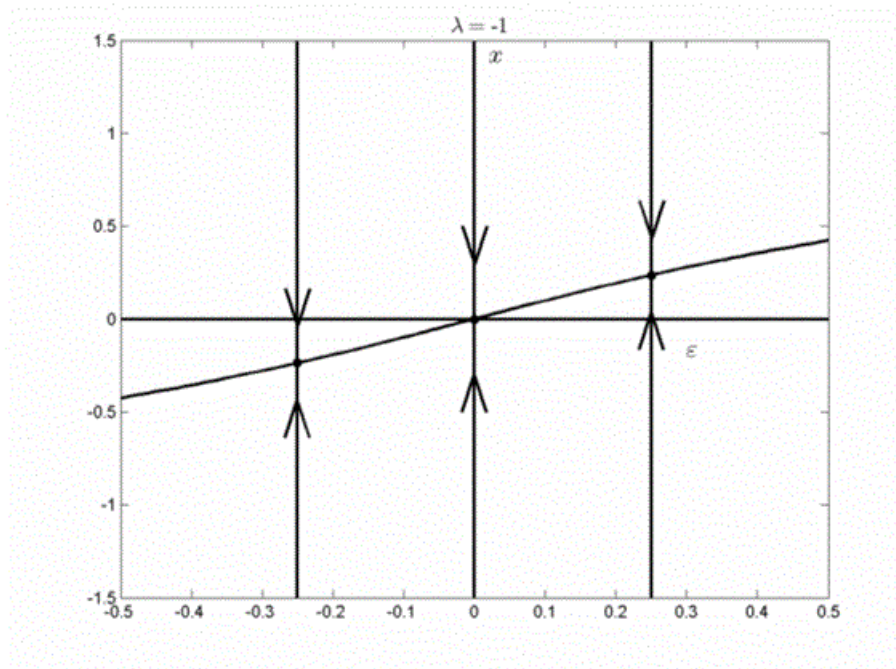
6.5. Példa Vizsgáljuk az $\dot{x} = \lambda x - x^3 + \varepsilon$ egyenletet, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$ két paraméter. Először rögzítsük λ értékét, és vizsgáljuk, hogy ε értékét változtatva hogyan alakul a fáziskép. Az egyensúlyi pontok az $\varepsilon = x^3 - \lambda x$ görbén helyezkednek el, melynek kétféle alakja lehet λ előjelétől függően. Ha $\lambda < 0$, akkor szigorúan monoton, ha pedig $\lambda > 0$, akkor egy maximuma és egy minimuma van. Az 51. ábrán a $\lambda = -1$ és $\lambda = 1$ esetet ábrázoltuk. Láthatjuk, hogy $\lambda = -1$ esetén minden ε érték reguláris, hiszen a fáziskép nem változik, minden ε értékre egyetlen globálisan vonzó egyensúlyi pontja van a rendszernek. Viszont $\lambda = 1$ esetén az ε_1 és ε_2 értékeknél fold-bifurkáció következik be, hiszen ezeknél két egyensúlyi pont születik, illetve tűnik el. Tehát a λ értékét változtatva az ε szerinti bifurkációs görbe alakjában is minőségi változás következik be, amint λ áthalad a nullán. A bifurkációs görbe alakulását folyamatában a 6. ábra mutatja, statikusan pedig a háromdimenziós az 52. Ábrán láthatjuk.

A háromdimenziós ábra felhasználásával megkaphatjuk, hogy rögzített ε esetén milyen a λ szerinti bifurkációs diagram, melyet a $\lambda = x^2 - \varepsilon/x$ görbe ad meg. Rögzítsük először az $\varepsilon = 0$ értéket, és vegyük az 52. ábrán levő felület metszetét az $\varepsilon = 0$ síkkal. Ekkor a vasvilla-bifurkációnál látott görbét kapjuk, melyet az 50. Ábrán láthatunk. Rögzítsünk ezután egy negatív ε értéket, legyen $\varepsilon = -1$. Vegyük az 52. Ábrán levő felület metszetét az $\varepsilon = -1$ síkkal, ekkor a $\lambda = x^2 + 1/x$ görbét kapjuk, melyet az 53. Ábra bal oldalán láthatunk. Rögzítsünk most egy pozitív ε értéket, legyen $\varepsilon = 1$. Vegyük az 52. Ábrán levő felület metszetét az $\varepsilon = 1$ síkkal, ekkor a $\lambda = x^2 - 1/x$ görbét kapjuk, melyet az 53. ábra jobb oldalán láthatunk. Ez az ábra azt is mutatja, hogy a vasvilla-bifurkációt megadó egyenletet egy tetszőlegesen kis ε értékkel perturbálva, eltűnik a vasvilla-bifurkáció, és helyette fold-bifurkáció jelenik meg. Ezt általánosan úgy fogalmazzák meg, hogy a vasvilla-bifurkáció egy-paraméteres rendszerekben nem tipikus, mert egy két-kodimenziós elfajulást tartalmaz, amelyet tipikusan kétparaméteres rendszerben lehet megfigyelni.

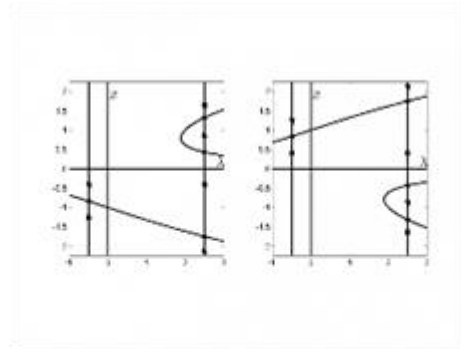


51. ábra. Az $\dot{x} = \lambda x - x^3 + \varepsilon$ differenciálegyenlet ε szerinti bifurkációs diagramja $\lambda = -1$ és $\lambda = 1$ esetén.

Az alábbi animációban az $\dot{x} = \lambda x - x^3 + \varepsilon$ differenciálegyenlet ε szerinti bifurkációs diagramjának alakulása látható, amint λ értéke -1 és 1 között változik.

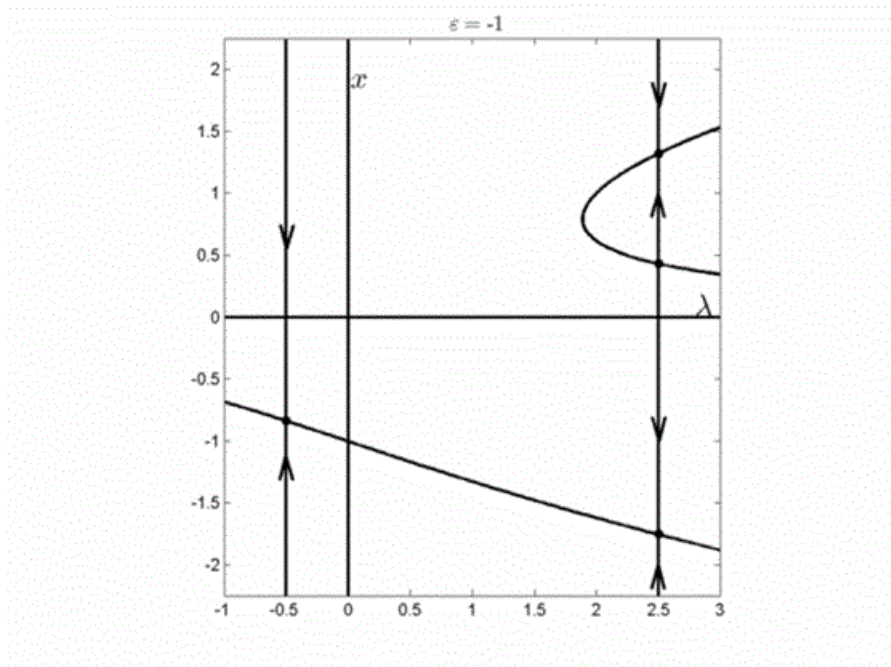


52. ábra. Az $\dot{x} = \lambda x - x^3 + \varepsilon$ differenciálegyenlet ε és λ szerinti együttes bifurkációs diagramja.



53. ábra. Az $\dot{x} = \lambda x - x^3 + \varepsilon$ differenciálegyenlet λ szerinti bifurkációs diagramja $\varepsilon = -1$ és $\varepsilon = 1$ esetén.

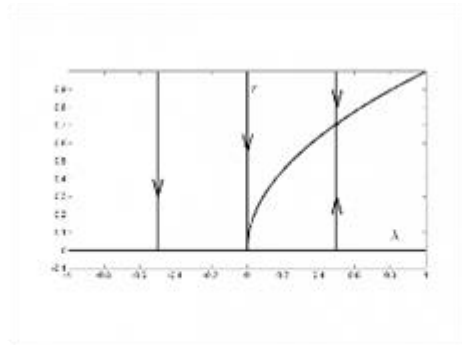
Az alábbi animációban az $\dot{x} = \lambda x - x^3 + \varepsilon$ differenciálegyenlet λ szerinti bifurkációs diagramjalátható, amint a ε paraméter -1 és 1 között változik.



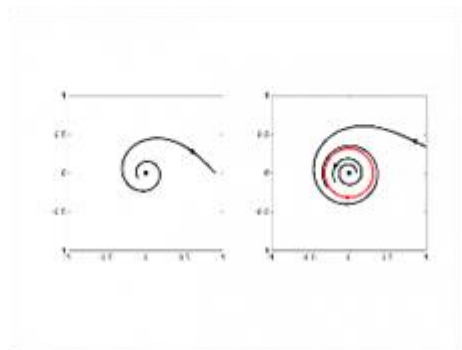
Térjünk rá most olyan bifurkációs jelenségek vizsgálatára, melyeket egydimenziós fázistérben nem lehet megfigyelni.

6.6. Példa (Andronov--Hopf-bifurkáció) Vizsgáljuk a polár koordinátákban megadott $\dot{r} = \lambda r + \sigma r^3$, $\dot{\phi} = 1$ kétdimenziós rendszert, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\sigma \in \mathbb{R}$ a paraméterek. Rögzítsük először a $\sigma = -1$ értéket (bármely $\sigma < 0$ esetén ugyanilyen jelenséget tapasztalnánk), és vizsgáljuk a fáziskép alakulását, amint λ értéke változik. Az origó bármely λ esetén egyensúlyi pont, stabilitása az r függvényre vonatkozó differenciálegyenlet segítségével egyszerűen eldönthető. Ha ugyanis $\lambda < 0$, akkor $\dot{r} = \lambda r - r^3 < 0$, így r szigorúan fogyó függvény, tehát minden megoldás az origóhoz tart. Ha viszont $\lambda > 0$, és $r < \sqrt{\lambda}$, akkor $\dot{r} = r(\lambda - r^2) > 0$, így r szigorúan növekvő függvény, tehát az origó instabil. Ezenkívül $r = \sqrt{\lambda}$ esetén $\dot{r} = 0$, azaz a $\sqrt{\lambda}$ sugarú kör a rendszer periodikus pályája, amely orbitálisan aszimptotikusan stabilis, mivel $r < \sqrt{\lambda}$ esetén $\dot{r} > 0$, és $r > \sqrt{\lambda}$ esetén $\dot{r} < 0$. A most leírt jelenséget az 54. ábra szemlélteti. Ezen r viselkedése látható λ függvényében, a 47. Példához hasonló ábrázolásban. A bifurkáció tehát a $\lambda = 0$ értéknél következik be, a $\lambda \neq 0$ értékek pedig regulárisak. A kétdimenziós fázistérben a bifurkációt az 55. ábrán láthatjuk. Ha $\lambda < 0$, akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis, ha pedig $\lambda > 0$, akkor az origó

instabilis, és a vonzást a stabil határciklus veszi át, melynek mérete a λ értékével növekszik. Ezt a bifurkációt szuperkritikus AndronovHopf-bifurkációnak nevezik.

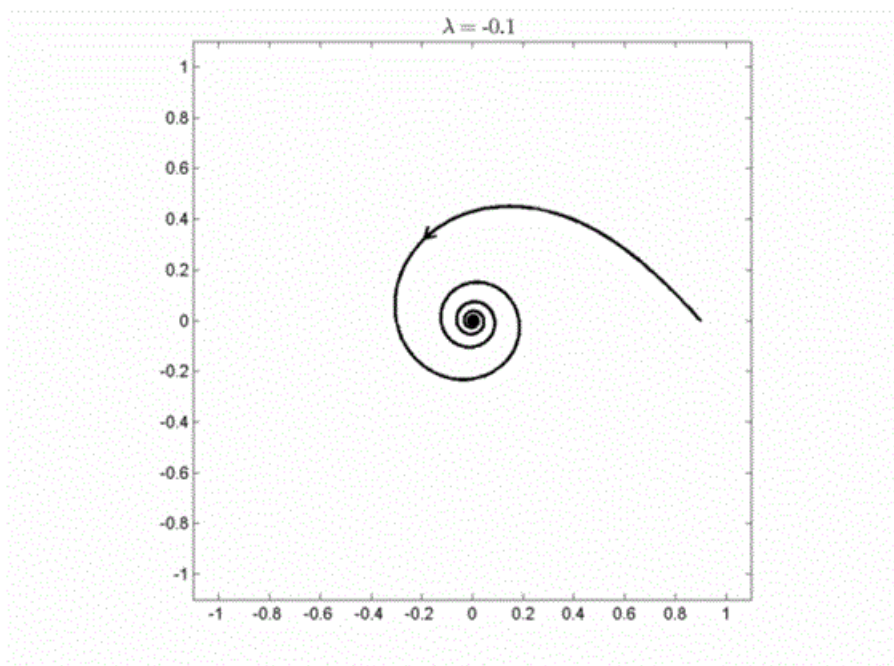


54. ábra. Bifurkáció az $\dot{r} = \lambda r - r^3$ differenciálegyenletben $\lambda = 0$ esetén.

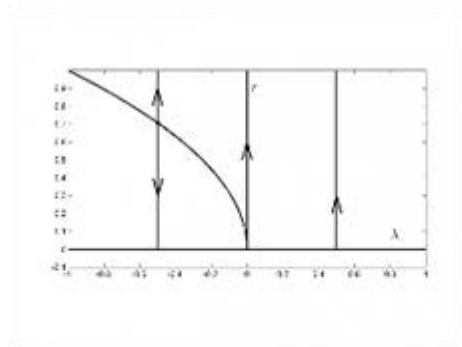


55. ábra. Szuperkritikus Andronov–Hopf-bifurkáció, az origó elveszíti stabilitását, és egy stabil határciklus születik.

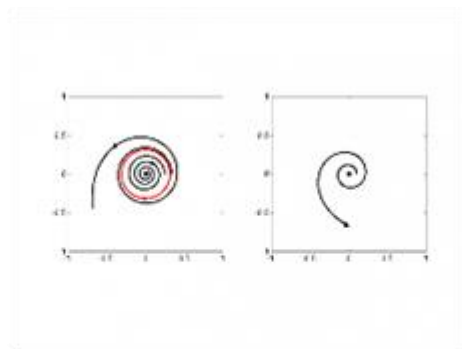
Az alábbi animációban az $\dot{r} = \lambda r - r^3$ differenciálegyenlet fázisképe látható, amint a λ paraméter $-0,1$ és $0,1$ között változik.



Térjünk vissza az $\dot{r} = \lambda r + \sigma r^3$, $\dot{\phi} = 1$ rendszerhez, azonban most rögzítsük egy pozitív σ értéket, legyen $\sigma = 1$. Az origó most is egyensúlyi pont, és stabilitása a változtatásával ugyanúgy alakul, mint az imént, viszont periodikus megoldás most $\lambda < 0$ esetén van a rendszerben, és ez orbitálisan instabilis. Az viselkedése függvényében az 56. ábrán látható. Az origó ilyen típusú stabilitásvesztését keménynak nevezik (az előző típus ehhez képest lágy stabilitásvesztés), ugyanis most pozitív λ esetén nem veszi át a stabilitást a határciklus, hanem a megoldások végtelenhez tartanak. A kétdimenziós fázistérben a bifurkációt az 57. ábrán láthatjuk. Ha $\lambda < 0$, akkor az origó aszimptotikusan stabilis, de vonzási tartománya csak az instabil periodikus megoldáson belüli tartomány. Ha $\lambda > 0$, akkor az origó instabilis, és a megoldások végtelenhez tartanak. Ezt a bifurkációt szubkritikus Andronov-Hopf-bifurkációnak nevezik.

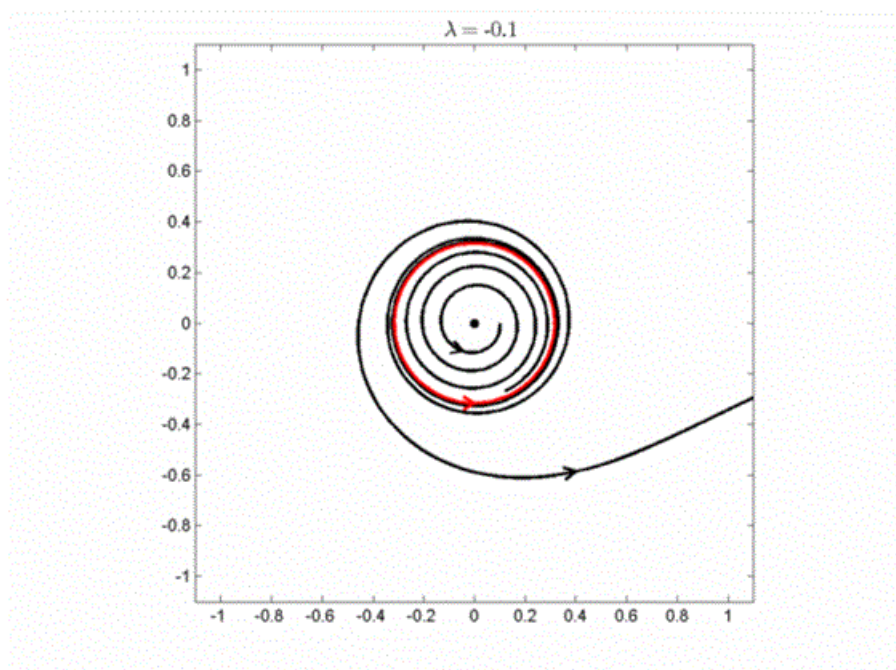


56. ábra. Bifurkáció az $\dot{r} = \lambda r + r^3$ differenciálegyenletben $\lambda = 0$ esetén.



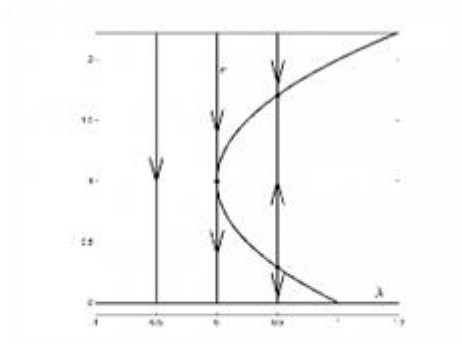
57. ábra. Szubkritikus Andronov–Hopf-bifurkáció, az origó elveszíti stabilitását, és ezzel párhuzamosan eltűnik az instabil határciklus.

Az alábbi animációban az $\dot{r} = \lambda r + r^3$ differenciálegyenlet fázisképe látható, amint a λ paraméter $-0,1$ és $0,1$ között változik.

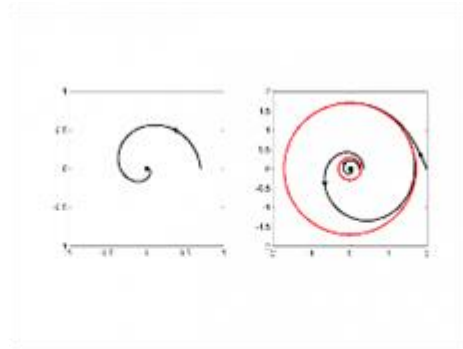


Az eddigi példákban a bifurkáció során a fáziskép egy egyensúlyi pont környezetében változott meg. Az ilyen típusú változásokat lokális bifurkációnak nevezik. Most olyan példákat fogunk mutatni, melyeknél a változás nem egy egyensúlyi pontban, hanem valamilyen globális alakzaton történik. Az alábbi példákban ezek a globális alakzatok a következők lesznek: periodikus pálya, homoklinikus pálya és heteroklinikus pálya.

6.7. Példa (Periodikus pálya fold bifurkációja) Vizsgáljuk a polár koordinátákban megadott $\dot{r} = r(\lambda - (r-1)^2)$, $\dot{\phi} = 1$ kétdimenziós rendszert, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ a paraméter. Az előző példához hasonlóan vizsgáljuk először r viselkedését λ függvényében. A bifurkációs diagramot az 58. ábrán láthatjuk. Ha $\lambda < 0$, akkor $\dot{r} = r(\lambda - (r-1)^2) < 0$, így r szigorúan fogyó függvény, tehát minden megoldás az origóhoz tart. Ha λ pozitív, de nullához közel van ($\lambda < 1$), akkor $\lambda = (r-1)^2$ esetén $\dot{r} = 0$, azaz az origó közepű $1 \pm \sqrt{\lambda}$ sugarú körök periodikus pályák. A belső kör instabil, a külső pedig stabil határciklus. A bifurkáció tehát $\lambda = 0$ esetén következik be. (Megjegyezzük, hogy $\lambda = 1$ esetén eltűnik a kisebbik periodikus pálya, de ezzel a bifurkációval most nem foglalkozunk.) A kétdimenziós fázistérben a bifurkációt az 59. ábrán láthatjuk. Ha $\lambda < 0$, akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis, a $\lambda = 0$ bifurkációs értéknél két határciklus születik az origó körül, melyek sugara közel van 1-hez. Fontos megjegyezni, hogy az AndronovHopf-bifurkáció esetében a születő periodikus pálya sugara nulla. Ha $0 < \lambda < 1$, akkor az origó körül két periodikus pálya van, a belső kör instabil, a külső pedig stabil határciklus. A jelenség a fold-bifurkációhoz hasonló, csak ebben az esetben nem egy stabil és egy instabil egyensúlyi pont születik a semmiből, hanem egy stabil és egy instabil határciklus. Ezért a bifurkációt periodikus pályákra vonatkozó fold bifurkációnak nevezik.

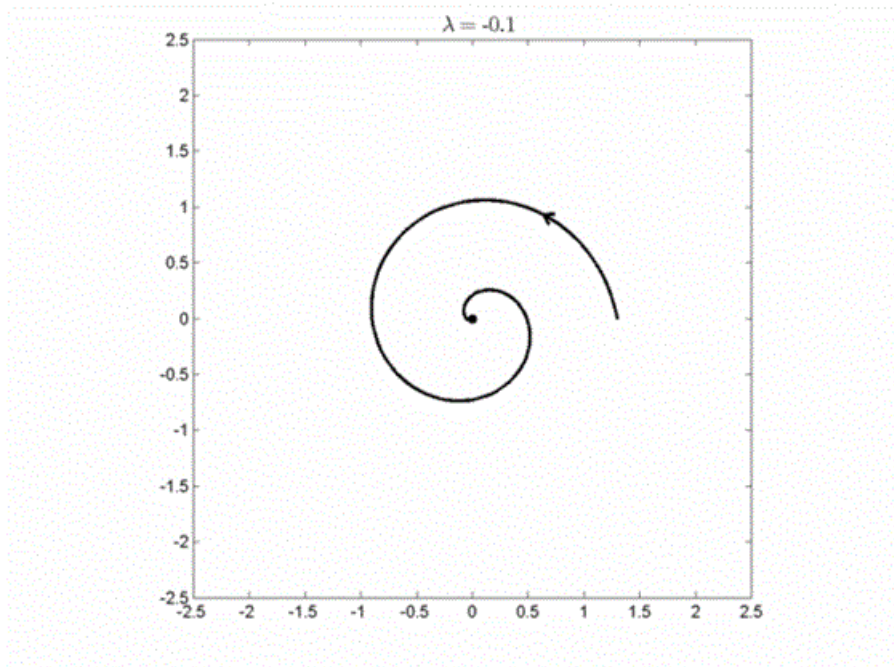


58. ábra. Bifurkáció az $\dot{r} = r(\lambda - (r-1)^2)$ differenciálegyenletben $\lambda = 0$ esetén.



59. ábra. Periodikus pályákra vonatkozó fold-bifurkáció. A $\lambda = 0$ bifurkációs értéknél egy stabil és egy instabil határciklus születik az origó körül a 'semmiből'. Ezek sugara a 'születés pillanatában' közel van 1-hez.

Az alábbi animációban az $\dot{r} = r(\lambda - (r - 1)^2)$ differenciálegyenlet fázisképe látható, amint a λ paraméter $-0,1$ és $0,1$ között változik.



6.8. Példa (Homoklinikus pálya bifurkációja) Vizsgáljuk az

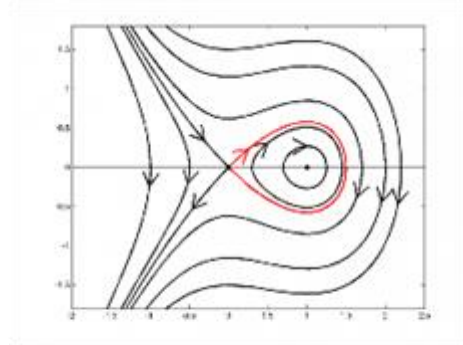
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^2 + \lambda y$$

kétdimenziós rendszert, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ a paraméter. Ismert, hogy $\lambda = 0$ esetén a $H(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ első integrál. Legyen ugyanis $H^*(t) = H(x(t), y(t))$, ekkor

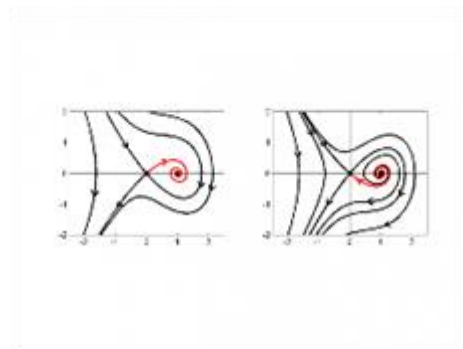
$$\dot{H}^*(t) = x^2(t) \cdot \dot{x}(t) - x(t) \cdot \dot{x}(t) + y(t) \cdot \dot{y}(t) = \lambda y^2.$$

Tehát $\lambda = 0$ esetén a H függvény valóban konstans a pályák mentén. Ezen felül a H függvény Ljapunov-függvényként is alkalmazható, hiszen ha $\lambda > 0$, akkor a megoldások mentén növekszik, ha pedig $\lambda < 0$, akkor a megoldások mentén csökken. Határozzuk meg a fázisképet először $\lambda = 0$ esetén. Ekkor egyszerűen a H szintvonalait kell meghatározni, mert a pályák ezeken fekszenek. Így kapjuk a 60. ábrán látható fázisképet. Nézzük most a $\lambda < 0$ esetet. Az egyensúlyi pontok ekkor is a $(0, 0)$ és az $(1, 0)$ pontok, mint a $\lambda = 0$ esetben. Az origó ekkor is nyeregpont, az $(1, 0)$ pont viszont stabil fókusz. Felhasználva, hogy a H függvény értéke

most csökken a megoldások mentén, azt kapjuk, hogy a nyeregpontból az első síknegyedbe kimenő pálya az $(1, 0)$ pontba fut be. Így az iránymezőt is megrajzolva a 61. ábrán látható fázisképet kapjuk. A $\lambda > 0$ esetben hasonlóan járhatunk el. Az egyensúlyi pontok ekkor is a $(0, 0)$ és az $(1, 0)$ pontok, és az origó továbbra is nyeregpont, az $(1, 0)$ pont viszont instabil fókusz. Felhasználva, hogy a H függvény értéke most növekszik a megoldások mentén, azt kapjuk, hogy a nyeregpontba az $(1, 0)$ instabil fókuszról kiinduló pálya fut be. Így az iránymezőt is megrajzolva a 61. ábrán látható fázisképet kapjuk. Tehát a bifurkáció a $\lambda = 0$ érték esetén következik be. Ekkor a nyeregpont stabil és instabil sokaságának van közös része, amely egy homoklinikus pályát hoz létre.

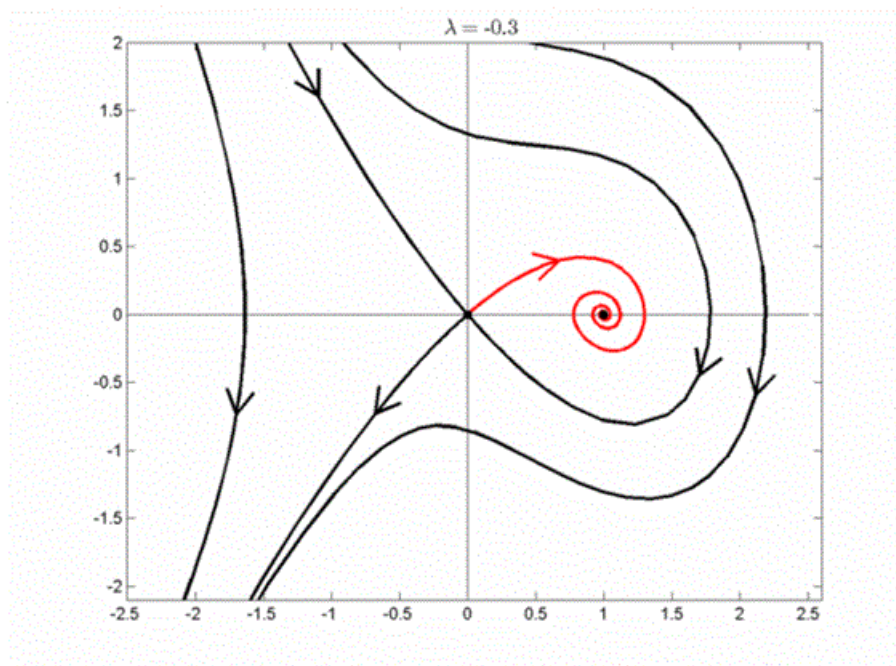


60. ábra. Az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^2 + \lambda y$ rendszer fázisképe $\lambda = 0$ esetén.



61. ábra. Az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^2 + \lambda y$ rendszer fázisképe $\lambda < 0$ (bal) és $\lambda > 0$ (jobb) esetén.

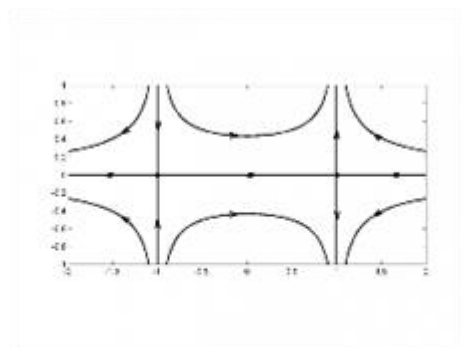
Az alábbi animációban az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^2 + \lambda y$ rendszer fázisképe látható, amint a λ paraméter $-0,3$ és $0,3$ között változik.



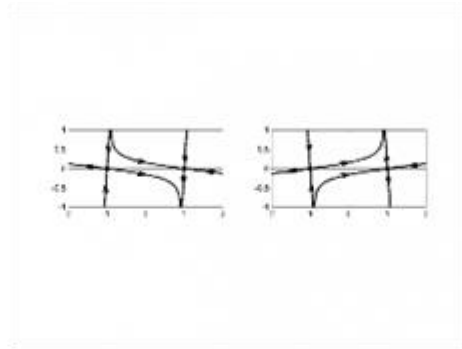
6.9. Példa (Heteroklinikus pálya bifurkációja) Vizsgáljuk az

$$\dot{x} = 1 - x^2 - \lambda xy, \quad \dot{y} = xy + \lambda(1 - x^2)$$

kétdimenziós rendszert, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ a paraméter. Az egyensúlyi pontok meghatározásához szorozzuk meg a második egyenletet λ -val, majd adjuk hozzá az első egyenlethez. Ekkor $(1 - x^2)(1 + \lambda^2) = 0$, tehát az egyensúlyi pontok első koordinátája $x = \pm 1$, melyből a második egyenlet alapján $y = 0$. Tehát az egyensúlyi pontok $(\pm 1, 0)$. Ábrázoljuk először a fázisképet $\lambda = 0$ esetén. Ekkor az iránymezőt megrajzolva a 62. ábrán látható fázisképet kapjuk. Az x -tengely -1 és 1 közötti szakasza a rendszer heteroklinikus pályája, amely összeköti a két nyeregpontot. Nézzük meg, hogy mi történik ezzel a heteroklinikus pályával, ha λ értékét megváltoztatjuk. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a $(\pm 1, 0)$ egyensúlyi pontok továbbra is nyeregpontok maradnak. Ha $\lambda < 0$, akkor $y = 0$ és $x \in (-1, 1)$ esetén $\dot{x} > 0$ és $\dot{y} = \lambda(1 - x^2) < 0$, ezért ezen a szakaszon jobbra, lefelé metszik a pályák az x -tengelyt. A $(-1, 0)$ nyeregpontból jobbra kimenő pálya tehát az alsó félsíkban halad az $x = 1$ egyenes mentén lefelé, amint a 63. ábrán láthatjuk. Tehát $\lambda < 0$ esetén nincs heteroklinikus pálya, amely összeköti a nyeregpontokat. Hasonló a helyzet $\lambda > 0$ esetén. Ekkor azonban $y = 0$ és $x \in (-1, 1)$ esetén $\dot{x} > 0$ és $\dot{y} = \lambda(1 - x^2) > 0$, ezért ezen a szakaszon jobbra, felfelé metszik a pályák az x -tengelyt. A $(-1, 0)$ nyeregpontból jobbra kimenő pálya tehát a felső félsíkban halad az $x = 1$ egyenes mentén felfelé, amint a 63. ábrán láthatjuk. A λ értékét változtatva tehát $\lambda = 0$ esetén heteroklinikus pálya jelenik meg, ezért a bifurkációt heteroklinikus bifurkációnak nevezik.

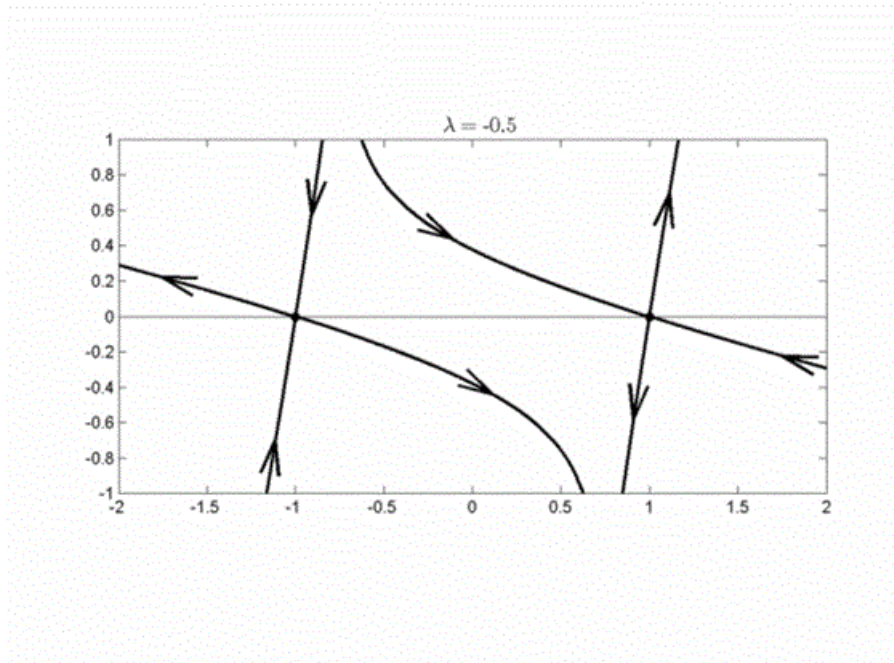


62. ábra. Az $\dot{x} = 1 - x^2 - \lambda xy$, $\dot{y} = xy + \lambda(1 - x^2)$ rendszer fázisképe $\lambda = 0$ esetén.



63. ábra. Az $\dot{x} = 1 - x^2 - \lambda xy$, $\dot{y} = xy + \lambda(1 - x^2)$ rendszer fázisképe $\lambda < 0$ (bal) és $\lambda > 0$ (jobb) esetén.

Az alábbi animációban az $\dot{x} = 1 - x^2 - \lambda xy$, $\dot{y} = xy + \lambda(1 - x^2)$ rendszer fázisképe látható, amint a λ paraméter $-0,5$ és $0,5$ között változik.



6.2. 6.2 Bifurkáció megjelenésének szükséges feltételei

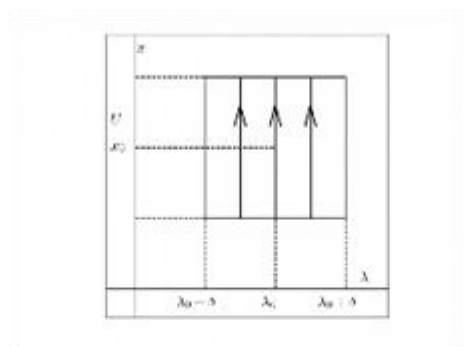
Az előző szakaszban bemutatott példák alapján láthatjuk, hogy lokális bifurkáció csak nemhiperbolikus egyensúlyi pontban történhet. Ezt az állítást fogjuk igazolni általánosan ebben a szakaszban. Defináljuk ehhez először a lokális bifurkáció fogalmát. Tekintsük ismét az $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletet, melyben $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, a $\lambda \in \mathbb{R}^k$ vektor a paraméter.

6.2. Definíció Az (x_0, λ_0) pár lokálisan reguláris, ha létezik az x_0 pontnak olyan $U \subset \mathbb{R}^n$ környezete és $\delta > 0$, hogy $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ esetén $f|_{U(\cdot, \lambda_0)}$ és $f|_{U(\cdot, \lambda)}$ topologikusan ekvivalensek (azaz x_0 egy U környezetében a fázisképek ekvivalensek). Az (x_0, λ_0) pontban lokális bifurkáció van, ha (x_0, λ_0) nem lokálisan reguláris.

Először igazoljuk, hogy lokális bifurkáció csak egyensúlyi pontban következhet be.

6.1. Állítás Ha $f(x_0, \lambda_0) \neq 0$, akkor (x_0, λ_0) lokálisan reguláris.

Bizonyítás. Egyszerűség kedvéért a bizonyítást az $n = 1$ dimenziós esetben végezzük el. Tegyük fel, hogy $f(x_0, \lambda_0) > 0$. Ekkor mivel f folytonos, azért van az x_0 pontnak olyan környezete és van olyan $\delta > 0$, hogy az $U \times [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ halmazban f értéke pozitív. Így ebben a halmazban a pályák felfelé irányított szakaszok, amint a 64. Ábrán láthatjuk. Így az U környezetben nyilván topologikusan ekvivalensek a fázisképek minden $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ esetén (a pályákat egymásba képező homeomorfizmus az identitás). Megjegyezzük, hogy $n > 1$ esetén a bizonyítás hasonlóan végezhető el a Kiegyenesítési tétel alkalmazásával. [QED]

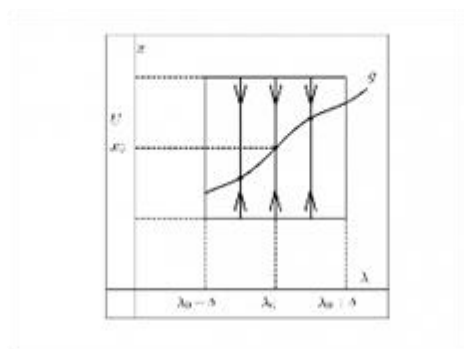


64. ábra. A rendszer pályái egy nem-egyensúlyi pont egy U környezetében különböző λ paraméterértékekre ugyanolyanok.

Most megmutatjuk, hogy hiperbolikus egyensúlyi pontban nem következhet be lokális bifurkáció.

6.2. Állítás Ha $f(x_0, \lambda_0) = 0$ és $\partial_x f(x_0, \lambda_0)$ hiperbolikus, akkor (x_0, λ_0) lokálisan reguláris. (Itt $\partial_x f(x_0, \lambda_0)$ az f Jacobi-mátrixát jelöli.)

Bizonyítás. Egyszerűség kedvéért a bizonyítást most is csak az $n = 1$ dimenziós esetben mutatjuk meg. Tegyük fel, hogy $\partial_x f(x_0, \lambda_0) < 0$. Ekkor az implicit függvény tétel szerint van olyan $\delta > 0$ és $g : (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $g(\lambda_0) = x_0$ és $f(g(\lambda), \lambda) \equiv 0$ minden $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ esetén, ezenkívül az x_0 pontnak van olyan U környezete, hogy az $U \times (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ halmazban az f más pontokban nem tűnik el. Mivel f folytonosan differenciálható, azért δ választható olyan kicsire, hogy $\partial_x f(g(\lambda), \lambda) < 0$ fennálljon minden $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ esetén. Így ezen λ értékekre az U halmazban az egyenletnek pontosan egy stabilis egyensúlyi pontja van, a pályák ebbe futnak be, amint a 65. Ábrán láthatjuk. Így az U környezetben nyilván topologikusan ekvivalensek a fázisképek minden $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ esetén (a pályákat egymásba képező homeomorfizmus olyan eltolás, ami az egyensúlyi pontokat egymásba viszi). Megjegyezzük, hogy $n > 1$ esetén a bizonyítás hasonlóan végezhető el a Hartman-Grobman-tétel alkalmazásával. [QED]



65. ábra. A rendszer pályái egy hiperbolikus egyensúlyi pont egy U környezetében különböző λ paraméterértékekre ugyanolyanok.

6.3. 6.3 Strukturális stabilitás

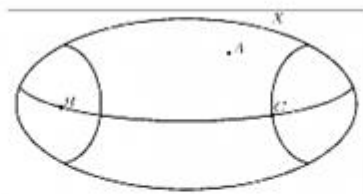
A bifurkációk vizsgálata során egy $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenletet úgy tekintünk, mint egy k paraméteres $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ differenciálegyenlet család egy tagját és azt vizsgáljuk, hogy a k -dimenziós λ paramétert változtatva, hogyan változik a fáziskép. Most a kérdést valamivel általánosabban közelítjük meg, és az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlettel együtt az összes C^1 perturbációját tekintjük, azaz az f jobboldalt egy függvénytér egy elemeként vizsgáljuk. A bifurkációk vizsgálata során egy paraméterértéket akkor nevezünk regulárisnak, ha a közelében levőkkel topologikusan ekvivalens fáziskép tartozott hozzá. Ennek általánosítása a strukturálisan stabil rendszer, amely a hozzá C^1 térben közeli összes rendszerrel topologikusan ekvivalens.

A definíció absztrakt megfogalmazásához legyen X topologikus tér és $\sim \subset X \times X$ ekvivalenciareláció. (A topologikus tér fogalmát nem ismerő Olvasó gondolhat metrikus vagy normált térre.) Számunkra a topologikus tér valamilyen függvénytér lesz a C^1 topológiával, az ekvivalenciareláció pedig a topologikus ekvivalencia.

6.3. Definíció Azt mondjuk, hogy $x \in X$ strukturálisan stabil, ha az x pontnak van olyan $U \subset X$ környezete, hogy minden $y \in U$ esetén $x \sim y$.

Azt mondjuk, hogy $x \in X$ bifurkációs pont, ha nem strukturálisan stabil.

Szemléletesen úgy is fogalmazhatunk, hogy $x \in X$ akkor strukturálisan stabil, ha egy ekvivalenciaosztálynak belső pontja, és akkor bifurkációs pont, ha osztályok határán helyezkedik el. Ez a szemlélet segít a bifurkáció kodimenziójának fogalmát is megvilágítani. Egy adott bifurkációs pont kodimenzióján annak a határfelületnek a kodimenzióját értjük, amely az adott pontot tartalmazza. A 66. Ábrán az A pont strukturálisan stabil, a B pont egy kodimenziós bifurkációs pont, a C pont pedig két kodimenziós bifurkációs pont. Ez úgy is megfogalmazható, hogy a B ponton keresztül megadható olyan görbe, amely a B -vel határos osztályok mindegyikébe belemegy, míg a C ponton keresztül ilyen görbe nem adható meg. A C körüli osztályokat csak egy két paraméteres család tagjai tudják elérni. Ezt fogalmazzuk meg általánosan a következő definícióban.



66. ábra. Strukturálisan stabil (A), egy kodimenziós (B), és két kodimenziós (C) bifurkációs pontok egy X topologikus térben.

6.4. Definíció Egy $x \in X$ bifurkációs pont k kodimenziós, ha megadható olyan $g: \mathbb{R}^k \rightarrow X$ folytonos függvény, melyre $g(0) = x$, és az x pontnak olyan U környezete és annak egy V nyílt és sűrű része, hogy minden $y \in V$ ponthoz található olyan $\alpha \in \mathbb{R}^k$, hogy $g(\alpha) \sim y$, és k a legkisebb ilyen dimenzió.

A továbbiakban az absztrakt szinten megfogalmazott definíciókat differenciálegyenletekre fogjuk alkalmazni.

Az ekvivalenciareláció, mint fent már megfogalmaztuk, a topologikus ekvivalencia lesz, hiszen két differenciálegyenletet akkor szeretnénk azonos osztályba tartozónak tekinteni, ha ugyanolyan a fázisképük. Nézzük most, hogy milyen teret válasszunk az X topologikus tér szerepére. Tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenletet, melyben $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Az X tér természetes választása tehát a folytonosan differenciálható függvények tere. A téren valamilyen topológiát is meg kell adni a

strukturális stabilitás definiálásához. Induljunk ki a C^0 , vagy másnéven szuprémum normából, melyet $\|f\|_0$ fog jelölni, ez tehát az $|f|$ szuprémuma. (Később visszatérünk arra, hogy ennek végeessége hogyan biztosítható.) Egy egyszerű egydimenziós példa megmutatja, hogy ez a topológia nem szerencsés választás. Tekintsük ugyanis az $f(x) = x$ identitás függvény által meghatározott $\dot{x} = x$ differenciálegyenletet. Az f függvényhez a C^0 -normában tetszőlegesen közel megadható olyan g függvény, melynek nem csak egy gyöke van, így az $\dot{y} = g(y)$ egyenlet fázisképe nem topologikusan ekvivalens az $\dot{x} = x$ fázisképével. A példa tanulsága az, hogy amennyiben az X téren a C^0 -normát választjuk, akkor csak olyan rendszerek lehetnek strukturálisan stabilisak, melyeknek nincs egyensúlyi pontjuk, ami a strukturális stabilitás túlságosan szűk definíciója lenne, hiszen a legtöbb ekvivalenciaosztálynak nem lenne egyáltalán belső pontja. A strukturális stabilitás fogalmát jelentősen szélesíti a C^1 -norma választása, melyet az $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$ képlet ad meg. Tekintsük ugyanis ismét az $f(x) = x$ identitás függvény által meghatározott $\dot{x} = x$ differenciálegyenletet. Az f függvényhez a C^1 -normában kellően közeli g függvénynek ugyanúgy egy gyöke van, mint az f függvénynek, így az $\dot{y} = g(y)$ egyenlet fázisképe topologikusan ekvivalens az $\dot{x} = x$ fázisképével. Így az egyensúlyi ponttal rendelkező $\dot{x} = x$ egyenlet is strukturálisan stabil lehet, ha a téren a C^1 -normát választjuk. A folytonosan differenciálható függvények C^1 -normája természetesen nem véges, ha a függvényeket nem kompakt halmazon értelmezzük. Ezért szokták a strukturális stabilitást kompakt halmazon értelmezett egyenletek esetében tanulmányozni. Egyváltozós egyenletek esetében tehát célszerű a körvonalon értelmezett differenciálegyenletek strukturális stabilitását vizsgálni.

6.3.1. 6.3.1 Egydimenziós rendszerek strukturális stabilitása

Vezessük be az $X = C^1(S^1, \mathbb{R})$ teret, amely olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényekből áll, melyek periodikusak és periódusuk 1, azaz $f(x+1) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen ezen a téren a norma

$$\|f\|_1 = \max_{[0,1]} |f| + \max_{[0,1]} |f'|.$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy pontosan azok a differenciálegyenletek strukturálisan stabilak, melyeknek csak hiperbolikus egyensúlyi pontjuk van. Vezessük be ezekre az alábbi jelölést.

$$G = \{f \in X : f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0\}$$

A tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi fogalomra és fontos állításra.

6.5. Definíció Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 függvény. Azt mondjuk, hogy y reguláris értéke az f függvénynek, ha $f(x) = y$ esetén $f'(x) \neq 0$. Többváltozós esetben az y reguláris értéke az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvénynek, ha $f(x) = y$ esetén $\det f'(x) \neq 0$. Azt mondjuk, hogy y kritikus érték, ha y nem reguláris érték.

6.6. Lemma (Sard) Egy $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 függvény kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű.

Ezt a lemmát nem bizonyítjuk, mivel meghaladja e jegyzet kereteit. A lemma felhasználásával igazoljuk a következő állítást.

6.3. Állítás A hiperbolikus egyensúlyi ponttal rendelkező rendszerek fenti G halmaza sűrű az $X = C^1(S^1, \mathbb{R})$ térben.

Bizonyítás. Egy függvény pontosan akkor van benne a G halmazban, ha 0 reguláris értéke. Legyen $f \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Meg kell mutatni, hogy van olyan $g \in G$, melyre $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Ha 0 reguláris értéke az f függvénynek, akkor $g = f$ megfelelő, hiszen ekkor $f \in G$. Ha 0 nem reguláris érték, akkor válasszunk egy pozitív, $c < \varepsilon$ reguláris értéket. Ilyen a Sard-lemma miatt létezik. Legyen ekkor $g = f - c$, így $\|f - g\|_1 = c < \varepsilon$, és $g(x) = 0$ esetén $f(x) = c$, ezért c regularitása miatt $f'(x) \neq 0$, amelyből $g'(x) \neq 0$ azonnal következik. Tehát a g függvénynek 0 reguláris értéke, azaz $g \in G$. [QED]

A tétel bizonyítása során felhasználjuk a következő állítást is, mely szerint, ha egy függvénynek elfajult zérushelye van, akkor kis perturbációval a zérushely egy környezetében azonosan nullává tehető. Az állítás szemléletesen nyilvánvaló, alább a formális bizonyítást mutatjuk meg.

6.4. Állítás Legyen $f \in X$ és tegyük fel, hogy valamely $x \in (0, 1)$ pontban $f(x) = 0 = f'(x)$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ és $\alpha > 0$ esetén van olyan $g \in X$ függvény melyre fennállnak az alábbiak:

1. $f(y) = g(y)$ minden $y \notin (x - \alpha, x + \alpha)$ esetén,
2. g azonosan 0 az x egy környezetében,
3. $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen $\eta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ olyan legalább C^1 függvény (a függvény akár C^∞ simaságúnak is választható), mely a $[-1, 1]$ intervallumon kívül nulla, és a $(-1/2, 1/2)$ intervallumban konstans egy. A függvény deriváltjának maximumát jelölje M . Az f függvényre tett feltétel miatt van olyan $\beta < \alpha$ pozitív szám, hogy

$$|f(y)| < \frac{\varepsilon}{4M}|y - x| \quad (47)$$

fennáll minden $y \in (x - \beta, x + \beta)$ esetén. Legyen $\delta < \beta$ olyan pozitív szám, melyre

$$\max_{[x-\delta, x+\delta]} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad \max_{[x-\delta, x+\delta]} |f'| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (48)$$

Legyen ekkor $g \in X$ a következő képlettel megadott függvény:

$$g(y) = f(y) \left(1 - \eta \left(\frac{y - x}{\delta} \right) \right).$$

Ellenőrizzük, hogy g teljesíti a kívánt feltételeket. Ha $|y - x| \geq \alpha$, akkor $|y - x| > \delta$, melyből $\eta \left(\frac{y-x}{\delta} \right) = 0$, így teljesül az 1. feltétel $g(y) = f(y)$. Ha $|y - x| < \delta/2$, akkor $\eta \left(\frac{y-x}{\delta} \right) = 1$, így teljesül a 2. feltétel, g azonosan 0 az x egy környezetében. A 3. feltétel ellenőrzéséhez felhasználjuk, hogy

$$f(y) - g(y) = f(y) \eta \left(\frac{y - x}{\delta} \right). \quad (49)$$

Ennek alapján az $f - g$ függvény az $[x - \delta, x + \delta]$ intervallumon kívül azonosan nulla, így elegendő azt igazolni, hogy minden $y \in [x - \delta, x + \delta]$ esetén

$$|f(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad |f'(y) - g'(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (50)$$

Mindkét egyenlőtlenség igazolásához a (49) egyenletet használjuk. Ebből $y \in [x - \delta, x + \delta]$ esetén $|f(y) - g(y)| < |f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ahol felhasználtuk a (48) első egyenlőtlenségét. Deriváljuk a (49) egyenlőséget, ekkor

$$f'(y) - g'(y) = f'(y) \eta \left(\frac{y - x}{\delta} \right) + f(y) \eta' \left(\frac{y - x}{\delta} \right) \frac{1}{\delta}.$$

Használjuk fel a (48) második egyenlőtlenségét, a (47) egyenlőtlenséget, valamint, hogy η deriváltjának maximuma M . Ezekből

$$|f'(y) - g'(y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4M}|y - x| \frac{M}{\delta}.$$

Mivel $y \in [x - \delta, x + \delta]$, azért $|y - x| \leq \delta$, így az előbbi becslés így folytatható:

$$|f'(y) - g'(y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4M} \delta \frac{M}{\delta} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezzel a kívánt, (50) képletben szereplő becsléseket igazoltuk. [QED]

A következő állítás elemien igazolható.

6.5. Állítás Ha az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet minden egyensúlyi pontja hiperbolikus, akkor csak véges sok egyensúlyi pontja lehet a $[0, 1]$ intervallumban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy végtelen sok egyensúlyi pont van a $[0, 1]$ intervallumban. Ekkor ezekből kiválasztható egy konvergens sorozat, amely egy $x \in [0, 1]$ ponthoz tart. Ekkor mivel f folytonosan differenciálható, azért $f(x) = 0$ és $f'(x) = 0$, tehát x nem-hiperbolikus egyensúlyi pont lenne, ami ellentmond a feltételnek. [QED]

Most rátérhetünk az egydimenziós strukturálisan stabil rendszerek jellemzésére.

6.7. Tétel Az $f \in X$ függvény által meghatározott dinamikai rendszer pontosan akkor strukturálisan stabil, ha f minden egyensúlyi pontja hiperbolikus, azaz ha $f \in G$. (Ebbe beleértjük azt az esetet is, amikor nincs egyáltalán egyensúlyi pontja a rendszernek.) Ezenkívül a strukturálisan stabil rendszerek halmaza G nyílt és sűrű az X térben.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f strukturálisan stabil, és igazoljuk, hogy $f \in G$. Mivel f ekvivalens egy környezetében levő rendszerekkel, és G sűrű, azért van olyan $g \in G$, amely benne van az f ezen környezetében, tehát ekvivalens az f függvénnyel. Mivel a g függvény minden gyöke hiperbolikus, azért véges sok gyöke van, így f és g ekvivalenciája miatt az f függvénynek is véges sok gyöke van. Megmutatjuk, hogy ezek mind hiperbolikusak. Mivel a gyökök izoláltak, azért ha valamelyik nem hiperbolikus lenne, akkor a 6.4. Állítás szerint tetszőlegesen kis C^1 perturbációval a zérushely egy környezetében azonosan nullává tehető lenne a függvény, azaz lenne az f függvényhez tetszőlegesen közel olyan függvény, amely egy szakaszon konstans nulla. Ez viszont nem lehet ekvivalens az f függvénnyel, ami ellentmond annak, hogy f strukturálisan stabil. Ezzel az egyik irányú állítást igazoltuk.

Tegyük most fel, hogy $f \in G$, és igazoljuk, hogy f strukturálisan stabil. A 6.5. Állítás miatt az f függvénynek csak véges sok gyöke lehet. Ha az f függvénynek nincs gyöke, akkor a hozzá C^1 -normában közel levő függvényeknek sincs gyöke, így az f függvénnyel ekvivalensek. Ha az f függvénynek vannak zérushelyei, akkor egyszerűen látható, hogy a hozzá C^1 -normában közel levő függvényeknek is ugyanannyi zérushelye van, és azok között az előjelük ugyanúgy változik, mint az f előjele. Ebből pedig következik, hogy az f által meghatározott fázisképpel ekvivalens fázisképet adnak. [QED]

6.3.2. 6.3.2 Strukturális stabilitás több dimenziós rendszerekben

Egydimenziós esetben a fáziskép csak egy nem-hiperbolikus egyensúlyi pont környezetében változhat meg. Kétdimenziós rendszerek esetében láttunk olyan bifurkációkat, amelyek nem egy egyensúlyi ponthoz kötődtek, nevezetesen: periodikus pálya fold bifurkációja, homoklinikus pálya bifurkációja, illetve heteroklinikus pálya bifurkációja. Leegyszerűsítve azt lehet mondani, hogy az olyan kétdimenziós rendszerek strukturálisan stabilak, amelyekben ilyenek nincsenek, azaz akkor strukturálisan stabil a rendszer, ha az egyensúlyi pontok és periodikus pályák hiperbolikusak, és nincsenek nyeregponthoz köztartozó pályák. Ezt először Andronov és Pontrjagin igazolták 1937-ben olyan síkbeli rendszerekre, melyeket csak egy pozitívan invariáns korlátos tartományon tekintünk. Ennek pontos megfogalmazását megtalálhatjuk Kuznyecov könyvében [14] a 2.5. Tételben. A kompakt kétdimenziós sokaságokra vonatkozó analóg állítást Peixoto bizonyította 1962-ben. Ez utóbbi tételt fogalmazzuk meg az alábbiakban. Jelölje S^2 a kétdimenziós gömbfelületet, és vezessük be az $X = C^1(S^2, \mathbb{R}^2)$ teret, a gömbfelületen értelmezett vektormezők halmazát. Egy ilyen vektormező, mint a differenciálegyenlet jobboldala meghatároz egy fázisképet az S^2 gömbfelületen. Ezekre a fenti módon

értelmezzük a topologikus ekvivalenciát, így a 6.3. Definíció segítségével értelmezhetjük az X térben a strukturálisan stabil egyenleteket. Ezeket jellemzi Peixoto alábbi tétele.

6.8. Tétel (Peixoto) Az $f \in X$ függvény által meghatározott dinamikai rendszer pontosan akkor strukturálisan stabil, ha

- véges sok egyensúlyi pont van, és mindegyik hiperbolikus,
- véges sok periodikus pálya van, és mindegyik hiperbolikus,
- nincs nyeregpontokat összekötő (heteroklinikus, vagy homoklinikus) pálya.

Ezenkívül a strukturálisan stabil rendszerek halmaza nyílt és sűrű az X térben.

Megjegyezzük, hogy Peixoto a tételt általánosabban, tetszőleges kompakt sokaságra igazolta. Már a tóruszon megadható olyan egyszerű, nem strukturálisan stabil differenciálegyenlet, amely a fenti tétel egyik feltételét sem sérti, tehát más is szükséges a strukturális stabilitáshoz. Tetszőleges kompakt sokaság esetén további feltétel, hogy a nem-vándorló pontok csak egyensúlyi pontok, vagy periodikus pontok lehetnek. A tétel ilyen általános megfogalmazása megtalálható Perko [16] és Wiggins [23] könyvében.

Az egy- és kétdimenziós esetek alapján sejtést fogalmazhatunk meg a strukturális stabilitás feltételére tetszőleges dimenzióban. Ennek alapján fogalmazzuk meg a MorseSmale-rendszerek alábbi definícióját.

6.9. Definíció Egy dinamikai rendszert MorseSmale-rendszernek nevezünk, ha

- véges sok egyensúlyi pontja van, és mindegyik hiperbolikus,
- véges sok periodikus pályája van, és mindegyik hiperbolikus,
- ezek stabil és instabil sokaságai transzverzálisan metszik egymást,
- a nem-vándorló pontok csak egyensúlyi pontok, vagy periodikus pontok lehetnek.

Igazolható, hogy a MorseSmale-rendszerek strukturálisan stabilak, azonban a megfordítás három, vagy magasabb dimenzióban nem igaz, amit Smale igazolt 1966-ban. Vannak olyan strukturálisan stabil rendszerek legalább háromdimenziós fázistér esetén, amelyeknél a nemvándorló pontok halmazában úgynevezett különös attraktorok vannak, amelyeken a pályák viselkedése kaotikus. Ezenkívül igazolható az is, hogy legalább háromdimenziós fázistér esetén vannak a C^1 rendszerek halmazában olyan nyílt halmazok, melyekben kizárólag nem strukturálisan stabil rendszerek vannak. Azaz a strukturálisan stabil rendszerek nem alkotnak nyílt és sűrű halmazt, sőt még ilyenek metszeteként sem állíthatók elő, amit úgy szoktak megfogalmazni, hogy a strukturális stabilitás legalább háromdimenziós fázistér esetén nem tipikus tulajdonság. Ez azt is jelenti, hogy a topologikus ekvivalencia nem olyan szép módon bontja nyílt halmazokra a C^1 rendszerek terét, amint azt a sematikus 66. Ábra sugallja. Magasabb dimenziós fázistéri dinamikai rendszerek strukturális stabilitásának vizsgálatában, és az imént említett eredmények igazolásában kulcsszerepet játszik egy Smale által bevezetett kétváltozós leképezés, amelyet róla, és a leképezés vizuális megjelenítéséről Smale-patkónak neveznek. A leképezést részletesen vizsgálja többek között Guckenheimer és Holmes könyve [9], illetve Wiggins monográfiája [23].

7. 7 Egy kodimenziós bifurkációk, a nyereg-csomó és az AndronovHopf-bifurkáció

A 6.2. Fejezetben megmutattuk, hogy lokális bifurkáció csak nemhiperbolikus egyensúlyi pontban következhet be. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy ebben az esetben tipikusan kétféle bifurkáció lehet, nyereg-csomó vagy AndronovHopf-bifurkáció. Ennek eldöntésében pedig a jobboldal sorfejtésének elsőnél magasabb fokú tagjai fognak szerepet játszani. E két bifurkáció részletes ismertetésével az is a célunk, hogy a bifurkációelmélet alapvető megközelítését bemutassuk. Ez a következő lépésekből áll. Egy egyszerű rendszerben megfigyelünk valamilyen változást a fázisképben, amint a paraméter (vagy paraméterek) értéke változik. Ezután megfogalmazzuk geometriai módon ezen változás lényegét (például egy egyensúlyi pont elveszíti stabilitását és körülötte egy periodikus pálya jelenik meg). Végül pedig meghatározzuk a jobboldal deriváltjaira vonatkozó

azon feltételeket, amelyek teljesülése esetén az említett változás bekövetkezik. Ezt a programot a nyereg-csomó és az AndronovHopf-bifurkáció esetében hajtjuk végre. Ezután kétparaméteres rendszerekben bemutatjuk, hogy hogyan lehet ezen bifurkációk görbéit meghatározni az úgynevezett parametrikus reprezentáció módszerével, illetve hogyan adhatók meg a TakensBogdanov-bifurkációs pontok a két görbe érintkezési pontjaiként.

7.1. 7.1 Nyereg-csomó bifurkáció

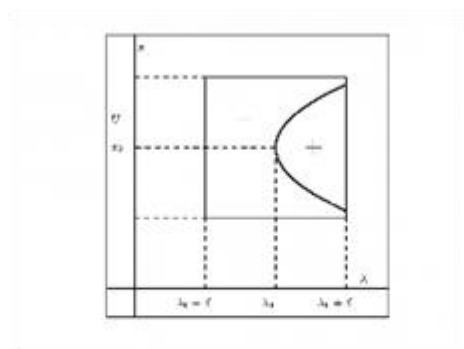
Először emlékeztetünk arra, hogy a $\dot{x} = \lambda - x^2$ egyenletben a $\lambda = 0$ paraméternél nyereg-csomó vagy más néven fold bifurkáció következik be. Ezen azt értjük, hogy ha $\lambda < 0$, akkor nincs egyensúlyi pont, ha $\lambda = 0$, akkor egy egyensúlyi pont van, az $x = 0$ pont, ha pedig $\lambda > 0$, akkor két egyensúlyi pont van $x = \pm\sqrt{\lambda}$, az egyik stabil, a másik pedig instabil. Ez az észrevétel képezi a fenti program első pontját, nevezetesen a bifurkáció megfigyelését egy adott differenciálegyenletben.

A program második pontjaként megfogalmazzuk, hogy mit fogunk érteni általánosan nyereg-csomó bifurkáció alatt. Tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletet, melyben $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, a $\lambda \in \mathbb{R}$ szám a paraméter.

7.1. Definíció Az $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban nyereg-csomó bifurkáció van, ha van az x_0 pontnak olyan $U \subset \mathbb{R}$ környezete és van olyan $\delta > 0$, hogy

- $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0$ esetén U -ban 0 (2) db egyensúlyi pont van;
- $\lambda = \lambda_0$ esetén U -ban 1 db egyensúlyi pont van;
- $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta$ esetén U -ban 2 (0) db egyensúlyi pont van.

Azaz λ előtt nincs egyensúlyi pont, utána pedig kettő van, illetve fordítva. Lásd a 67. ábrán.



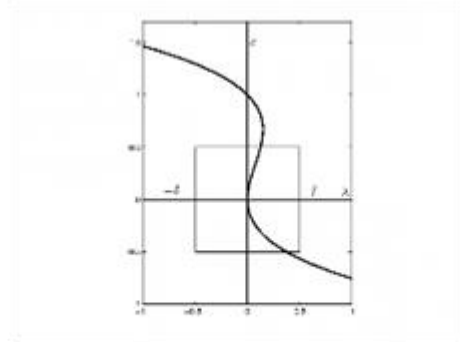
67. ábra. Nyereg-csomó bifurkáció az $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban.

Megjegyezzük, hogy az f függvényről kellő simaságot feltételezve, a fenti feltevések azt jelentik, hogy az $\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : f(x, \lambda) = 0\}$ görbe $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times U$ téglalapba eső része a $\lambda = \lambda_0$ egyenes egyik oldalán helyezkedik el, és a téglalapot két részre osztja, az egyikben $f < 0$, a másikban $f > 0$. Tehát ez is lehetne a nyereg-csomó bifurkáció definíciója.

A 67. ábra alapján azt is láthatjuk, hogy a definíció az alábbi absztraktabb formában is megfogalmazható. (Ezt a definíciót vezeti be Kuznyecov is könyvében [14].) Tekintsük a nyereg-csomó bifurkáció normálformájaként bevezetett $\dot{x} = \lambda - x^2$ egyenletet a $(-1, 1) \times (-1, 1)$ halmazban. (Most $\lambda_0 = 0$ és $x_0 = 0$.) Azt mondjuk, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletben az $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban nyereg-csomó bifurkáció van, ha van az x_0 pontnak olyan $U \subset \mathbb{R}$ környezete és van olyan $\delta > 0$, amelyekre megadható olyan $p: (-1, 1) \rightarrow (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ homeomorfizmus, hogy az $\dot{x} = \lambda - x^2$ egyenlet λ értékhez tartozó fázisképe a $(-1, 1)$ intervallumban topologikusan ekvivalens az $\dot{x}(t) = f(x(t), p(\lambda))$ fázisképével az U intervallumban. Tehát a p leképezés felelteti meg egymásnak az azonos fázisképet adó paramétereket.

Nézzünk meg egy egyszerű példát, amelyben könnyen látható, hogy nyereg-csomó bifurkáció történik.

7.1. Példa Tekintsük az $\dot{x} = \lambda - x^2 + x^3$ differenciálegyenletet. Az egyensúlyi pontokat a $\lambda = x^2 - x^3$ görbe adja meg, amely nyilván érinti a $\lambda = 0$ függőleges egyenest a $(0, 0)$ pontban. Így kellően kis $\delta > 0$ számot és egy nullát tartalmazó megfelelő U intervallumot választva teljesülnek a definícióban leírt feltételek, amint a 68. Ábrán láthatjuk.



68. ábra. Nyereg-csomó bifurkáció a $(0, 0)$ pontban az $\dot{x} = \lambda - x^2 + x^3$ egyenletben.

Az alábbi tételben elégséges feltételt adunk az f függvény (x_0, λ_0) pontbeli deriváltjainak segítségével arra, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletben nyereg-csomó bifurkáció következzen be.

7.2. Tétel Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, és tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletet. Tegyük fel, hogy $f(x_0, \lambda_0) = 0$ és $\partial_x f(x_0, \lambda_0) = 0$. (Ezek a lokális bifurkáció szükséges feltételei.) Ha ezeken kívül fennáll

$$\partial_\lambda f(x_0, \lambda_0) \neq 0 \quad \text{és} \quad \partial_{xx} f(x_0, \lambda_0) \neq 0,$$

akkor az (x_0, λ_0) pontban nyereg-csomó bifurkáció van.

Bizonyítás. Az implicit függvény tételt alkalmazzuk olyan módon, hogy az $f(x, \lambda) = 0$ egyenletből kifejezzük λ -t. Ez azért tehető meg, mert $\partial_\lambda f(x_0, \lambda_0) \neq 0$, azaz teljesül a tétel feltétele. A tétel szerint létezik az x_0 pontnak olyan U környezete, és olyan $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, melyre $g(x_0) = \lambda_0$ és $f(x, g(x)) = 0$ minden $x \in U$ esetén, valamint van olyan $\delta > 0$, hogy a $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times U$ téglalapban az $f(x, \lambda) = 0$ egyenletnek nincs más megoldása, azaz az egyenlet megoldása $\lambda = g(x)$. A definíció utáni megjegyzés szerint elég igazolni, hogy a g függvény grafikonja a $\lambda = \lambda_0$ egyenes egyik oldalán helyezkedik el lokálisan, amihez elegendő, hogy $g'(x_0) = 0$ és $g''(x_0) \neq 0$. Ennek igazolásához deriváljuk az $f(x, g(x)) = 0$ egyenletet. Ekkor

$$\partial_1 f(x, g(x)) + \partial_2 f(x, g(x))g'(x) = 0, \quad (51)$$

melyet $x = x_0$ -ra alkalmazva és felhasználva, hogy $g(x_0) = \lambda_0$, azt kapjuk hogy

$$\partial_1 f(x_0, \lambda_0) + \partial_2 f(x_0, \lambda_0)g'(x_0) = 0.$$

A tétel feltételei szerint $\partial_1 f(x_0, \lambda_0) = 0$ és $\partial_2 f(x_0, \lambda_0) \neq 0$, így $g'(x_0) = 0$.

Deriváljuk most az (51) egyenletet, és alkalmazzuk ismét $x = x_0$ -ra. Felhasználva, hogy $g'(x_0) = 0$ az alábbi egyenlethez jutunk.

$$\partial_{11} f(x, g(x)) + \partial_2 f(x, g(x))g''(x) = 0,$$

melyből a tétel feltételei miatt $g''(x_0) \neq 0$ adódik. [QED]

Megjegyezzük, hogy hasonló, de technikailag bonyolultabb elégséges megfogalmazható akkor is, ha a fázistér magasabb dimenziós. A tétel n -dimenziós megfelelőjét Sotomayor igazolta 1976-ban. Ezt a tételt Perko könyvében a 4. fejezet 1. Tételként találhatja meg az érdeklődő Olvasó.

7.2. 7.2 AndronovHopf-bifurkáció

Először emlékeztetünk arra, hogy AndronovHopf-bifurkáció az $\dot{r} = \lambda r + \sigma r^3$, $\dot{\phi} = 1$ kétdimenziós rendszerben következik be, amint λ áthalad a nullán. A bifurkációnak kétféle típusa van. A szuperkritikus esetben, amikor $\sigma < 0$, a következő történik. Ha $\lambda < 0$, akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis, ha pedig $\lambda > 0$, akkor az origó instabilis, és a vonzást egy stabil határciklus veszi át, melynek mérete a λ értékével növekszik. A szubkritikus esetben, amikor $\sigma > 0$, a határciklus instabil, és $\lambda < 0$ esetén jelenik meg.

A polár-koordinátákban megadott egyenletet célszerű felírni Descartes-kordinátákban is. Ekkor (a pozitív forgásirány helyett az óramutató járása szerintire ($\dot{\phi} = -1$) áttérve kényelmi okokból) az

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2 + \sigma x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad (52)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \lambda x_2 + \sigma x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (53)$$

rendszerhez jutunk.

Ebben a szakaszban elégséges feltételt adunk arra, hogy egy általános $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ rendszerben, melyben $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kellően sima függvény ilyen változás következzen be valamilyen λ_0 paraméterértéknél egy x_0 egyensúlyi pontban. Mivel x_0 egyensúlyi pont, azért $f(x_0, \lambda_0) = 0$, és mivel a 6.2. Állítás szerint nem lehet hiperbolikus, azért a $\partial_x f(x_0, \lambda_0)$ Jacobi-mátrix sajátértékei nulla valósrészeűek. Az előbbi szakaszban láttuk, hogy amennyiben ennek a mátrixnak a 0 sajátértéke, akkor nyereg-csomó bifurkáció következhet be. A fenti példában pedig látható, hogy a bifurkáció megjelenésekor a Jacobi-mátrixnak képzetes sajátértékei vannak. Ezért olyan egyenleteket vizsgálunk, melyekben a $\partial_x f(x_0, \lambda_0)$ Jacobi-mátrix sajátértékei $\pm i\omega$. Meg fogjuk mutatni, hogy amennyiben bizonyos transzverzalitási feltételek is teljesülnek, akkor az x_0 pontban λ_0 paraméterértéknél AndronovHopf- bifurkáció következik be. A bifurkációt ismét geometriai jellemzőinek segítségével definiáljuk.

7.3. Definíció A λ_0 paraméterértéknél az x_0 pontban szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció van, ha létezik $\delta > 0$ és létezik x_0 -nak olyan U környezete, hogy

- $\lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0$ (vagy $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \delta$) esetén U -ban egy stabil egyensúlyi pont van és nincs határciklus;
- $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta$ (vagy $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0$) esetén U -ban egy instabil egyensúlyi pont van és egy stabil határciklus.

7.4. Definíció A λ_0 paraméterértéknél az x_0 pontban szubkritikus AndronovHopf-bifurkáció van, ha létezik $\delta > 0$ és létezik x_0 -nak olyan U környezete, hogy

- $\lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0$ (vagy $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \delta$) esetén U -ban egy stabil egyensúlyi pont és egy instabil határciklus van;
- $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta$ (vagy $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0$) esetén U -ban egy instabil egyensúlyi pont van és nincs határciklus.

Megjegyezzük, hogy ez a definíció is megfogalmazható a Kuznyecov könyvében [14] is bemutatott absztraktabb formában. Tekintsük az AndronovHopf-bifurkáció normálformájaként bevezetett az (52)-(53) rendszert a egyenletet a $B(0, 1) \times (-1, 1)$ halmazban, ahol $B(0, 1)$ az origó közepű 1 sugarú kör a

fázissíkon. (Most $\lambda_0 = 0$ és $x_0 = 0$.) Az általánosabb definíció szerinte akkor mondjuk, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$ egyenletben az $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban AndronovHopf-bifurkáció van, ha van az x_0 pontnak olyan $U \subset \mathbb{R}^2$ környezete és van olyan $\delta > 0$, amelyekre megadható olyan $p : (-1, 1) \rightarrow (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ homeomorfizmus, hogy az (52)-(53) rendszer λ értékhez tartozó fázisképe a $B(0, 1)$ körben topologikusan ekvivalens az $\dot{x}(t) = f(x(t), p(\lambda))$ fázisképével az U halmazban. Tehát a P leképezés felelteti meg egymásnak az azonos fázisképet adó paramétereket.

A polár-koordináta transzformáció után egyszerűen látható, hogy az (52)-(53) rendszerben a fenti definíciók értelmében AndronovHopf-bifurkáció következik be. A továbbiakban az a célunk, hogy bonyolultabb rendszerek esetében (amikor a megjelenő periodikus pálya már nem kör, így a polár-koordináták nem segítenek) is elégséges feltételt adjunk a bifurkáció megjelenésére. Az elégséges feltételt nem a legáltalánosabb esetben mutatjuk meg azonnal, hanem fokozatosan vezetünk be egyre általánosabb eseteket, hogy a bizonyítás egyes részleteinek értelmére jobban rá tudjunk világítani.

A tétel bizonyításának alapvetően kétféle módja jelenik meg az irodalomban. Az egyik módszer a Poincaré-leképezés alkalmazásán alapul, ennek segítségével igazolják a periodikus megoldás létezését. A másik módszer Ljapunov-függvény segítségével konstruál Bendixson-zsákot. A két módszer kapcsolatáról Chicone könyvében [5] olvashatunk. Mi a továbbiakban a második módszert alkalmazzuk. Ehhez először a Ljapunov-függvényt konstruáljuk meg a bifurkációs paraméterértékhez tartozó rendszerhez. Ugyanezt a Ljapunov-függvényt lehet majd a paraméter változtatása esetén a Bendixson-zsák megadásához használni.

7.2.1. 7.2.1 A Ljapunov-függvény előállítás

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi jelölésekre. Jelölje H_k a

$$P(x_1, x_2) = p_0 x_1^k + p_1 x_1^{k-1} x_2 + p_2 x_1^{k-2} x_2^2 + \dots + p_k x_2^k$$

alakú homogén kétváltozós polinomok terét. Ezen polinomok becslésére alkalmazni fogjuk az alábbi egyszerűen igazolható állításokat.

7.1. Állítás Legyen $P \in H_2$, ekkor a $K = |p_0| + |p_1| + |p_2|$ jelöléssel

$$|P(x_1, x_2)| \leq K(x_1^2 + x_2^2).$$

7.2. Állítás Legyen $P \in H_3$, ekkor van olyan $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $r(0, 0) = 0$ és

$$|P(x_1, x_2)| \leq r(x_1, x_2)(x_1^2 + x_2^2).$$

A második állítás egyszerűen következik az elsőből, az első igazolásához pedig mindössze az elemi $2x_1^2 x_2^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)^2$ egyenlőséget kell alkalmazni.

A Ljapunov-függvényt az

$$\dot{x}_1 = x_2 + A_2(x_1, x_2) + A_3(x_1, x_2) + A_4(x_1, x_2), \quad (54)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + B_2(x_1, x_2) + B_3(x_1, x_2) + B_4(x_1, x_2) \quad (55)$$

rendszerhez fogjuk megadni, melyben $A_2, B_2 \in H_2$ homogén másodfokú polinomok, $A_3, B_3 \in H_3$ homogén harmadfokú polinomok, és az A_4, B_4 függvények tartalmazzák a magasabb fokú tagokat, amin azt értjük, hogy megadhatók olyan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ számok, melyekkel

$$|A_4(x_1, x_2)| \leq c_1(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad |B_4(x_1, x_2)| \leq c_2(x_1^2 + x_2^2)^2. \quad (56)$$

Keressük a Ljapunov-függvényt

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + P_3(x_1, x_2) + P_4(x_1, x_2)$$

alakban, ahol $P_3 \in H_3$ homogén harmadfokú polinom és $P_4 \in H_4$ homogén negyedfokú polinom. Ekkor a V függvény Lie-deriváltja, vagy rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} L_f V &= \partial_1 V f_1 + \partial_2 V f_2 \\ &= (x_1 + \partial_1 P_3 + \partial_1 P_4)(x_2 + A_2 + A_3 + A_4) \\ &\quad + (x_2 + \partial_2 P_3 + \partial_2 P_4)(-x_1 + B_2 + B_3 + B_4) \\ &= Q_3 + Q_4 + Q_5, \end{aligned}$$

ahol a rövidség kedvéért a függvények argumentumát nem írtuk ki, és

$$\begin{aligned} Q_3 &= x_1 A_2 + x_2 B_2 + x_2 \partial_1 P_3 - x_1 \partial_2 P_3, \\ Q_4 &= x_1 A_3 + x_2 B_3 + A_2 \partial_1 P_3 + B_2 \partial_2 P_3 + x_2 \partial_1 P_4 - x_1 \partial_2 P_4, \end{aligned}$$

a Q_5 tag pedig a legalább ötödfokú tagokat tartalmazza, azaz létezik olyan $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $r(0, 0) = 0$ és

$$|Q_5(x_1, x_2)| \leq r(x_1, x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2. \quad (57)$$

A Ljapunov-függvény előállításához a következőket fogjuk igazolni.

1. A P_3 polinom választható úgy, hogy $Q_3 = 0$ legyen.
2. A P_4 polinom választható úgy, hogy Q_4 definit legyen. (Bizonyos transzverzálitási feltétel esetén.)
3. A Q_5 tag becsülhető olyan módon, hogy $Q_4 + Q_5$ is definit az origó egy környezetében.

A bizonyítás során fontos szerepet játszik a $T_k : H_k \rightarrow H_k$

$$T_k(P) = x_2 \partial_1 P - x_1 \partial_2 P$$

lineáris leképezés. Ennek segítségével a fenti képletek így írhatók.

$$\begin{aligned} Q_3 &= x_1 A_2 + x_2 B_2 + T_3(P_3), \\ Q_4 &= x_1 A_3 + x_2 B_3 + A_2 \partial_1 P_3 + B_2 \partial_2 P_3 + T_4(P_4). \end{aligned}$$

Mivel a H_k tér azonosítható az $\mathbb{R}^{k+1}$ térrel, azért a T_k leképezésnek egy $(k+1) \times (k+1)$ méretű mátrix felel meg, melyet az $\{x_1^k, x_1^{k-1}x_2, \dots, x_2^k\}$ bázisban célszerű megadni. Ekkor $k=3$ és $k=4$ esetén

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy $\det T_3 \neq 0$, így T_3 izomorfizmus, tehát van olyan $P_3 \in H_3$, mellyel

$$T_3(P_3) = -x_1 A_2 - x_2 B_2, \quad (58)$$

ezért $Q_3 = 0$, mellyel a fenti 1. állítást igazoltuk.

A 2. állítás igazolásához vezessük be a $c_0, c_1, \dots, c_4$ számokat úgy, hogy

$$c_0x_1^4 + c_1x_1^3x_2 + c_2x_1^2x_2^2 + c_3x_1x_2^3 + c_4x_2^4 = x_1A_3 + x_2B_3 + A_2\partial_1P_3 + B_2\partial_2P_3 \quad (59)$$

fennálljon. Megmutatjuk, hogy P_4 megválasztható úgy, hogy

$$Q_4(x_1, x_2) = K(x_1^2 + x_2^2)^2$$

legyen, valamilyen K konstanssal. Ehhez elég azt igazolni, hogy

$$K(1, 0, 2, 0, 1)^T - (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) \in \text{Im}T_4.$$

A T_4 leképezés képtere azon vektorokból áll, melyek ortogonálisak a transzponált magterére. A T_4 mátrixából egyszerűen látható, hogy magterét a $(3, 0, 1, 0, 3)^T$ vektor feszíti ki, ezért a fenti vektor akkor van benne a T_4 képtérében, ha

$$0 = 3(K - c_0) + 2K - c_2 + 3(K - c_4) = 8K - (3c_0 + c_2 + 3c_4),$$

azaz $K = \frac{3c_0 + c_2 + 3c_4}{8}$.

A c_i együtthatók kiszámításához meg kell határozni a P_3 polinom együtthatóit. Keressük a polinomot

$$P_3(x_1, x_2) = q_0x_1^3 + q_1x_1^2x_2 + q_2x_1x_2^2 + q_3x_2^3$$

alakban. Valamint az A_2 és B_2 polinomok együtthatóira vezessük be az

$$A_2(x_1, x_2) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2, \quad B_2(x_1, x_2) = b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 \quad (60)$$

jelöléseket. Ekkor a P_3 polinomot meghatározó (58) egyenlet az ismeretlen q_i együtthatókra az alábbi egyenletet adja.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \end{pmatrix}$$

Ennek megoldása

$$q_0 = -\frac{1}{3}(2b_{02} + a_{11} + b_{20}), \quad q_1 = a_{20}$$

$$q_1 = -b_{02}, \quad q_3 = \frac{1}{3}(2a_{20} + b_{11} + a_{02}).$$

Az A_3 és B_3 polinomok együtthatóira vezessük be az

$$A_3(x_1, x_2) = a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3, \quad (61)$$

$$B_3(x_1, x_2) = b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 \quad (62)$$

jelöléseket. Ekkor a c_i együtthatókat meghatározó (59) egyenletből

$$\begin{aligned}c_0 &= 3q_0a_{20} + q_1b_{20} + a_{30}, \\c_4 &= 3q_3b_{02} + q_2a_{02} + b_{03}, \\c_2 &= 3q_0a_{02} + 3q_3b_{20} + 2q_1a_{11} + 2q_2b_{11} + q_2a_{20} + q_1b_{02} + a_{12} + b_{21}.\end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezeket az egyenletekbe a q_i együtthatók imént levezetett képletét, ekkor egyszerű számolás után a $3c_0 + c_2 + 3c_4 = L$ egyenlethez jutunk, ahol

$$L = 3a_{30} + 3b_{03} + a_{12} + b_{21} + 2a_{20}b_{20} - 2a_{02}b_{02} - a_{11}(a_{20} + a_{02}) + b_{11}(b_{20} + b_{02}) \quad (63)$$

az úgynevezett Ljapunov-együttható. Ezzel tehát a 2. állítást igazoltuk, ugyanis $Q_4(x_1, x_2) = \frac{L}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2$ definit, ha $L \neq 0$.

Térjünk rá most $L \neq 0$ esetén a 3. állítás igazolására. Ehhez az (57) egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni. Válasszunk olyan $\varepsilon > 0$ számot, mellyel $|x| < \varepsilon$ esetén teljesül $|r(x)| < \frac{|L|}{16}$. A bizonyítást az $L > 0$ esetre mutatjuk meg, az $L < 0$ eset teljesen hasonló. Ekkor tehát $|x| < \varepsilon, x \neq 0$ esetén

$$L_f V(x) = Q_4(x) + Q_5(x) \geq \frac{L}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2 - \frac{L}{16}(x_1^2 + x_2^2)^2 = \frac{L}{16}(x_1^2 + x_2^2)^2 > 0.$$

Az eddigieket összefoglalva az alábbi tételt igazoltuk.

7.5. Tétel Tekintsük az (54)-(55) rendszert, melyben az A_2, B_2 függvényeket a (60) képlet, az A_3, B_3 függvényeket a (61) és (62) képlet adja meg, az A_4, B_4 függvényekre pedig fennáll az (56) becslés. Legyen L a (63) egyenlettel megadott Ljapunov-együttható. Ekkor ha $L < 0$, akkor az origó aszimptotikusan stabilis, ha pedig $L > 0$, akkor az origó instabilis.

A tétel bizonyítása most már egyszerűen Ljapunov stabilitási és instabilitási tételének alkalmazása a fent bevezetett Ljapunov-függvénnyel.

Megjegyezzük, hogy $L = 0$ esetén magasabb fokú tagok segítségével további Ljapunov-együtthatók vezethetők be, és az origó stabilitása ezek segítségével dönthető el. Sőt Ljapunov azt is igazolta, hogy amennyiben az összes együttható nulla egy analitikus jobboldalú rendszerben, akkor az origó centrum, ezt nevezik Ljapunov centrum tételének, lásd például Chicone könyvében [5].

7.2.2. 7.2.2 AndronovHopf-bifurkáció lineáris paraméterfüggés esetén

Egészítsük ki most az (54)-(55) rendszert a legegyszerűbb paraméterfüggéssel, amely a bifurkáció normálformájában az (52)-(53) rendszerben szerepel, azaz tekintsük az

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2 + A_2(x_1, x_2) + A_3(x_1, x_2) + A_4(x_1, x_2), \quad (64)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \lambda x_2 + B_2(x_1, x_2) + B_3(x_1, x_2) + B_4(x_1, x_2) \quad (65)$$

rendszert, melyben az A_2, B_2 függvényeket a (60) képlet, az A_3, B_3 függvényeket a (61) és (62) képlet adja meg, az A_4, B_4 függvényekre pedig fennáll az (56) becslés. Alkalmazzuk a fent bevezetett

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + P_3(x_1, x_2) + P_4(x_1, x_2)$$

Ljapunov-függvényt. Ekkor a V függvény Lie-deriváltja, vagy rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned}
 L_f V &= \partial_1 V f_1 + \partial_2 V f_2 \\
 &= (x_1 + \partial_1 P_3 + \partial_1 P_4)(\lambda x_1 + x_2 + A_2 + A_3 + A_4) \\
 &\quad + (x_2 + \partial_2 P_3 + \partial_2 P_4)(-x_1 + \lambda x_2 + B_2 + B_3 + B_4) \\
 &= \lambda D + Q_4 + Q_5,
 \end{aligned}$$

ahol a Q_3 tagot azért nem írtuk ki, mert a P_3 polinomot úgy választottuk, mint az előbb, azért, hogy $Q_3 = 0$ legyen, és

$$D(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1(\partial_1 P_3 + \partial_1 P_4) + x_2(\partial_2 P_3 + \partial_2 P_4).$$

Mivel a D másodfokú tagjai egy pozitív definit kvadratikus alakot alkotnak, azért van olyan $\varepsilon > 0$ szám, mellyel $|x| < 2\varepsilon$ esetén $D(x_1, x_2) > 0$. Tegyük fel, hogy ε értékét olyan kicsire választottuk, hogy $Q_4 + Q_5$ is definit legyen az $|x| < 2\varepsilon$ gömbben. Tekintsük az $L < 0$ esetet. Ekkor az $|x| < 2\varepsilon$ gömbben $Q_4(x) + Q_5(x) < 0$. Így, ha $\lambda < 0$, akkor az $|x| < 2\varepsilon$ gömbben

$$L_f V(x) = \lambda D(x) + Q_4(x) + Q_5(x) < 0,$$

ezért az origó aszimptotikusan stabilis. Ha $\lambda > 0$, akkor a lineáris rész miatt az origó instabilis. Megmutatjuk, hogy megadható olyan $\lambda_0 > 0$, hogy minden $\lambda \in (0, \lambda_0)$ esetén az origó körül van periodikus pálya. Legyen

$$M = \max_{|x| \leq \varepsilon} D(x) > 0, \quad \text{és} \quad m = \max_{|x| = \varepsilon} Q_4(x) + Q_5(x) < 0,$$

és legyen $\lambda_0 = -\frac{m}{M}$. Ekkor $|x| = \varepsilon$ és $\lambda \in (0, \lambda_0)$ esetén $L_f V(x) < \lambda M + m < 0$. Így az $|x| = \varepsilon$ gömbből nem jöhetnek ki a pályák, és a belsejében az egyetlen egyensúlyi pont az origó, ami instabil. Így ez egy Bendixson-zsák, amely azt igazolja, hogy van benne egy stabil határciklus. Tehát azt igazoltuk, hogy $\lambda = 0$ esetén szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be. Teljesen hasonlóan igazolható, hogy $L > 0$ esetén a bifurkáció szubkritikus. Összefoglalva, tehát az alábbi tételt bizonyítottuk.

7.6. Tétel Tekintsük a (64)-(65) rendszert, melyben az A_2, B_2 függvényeket a (60) képlet, az A_3, B_3 függvényeket a (61) és (62) képlet adja meg, az A_4, B_4 függvényekre pedig fennáll az (56) becslés. Legyen L a (63) egyenlettel megadott Ljapunov-együttható. Ekkor ha $L < 0$, akkor $\lambda = 0$ esetén az origóban szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be, ha pedig $L > 0$, akkor szubkritikus.

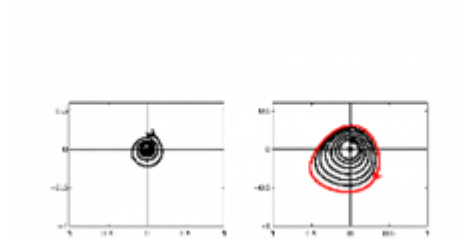
A tétel alkalmazását a következő példán szemléltetjük.

7.2. Példa Vizsgáljuk meg, hogy az

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2 + x_1^2, \tag{66}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \lambda x_2 - x_1^2 \tag{67}$$

rendszerben bekövetkezik-e AndronovHopf-bifurkáció, és ha igen, akkor milyen típusú. A tétel szerint a kérdés megválaszolásához az L Ljapunov-együttható értékét kell meghatározni a (63) képletből. Esetünkben $A_2(x_1, x_2) = B_2(x_1, x_2) = x_1^2$, $A_3(x_1, x_2) = B_3(x_1, x_2) = 0$ és $A_4(x_1, x_2) = B_4(x_1, x_2) = 0$. Ezért a (60) képlet szerint $a_{20} = b_{20} = 1$, valamint a (61) és (62) képlet szerint a többi együttható értéke nulla. Így $L = 2a_{20}b_{20} = -2$, tehát a $\lambda = 0$ értéknél szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be, azaz $\lambda < 0$ esetén az origó aszimptotikusan stabilis, $\lambda > 0$ esetén pedig instabilis és egy stabil határciklus van körülötte, amint a 69. Ábrán láthatjuk.



AndronovHopf-bifurkáció a 7.2. Példában szereplő rendszerben a $\lambda = 0$ értéknél. A baloldali ábra $\lambda < 0$, a jobboldali pedig $\lambda > 0$ esetén mutatja a fázisképet.

7.2.3. 7.2.3 AndronovHopf-bifurkáció általános paraméterfüggés esetén Jordan-normálalakú lineáris résszel

Általánosítsuk most a (64)-(65) rendszert olyan módon, hogy a lineáris rész Jordan-normálalakú legyen, de az együtthatók általánosan függjenek a λ paramétértől, azaz tekintsük az

$$\dot{x}_1 = \alpha(\lambda)x_1 + \beta(\lambda)x_2 + A_2(x_1, x_2) + A_3(x_1, x_2) + A_4(x_1, x_2), \quad (68)$$

$$\dot{x}_2 = -\beta(\lambda)x_1 + \alpha(\lambda)x_2 + B_2(x_1, x_2) + B_3(x_1, x_2) + B_4(x_1, x_2) \quad (69)$$

rendszert, melyben továbbra is az A_2, B_2 függvényeket a (60) képlet, az A_3, B_3 függvényeket a (61) és (62) képlet adja meg, az A_4, B_4 függvényekre pedig fennáll az (56) becslés. Ahhoz, hogy a $\lambda = 0$ értéknél Andronov-Hopf-bifurkáció következzen be, a lineáris részben szereplő paraméterfüggésről az alábbiakat tesszük fel.

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0, \quad \beta(0) \neq 0. \quad (70)$$

Ugyanis a lineáris rész sajátértékei $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$, így amint λ értéke áthalad a nullán, a sajátértékpár áthalad a képzetes tengelyen. Tehát ha például $\alpha'(0) > 0$, akkor $\lambda < 0$ esetén az origó aszimptotikusan stabilis, $\lambda > 0$ esetén pedig instabilis. A fent már alkalmazott Ljapunov-függvény segítségével igazolni fogjuk, hogy az L előjelétől függően vagy pozitív, vagy negatív λ esetén létezik az origó körül periodikus pálya.

Alkalmazzuk tehát ismét a fent bevezetett

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + P_3(x_1, x_2) + P_4(x_1, x_2)$$

Ljapunov-függvényt. Ekkor a V függvény Lie-deriváltja, vagy rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} L_f V &= \partial_1 V f_1 + \partial_2 V f_2 \\ &= (x_1 + \partial_1 P_3 + \partial_1 P_4)(\alpha(\lambda)x_1 + \beta(\lambda)x_2 + A_2 + A_3 + A_4) \\ &\quad + (x_2 + \partial_2 P_3 + \partial_2 P_4)(-\beta(\lambda)x_1 + \alpha(\lambda)x_2 + B_2 + B_3 + B_4) \\ &= \alpha(\lambda)D + Q_3 + Q_4 + Q_5, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1(\partial_1 P_3 + \partial_1 P_4) + x_2(\partial_2 P_3 + \partial_2 P_4), \\ Q_3 &= x_1 A_2 + x_2 B_2 + \beta(\lambda)T_3(P_3), \\ Q_4 &= x_1 A_3 + x_2 B_3 + A_2 \partial_1 P_3 + B_2 \partial_2 P_3 + \beta(\lambda)T_4(P_4), \end{aligned}$$

Q_5 pedig a magasabb fokú tagokat tartalmazza, és teljesíti az (57) egyenlőtlenséget. Mivel a D másodfokú tagjai egy pozitív definit kvadratikusan alakot alkotnak, azért van olyan $\varepsilon > 0$ szám, melyre ε esetén $|r(x)| < \frac{L}{16}$. Feltéhetjük, hogy az ε számot olyan kicsire választottuk, hogy ε esetén teljesül
, így

$$|Q_5(x_1, x_2)| \leq \frac{L}{16}(x_1^2 + x_2^2)^2. \quad (71)$$

Mivel most $\beta(\lambda)$ értéke változik a λ változtatásával, azért nem érhető el, hogy $Q_3 = 0$ legyen bármely λ esetén. Viszont P_3 választható úgy, hogy $\beta(0)T_3(P_3) = -(x_1A_2 + x_2B_2)$ igaz legyen. Ekkor

$$Q_3 = (\beta(\lambda) - \beta(0))T_3(P_3). \quad (72)$$

Hasonló módon válasszuk úgy a P_4 polinomot, hogy

$$x_1A_3 + x_2B_3 + A_2\partial_1P_3 + B_2\partial_2P_3 + \beta(0)T_4(P_4) = \frac{L}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2$$

fennálljon. Ekkor

$$Q_4 = (\beta(\lambda) - \beta(0))T_4(P_4) + \frac{L}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2. \quad (73)$$

Igazolni fogjuk, hogy az $L < 0$, $\alpha'(0) > 0$ esetben megadható olyan $\lambda_0 > 0$, hogy minden $\lambda \in (0, \lambda_0)$ esetén az origó körül van periodikus pálya. Legyen

$$M = \max_{|x| \leq \varepsilon} D(x) > 0, \text{ és } m = \max_{|x| = \varepsilon} |T_3(P_3)(x) + T_4(P_4)(x)|.$$

Ekkor a (72) és (73) képletek alapján $|x| = \varepsilon$ és $\lambda > 0$ esetén

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \alpha(\lambda)D(x) + Q_3(x) + Q_4(x) + Q_5(x) \\ &= \alpha(\lambda)D(x) + (\beta(\lambda) - \beta(0))(T_3(P_3)(x) + T_4(P_4)(x)) + \frac{L}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2 + Q_5(x) \\ &\leq \alpha(\lambda)M + |\beta(\lambda) - \beta(0)|m + \frac{L}{16}(x_1^2 + x_2^2)^2, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk a (71) egyenlőtlenséget. Az α és β függvények folytonossága miatt megadható olyan λ_0 , hogy minden $\lambda \in (0, \lambda_0)$ esetén

$$\alpha(\lambda)M + |\beta(\lambda) - \beta(0)|m < \frac{L}{32}\varepsilon^4.$$

Így $|x| = \varepsilon$ és $\lambda \in (0, \lambda_0)$ esetén

$$L_f V(x) < \frac{L}{32}\varepsilon^4 < 0.$$

Így az $|x| = \varepsilon$ gömbből nem jöhetnek ki a pályák, és a belsejében az egyetlen egyensúlyi pont az origó, ami instabil. Így ez egy Bendixson-zsák, amely azt igazolja, hogy van benne egy stabil határciklus. Tehát azt igazoltuk, hogy $\lambda = 0$ esetén szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be. Teljesen hasonlóan igazolható, hogy $L > 0$ esetén a bifurkáció szubkritikus. Összefoglalva tehát az alábbi tételt bizonyítottuk.

7.7. Tétel Tekintsük a (68)-(69) rendszert, melyben az A_2, B_2 függvényeket a (60) képlet, az A_3, B_3 függvényeket a (61) és (62) képlet adja meg, az A_1, B_1 függvényekre pedig fennáll az (56) becslés. Tegyük fel, hogy az A_1, B_1 függvény differenciálható, a A_2, B_2 függvény pedig folytonos és teljesülnek a (70) feltételek. Legyen a (63) egyenlettel megadott Ljapunov-együttható. Ekkor ha $L > 0$, akkor $\lambda = 0$ esetén az origóban szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be, ha pedig $L < 0$, akkor szubkritikus.

7.1. Megjegyzés Megjegyezzük, hogy a tétel általánosítható arra az esetre is, amikor az A_i és B_i függvények folytonosan függenek a λ paramétertől is. Ugyanis a Ljapunov-függvényt a $\lambda = 0$ értékhez konstruáljuk meg, és a folytonos függés miatt $L_f V$ előjele kis λ esetén ugyanolyan, mint a $\lambda = 0$ értékre.

7.2.4. 7.2.4 AndronovHopf-bifurkáció tetszőleges paraméterfüggés esetén

Tekintsünk most egy általános $\dot{x} = f(x, \lambda)$ kétdimenziós rendszert, melyben $\lambda \in \mathbb{R}$ a paraméter és $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy egy λ_0 paraméterértéknél az x_0 egyensúlyi pont, és ott a Jacobi-mátrix sajátértékei tiszta képzetesek, azaz $f(x_0, \lambda_0) = 0$ és $\partial_x f(x_0, \lambda_0)$ sajátértékei $\pm i\omega$. Ekkor az implicit függvény tétel szerint létezik $\delta > 0$ és $g : (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenciálható függvény, melyre $g(\lambda_0) = x_0$ és $f(g(\lambda), \lambda) = 0$ minden $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ esetén. Vezessük be az $\tilde{x} = x - g(\lambda)$ új változót, a $\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_0$ új paramétert és az $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = f(\tilde{x} + g(\lambda), \tilde{\lambda} + \lambda_0)$ új jobboldalt. Ekkor

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} = f(x, \lambda) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$$

és

$$\partial_x f(x_0, \lambda_0) = \partial_{\tilde{x}} \tilde{f}(0, 0)$$

valamint $\tilde{f}(0, \tilde{\lambda}) = 0$ minden $|\tilde{\lambda}| < \delta$ értékre.

Egyszerűen látható, hogy az eredeti $\dot{x} = f(x, \lambda)$ rendszerben a λ paraméterértéknél pontosan akkor következik be AndronovHopf-bifurkáció a $g(\lambda)$ pontban, ha a transzformált $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ rendszerben AndronovHopf-bifurkáció van a $\tilde{\lambda} = 0$ paraméterértéknél az origóban. Ezért elegendő csak olyan rendszereket vizsgálni, melyeknél a paramétert változtatva az egyensúlyi pont helye mindig az origó marad, valamint a bifurkációs paraméterérték nulla. Azaz feltehető, hogy $f(0, \lambda) = 0$ minden λ esetén, és $\partial_x f(0, 0)$ sajátértékei tiszta képzetesek. Tehát elegendő az

$$\dot{x} = B(\lambda)x + h(x, \lambda) \tag{74}$$

alakú rendszerben vizsgálni a bifurkáció bekövetkezését, melyben $h(0) = 0$ és $h'(0) = 0$.

Ez a rendszer tovább egyszerűsítható a lineáris rész Jordan-normálalakra transzformálásával. Legyenek a $B(\lambda)$ sajátértékei $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$, sajátvektorai pedig $s(\lambda) = r(\lambda) \pm iq(\lambda)$. Vezessük be a $P = (r(\lambda), k(\lambda)) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot, és legyen $X = P^{-1} \cdot x$ az új ismeretlen függvény. Erre a differenciálegyenlet

$$\dot{X} = P^{-1} \cdot \dot{x} = P^{-1} \cdot f(x, \lambda) = P^{-1} \cdot f(PX, \lambda).$$

Ekkor

$$P^{-1} \cdot f(PX, \lambda) = P^{-1}B(\lambda)PX + P^{-1}h(PX, \lambda).$$

Legyen

$$A(\lambda) = P^{-1}B(\lambda)P, \quad \text{és} \quad F(X, \lambda) = P^{-1}h(PX, \lambda),$$

ahol P definíciója miatt

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ -\beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}$$

valamint $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, és $F(0, \lambda) = 0$, $\partial_x F(0, \lambda) = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ekkor a X függvényre vonatkozó differenciálegyenlet

$$\dot{X} = A(\lambda)X + F(X, \lambda),$$

Tehát a X függvény koordinátái éppen a (68)-(69) rendszer megoldásai, megengedve, hogy az A_i és B_i függvények a λ paramétértől is függjenek. Mivel ezt a rendszert a (74) rendszerből lineáris transzformációval kaptuk, azért az utóbbiban pontosan akkor következik be AndronovHopf-bifurkáció, amikor az előbbiben, amelyre vonatkozóan már megadtuk az elégséges feltételt a 7.7. Tételben. Az ott definiált Ljapunov-együtthatót az F függvény koordinátáinak segítségével is ki lehet fejezni, hiszen $F_1 = A_2 + A_3 + A_4$ és $F_2 = B_2 + B_3 + B_4$. Ekkor a Ljapunov-együttható

$$L = \partial_1^3 F_1 + \partial_1 \partial_2^2 F_1 + \partial_1^2 \partial_2 F_2 + \partial_2^3 F_2 \\ + \partial_{12} F_1 \cdot (\partial_1^2 F_1 + \partial_2^2 F_1) - \partial_{12} F_2 \cdot (\partial_1^2 F_2 + \partial_2^2 F_2) - \partial_1^2 F_1 \cdot \partial_1^2 F_2 + \partial_2^2 F_1 \cdot \partial_2^2 F_2,$$

ahol a parciális deriváltakat a $\lambda = 0$ pontban és az origóban vesszük, azaz például $\partial_1^3 F_1$ a $\partial_1^3 F_1(0, 0)$ helyett áll rövidség kedvéért. Így a 7.7. Tétel felhasználásával a fenti levezetés elégséges feltételt ad arra, hogy a (74) rendszerben AndronovHopf-bifurkáció következzen be.

7.8. Tétel Tekintsük a (74) rendszert, melyben a $B(\lambda)$ mátrix sajátértékeit jelölje $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$, sajátvektorait pedig $s(\lambda) = r(\lambda) \pm iq(\lambda)$. Tegyük fel, hogy az α függvény differenciálható, a β függvény pedig folytonos és teljesülnek a (70) feltételek. Jelölje P azt a mátrixot, melynek oszlopai az $r(\lambda)$ és $q(\lambda)$ vektorok, és vezessük be az $F(X, \lambda) = P^{-1}h(PX, \lambda)$ függvényt, valamint ennek $(0, 0)$ pontban kiszámított parciális deriváltjainak segítségével a fenti L Ljapunov-együtthatót. Ekkor ha $L < 0$, akkor $\lambda = 0$ esetén az origóban szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be a (74) rendszerben, ha pedig $L > 0$, akkor szubkritikus bifurkáció történik.

E tétel segítségével, tehát egy általános kétdimenziós fázisterű rendszerben meghatározható az AndronovHopf-bifurkáció. A tétel tetszőleges dimenziójú fázisterű esetén igazolható a centrális sokaság redukció alkalmazásával. Ez az általános megfogalmazás megtalálható például Kuznyecov könyvében [14].

7.2.5. 7.2.5 Példa az AndronovHopf-bifurkáció meghatározására

Az előbbi szakaszban láttuk, hogy az AndronovHopf-bifurkáció meghatározásához a rendszer többszöri transzformációja szükséges, és a bifurkáció típusát meghatározó Ljapunov-együtthatót csak a transzformált rendszer segítségével lehet kiszámítani. Ebben a szakaszban a teljes levezetést bemutatjuk egy példa segítségével.

Tekintsük a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{x} = x(x - x^2 - y), \quad (75)$$

$$\dot{y} = y(x - a), \quad (76)$$

melyben $a \in \mathbb{R}$ pozitív paraméter. Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet egy speciális kémiai reakciót (az úgynevezett LotkaVolterra-autokatalátor reakciót) leíró differenciálegyenlet-rendszer. Az egyensúlyi pontok: $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(a, a - a^2)$. Mivel a rendszer egy kémiai reakciót ír le, azért a fázisképet csak a pozitív síknegyedben vizsgáljuk, így az utolsó egyensúlyi pont csak $a < 1$ esetén releváns. A rendszer Jacobi-mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 2x - 3x^2 - y & -x \\ y & x - a \end{pmatrix}.$$

A $(0, 0)$ elfajult egyensúlyi pont, az $(1, 0)$ pedig nyereg, ha $a > 1$ és stabil csomó, ha $a < 1$. A továbbiakban az $(a, a - a^2)$ egyensúlyi pont körül vizsgáljuk a rendszert. Ebben a pontban a Jacobi-mátrix

$$\begin{pmatrix} a - 2a^2 & -a \\ a - a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha $\frac{1}{2} < a < 1$, akkor ez a pont stabil; ha pedig $0 < a < \frac{1}{2}$, akkor instabil, ezért $a = \frac{1}{2}$ esetén lehet AndronovHopf-bifurkáció. Az alábbiakban azt igazoljuk, hogy ekkor szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be.

Először az egyensúlyi pontot koordináta-transzformációval az origóba, a bifurkációs paramétert pedig 0-ba toljuk. Azaz legyen $\xi = x - a$, $\eta = y - L + L^2$ és $\lambda = \frac{1}{2} - a$. Ekkor $x = \xi + L$, $y = \eta + L - L^2$ és $a = \frac{1}{2} - \lambda$. A differenciálegyenletekből

$$\dot{x} = \dot{\xi} = \xi \cdot \lambda(1 - 2\lambda) - \eta(\frac{1}{2} - \lambda) - \xi \cdot \eta + \xi^2 \cdot (3\lambda - \frac{1}{2}) - \xi^3$$

és

$$\dot{y} = \dot{\eta} = \xi(\eta + \frac{1}{4} - \lambda^2).$$

Ezzel a rendszert a (74) képletben adott alakra hoztuk, a $(0, 0)$ pont egyensúlyi pont minden λ esetén, és a lineáris részt megadó mátrix

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(1 - 2\lambda) & \lambda - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - \lambda^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A mátrix nyoma $Tr = \lambda(1 - 2\lambda)$, ez $\lambda = 0$ esetén vált előjelet, így ekkor várható a bifurkáció megjelenése. A 7.8. Tétel alkalmazásához szükségünk van a mátrix sajátértékeire és sajátvektoraira. A sajátértékekre vonatkozó karakterisztikus egyenlet

$$\mu(\mu - \lambda(1 - 2\lambda)) + (-\lambda + \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - \lambda^2) = 0,$$

Így ezek

$$\mu_{1,2} = \frac{\lambda(1 - 2\lambda) \pm \sqrt{\lambda^2(1 - 2\lambda)^2 - 4(\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{4} - \lambda^2)}}{2}.$$

A sajátértékek valós része $\alpha(\lambda) = \lambda(\frac{1}{2} - \lambda)$, így fennáll $\alpha(0) = 0$ és $\alpha'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. A sajátértékek képzetes része

$$\beta(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2(1 - 2\lambda)^2 - 4(\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{4} - \lambda^2)}}{2},$$

ezért $\beta(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$. Tehát teljesülnek a (70) feltételek. A $\lambda = 0$ értékhez tartozó mátrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

ennek sajátértékei $\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, sajátvektorai

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Vezessük be az u, v új koordinátákat a

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

transzformációval. Ekkor a $\lambda = 0$ értékhez tartozó rendszer az eredeti koordinátákban

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{1}{2}\eta - \xi\eta - \frac{1}{2}\eta^2 - \xi^3, \\ \dot{\eta} &= \frac{1}{4}\xi + \xi\eta, \end{aligned}$$

Az új, u, v koordinátákban pedig

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\sqrt{8}}v + \frac{1}{\sqrt{2}}uv - \frac{1}{2}u^2 - u^3, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\sqrt{8}}u + uv. \end{aligned}$$

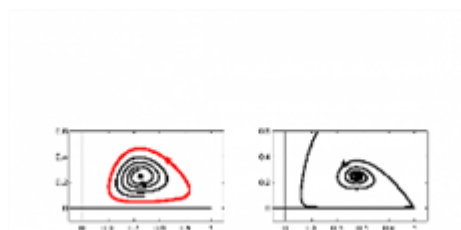
Ebben a lineáris rész már Jordan-normálalakú, a nemlineáris rész pedig az F függvény, azaz

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}uv - \frac{1}{2}u^2 - u^3 \\ uv \end{pmatrix}$$

A Ljapunov-együttható kiszámításához szükségünk lesz az alábbi parciális deriváltakra.

$$\begin{aligned} \partial_1 F_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}v - u - 3u^2, & \partial_1^2 F_1 &= -1 - 6u, & \partial_1^3 F_1 &= -6, \\ \partial_2 F_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \partial_2^2 F_1 &= 0, & \partial_{12} F_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \partial_1 F_2 &= v, & \partial_2 F_2 &= u. \end{aligned}$$

Ezeket az $(u, v) = (0, 0)$ pontban véve, és értékeiket behelyettesítve az L képletébe, az $L = -1/4$ értéket kapjuk, tehát szuperkritikus AndronovHopf-bifurkáció következik be. Az eredeti (75)-(76) rendszerben az $a = 1/2$ értéknél történik a bifurkáció. A 70. ábrán láthatjuk, hogy $a > 1/2$ esetén az $(a, a - a^2)$ egyensúlyi pont stabilis, $a < 1/2$ esetén pedig instabilis, és egy stabil határciklus van körülötte.



AndronovHopf-bifurkáció a (75)-(76) rendszerben az $a = 1/2$ értéknél. A baloldali ábra $a < 1/2$, a jobboldali pedig $a > 1/2$ esetén mutatja a fázisképet.

7.3. Egy kodimenziós bifurkációs görbék meghatározása kétparaméteres rendszerekben a parametrikus reprezentáció módszerével

7.3.1. A parametrikus reprezentáció módszere

Amikor két paramétert tartalmazó rendszerekben szeretnénk egy kodimenziós bifurkációs görbét meghatározni, akkor gyakran kell megoldani

$$f(x, u_1, u_2) = 0$$

típusú egyenletet, melyben x a keresett ismeretlen, u_1 és u_2 pedig adott paraméterek. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy amennyiben a függvény a paraméterektől lineárisan függ, akkor a parametrikus reprezentáció módszere hatékony eszköz a bifurkációs görbe meghatározására. Tegyük fel tehát, hogy

$$f(x, u_1, u_2) = f_0(x) + f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2,$$

ahol $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények.

7.9. Definíció Adott $u \in \mathbb{R}^2$ esetén jelölje $N(u)$ az $f(x, u_1, u_2) = 0$ egyenlet megoldásainak számát, amely lehet végtelen is, azaz

$$N(u) := |\{x \in \mathbb{R} : f(x, u) = 0\}|.$$

Egy paraméterpárt akkor nevezünk bifurkációs, ha a környezetében a megoldások száma nem állandó.

7.10. Definíció Az $u_0 \in \mathbb{R}^2$ paraméter reguláris, ha van olyan $U \subset \mathbb{R}^2$ környezete, hogy minden $u \in U$ esetén $N(u) = N(u_0)$, azaz egy környezetben a megoldások száma nem változik.

Az $u_0 \in \mathbb{R}^2$ bifurkációs paraméterérték, ha nem reguláris.

A bifurkációs paraméterértékek halmazát bifurkációs halmaznak nevezzük és B -vel jelöljük.

Az implicit függvény tétel miatt az $f(x, u_1, u_2) = 0$ egyenletből kifejezhető x a paraméterek segítségével olyan pontok környezetében, ahol $\partial_x f$ nem nulla. Ezért a megoldások száma akkor változhat, ha $f(x, u_1, u_2) = 0$ mellett $\partial_x f(x, u_1, u_2) = 0$ is fennáll. Ezen feltételt teljesítő pontok alkotják a szingularitási halmazt.

7.11. Definíció Az $f(x, u_1, u_2) = 0$ egyenlethez tartozó szingularitási halmaz legyen

$$S := \{u \in \mathbb{R}^2 : \exists x \in \mathbb{R} : f(x, u) = 0 \text{ és } \partial_x f(x, u) = 0\}.$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy adott $u \in \mathbb{R}^2$ esetén hogyan lehet meghatározni a megoldások számát és értékét, illetve, hogy mi a bifurkációs B halmaz kapcsolata az S szingularitási halmazzal.

Ha az f függvény lineárisan függ az u_1 és u_2 paraméterektől, akkor a szingularitási halmazt az

$$\begin{aligned} f_0(x) + f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 &= 0, \\ f'_0(x) + f'_1(x)u_1 + f'_2(x)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer határozza meg. A parametrikus reprezentáció lényege abban áll, hogy ebben a rendszerben az x ismeretlent tekintjük paraméternek és az u_1, u_2 paramétereket fejezzük ki, hiszen ez egy lineáris rendszer

megoldásával elérhető. Az egyszerűség kedvéért a módszert egy fontos speciális esetben ismertetjük, amelyben $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$. Az f_0 függvényt ekkor g fogja jelölni. Ekkor a szingularitási halmazt az

$$\begin{aligned}u_1 + u_2x + g(x) &= 0, \\u_2 + g'(x) &= 0.\end{aligned}$$

egyenletrendszer határozza meg. Fejezzük ki ebből az u_1, u_2 paramétereket az x segítségével, ekkor

$$\begin{aligned}u_1 &= xg'(x) - g(x), \\u_2 &= -g'(x).\end{aligned}$$

Vezessük be azt a $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbét, amely egy x értékhez hozzárendeli az (u_1, u_2) párt, azaz

$$D_1(x) = xg'(x) - g(x), \quad D_2(x) = -g'(x).$$

Ezt a görbét, amely egyben a szingularitási halmazt egy x változóval paraméterezett görbeként állítja elő, diszkrimináns görbének nevezzük.

Számunkra elsősorban az érdekes, hogy adott u_1 és u_2 esetén mi az egyenlet megoldása x -re. Vezessük be ezért az

$$M(x) = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : f_0(x) + f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 = 0\}$$

halmazt, amely tehát azon paraméterpárokat tartalmazza, amelyek mellett az x megoldása az egyenletnek. A lineáris paraméterfüggés miatt ez a halmaz egy egyenes a paramétersíkon. A parametrikus reprezentáció módszerének egyik legfontosabb eredménye az alábbi érintő tulajdonság.

7.3. Állítás (Érintő tulajdonság) Az $M(x)$ egyenes érinti a diszkrimináns görbét az x paraméterű $D(x)$ pontban.

Bizonyítás. Mivel az $(u_1, u_2) = D(x)$ pár megoldása az $f(x, u_1, u_2) = 0$ egyenletnek, azért $D(x) \in M(x)$, azaz a $D(x)$ pont rajta van az $M(x)$ egyenesen. Ezért már csak azt kell megmutatni, hogy a $D'(x)$ érintővektor merőleges az $M(x)$ egyenes normálvektorára, amely az $(f_1(x), f_2(x))$ vektor. Ezt egyszerűen igazolhatjuk tetszőleges f_i függvények választása mellett. Ugyanis az $(u_1, u_2) = D(x)$ pár megoldása az $f(x, u_1, u_2) = 0$ egyenletnek, azaz

$$f_0(x) + f_1(x)D_1(x) + f_2(x)D_2(x) = 0$$

fennáll minden x esetén. Ezért deriválhatjuk ezt az egyenletet, amellyel az

$$f'_0(x) + f'_1(x)D_1(x) + f'_2(x)D_2(x) + f_1(x)D'_1(x) + f_2(x)D'_2(x) = 0$$

egyenlethez jutunk. Ebben $f'_0(x) + f'_1(x)D_1(x) + f'_2(x)D_2(x) = 0$, hiszen az $(u_1, u_2) = D(x)$ pár megoldása a $\partial_x f(x, u_1, u_2) = 0$ egyenletnek is, így

$$f_1(x)D'_1(x) + f_2(x)D'_2(x) = 0,$$

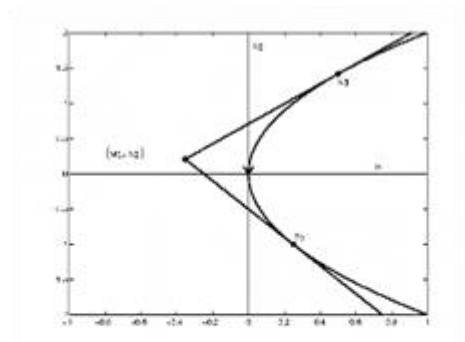
ami éppen a két vektor merőlegességét bizonyítja. [QED]

7.2. Megjegyzés Megjegyezzük, hogy az érintő tulajdonság azt az általános tényt fejezi ki, mely szerint az $f(x, u_1, u_2) = 0$ egyenlet megoldásait képező $M(x)$ halmazok burkolója a szingularitási halmaz.

Lineáris paraméterfüggés esetén tehát az érintő tulajdonság egyszerű geometriai módszert ad az (u_1, u_2) egyenlet megoldásának megkeresésére adott $f_0(x) + f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 = 0$ Nevezetesen adott (u_1, u_2) esetén pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha rajta van a görbe paraméterű pontjához húzott érintőjén.

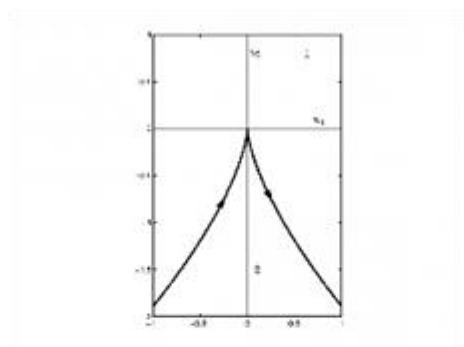
A módszer alkalmazását néhány egyszerű példán szemléltetjük.

7.3. Példa Legyen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_0(x) = g(x) = x^2$, azaz tekintsük az $x^2 + u_2x + u_1 = 0$ másodfokú egyenletet. Ekkor $D_1(x) = x^2$, $D_2(x) = -2x$. Vegyük észre, hogy $D_1 = D_2^2/4$, ezért a D diszkrimináns görbe egy parabola az (u_1, u_2) paramétersíkon, melynek egyenlete $4u_1 = u_2^2$, amely éppen a vizsgált másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Egy tetszőleges (u_1, u_2) esetén x pontosan akkor megoldása az $x^2 + u_2x + u_1 = 0$ egyenletnek, ha (u_1, u_2) rajta van a D görbe x paraméterű pontjához húzott érintőjén. Ezt mutatja a 71. ábra, melyen a D görbe paraméterezésének iránya is látható. A $D(0)$ pont a parabola csúcspontja, a negatív x értékek a felső ághoz, a pozitív x értékek az alsó ághoz tartoznak. Egyszerűen leolvasható az ábrából, hogy a parabola bal oldalán fekvő rész minden pontjából két érintő húzható a görbéhez, a belső részből viszont nem húzható érintő, azaz $4u_1 < u_2^2$ esetén két megoldása van az egyenletnek, $4u_1 > u_2^2$ esetén viszont nincs megoldása. Az ábrán levő számok az adott tartományból választott paraméterpár esetén az egyenlet megoldásainak számát mutatják. Ezenkívül azt is leolvashatjuk például az ábrából, hogy a bal felsőből mindig két érintő húzható a görbéhez, egy a felső ághoz, egy pedig az alsó ághoz. Ez a geometriai tény algebrailag azt fejezi ki, hogy $u_1 < 0$ esetén az $x^2 + u_2x + u_1 = 0$ másodfokú egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van. Egy másik egyszerű geometriai tény, miszerint az $u_1, u_2 > 0$ pozitív negyedből csak a felső ághoz húzható érintő, azt fejezi ki algebrai szempontból, hogy $u_1, u_2 > 0$ esetén az $x^2 + u_2x + u_1 = 0$ egyenletnek csak negatív gyökei lehetnek.



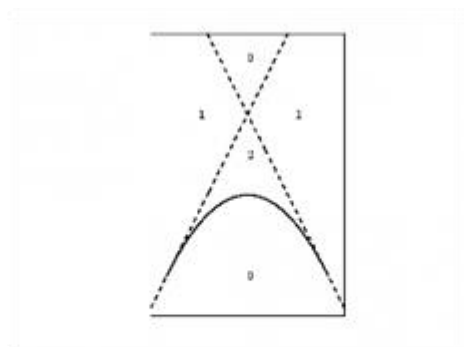
71. ábra. Az (u_1, u_2) pontból az $x^2 + u_2x + u_1 = 0$ másodfokú egyenlet diszkrimináns görbéjéhez húzott két érintő az x_1 és x_2 paraméterű pontokban érinti a görbét. Ezek adják az egyenlet megoldásait.

7.4. Példa Legyen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_0(x) = g(x) = x^3$, azaz tekintsük az $x^3 + u_2x + u_1 = 0$ harmadfokú egyenletet. Ekkor $D_1(x) = 2x^3$, $D_2(x) = -3x^2$. Vegyük észre, hogy $27D_1^2 = -4D_2^3$, ezért a D diszkrimináns görbe az alsó felső felében halad, érinti az origóban a függőleges tengelyt, és úgynevezett csúcsponttal (cusp) rendelkezik. Egyenlete $27u_1^2 + 4u_2^3 = 0$, amely éppen a vizsgált harmadfokú egyenlet diszkriminánsa. Egy tetszőleges (u_1, u_2) esetén x pontosan akkor megoldása az $x^3 + u_2x + u_1 = 0$ egyenletnek, ha (u_1, u_2) rajta van a D görbe x paraméterű pontjához húzott érintőjén. Ezt mutatja a 72. ábra, melyen a D görbe paraméterezésének iránya is látható. A $D(0)$ pont a görbe csúcspontja, a negatív x értékek a baloldali ághoz, a pozitív x értékek a jobboldali ághoz tartoznak. Egyszerűen leolvasható az ábrából, hogy a két ág közötti rész minden pontjából három érintő húzható a görbéhez, a külső részből viszont csak egy érintő. Az ábrán levő számok az adott tartományból választott paraméterpár esetén az egyenlet megoldásainak számát mutatják. Itt is megfigyelhető az az egyszerű geometriai tény, miszerint az $u_1, u_2 > 0$ pozitív negyedből csak a baloldali ághoz húzható érintő, amely azt fejezi ki algebrai szempontból, hogy $u_1, u_2 > 0$ esetén az $x^3 + u_2x + u_1 = 0$ egyenletnek csak egy valós gyöke lehet, és az negatív.



72. ábra. Az $x^3 + u_2x + u_1 = 0$ harmadfokú egyenletet diszkrimináns görbéje két részre osztja a paramétersíkot a megoldások száma szerint. A két ág közötti részben levő paraméterpárok esetén három megoldása van az egyenletnek, a külső részben levő paraméterpárok esetén viszont csak egy.

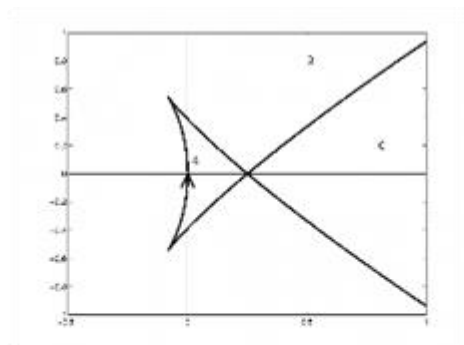
Megjegyezzük, hogy igazolható, hogy a diszkrimináns görbe konvex ívekből áll, és egy ilyenhez húzható érintők száma egyszerűen meghatározható, amint a 73. Ábra mutatja.



73. ábra. Egy konvex ívhez húzható érintők száma a sík különböző pontjaiból.

Ezt a geometriai eredményt használjuk fel a következő példában szereplő negyedfokú egyenlet esetében a megoldások számának meghatározására.

7.5. Példa Legyen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_0(x) = g(x) = -x^2 + x^4$, azaz tekintsük az $u_1 + u_2x - x^2 + x^4 = 0$ negyedfokú egyenletet. Ekkor $D_1(x) = 3x^4 - x^2$, $D_2(x) = 2x - 4x^3$. Ezeket a függvényeket ábrázolva egyszerűen vázolhatjuk a D görbe menetét az (u_1, u_2) paramétersíkon. A görbe két csúcsponttal (cusp) rendelkezik, amint a 74. ábra mutatja. Egyszerűen leolvasható az ábrából, hogy az úgynevezett "fecskefárok" belső részében fekvő minden pontból négy érintő húzható a görbéhez, a külső pontokból két érintő, a többiből pedig nem húzható érintő. Az ábrán levő számok az adott tartományból választott paraméterpár esetén az egyenlet megoldásainak számát (azaz az onnan húzható érintők számát) mutatják.



74. ábra. Az $x^4 - x^2 + u_2x + u_1 = 0$ negyedfokú egyenletet diszkrimináns görbéje három részre osztja a paramétersíkot a megoldások száma szerint. A számok az adott tartományból választott paraméterpár esetén az egyenlet megoldásainak számát mutatják.

7.3.2. 7.3.2 Bifurkációs görbék kétparaméteres rendszerekben

Ebben a szakaszban $\dot{x}(t) = f(x(t), u_1, u_2)$ alakú rendszerek nyereg-csomó és Andronov-Hopf-bifurkációs görbéinek meghatározását mutatjuk be példákon, melyekben a fázistér kétdimenziós, azaz $x(t) \in \mathbb{R}^2$, valamint u_1 és u_2 valós paraméterek. A vizsgálat célja az (u_1, u_2) paramétersík felosztása az egyensúlyi pontok száma és típusa szerint. A bifurkációs görbék meghatározására alkalmazni fogjuk a parametrikus reprezentáció előző szakaszban ismertetett módszerét. A két bifurkációs görbe ábrázolása során látni fogjuk, hogy ahol érintik egymást, abban a pontban egy két kodimenziós bifurkáció, az úgynevezett TakensBogdanov-bifurkáció jelenik meg.

Tekintsük először a következő rendszert:

$$\dot{x} = y, \quad (77)$$

$$\dot{y} = u_1 + u_2 \cdot x + x^2 + x \cdot y. \quad (78)$$

Az egyensúlyi pontokra fennállnak a

$$0 = y,$$

$$0 = u_1 + u_2x + x^2 + x \cdot 0.$$

egyenletek. Az egyensúlyi pontokat tehát egyetlen egyenlet, az $f(x, u) := u_1 + u_2x + x^2 = 0$ másodfokú egyenlet határozza meg. Ilyen típusú egyenletek megoldásának számát a parametrikus reprezentációval vizsgáltuk. A szingularitási halmazt az $f(x, u) = 0$ és $\partial_x f(x, u) = 0$, azaz az

$$u_1 + u_2x + x^2 = 0$$

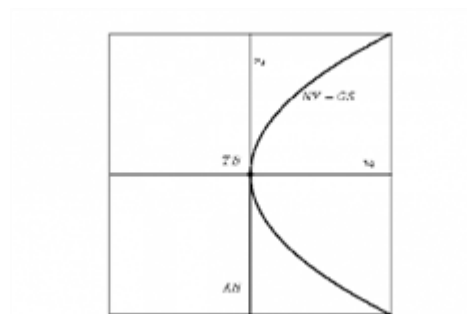
$$u_2 + 2x = 0$$

rendszer adja meg. Ebből az u_1, u_2 paramétereket kifejezve kapjuk a diszkrimináns görbét, mely esetünkben egy parabola

$$u_2 = D_2(x) = -2x,$$

$$u_1 = D_1(x) = x^2,$$

amint a 75. ábra mutatja.



A nyereg-csomó és Andronov-Hopf-bifurkációs görbe a (77)-(78) rendszerben.

Adott (u_1, u_2) párt választva az (u_1, u_2) pontból a diszkrimináns görbéhez húzott érintők száma megegyezik az (u_1, u_2) paraméterpárhoz tartozó x megoldások számával. Tehát a parabola bal oldalán fekvő paraméterpárok választása esetén két egyensúlyi pont van, a jobb oldali tartományból választott paraméterpárok esetén viszont nincs egyensúlyi pont. A diszkrimináns görbe tehát a nyereg-csomó bifurkáció görbéje, melyen áthaladva kettővel változik az egyensúlyi pontok száma.

Határozzuk meg most az Andronov-Hopf-bifurkáció görbáját. A rendszer Jacobi-mátrixa egy (x, y) pontban

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_2 + 2x + y & x \end{pmatrix}.$$

Ennek nyoma $Tr = x$, determinánsa $Det = -(u_2 + 2x + y)$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor a Jacobi-mátrix nyoma az $(x, 0)$ egyensúlyi pontban $Tr = x$, determinánsa pedig $Det = -(u_2 + 2x)$. Egyszerűen látható, hogy az Andronov-Hopf-bifurkáció szükséges feltétele, hogy $Tr = 0$ és $Det > 0$ legyen, hiszen ekkor a Jacobi-mátrixnak két képzetes gyöke van. Bár ez a feltétel nem elégséges, mégis az ezek által meghatározott görbét nevezik az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéjének. (Megjegyezzük, hogy ezen görbe egyes pontjaiban a Ljapunov-együttható értéke nulla lehet, de a tipikus pontokban nem zérus, ezért azokban valóban bekövetkezik a bifurkáció. Az elfajult pontok meghatározásával itt nem fogunk foglalkozni.) Az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéje tehát azon (u_1, u_2) paraméterpárokból áll, melyekhez van olyan $(x, 0)$ egyensúlyi pont, melyben $Tr = x = 0$ és $Det = -(u_2 + 2x) > 0$. Azaz a következőknek kell teljesülnie

$$u_1 + u_2x + x^2 = 0, \quad x = 0, \quad u_2 + 2x < 0.$$

Ezekből $u_1 = 0$ és $u_2 < 0$, tehát az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéje a függőleges koordinátatengely negatív része. Ez az origóban érinti a nyereg-csomó bifurkáció görbáját, a parabolát, ez a pont a TakensBogdanov-bifurkációs pont.

A következő példa a TakensBogdanov-bifurkáció (egyik) normálformája.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= u_1 + u_2 \cdot y + x^2 + x \cdot y. \end{aligned}$$

Az egyensúlyi pontokra fennállnak a

$$\begin{aligned} 0 &= y, \\ 0 &= u_1 + x^2. \end{aligned}$$

egyenletek. Az egyensúlyi pontokat tehát egyetlen egyenlet, az $u_1 + x^2 = 0$ másodfokú egyenlet határozza meg. A szingularitási halmazt az $f(x, u) = 0$ és $\partial_x f(x, u) = 0$, azaz az

$$\begin{aligned}u_1 + x^2 &= 0, \\ 2x &= 0.\end{aligned}$$

rendszer adja meg. Látható, hogy a parametrikus reprezentáció módszere nem alkalmazható, hiszen a rendszerből (u_1, u_2) nem fejezhető ki. Viszont az egyenletekből a szingularitási halmazra $x = 0$ miatt $u_1 = 0$, így a szingularitási halmaz, azaz a nyereg-csomó bifurkáció görbéje az $u_1 = 0$ tengely, azaz a függőleges tengely.

Határozzuk meg most az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéjét. A rendszer Jacobi-mátrixa egy (x, y) pontban

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x + y & u_2 + x \end{pmatrix}.$$

Ennek nyoma egy $(x, 0)$ egyensúlyi pontban, $x^2 = -u_1$ miatt, $Tr = u_2 + x = u_2 + \sqrt{-u_1}$, determinánsa $Det = -2x$. Tehát az $u_2 + \sqrt{-u_1} = 0$ parabola az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéje. Ez az origóban érinti a függőleges egyenest, a nyereg-csomó bifurkáció görbéjét, így az origó a TakensBogdanov-bifurkációs pont. Megjegyezzük, hogy a TakensBogdanov-bifurkáció fontos eleme egy homoklinikus bifurkáció során megjelenő periodikus pálya, melyet egy megfelelő Ljapunov-függvény segítségével lehet megtalálni. Ennek tárgyalása meghaladja a jegyzet kereteit, az érdeklődő Olvasónak ajánljuk Perko könyvének [16] 4.13. fejezetét.

Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy az $a \in \mathbb{R}$ paramétert változtatva az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= u_1 + u_2 \cdot y + a \cdot x \cdot y^2.\end{aligned}$$

rendszerben, hogyan változik az (u_1, u_2) paramétersíkon a nyereg-csomó és AndronovHopf-bifurkáció görbéje.

8. 8 Diszkrét dinamikai rendszerek, szimbolikus dinamika, kaotikus viselkedés

8.1. 8.1 Diszkrét dinamikai rendszerek

Legyen $M \subset \mathbb{R}^k$ tartomány (azaz összefüggő és nyílt halmaz), és legyen $f : M \rightarrow M$ diffeomorfizmus (azaz bijekció, amely inverzével együtt differenciálható). Jelölje $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ az n tagú kompozíciót, azaz $f^n(p) = f(f(\dots f(p) \dots))$. Ha $n < 0$, akkor legyen $f^n = (f^{-1})^{-n}$, ahol a kompozícióban f inverzét alkalmazzuk $(-n)$ -szer. Ekkor a $\varphi(n, p) = f^n(p)$, $\varphi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ függvény egy diszkrét dinamikai rendszert definiál. A diszkrét dinamikai rendszer megadása tehát egyenértékű az f leképezés megadásával. A rendszert gyakran egy rekurzív sorozatként adják meg az

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = p$$

alakban. Ekkor $\varphi(n, p) = x_n$. A rendszer p pontból induló pályája a $\{\varphi(n, p) : n \in \mathbb{Z}\}$ diszkrét pontthalmaz, vagy mindkét irányban végtelen sorozat.

8.1. Definíció Egy $p \in M$ pont fixpontja a dinamikai rendszernek, ha $f(p) = p$, azaz $\varphi(n, p) = p$ minden $n \in \mathbb{Z}$ számra, vagyis a p pályája egy pontból áll.

A stabilitási fogalmakat a folytonos rendszerekkel teljesen analóg módon definiáljuk.

8.2. Definíció Egy $p \in M$ fixpont stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan δ pozitív szám, hogy
 $\forall x \in M, |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra.

A p fixpont aszimptotikusan stabilis, ha stabilis és $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, p) = p$.

A p pont instabilis, ha nem stabilis.

Ezen fogalmak szemléltetésére nézzünk néhány példát egydimenziós fázistér esetén.

8.1. Példa Adott $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $f(x) = ax$, $x_0 = p$. Ha $a = 2$, azaz $f(x) = 2x$, akkor $\varphi(n, p) = 2^n p$, amely végtelenhez tart $n \rightarrow \infty$ esetén. Így a rendszer fixpontja, a 0 pont instabilis.

Ha $a = -1$, azaz $f(x) = -x$, akkor $\varphi(n, p) = (-1)^n p$, így minden pont pályája 2 pontból áll (mivel $x_{n+2} = x_n$). Az ilyen pályákat 2-periodikus pályáknak fogjuk nevezni. Ekkor a rendszer fixpontja, a 0 pont stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis.

Ha $a = 1/2$, azaz $f(x) = x/2$, akkor $\varphi(n, p) = (1/2)^n p$, azaz minden pont pályája nullához tart $n \rightarrow \infty$ esetén. Ekkor a rendszer fixpontja, a 0 pont aszimptotikusan stabilis.

Általánosan megfogalmazva, az $f(x) = a \cdot x$ leképezéssel definiált dinamikai rendszernek az $x = 0$ pont fixpontja. Ez aszimptotikusan stabil, ha $|a| < 1$, ugyanis $\varphi(n, p) = a^n \cdot p \rightarrow 0$, ha $|a| < 1$. A nulla pont instabilis, ha $|a| > 1$, és stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis, ha $|a| = 1$.

Szintén a folytonos idejű rendszerekhez hasonlóan a fixpont stabilitását linearizálással lehet eldönteni a hiperbolikus esetben. Ezt fogalmazzuk meg egydimenziós fázistérű rendszerre az alábbi tételben.

8.3. Tétel Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, és legyen az $x_{n+1} = f(x_n)$ rekurzióval definiált diszkrét dinamikai rendszer fixpontja p , azaz $f(p) = p$. Ha $|f'(p)| < 1$, akkor p aszimptotikusan stabilis, ha pedig $|f'(p)| > 1$, akkor p instabilis.

Bizonyítás. Mivel $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p)$, azért van olyan $\varepsilon > 0$ és $a < 1$, hogy bármely $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ esetén $|\frac{f(x) - f(p)}{x - p}| < a$, azaz $|f(x) - f(p)| < a \cdot |x - p|$, vagyis $|f(x) - p| < a \cdot |x - p|$. Így $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ esetén $f(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, és $|f^2(x) - f^2(p)| < a \cdot |f(x) - f(p)| < a^2 \cdot |x - p|$. A gondolatmenetet folytatva, indukcióval azt kapjuk, hogy

$$|f^k(x) - f^k(p)| < a^k \cdot |x - p| \rightarrow 0,$$

ha $k \rightarrow \infty$. Ez pedig azt jelenti, hogy a fixpont közeléből induló megoldások nem távolodnak el tőle, és a fixponthoz tartanak, ha k végtelenhez tart, azaz a fixpont aszimptotikusan stabilis. Az instabilitás az $|f'(p)| > 1$ esetben hasonlóan igazolható. [QED]

8.4. Definíció Egy $p \in M$ pontot periodikus pontnak nevezünk, ha van olyan $k > 1$, hogy $f^k(p) = p$, és p nem fixpont. A legkisebb ilyen $k > 1$ a p pont periódusa. A p pont pályája a $\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$ pontthalmaz, ezt k -periodikus pályának nevezzük.

Vegyük észre, hogy $f^k(p) = p$ azt jelenti, hogy p fixpontja az f^k leképezésnek. Ezen észrevétel alapján definiáljuk a periodikus pálya stabilitását.

8.5. Definíció A p pontból induló k -periodikus pálya (aszimptotikusan) stabilis, ha p (aszimptotikusan) stabilis fixpontja az f^k leképezésnek. Hasonlóan definiáljuk a periodikus pálya instabilitását.

A fenti tétel szerint a periodikus pálya stabilitásvizsgálatához az $(f^k)'$ leképezés sajátértékeit kell meghatároznunk. Vegyük észre, hogy $(f^2)'(p) = f'(f(p))f'(p)$ az összetett függvény deriválási szabálya

szerint. Hasonlóan kapjuk, hogy $(f^3)'(p) = f'(f^2(p)) \cdot f'(f(p)) \cdot f'(p)$. Egy k -periodikus pálya pontjaira bevezetve a $p_1 = p, p_2 = f(p_1), \dots, p_k = f^{k-1}(p_1)$ jelölést, indukcióval azt kapjuk, hogy

$$(f^k)'(p) = f'(p_k) \cdot f'(p_{k-1}) \cdot \dots \cdot f'(p_1).$$

Így a fenti tételből az alábbi következik a periodikus pálya stabilitására.

8.6. Tétel Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, és legyen az $x_{n+1} = f(x_n)$ rekurzióval definiált diszkrét dinamikai rendszer k -periodikus pontja p , azaz $f^k(p) = p$. A $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, k -periodikus pálya aszimptotikusan stabilis, ha $|f'(p_1) \cdot \dots \cdot f'(p_k)| < 1$.

8.1.1. 8.1.1 A logisztikus leképezés

A fent bevezetett fogalmakat érdemes megvizsgálni a logisztikus leképezés példáján. Ezenkívül ez a leképezés a kaotikus pálya fogalmához is elvezet majd bennünket.

A logisztikus leképezés az $f(x) = ax(1-x)$ függvény, amelyet a $[0, 1]$ intervallumon fogunk vizsgálni. Ezért az $a \in \mathbb{R}$ paraméterről mindig feltesszük, hogy $0 < a \leq 4$, akkor ugyanis a leképezés a $[0, 1]$ intervallumot önmagába képezi.

A leképezés fixpontjai, az $ax(1-x) = x$ egyenlet megoldásai: 0 és $1 - \frac{1}{a}$. Ez utóbbi természetesen csak $a > 1$ esetén van a vizsgált intervallumban.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy az $a \in [0, 4]$ paramétert változtatva, hogyan változik a pályák viselkedése.

Határozzuk meg ehhez először a fixpontok stabilitását. A leképezés deriváltja $f'(x) = a - 2ax$, így $f'(0) = a$, és $f'(\frac{1}{a}) = 2 - a$. A fixpont stabilitását az $|f'(p)| < 1$ feltétel biztosítja, ezért $0 < a < 1$ esetén a 0 pont aszimptotikusan stabilis, és $1 < a < 3$ esetén az $\frac{1}{a}$ pont aszimptotikusan stabilis. Igazolható, hogy ezek ilyenkor globálisan is aszimptotikusan stabilisak a $[0, 1]$ intervallumra vonatkozóan.

8.1. Állítás

1. Ha $0 < a < 1$, akkor bármely $x_0 \in [0, 1]$ kezdeti pontból induló pálya a 0 ponthoz tart, azaz az $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ sorozatra $x_n \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$.
2. Ha $1 < a < 3$, akkor bármely $x_0 \in (0, 1)$ kezdeti pontból induló pálya az $1 - \frac{1}{a}$ ponthoz tart, azaz az $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ sorozatra $x_n \rightarrow 1 - \frac{1}{a}$, amint $n \rightarrow \infty$.

Természetes kérdés, hogy a értékét tovább növelve, azaz $a > 3$ esetén hogyan alakul a sorozat aszimptotikus viselkedése. Numerikus kísérletek azt mutatják, hogy ekkor 2-periodikus pálya jelenik meg, és ez veszi át a vonzást. Számítsuk ki a 2-periodikus pályát. Ennek pontjait x_0 és x_1 -gyel jelölve, fennállnak az $x_1 = ax_0(1-x_0)$ és $x_0 = ax_1(1-x_1)$ egyenletek, azaz

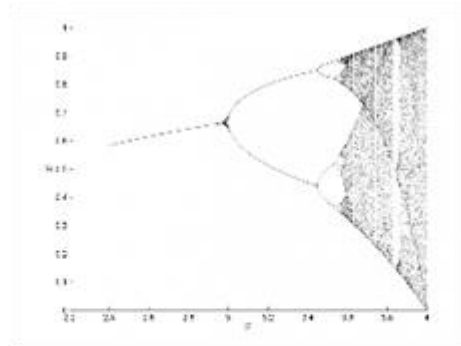
$$x_0 = a^2 x_0 (1-x_0)(1-ax_0(1-x_0)).$$

Egyszerűen látható, hogy ezen negyedfokú egyenletnek megoldása az $x_0 = 0$ és $x_0 = \frac{1}{a}$, hiszen a fixpontok is 2-periodikusak. Ezen gyökökre vonatkozó gyöktényezőket kiemelve egy másodfokú egyenlethez jutunk, melynek x_1 és x_2 megoldásai egyszerűen kiszámolhatók. Azt kapjuk, hogy ezek pontosan akkor valósak, ha $a > 3$, azaz a 2-periodikus megoldások pontosan akkor születnek meg, amikor az $x_0 = \frac{1}{a}$ fixpont elveszíti a stabilitását. Határozzuk meg a 2-periodikus pálya stabilitását. Ehhez az $|f'(x_1)f'(x_2)| < 1$ feltételnek kell teljesülnie, amelyről elemi, de fáradságos számolással kiderül, hogy a $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ feltétellel ekvivalens. Ezzel tehát a következőt igazoltuk.

8.2. Állítás

1. Ha $a > 3$, akkor létezik 2-periodikus pálya, azaz léteznek olyan $x_0, x_1 \in [0, 1]$ számok, amelyek teljesítik az $x_1 = ax_0(1 - x_0)$ és $x_0 = ax_1(1 - x_1)$ egyenleteket.
2. Ha $3 < a < 1 + \sqrt{6}$, akkor a 2-periodikus pálya aszimptotikusan stabilis.

Természetes kérdés, hogy a értékét tovább növelve, azaz $a > 1 + \sqrt{6}$ esetén hogyan alakul a sorozat aszimptotikus viselkedése. Numerikus kísérletek azt mutatják, hogy ekkor 4-periodikus pálya jelenik meg, és ez veszi át a vonzást. Ez már explicit módon nem számítható ki, de numerikus vizsgálat során azt tapasztaljuk, hogy ez az a paraméternek csak egy szűk tartományában stabilis, és amikor stabilitását elveszíti, akkor 8-periodikus pálya jelenik meg, amely szintén hamar elveszíti a stabilitását, és megjelenik a 16-periodikus pálya, és így tovább. Ezt a jelenséget nevezik perióduskettőződésnek. Ez tulajdonképpen bifurkációk sorozata, amelyet a 76. Ábrával lehet szemléltetni. Ezen a vízszintes tengely mentén változik az a értéke, a függőleges tengelyen pedig az adott a értékhez tartozó aszimptotikus viselkedést ábrázoljuk. Ez aszimptotikusan stabil fixpont esetén egyetlen pont, aszimptotikusan stabilis periodikus pálya esetén a periodikus pálya pontjaiból álló halmaz. Az ábrát természetesen csak numerikusan lehet elkészíteni, a rekurzió kellően sokszori alkalmazásával.



76. ábra. Perióduskettőződés a logisztikus leképezésnél. Az aszimptotikus viselkedés változása az a paraméter függvényében.

Jelölje a_n az a paraméter azon értékét, amelynél először jelenik meg a 2^n -periodikus pálya. Tehát $a_1 = 3$, $a_2 = 1 + \sqrt{6}$, ... Ezek értékét explicit módon nem lehet kiszámítani, de a numerikus számítások azt mutatják, hogy az a_k sorozatnak van határértéke, és $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \approx 3.569946$. Bár a sorozat határértékére nincs elméleti képlet, a tagok relatív változására Feigenbaum 1975-ben az alábbi szép összefüggést kapta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4,669201609 \dots$$

Ez azért fontos, mert a perióduskettőződés más leképezéseknél, például az $f(x) = a - x^2$, vagy $f(x) = a \sin x$ függvény esetében ugyanígy játszódik le, és az a_n sorozatot hasonló módon bevezetve, a fenti határérték mindig ugyanaz a szám, melyet Feigenbaum-számnak neveznek.

8.1.2. 8.1.2 Kaotikus sorozatok

A káosz fogalmának részletes tárgya meghaladja ezen jegyzet kereteit, ugyanis számos különböző káosz definíció van, melyekben azonban közös, hogy az alábbi két fontos elemet tartalmazzák.

- Érzékeny függés a kezdeti feltételtől egy korlátos halmazban.
- Aperiodikusság.

Ebben a szakaszban bevezetünk egy kaotikusság definíciót diszkrét idejű dinamikai rendszerek pályáira, majd megmutatjuk, hogy vannak olyan leképezések, melyeknek van kaotikus pályája, sőt a pályáik nagyrésze ilyen. A

fogalmakat az egyszerűség kedvéért egydimenziós fázistér esetében fogalmazzuk meg, természetesen ezek n -dimenziós fázistérben ugyanígy definiálhatók.

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és tekintsük az

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

rekurzióval definiált diszkrét idejű dinamikai rendszert. Defináljuk először a káosz egyik fontos jellemzőjét, a kezdeti feltételtől való érzékeny függés fogalmát.

8.7. Definíció Egy $p \in \mathbb{R}$ pontban a megoldás érzékenyen függ a kezdeti feltételtől, ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $q \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}$, melyre $|f^k(q) - f^k(p)| \geq \delta$, azaz a q és p pontokból induló pályák legalább ennyire eltávolodnak egymástól.

Megjegyezzük, hogy erre triviális példa egy instabil lineáris rendszer, hiszen az $f(x) = 2x$ függvény esetében $f^k(q) = 2^k q$, így a pályák exponenciálisan távolodnak egymástól. A kezdeti feltételtől való érzékeny függés akkor igazán érdekes, ha a p pályája korlátos.

A pályák eltávolodásának mértékét lokálisan egy pont környezetében a függvény deriváltja méri, mivel

$$f(q) - f(p) = f'(p)(q - p) + o(q - p).$$

Így amennyiben $|f'(p)| < 1$, akkor a p körül a leképezés lokálisan kontraktív (a pályák közelednek egymáshoz), ha pedig $|f'(p)| > 1$, akkor a p körül a leképezés lokálisan expanzív (a pályák távolodnak egymástól). Egy p pont pályáját követve, az $f^k(p)$ pontban a k értékétől függően a leképezés lehet kontraktív, vagy expanzív. Egy pálya mentén ezt átlagolva kapjuk meg, hogy a p pont környezetében a pálya érzékenyen függ-e a kezdeti feltételtől. Ennek mérésére szolgál a Ljapunov-szám (illetve a Ljapunov-exponens/kitevő).

8.8. Definíció Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Egy $p \in \mathbb{R}$ ponthoz tartozó Ljapunov-szám:

$$L(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(p)| \cdot |f'(f(p))| \cdot \dots \cdot |f'(f^{n-1}(p))|)^{\frac{1}{n}}.$$

A p ponthoz tartozó Ljapunov-exponens pedig ennek logaritmus $h(p) = \ln L(p)$, azaz

$$h(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot [\ln |f'(p)| + \ln |f'(f(p))| + \dots + \ln |f'(f^{n-1}(p))|].$$

Ha $L(p) > 1$, vagy másképp fogalmazva $h(p) > 0$, akkor a p pontban a megoldás érzékenyen függ a kezdeti feltételtől.

Térjünk rá most a káosz másik jellemzőjének, az aperiodikusságnak a meghatározására.

8.9. Definíció Egy $p \in \mathbb{R}$ pont aszimptotikusan periodikus, ha van olyan q periodikus pont, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(n, p) - \varphi(n, q)| = 0$$

(azaz, ha a p pontból induló pálya egy periodikus pályához tart).

Ezen fogalmak segítségével definiálhatjuk a kaotikus pálya fogalmát.

8.10. Definíció Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Egy $p \in \mathbb{R}$ pont pályáját (valójában csak a pozitív fél-pályát) kaotikusnak nevezzük, ha

1. korlátos,

2. nem aszimptotikusan periodikus,
3. $h(p) > 0$, azaz érzékeny a kezdeti feltételekre.

Bár a kaotikusság fogalma egyszerűen megfogalmazható, annak igazolása, hogy egy leképezés valamely pályája kaotikus, távolról sem ilyen egyszerű. A logisztikus leképezés pályáinak numerikus vizsgálata azt mutatta, hogy vannak kaotikus pályák az a paraméter 4-hez közeli értékeinél, azonban ennek közvetlen bizonyítása nehézségekbe ütközik. A továbbiakban bevezetünk egy másik leképezést, a sátorleképezést, amelyben bizonyos pályák kaotikusságát a szimbolikus dinamika segítségével be tudjuk bizonyítani, majd megmutatjuk, hogy ez a leképezés konjugált a logisztikus leképezéssel $a = 4$ esetén, így ez utóbbinak is vannak kaotikus pályái.

A $T(x) = 1 - |2x - 1|$ leképezést sátor leképezésnek nevezik. A függvény a $[0, 1]$ intervallumot önmagába képezi, ezt tekintjük fázistérnek. Nézzük meg, hogy teljesülhetnek-e a kaotikusság definíciójában tett feltételek. Mivel a T leképezés nem vezet ki a $[0, 1]$ intervallumból, azért a pályák (pozitív k esetén) korlátosak. A Ljapunov-exponens kiszámításához a pályának el kell kerülnie az $1/2$ pontot, mivel ott a T függvény nem differenciálható. Ezért az olyan p pontoktól eltekintve, melyekből a pálya bejut az $1/2$ pontba, minden p esetén $|T'(p)| = 2$, így $h(p) = \ln 2 > 0$. Tehát egy pálya akkor kaotikus, ha nem aszimptotikusan periodikus. A következő szakaszban a szimbolikus dinamika segítségével igazolni fogjuk, hogy megszámlálhatóan sok pont kivételével a pontok nem aszimptotikusan periodikusak, amelyből következik az alábbi.

8.3. Állítás A $T(x) = 1 - |2x - 1|$ sátorleképezésnek létezik végtelen sok kaotikus pályája.

A logisztikus leképezés esetében a Ljapunov-exponens kiszámítása nehézséget okozna, ezért célszerű inkább a sátorleképezéssel való konjugáltságot igazolni. Tekintsük a $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$H(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

homeomorfizmust. Megmutatjuk, hogy erre teljesül a $H(T(x)) = f(H(x))$ összefüggés, ahol f a logisztikus leképezés. Ugyanis egyrészt

$$f(H(x)) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin^2(\pi x),$$

másképpen $x \in [0, 1/2)$ esetén $T(x) = 2x$, így

$$H(T(x)) = \sin^2\left(\frac{\pi 2x}{2}\right) = \sin^2(\pi x).$$

Ha pedig $x \in (1/2, 1]$, akkor $T(x) = 2 - 2x$, és ez esetben is egyszerűen látszik, hogy $H(T(x)) = \sin^2(\pi x)$.

A H homeomorfizmus tehát a sátorleképezés kaotikus pályáit a logisztikus leképezés pályáira képezi, ez bizonyítja az alábbi.

8.4. Állítás A logisztikus leképezésnek létezik végtelen sok kaotikus pályája.

8.1.3. Szimbolikus dinamika

A szimbolikus dinamikát csak a sátorleképezés példáján mutatjuk be, bár egy általánosabb leképezés osztály esetében hasonlóan definiálható. Legyen tehát $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $T(x) = 1 - |2x - 1|$ a sátorleképezés. Legyen

$$\Lambda = \{x \in [0, 1] : T^n(x) \neq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

azon pontok halmaza, amelyekből induló pálya nem lép soha az $1/2$ pontba. A továbbiakban ezen a halmazon fogjuk tekinteni a Φ leképezést. A $I_L = (0, 1/2)$ intervallumot egy baloldali és jobboldali részre osztjuk, jelölje ezeket

Legyen Σ az L és R elemekből álló sorozatok halmaza $\Sigma = \{a : \mathbb{N} \rightarrow \{L, R\}\}$, azaz ha $a \in \Sigma$, akkor $a = (a_0 a_1 a_2 \dots)$, ahol $a_i = L$ vagy $a_i = R \forall i$ esetén. Vezessük be a $\Phi : \Lambda \rightarrow \Sigma$

$$(\Phi(x))_n = \begin{cases} L & \text{ha } f^n(x) \in I_L \\ R & \text{ha } f^n(x) \in I_R \end{cases}$$

leképezést. Azaz a $(\Phi(x))$ sorozat n -edik tagja L , ha az x pontból induló pálya n lépés után az intervallum bal felén van, és a $(\Phi(x))$ sorozat n -edik tagja R , ha az x pontból induló pálya n lépés után az intervallum jobb felén van. A Φ leképezés a $\Lambda \subset [0, 1]$ halmaz pontjaihoz L, R sorozatokat rendel. A 0 ponthoz például az $L, L, L, \dots$ sorozat tartozik, mert a 0 pont fixpont, azaz a belőle induló pálya mindig az intervallum bal oldalán van. Hasonlóképpen a $2/3$ fixponthoz az $R, R, R, \dots$ sorozat tartozik, mert az ebből induló pálya mindig az intervallum jobb oldalán van. Az 1 pontból induló pálya egy lépés után a 0 fixpontba lép, ezért az 1 számhoz tartozó sorozat $R, L, L, L, \dots$. A Φ leképezés fontos tulajdonsága, hogy bijekció a Λ pontjai és az L, R sorozatok között. Ezt fogjuk most igazolni.

8.5. Állítás A $\Phi : \Lambda \rightarrow \Sigma$ leképezés injektív, azaz különböző pontokhoz különböző sorozat tartozik.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$. Meg kell mutatnunk, hogy $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Ha x és y az intervallum ugyanazon oldalán van, akkor $|f(x) - f(y)| = 2|x - y|$, mert a sátorleképezés meredeksége 2 , vagy -2 . Indirekt módon tegyük fel, hogy $\Phi(x) = \Phi(y)$. Ekkor $f^n(x)$ és $f^n(y)$ ugyanabban a komponensben vannak minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Így $|f^2(x) - f^2(y)| = 2|f(x) - f(y)| = 2^2|x - y|$. Indukcióval megmutatható, hogy $|f^n(x) - f^n(y)| = 2^n|x - y|$, így $|f^n(x) - f^n(y)| \rightarrow \infty$, ami ellentmond annak, hogy a pályák korlátosak. [QED]

8.6. Állítás A $\Phi : \Lambda \rightarrow \Sigma$ leképezés szürjektív, azaz bármely L, R sorozathoz megadható egy pont a Λ halmazban, amelyhez ez a sorozat tartozik.

Bizonyítás. Vegyünk egy $x \in \Lambda$ pontot és tekintsük a hozzátartozó sorozat első néhány tagját, legyen ez például L, R, L . Az első L azt jelenti, hogy $x \in [0, 1/2)$, a második betű R , pedig azt mutatja, hogy ezen az intervallumon belül $x \in (1/4, 1/2)$. Mivel a harmadik betű L , azért $x \in (3/8, 1/2)$. A sorozat minden egyes tagja felére zsugorítja azt az intervallumot, ahol x elhelyezkedhet, így a Cantor-féle közöspont tétel szerint van egyetlen olyan pont, amelyhez a sorozat tartozik. [QED]

A fázisterünk pontjait megfeleltettük tehát L, R sorozatoknak, most pedig a sorozatok halmazan definiálunk egy dinamikát, amely a sátorleképezéssel konjugált lesz.

8.7. Állítás Legyen $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, a $\sigma(a_0 a_1 a_2 \dots) = (a_1 a_2 a_3 \dots)$ képlettel definiált eltolás. Ekkor $\Phi \circ T = \sigma \circ \Phi$, azaz T és σ konjugáltak.

Bizonyítás. Legyen $\Phi(x) = (a_0 a_1 a_2 \dots)$, ekkor $x \in I_{a_0}$, $T(x) \in I_{a_1}$, $T^2(x) \in I_{a_2}, \dots$. Ez azt jelenti, hogy $\Phi(T(x)) = (a_1 a_2 \dots)$, mert $T(x) \in I_{a_1}$, $T^2(x) = T(T(x)) \in I_{a_2}, \dots$. Így $\sigma(\Phi(x)) = (a_1 a_2 \dots) = \Phi(T(x))$, amit igazolni akartunk. [QED]

8.11. Következmény Az $a \in \Sigma$ pontosan akkor k -periodikus pontja a σ leképezésnek, ha $x = \Phi^{-1}(a) \in \Lambda_k$ -periodikus pontja a T leképezésnek.

Ez a következmény azért nagyon fontos, mert a σ leképezés periodikus pontjait nagyon egyszerű meghatározni, míg a T leképezésnél ez komoly nehézségekbe ütközhet. Például az $L, R, L, R, L, R, \dots$ a σ leképezés 2 -periodikus pontja, hiszen ezt a sorozatot eggyel eltolva az $R, L, R, L, R, \dots$ sorozatot kapjuk, amelyet még

eggyel eltolva visszkapjuk az eredeti sorozatot. Ha 3-periodikus pontot akarunk előállítani, akkor a következő lehetőségeink vannak: ismételni kell az alábbi hármasokat

$$LLR, LRL, RLL, \quad \text{illetve} \quad RRL, RLR, LRR.$$

Ezen példák alapján világos az alábbi állítás.

8.8. Állítás Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén a σ leképezésnek véges sok k -periodikus pontja van, és konjugáltságuk miatt ugyanez mondható el a T sátorleképezésről is.

A kaotikusság igazolásához a T leképezés aszimptotikusan periodikus pontjait kell vizsgálni. Ehhez vegyük észre, hogy a T leképezés minden periodikus pályája instabil, ugyanis a T deriváltjának abszolútértéke mindig nagyobb egynél ($|T'| = 2$). Ezért egy p pont csak úgy lehet aszimptotikusan periodikus, ha maga is periodikus, vagy a belőle induló pálya véges sok lépésben rákerül egy periodikus pályára, azaz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $f^n(p)$ periodikus. Az ilyen pontokat végül-periodikus pontoknak nevezzük. A konjugáltság miatt egy $x \in \Lambda$ pont pontosan akkor végül-periodikus pontja a T leképezésnek, ha $\Phi(x)$ végül-periodikus pontja a σ leképezésnek. A σ leképezés esetében a végül-periodikus pontokat egyszerű generálni, hiszen a periodikus sorozat elejére el kell helyezni egy tetszőleges véges sorozatot. Például az $L, L, L, L, R, L, R, L, R, \dots$ sorozat végül-2-periodikus, hiszen három eltolás után a periodikus $L, R, L, R, L, R, \dots$ sorozatot kapjuk belőle. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy végül- k -periodikus sorozatból megszámlálhatóan sok lehet, így végül-periodikus sorozatból is megszámlálható sok van. Ezzel tehát az alábbi állításhoz jutottunk.

8.9. Állítás A sátorleképezésnek megszámlálhatóan sok aszimptotikusan periodikus pontja van.

Ennek alapján az előző szakaszban leírtak szerint az alábbi áll fenn.

8.12. Tétel A sátorleképezés, illetve az $a = 4$ paraméterhez tartozó logisztikus leképezés esetében megszámlálhatóan sok pont kivételével bármely pontból kiindulva kaotikus pályát kapunk.

9. 9 Reakció-diffúzió egyenletek

A reakció-diffúzió egyenletek matematikailag szemilineáris parabolikus parciális differenciálegyenletek, melyek általános alakja

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u), \quad (79)$$

ahol $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ az ismeretlen függvény, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható függvény és D pozitív elemű diagonális mátrix (az idő szerinti parciális deriválást, illetve a tér szerinti Laplace-operátort koordinátáinként alkalmazzuk az u függvényre). Az egyenlethez különböző peremfeltételek tartozhatnak, utazó hullámok vizsgálata esetén például az egyenletet a teljes $\mathbb{R}^n$ téren tekintik, ekkor a peremfeltételek u korlátosságára vagy végtelenbeli határértékére vonatkoznak. Korlátos tartomány esetén mindhárom típusú szokásos peremfeltétel előfordul a vizsgálatokban. A peremfeltétel mellett természetesen az $u(\cdot, 0)$ kezdeti függvény megadása is szükséges. Az egyenlet neve a kémiai alkalmazásból származik, ez esetben $u_k(t, x)$ a k -adik ($k = 1, 2, \dots, m$) anyag koncentrációját jelenti a t időpontban és az x helyen, továbbá a jobboldal első tagja fejezi ki a diffúziót, a második pedig a kémiai reakciókat. Az egyenlet azonban számos más fizikai, biológiai, közgazdasági jelenség modellje is lehet a járványterjedéstől az ingerület vezetésen át a mintázat képződésig.

A reakció-diffúzió egyenletek kutatása az alkalmazásokon kívül a dinamikai rendszerek elméletéből nőtt ki, ugyanis az $U(t) = u(\cdot, t)$ függvényt bevezetve a (79) egyenlet az

$$\dot{U}(t) = AU(t) + F(U(t)) \quad (80)$$

absztrakt Cauchy-feladatként írható fel. Kézenfekvő tehát megvizsgálni, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó eredmények mennyiben általánosíthatók a (80) végtelen dimenziós

feladatra. Ismert, hogy a közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásai dinamikai rendszert határoznak meg. A (80) egyenlet esetében ennek bizonyítása azért sokkal nehezebb feladat, mert a jobboldalon szereplő A operátor nem korlátos. Az ötvenes évektől kezdődően kifejlesztett operátor félcsoport elmélet segítségével kidolgozták a (80) Cauchy-feladatra vonatkozó egzisztencia elméletet, melyről például Henry, Pazy illetve Cazenave és Haraux könyvében olvashatunk [4, 11 és 15]. A dinamikai rendszer létezésének bizonyításával megkezdődhetett a kvalitatív tulajdonságok tanulmányozása. Ez magában foglalja a stacionárius, periodikus, kaotikus, illetve utazó hullám megoldások létezésének, pontos számának, valamint stabilitásának vizsgálatát. A speciális típusú megoldásokon kívül fontos kérdés a megoldások aszimptotikus (hosszú idő utáni) viselkedése, valamint az attraktorok létezésének kérdése, és vonzási tartományaik meghatározása, melyet általánosan tárgyal Robinson könyve [18].

Reakció-diffúzió egyenletekkel kapcsolatosan számos eredmény ismert, ezek önmagukban is meghaladják egy tankönyv kereteit, ebben a jegyzetben csak ízelítőt adunk két speciális témából, az egydimenziós térbeli stacionárius és utazó hullám megoldások vizsgálatából.

9.1. 9.1 Reakció-diffúzió egyenletek stacionárius megoldásai

Ebben a fejezetben az egy reakció-diffúzió egyenletre ($m = 1$) vonatkozó, stacionárius megoldások számával kapcsolatos elemi eredményeket ismertetjük. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sima határu tartomány, számunkra ez csak egy intervallum lesz, és tekintsük a

$$\Delta u + f(u) = 0$$

szemilineáris elliptikus egyenletet azonosan nulla Dirichlet peremfeltétel, azaz $u|_{\partial\Omega} = 0$ mellett. Vizsgálatunk tárgya a pozitív megoldások száma. A kérdésfelvetés ilyen formában nagyon általános, az irodalomban több ezer publikáció található ezzel kapcsolatosan, melyek különböző tartományok és különböző nemlinearitások esetén tárgyalják a kérdést. Mi csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor Ω egy intervallum, amelyről az egyenlet autonóm volta miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a nulla pontra szimmetrikus, tehát legyen $\Omega = (-R, R)$, valamely pozitív R esetén. A továbbiakban tehát az

$$u''(x) + f(u(x)) = 0 \tag{81}$$

$$u(-R) = u(R) = 0 \tag{82}$$

peremérték-problémát vizsgáljuk. A pozitív megoldásokról egyszerűen igazolható, hogy páros függvények (azaz $u(-x) = u(x)$), ezért a feladat az alábbi peremérték-feladatra redukálódik.

$$u''(x) + f(u(x)) = 0 \tag{83}$$

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \tag{84}$$

Célunk tehát ezen feladat pozitív megoldásainak pontos számát meghatározni.

Ehhez az ú.n. célbalövéses, vagy "time-map" módszert fogjuk alkalmazni. A módszer lényege, hogy a (83) differenciálegyenletet először a (84) peremfeltétel helyett az

$$u(0) = c, \quad u'(0) = 0 \tag{85}$$

kezdeti feltétellel tekintjük valamilyen $c > 0$ esetén. Az egzisztencia és unicitás tétel szerint a fenti kezdeti feltétel mellett létezik egyetlen $u(\cdot, c)$ megoldás bármely $c > 0$ esetén. Ezután a peremérték-probléma megoldását az ú.n. célbalövéses módszerrel keressük (shooting), azaz a c értékét változtatjuk mindaddig, amíg olyan megoldást kapunk, amelynek első gyöke a R pontban van. Ehhez definiáljuk az alábbi leképezést (time-map).

$$T(c) = \min\{r > 0 : u(r, c) = 0\} ; \quad D(T) = \{c > 0 : \exists r > 0 \ u(r, c) = 0\}. \quad (86)$$

A (83)-(84) peremérték-probléma pozitív megoldásainak száma tehát egyenlő a $T(c) = R$ egyenlet c -re kapott megoldásainak számával.

Vegyük észre, hogy ebben az egyszerű esetben a másodrendű egyenletnek megfelelő elsőrendű rendszerhez könnyen megadható egy első integrál, nevezetesen

$$H(x) := u'(x)^2 + 2F(u(x)), \quad (87)$$

ahol $F(u) := \int_0^u f$. Deriválással azonnal ellenőrizhető, hogy $H' = 0$, azaz a H függvény konstans. A (85) kezdeti feltétel szerint ez a konstans $2F(c)$, így minden $x \in [0, T(c)]$ esetén fennáll az

$$u'(x)^2 + 2F(u(x)) = 2F(c)$$

azonosság. Mivel pozitív megoldást keresünk, amely az intervallum végpontjában nulla, azért egyszerűen látható, hogy $u' < 0$, így a fenti egyenletből

$$u'(x) = -\sqrt{2F(c) - 2F(u(x))}.$$

Ebből integrálás után az

$$\int_0^{T(c)} \frac{u'(x)}{\sqrt{2F(c) - 2F(u(x))}} dx = -T(c)$$

egyenlethez jutunk. Hajtsuk végre az integrálban az $s = u(x)$ helyettesítést. Ekkor

$$T(c) = \int_0^c \frac{1}{\sqrt{2F(c) - 2F(s)}} ds,$$

majd a $t = s/c$ új integrációs változót bevezetve

$$T(c) = \int_0^1 \frac{c}{\sqrt{2F(c) - 2F(ct)}} dt. \quad (88)$$

Ez a formula lehetőséget ad különböző f függvények esetén a $T(c) = R$ egyenlet megoldásai számának meghatározására. Ezt az alábbi példán fogjuk bemutatni.

9.1. Példa Határozzuk meg, hogy az

$$u''(x) + u(x)(1 - u(x)) = 0 \quad (89)$$

$$u(-R) = u(R) = 0. \quad (90)$$

peremérték-feladatnak hány pozitív megoldása van az R különböző értékeire. Amint az előbb láttuk, ehhez elegendő azt megmondani, hogy a $T(c) = R$ egyenletnek hány megoldása van. Írjuk fel ehhez a T függvényt a jelen esetre, azaz, amikor $f(u) = u(1 - u)$. Ekkor $F(u) = u^2/2 - u^3/3$, így a (88) képletből (c -vel való egyszerűsítés után)

$$T(c) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2 - \frac{2c}{3}(1-t^3)}} dt.$$

Egyszerűen látható, hogy T a $[0, 1)$ intervallumon van értelmezve, és azon szigorúan növekvő (hiszen a változó (c) a nevezőben negatív előjellel szerepel), továbbá

$$T(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Az integrál elemi becsléséből azt is láthatjuk, hogy $\lim_{c \rightarrow 1} T(c) = \infty$. Ezek alapján T értékkészlete a $[\pi/2, \infty)$ intervallum, és abban minden értéket pontosan egy helyen vesz fel. Tehát a $T(c) = R$ egyenletnek, és így ezzel együtt a (89)-(90) peremérték-feladatnak egy pozitív megoldása van, ha $R \geq \pi/2$, és nincs pozitív megoldása, ha $R < \pi/2$.

9.2. 9.2 Reakció-diffúzió egyenletek utazó hullám megoldásai

Ebben a szakaszban a térbeli tartomány továbbra is egydimenziós ($n = 1$), viszont nem korlátos. Tekintsük tehát a

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + f(u), \quad (91)$$

reakció-diffúzió egyenletet, melyben $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény.

Az egyenlet $u(t, x) = U(x - ct)$ alakú megoldását, melyben $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, c sebességgel haladó utazó hullám megoldásnak nevezzük. Az U függvény teljesíti az alábbi közönséges differenciálegyenletet:

$$U''(y) + cU'(y) + f(U(y)) = 0, \quad (y = x - ct). \quad (92)$$

Ehhez a másodrendű egyenlethez természetes módon peremfeltételek is tartoznak. Adott $U_-, U_+ \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\lim_{-\infty} U = U_-, \quad \lim_{+\infty} U = U_+$$

peremfeltételhez tartozó utazó-hullámot frontnak nevezzük, amennyiben $U_- \neq U_+$, valamint pulzusnak nevezzük, ha $U_- = U_+$. Ha az U függvény periodikus, akkor a "wave train" elnevezést használják.

9.2.1. 9.2.1 Utazó hullámok létezése

Az utazó hullám létezésének igazolásához meg kell mutatni, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ sebesség, amelyhez a (92) egyenletnek van az előírt peremfeltételt kielégítő megoldása. Az ilyen típusú bizonyítások prototípusát ismertetjük röviden az alábbiakban. Tekintsük az

$$U''(y) + cU'(y) + f(U(y)) = 0 \quad (93)$$

egyenletet a

$$\lim_{-\infty} U = 1, \quad \lim_{+\infty} U = 0 \quad (94)$$

peremfeltétellel. Az $f(u) = u(1-u)$ nemlinearitással az egyenletet Kolmogorov, Petrovskij és Piszkunov vizsgálták először, ebben az esetben gyakran KPP-egyenletként hivatkoznak rá. Másik fontos nemlinearitás a FitzHugh-Nagumo (FHN) egyenletből származó, valamely $c \in (0, 1)$ esetén. Ezek részletes ismertetése megtalálható Fife könyvében [8]. Az utazó hullám létezése szempontjából a két eset lényegesen eltér egymástól. Írjuk át ugyanis a (93) másodrendű egyenletet elsőrendű rendszerre:

$$U' = V \quad (95)$$

$$V' = -f(U) - cV \quad (96)$$

Ennek a rendszernek egyensúlyi pontja a $(0, 0)$ és az $(1, 0)$ pont. A peremfeltételekből megmutatható, hogy az U' függvénynek $\pm\infty$ -ben 0 a határértéke, ezért az utazó hullámnak a (95)-(96) elsőrendű rendszerben a $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontokat összekötő heteroklinikus pálya felel meg. A KPP-egyenlet esetében ha $c > 0$, akkor az egyik egyensúlyi pont stabil csomó, a másik pedig nyereg és a nyeregből kiinduló pálya (instabil sokaság) a stabil csomóba fut be. Azaz bármely $c > 0$ esetén van utazó hullám megoldás. Könnyen igazolható, hogy ez a megoldás $c > 2$ esetén pozitív, különben előjelet vált. Igazolható, hogy a végtelen sok utazó hullám megoldás közül csak a $c = 2$ sebességhez tartozó stabilis. A FitzHugh-Nagumo típusú nemlinearitás esetében mindkét egyensúlyi pont nyereg, az ezeket összekötő pálya nem tipikus. Valóban megmutatható, hogy csak egyetlen olyan c érték létezik, amely mellett van a két nyeregpontot összekötő pálya, azaz utazó hullám megoldás.

Adott f függvény esetében viszonylag egyszerű fázissík analízissel kaphatunk feltételeket utazó hullám létezésére. Fife az alábbi általános állítást bizonyítja ([8] 4.15. Tétel)

9.1. Tétel Legyen $f \in C^1(0, 1)$ függvény, melyre $f(0) = f(1) = 0$.

- Ha $f > 0$ a $(0, 1)$ intervallumban, akkor létezik olyan c^* , melyre $c > c^*$ esetén létezik a (93) egyenletnek a (94) peremfeltételt kielégítő pozitív utazó hullám megoldása.
- Ha van olyan $a \in (0, 1)$, melyre $f < 0$ a $(0, a)$ intervallumban és $f > 0$ az $(a, 1)$ intervallumban, akkor létezik egyetlen olyan c érték, melyre a (93) egyenletnek létezik a (94) peremfeltételt kielégítő pozitív utazó hullám megoldása.

Tehát az állandó előjelű, KPP-típusú nemlinearitás esetén végtelen sok c érték mellett létezik utazó hullám megoldás, míg az egy előjelváltással rendelkező, FHN-típusú nemlinearitás esetében, csak egyetlen c értéknél van utazó hullám.

9.2.2. 9.2.2 Utazó hullámok stabilitása

Az utazó-hullámra vonatkozó (92) egyenlet autonóm, ezért, ha U egy megoldás, akkor ennek minden vízszintes eltolója is az, azaz $U^*(y) = U(y + y_0)$ is megoldása a (92) egyenletnek tetszőleges $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért az utazó hullám stabilitását pálya stabilitásként célszerű definiálni (a periodikus pálya stabilitásához hasonlóan). Ebben az esetben a pályamenti aszimptotikus stabilitást szokták stabilitásnak nevezni.

9.2. Definíció Az U utazó hullám stabilis, ha a (91) rendszer u megoldására, melyre $|u(0, x) - U(x)|$ elegendően kicsi minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, van olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amellyel $t \rightarrow \infty$ esetén

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - U(x_0 + x - ct)| \rightarrow 0.$$

Esetünkben a (92) típusú szemilineáris parabolikus egyenletre a maximum elvből levezethető egy összehasonlítási tétel, amelynek segítségével stabilitási tételek igazolhatók [8]. Ebben az esetben nemcsak a fenti definícióbeli lokális stabilitás igazolható, hanem az utazó hullám vonzási tartományára is adható becslés. A KPP-egyenletre vonatkozóan bebizonyították [8], hogy ha az $u(0, \cdot)$ kezdeti függvény ugró függvény, azaz negatív x esetén 1, pozitív x esetén 0 az értéke, akkor létezik olyan ψ függvény, amelyre $t \rightarrow \infty$ esetén

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - U(\psi(t) + x - c^*t)| \rightarrow 0 \quad (97)$$

és $\psi'(t) \rightarrow 0$, ahol c^* a 2. Tételben adott minimális sebesség. Az FHN-típusú, előjelváltó nemlinearitás esetében az alábbi, [8] könyvben található tétel igaz.

9.3. Tétel Legyen $f \in C^1(0, 1)$ olyan függvény, melyre $f(0) = f(1) = 0$, és van olyan $a \in (0, 1)$, melyre $f < 0$ a $(0, a)$ intervallumban és $f > 0$ az $(a, 1)$ intervallumban. Ekkor az egyetlen utazó hullám stabilis.

Az utazó hullám lokális stabilitását linearizálással lehet eldönteni. Ehhez helyettesítsük be a (91) egyenletbe az $u(t, x) = U(x - ct) + v(t, x - ct)$ függvényt. Az $f(U + v)$ helyére beírva az $f(U) + f'(U)v$ lineáris közelítést, valamint felhasználva a U függvényre vonatkozó (92) egyenletet a v függvényre az alábbi lineáris parabolikus egyenletet kapjuk.

$$\partial_t v = \partial_{yy} v + c \partial_y v + f'(U(y))v. \quad (98)$$

Ekkor a következő két kérdés merül fel.

- Milyen feltételek mellett lesz a (98) egyenlet azonosan nulla megoldása stabilis?
- Következik-e ebből az utazó hullám stabilitása?

Az első kérdésre választ kaphatunk, ha a (98) lineáris egyenlet megoldását $v(t, y) = \exp(\lambda t)V(y)$ alakban keressük. Ekkor a V függvényre a

$$V''(y) + cV'(y) + f'(U(y))V(y) = \lambda V(y) \quad (99)$$

egyenletet kapjuk. A fenti alakú v megoldások $\operatorname{Re} \lambda < 0$ esetén tartanak nullához $t \rightarrow +\infty$ mellett. Ezért várható, hogy a (98) lineáris egyenlet nulla megoldásának stabilitását az

$$(LV)(y) = V''(y) + cV'(y) + f'(U(y))V(y), \quad (100)$$

$BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ térben értelmezett másodrendű differenciáloperátor spektruma határozza meg. Fontos észrevennünk, hogy a 0 sajátértéke az operátornak az U' sajátfüggvénnyel. (Ez egyszerűen következik a (92) egyenlet differenciálásából.) Ez a tény egyébként összhangban van azzal, hogy az utazó hullám megoldás minden vízszintes eltoltsa szintén utazó hullám. Így tehát, amint az utazó hullám a hagyományos értelemben nem lehet aszimptotikusan stabilis (csak pályamenti stabilitás várható), úgy a linearizálással kapott L operátor spektruma sem lehet teljes egészében a komplex sík baloldali részén, a 0 mindig sajátérték. A fent feltett kérdésekre végülis az alábbi tétel ad választ ([21] 25. Fejezet).

9.4. Tétel Ha 0 egyszeres sajátértéke az L operátornak, a többi sajátértékekre $\operatorname{Re} \lambda < 0$, és van olyan $\beta < 0$, melyre $\operatorname{Re} \lambda < \beta$ minden $\lambda \in \sigma_{ess}(L)$ esetén, akkor az U utazó hullám stabilis.

Esetünkben a lényeges spektrumot az alábbi értelemben használjuk

$$\sigma_{ess}(L) := \{\lambda \in \sigma(L) \mid \lambda \text{ nem izolált sajátérték véges multiplicitással}\}.$$

9.2.2.1. 9.2.2.1 A linearizálással kapott operátor spektruma

Ebben a szakaszban a $BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ téren értelmezett

$$(LV)(y) = V''(y) + cV'(y) + Q(y)V(y), \quad (101)$$

operátor spektrumát vizsgáljuk. Ezt az operátort az utazó hullám körüli linearizálással kaptuk, akkor $Q^\pm = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} Q(y)$. Most csak annyit teszünk fel a függvényről, hogy folytonos, és a határértékek léteznek.

Az operátor spektrumát általában nem lehet explicit módon meghatározni csak abban az esetben, amikor az operátor állandó együtthatós, azaz Q konstans függvény. Az alábbi példában ezt kiszámítjuk, ugyanis ez a speciális eset a későbbi vizsgálatok szempontjából hasznos lesz.

9.2. Példa Legyenek $c, q \in \mathbb{R}$ adott számok és tekintsük az alábbi állandó együtthatós operátort

$$LV = V'' + cV' + qV.$$

A $\lambda \in \mathbb{C}$ szám reguláris értéke az L operátornak, ha a

$$V'' + cV' + (q - \lambda)V = W \quad (102)$$

egyenletnek létezik pontosan egy, W -től folytonosan függő $V \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ megoldása bármely $W \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ esetén. A homogén egyenlet (melyben $W = 0$) megoldásait a

$$V(y) = c_1 \exp(\mu_1 y) + c_2 \exp(\mu_2 y)$$

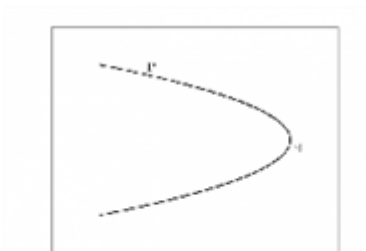
képlet adja, melyben $\mu_{1,2}$ a $\mu^2 + c\mu + q - \lambda = 0$ egyenlet megoldásai. A fenti V függvényre $V \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pontosan akkor, ha $\operatorname{Re} \mu_{1,2} = 0$, ami akkor teljesül, ha

$$\operatorname{Re} \lambda = q - \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c} \right)^2.$$

Ezen egyenletet kielégítő λ komplex számok tehát az L operátor spektrumában vannak. Az inhomogén egyenlet ($W \neq 0$) a konstans variációs formula segítségével oldható meg. Igazolható, hogy a fenti egyenletet nem teljesítő λ számokra a (102) egyenletnek létezik pontosan egy, W -től folytonosan függő $V \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ megoldása bármely $W \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ esetén, azaz ekkor λ reguláris érték. Tehát az L operátor spektruma a

$$\sigma(L) = \sigma_{\text{ess}}(L) = P := \{ \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 = q - \left(\frac{\lambda_2}{c} \right)^2 \}.$$

parabola, amely a 77. ábrán látható. Ha $c = 0$, akkor a spektrum a $H = \{ \lambda_1 < q \}$ félegyenes.



77. ábra. Az $LV = V'' + cV' + qV$ operátor spektruma.

9.2.2.2. 9.2.2.2 A spektrum jellemzése az invariáns alterekkel

Térjünk vissza az általános (101) operátor spektrumának vizsgálatára. Célszerű bevezetni az $LV = \lambda V$ másodrendű egyenlethez tartozó elsőrendű rendszert. Legyen $X = \begin{pmatrix} V \\ V' \end{pmatrix}$, ekkor az elsőrendű rendszer

$$X'(y) = A_\lambda X(y), \quad (103)$$

ahol

$$A_\lambda(y) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \lambda I - Q(y) & -c \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Mivel a Q függvénynek van határértéke $\pm\infty$ -ben, azért léteznek az

$$A_\lambda^\pm = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} A_\lambda(y)$$

határértékek is. Az $A_\lambda^\pm$ mátrixok stabil, instabil és centrális alterének dimenziója fontos szerepet fog játszani. Jelölje az A_λ^+ mátrix pozitív, negatív, illetve nulla valósrésztű sajátértékeinek számát (multiplicitással számítva) $n_u^+(\lambda)$, $n_s^+(\lambda)$ és $n_c^+(\lambda)$. Hasonlóan definiáljuk az $n_u^-(\lambda)$, $n_s^-(\lambda)$, $n_c^-(\lambda)$ számokat az A_λ^- mátrixra. Ezek a számok tehát a megfelelő instabil, stabil és centrális alterek dimenziói.

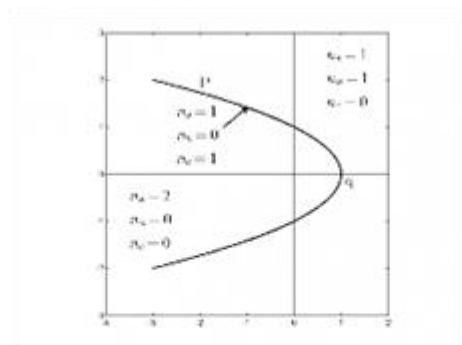
Az 9.2. Példában szereplő operátor esetében érdemes megvizsgálni, hogy milyen kapcsolatban vannak ezek a dimenziók az operátor spektrumával. Ekkor $LV = V'' + cV' + qV$, így

$$A_\lambda^+ = A_\lambda^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - q & -c \end{pmatrix}.$$

Ezen mátrix karakterisztikus egyenlete $\mu^2 + c\mu + q - \lambda = 0$. Könnyen igazolható, hogy $c > 0$ esetén fennállnak az alábbiak.

- Ha $\operatorname{Re} \lambda < q - \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2$, akkor $\operatorname{Re} \mu_1 < 0$, $\operatorname{Re} \mu_2 < 0$, ezért $n_s^\pm(\lambda) = 2$, $n_u^\pm(\lambda) = 0$, $n_c^\pm(\lambda) = 0$.
- Ha $\operatorname{Re} \lambda = q - \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2$, akkor $\operatorname{Re} \mu_1 = 0$, $\operatorname{Re} \mu_2 < 0$, ezért $n_s^\pm(\lambda) = 1$, $n_u^\pm(\lambda) = 0$, $n_c^\pm(\lambda) = 1$.
- Ha $\operatorname{Re} \lambda > q - \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2$, akkor $\operatorname{Re} \mu_1 > 0$, $\operatorname{Re} \mu_2 < 0$, ezért $n_s^\pm(\lambda) = 1$, $n_u^\pm(\lambda) = 1$, $n_c^\pm(\lambda) = 0$.

Az egyes invariáns alterek dimenzióját a 78. ábrán összegeztük.



78. ábra. Az állandó együtthatós $LV = V'' + cV' + qV$ operátorhoz tartozó invariáns alterek dimenziója.

A 9.2. Példában láttuk, hogy az operátor spektruma a 78. ábrán látható parabola, tehát az állandó együtthatós esetben a spektrum azon számokból áll, melyekre $n_c^+(\lambda) > 0$. A következő tétel szerint ezek a számok az általános (nem állandó együtthatós) esetben is a spektrumhoz tartoznak, azonban ekkor olyan számok is benne lehetnek e spektrumban, melyekre $n_c^+(\lambda) = 0$.

9.5. Tétel Tegyük fel, hogy az alábbi feltételek közül legalább az egyik teljesül:

1. $n_c^+(\lambda) > 0$ és $\int_0^{+\infty} |A_\lambda(y) - A_\lambda^+| < \infty$
2. $n_c^-(\lambda) > 0$ és $\int_{-\infty}^0 |A_\lambda(y) - A_\lambda^-| < \infty$.

Ekkor $\lambda \in \sigma(L)$.

A tételt a [20] cikkben igazoltuk, a bizonyítás egy a nem-autonóm lineáris egyenletek aszimptotikus viselkedését leíró tételen alapul.

A továbbiakban tehát elég az $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$ esettel foglalkozni. Ebben az esetben exponenciális dichotómiák és perturbációs tételek segítségével az alábbi tétel igazolható, [7].

9.6. Tétel Tegyük fel, hogy $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$.

- Létezik olyan $n_s^+(\lambda)$ dimenziós $E_s^+(\lambda) \subset \mathbb{C}^2$ altér, amelyből indítva a (103) rendszer megoldásait, azok végtelenben nullához tartanak.
- Létezik olyan $n_u^-(\lambda)$ dimenziós $E_u^-(\lambda) \subset \mathbb{C}^2$ altér, amelyből indítva a (103) rendszer megoldásait, azok $-\infty$ -ben nullához tartanak.

Ha egy nem nulla kezdeti feltétel benne van az $E_s^+(\lambda)$ és az $E_u^-(\lambda)$ altérben is, akkor az abból induló megoldás $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben is nullához tart, így λ sajátérték, ha $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) > 0$. Exponenciális dichotómiák segítségével az alábbi tételt igazoltuk [20].

9.7. Tétel Tegyük fel, hogy $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$.

1. A λ szám pontosan akkor sajátértéke az L operátornak, ha $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) > 0$.
2. A λ szám pontosan akkor reguláris értéke az L operátornak, ha $E_s^+(\lambda) \oplus E_u^-(\lambda) = \mathbb{C}^2$.

Felhasználva, hogy $E_s^+(\lambda) \oplus E_u^-(\lambda) = \mathbb{C}^2$ ekvivalens a $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) = 2$ és $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) = 0$ feltételekkel, egyszerűen adódik az alábbi következmény.

9.8. Következmény Tegyük fel, hogy $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$.

1. Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) > 2$, akkor λ sajátértéke az L operátornak.
2. Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) < 2$, akkor $\lambda \in \sigma(L)$.
3. Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) = 2$ és $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) = 0$, akkor λ reguláris értéke az L operátornak.
4. Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) = 2$ és $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) > 0$, akkor λ sajátértéke az L operátornak.

9.2.2.3. 9.2.2.3 Az utazó hullám stabilitása

Tekintsük ismét az $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre vonatkozó

$$U'' + cU' + f(U) = 0 \quad (105)$$

$$U(-\infty) = U_-, \quad U(+\infty) = U_+, \quad (106)$$

utazó hullám egyenletet, ahol $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $U_-, U_+ \in \mathbb{R}$, és tegyük fel hogy $c \geq 0$ (ez U_- és U_+ felcserélésével elérhető). Az U stabilitását meghatározó, linearizálással kapott operátor

$$L(V) = V'' + cV' + f'(U)V. \quad (107)$$

A $q(y) = f'(U(y))$ függvény folytonos, és $\pm\infty$ -ben van határértéke:

$$q^+ = f'(U_+), \quad q^- = f'(U_-). \quad (108)$$

Ha az U függvény $\pm\infty$ -ben exponenciálisan tart az U_+ és U_- határértékekhez, (ami általában teljesül), akkor a 2. Tételben szereplő integrálok konvergensek. Az $A_\lambda^\pm$ mátrixok esetünkben 2×2 méretűek, és a $\mu^{1,2}$ sajátértékeket meghatározó karakterisztikus egyenletük

$$\mu^2 + c\mu + q^\pm - \lambda = 0. \quad (109)$$

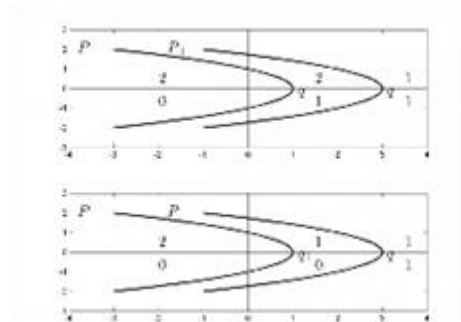
Az operátor lényeges spektrumának meghatározásához szükség van azon λ értékekre, melyekre $n_c^+(\lambda) \geq 1$ és $n_c^-(\lambda) \geq 1$. Ha $n_c^+(\lambda) \geq 1$, akkor $\mu = i\omega$ megoldása a (109) egyenletnek. Ezt behelyettesítve a (109) egyenletbe kapjuk, hogy azon λ értékek, melyekre $n_c^+(\lambda) \geq 1$, a

$$\mathcal{P}^+ = \left\{ \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 = q^+ - \left(\frac{\lambda_2}{c} \right)^2 \right\} \quad (110)$$

parabolán helyezkednek el. Könnyen látható, hogy a parabola bal oldalán $\dim E_s^+(\lambda) = 2$, a jobb oldalán pedig $\dim E_s^+(\lambda) = 1$, ezt tüntettük fel a 79. ábrán. Hasonlóan, azon λ értékek, melyekre $n_c^-(\lambda) \geq 1$ a

$$\mathcal{P}^- = \left\{ \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 = q^- - \left(\frac{\lambda_2}{c} \right)^2 \right\}. \quad (111)$$

parabolán helyezkednek el. Könnyen látható, hogy a parabola bal oldalán $\dim E_u^-(\lambda) = 0$, a jobb oldalán pedig $\dim E_u^-(\lambda) = 1$, szintén a 79. ábra szerint.



A (107) függvény-együtthatós operátor spektruma. A $\mathcal{P}^+$ és $\mathcal{P}^-$ parabolákat a (110), (111) képletek határozzák meg. A felső számok az $E_s^+(\lambda)$ altér dimenzióját, az alsó számok pedig az $E_u^-(\lambda)$ altér dimenzióját mutatják.

A 2. Tételt, illetve a 4. Következmenyt felhasználva az L operátor spektrumára az alábbi tételt kapjuk.

9.9. Tétel

- A $\mathcal{P}^+$ és $\mathcal{P}^-$ parabolák, valamint a közöttük levő tartomány alkotja az L operátor lényeges spektrumát. Ha $q^+ < q^-$, akkor a parabolák közötti tartomány minden pontja sajátérték (lásd 79a. ábra), ha viszont $q^+ > q^-$, akkor egyik sem az (lásd 79b. ábra).
- A paraboláktól balra fekvő tartomány minden pontja az L operátor reguláris értéke.
- A paraboláktól jobbra fekvő tartomány minden pontja az L operátornak vagy reguláris értéke vagy izolált sajátértéke.

Esetünkben azt is el lehet dönteni analitikusan (numerikus közelítés nélkül), hogy a jobboldali komplex félsíkban vannak-e izolált sajátértékek. (Az izolált sajátértékeket azonban csak numerikusan lehet kiszámítani.)

Legyen λ izolált sajátérték a V sajátfüggvénnyel. Ekkor igazolható, hogy a $w(x) = V(x) \exp(cx/2)$ függvényre $w \in L^2(\mathbb{R})$ és

$$\lim_{\pm\infty} w = \lim_{\pm\infty} w' = 0. \quad (112)$$

Differenciálás után pedig azt kapjuk, hogy

$$w'' + (q(x) - \frac{c^2}{4})w = \lambda w. \quad (113)$$

Ezt az egyenletet megszorozva w konjugáltjával, majd integrálva $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (q(x) - \frac{c^2}{4})|w(x)|^2 - |w'(x)|^2 dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |w(x)|^2 dx \quad (114)$$

egyenletet kapjuk. Ezek alapján a következő Állításokat tudjuk igazolni.

9.1. Állítás Az L operátor izolált sajátértékei valósak, kisebbek a $\max |q| - c^2/4$ számnál, és mindegyikhez egydimenziós sajátaltér tartozik.

Bizonyítás. A (114) egyenletben minden integrál valós, ezért λ is valós. Feltehető, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} |w(x)|^2 dx = 1$, ezért ismét a (114) egyenletből $\lambda < \max |q| - c^2/4$. Legyenek V_1 és V_2 a λ sajátértékhez tartozó sajátfüggvények. Megmutatjuk, hogy ezek egymás konstansszorosai. Legyenek $w_i(x) = V_i(x) \exp(cx/2)$, $i = 1, 2$. Felhasználva a w függvényekre vonatkozó (113) egyenletet

$$(w_1'w_2 - w_1w_2')' = w_1''w_2 - w_1w_2'' = 0.$$

Ezért a $w_1'w_2 - w_1w_2'$ függvény konstans. A (112) peremfeltételek miatt $w_1'w_2 - w_1w_2' = 0$, így egy olyan szakaszon, melyen w_2 nem tűnik el azt kapjuk, hogy $(w_1/w_2)' = 0$, azaz w_1/w_2 konstans függvény. A (113) egyenlet megoldásának egyértelmősége miatt w_1 és w_2 egymás konstansszorosai, így ez a V_1 és V_2 függvényekre is igaz. [QED]

9.2. Állítás Legyenek λ_1 és λ_2 az L operátor izolált sajátértékei a V_1 és V_2 sajátfüggvénnyel.

- Legyenek y_1 és y_2 a V_2 egymást követő gyökei. Ha V_1 nem nulla a zárt $[y_1, y_2]$ intervallumban, akkor $\lambda_1 > \lambda_2$.
- Ha sem V_1 sem V_2 nem vált előjelet (egész $\mathbb{R}$ -ben), akkor $\lambda_1 = \lambda_2$ és a V_1 és V_2 függvények egymás konstansszorosai.

Bizonyítás. Vezessük be ismét a $w_i(x) = V_i(x) \exp(cx/2)$, $i = 1, 2$ függvényeket, amelyek kielégítik a (113) egyenletet. Szorozzuk meg a w_1 függvényre vonatkozó egyenletet w_2 -vel, a w_2 függvényre vonatkozó egyenletet w_1 -gyel, majd ezeket vonjuk ki egymásból. Ekkor az alábbi egyenlethez jutunk

$$w_1'' w_2 - w_1 w_2'' = (\lambda_1 - \lambda_2) w_1 w_2.$$

Integráljuk ezt az egyenletet y_1 -től y_2 -ig. Parciális integrálás után, felhasználva, hogy $w_2(y_1) = w_2(y_2) = 0$ kapjuk a

$$w_2'(y_1)w_1(y_1) - w_2'(y_2)w_1(y_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{y_1}^{y_2} w_1 w_2 \quad (115)$$

összefüggést. Feltehető, hogy az (y_1, y_2) intervallumon a w_1 és w_2 függvény is pozitív, az előbbiről azt is tudjuk, hogy az intervallum végpontjaiban is pozitív. Mivel a w_2 függvény a két gyök között pozitív, azért $w_2'(y_1) > 0$ és $w_2'(y_2) < 0$. (A szigorú egyenlőtlenség a megoldás egyértelműségéből következik, hiszen ha például $w_2'(y_1) = 0$ lenne, akkor $w_2(y_1) = 0$ miatt a w_2 a konstans nulla függvény lenne.) A (115) bal oldala tehát pozitív. Mivel a jobb oldalon az integrál pozitív, azért $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, amit bizonyítani akartunk.

A második rész igazolásához is a (115) összefüggést használjuk, ezúttal $y_1 = -\infty$, $y_2 = +\infty$ a szereposztás. Ekkor (115) bal oldala nulla, így mivel a jobb oldali integrál nem nulla, azért $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. A 9.1. Állítás szerint ezen λ_1 sajátértékhez tartozó sajátaltér egydimenziós, tehát a V_1 és V_2 függvények egymás konstansszorosai. [QED]

9.3. Állítás Az L operátor legnagyobb izolált sajátértékéhez tartozó sajátfüggvénynek nincs gyöke, azaz feltehető, hogy pozitív.

Bizonyítás. Vezessük be az

$$I(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(q(x) - \frac{c^2}{4} \right) w(x)^2 - w'(x)^2 dx, \quad w \in L^2(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |w(x)|^2 = 1$$

funkcionált. Igazolható, hogy az L operátor legnagyobb izolált sajátértéke az I funkcionál maximuma. Tegyük fel, hogy a w függvénynek van gyöke. Ekkor legyen $\tilde{w}$ egy olyan függvény, amely a gyök egy környezetén kívül megegyezik a w függvénnyel, egy szűkebb környezetben viszont azonosan nulla. Igazolható, hogy a környezetet elegendően kicsire választva $I(\tilde{w}) > I(w)$. Ezért, ha w a legnagyobb izolált sajátértékhez tartozik, akkor ez adja I maximumát, így nem lehet gyöke. [QED]

Emlékeztetünk arra, hogy a nulla az L operátornak sajátértéke az U' sajátfüggvénnyel, amint ez (105) deriválásból azonnal következik. Ha U' előjelet vált, akkor a 9.3. Állítás szerint nem 0 a maximális sajátérték, azaz az L operátornak van pozitív izolált sajátértéke. Ha viszont U' nem vált előjelet, akkor a 2. Állítás szerint a 0 egyszeres sajátérték, és a tőle lineárisan független sajátfüggvények előjelet váltanak, így az azokhoz tartozó sajátértékek negatívak. Ezzel tehát az L operátor izolált sajátértékeiről a következő állítást igazoltuk.

9.10. Tétel

- Ha U' előjelet vált, akkor az L operátornak van pozitív sajátértéke.
- Ha U' nem vált előjelet, akkor az L operátornak a 0 egyszeres sajátértéke, a többi izolált sajátérték pedig negatív.

Tehát linearizálás segítségével a 9.4., 3. és 2. Tételek alapján az utazó hullám stabilitásáról az alábbi tételt kapjuk.

9.11. Tétel Ha az U függvény szigorúan monoton, és teljesül $f'(U_-) < 0$ valamint $f'(U_+) < 0$, akkor az utazó hullám stabilis. Ha az U függvény nem monoton, akkor az utazó hullám instabilis.

Bizonyítás. Mivel az U függvény szigorúan monoton, azért U' nem vált előjelet, így a 2. Tétel szerint az L operátornak a 0 egyszeres sajátértéke, a többi izolált sajátérték pedig negatív. A 3. Tételben szereplő, lényeges spektrumot meghatározó parabolák a negatív felsíkban fekszenek $f'(U_-) < 0$ és $f'(U_+) < 0$ miatt (ezek a

számok adják a parabolák valós tengellyel való metszéspontjait). Tehát teljesül az L operátor spektrumára a 9.4. Tételben szereplő feltétel, így az utazó hullám stabilis.

Ha az U függvény nem monoton, akkor U' előjelet vált, így a 2. Tétel szerint az L operátornak van pozitív sajátértéke. [QED]

Végül vizsgáljuk meg mit ad stabilitási tételünk a KPP-típusú állandó előjelű, és az FHN-típusú, azaz előjelváltó f esetében.

Az FHN esetben (mint például $f(u) = u(1-u)(u-a)$) láttuk, hogy az utazó hullám a megfelelő elsőrendű rendszerben két nyeregpontra összekötő pályához tartozik, és csak egyetlen c érték esetében létezik. A fázissík vizsgálatával egyszerűen belátható, hogy ezen pálya mentén U' állandó előjelű, azaz U szigorúan monoton. Esetünkben $U_- = 1$ és $U_+ = 0$, így teljesül az $f'(U_-) < 0$ és $f'(U_+) < 0$ feltétel. A 9.11. Tétel szerint tehát az FHN esetben az egyetlen utazó hullám megoldás stabilis.

A KPP esetben, amikor $f(u) = u(1-u)$, láttuk, hogy az utazó hullám a megfelelő elsőrendű rendszerben $c > 0$ esetén létezik, és ekkor egy nyeregpontról egy stabil csomópontba, vagy fókuszpontra befutó pályához tartozik. Ha $0 < c < 2$, akkor a pálya stabil fókuszpontra fut be, így a pálya mentén U nem monoton, tehát az utazó hullám megoldás instabilis. Ha $c \geq 2$, akkor a pálya stabil csomópontba fut be, és a pálya mentén U' állandó előjelű. Azonban ebben az esetben $U_- = 1$ és $U_+ = 0$, így $f'(U_-) < 0$ és $f'(U_+) > 0$, tehát a 9.11. Tétel nem alkalmazható a stabilitás vizsgálatára. Amint kiderül, lásd Fife könyvében [8] a 4.5 szakaszban, az utazó hullám a 9.2. Definíció értelmében nem stabilis, azonban a minimális sebességhez tartozó hullám a (97) egyenletben definiált értelemben stabilis.

10. Hivatkozások

- [1] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A., Chaos, an introduction to dynamical systems, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [2] Arnold, V.I., Közönséges differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [3] Carr, J., Applications of center manifold theory, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [4] Cazenave, T., Haraux, A., An introduction to semilinear evolution equations, Oxford UP, 1998.
- [5] Chicone, C., Ordinary differential equations with applications, Springer, New York, 2006.
- [6] Chow, S-N., Hale, J.K., Methods of bifurcation theory, Springer, New York, 1982.
- [7] Coppel, W.A., Dichotomies in stability theory, Lect. Notes Math. 629, Springer, 1978.
- [8] Fife, P.C., Lecture notes in biomathematics, Springer, 1979.
- [9] Guckenheimer, J., Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [10] Hale, J., Kocak, H., Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [11] Henry, D., Geometric theory of semilinear parabolic equations, Springer, 1981.
- [12] Hirsch, M.W., Smale, S., Devaney, R.L., Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos, Elsevier, Academic Press, San Diego, 2004.
- [13] Hubbard, J.H., West, B.H., Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Springer, New York, 1995.
- [14] Kuznetsov, Y.A., Elements of applied bifurcation theory, Springer, New York, 1995.

- [15] Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, New York, 1983.
- [16] Perko, L., Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, New York, 2008.
- [17] Robinson, C. , Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos, RCR Press, Boca Raton, 1999.
- [18] Robinson, J.C., Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors, Cambridge UP, 2001.
- [19] Seydel, R. Practical bifurcation and stability analysis, From equilibrium to chaos, Springer, New York, 1994.
- [20] Simon, P.L., On the structure of spectra of travelling waves, Electr.J. Qual. Theor. Diff. Eqns. 15 (2003), 1-19.
- [21] Smoller, J.A., Shock waves and reaction diffusion equations, Springer, 1994.
- [22] Tóth, J., Simon, P.L., Differenciálegyenletek; Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba, Typotex, Budapest, 2009.
- [23] Wiggins, S., Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, Springer, New York, 1990.